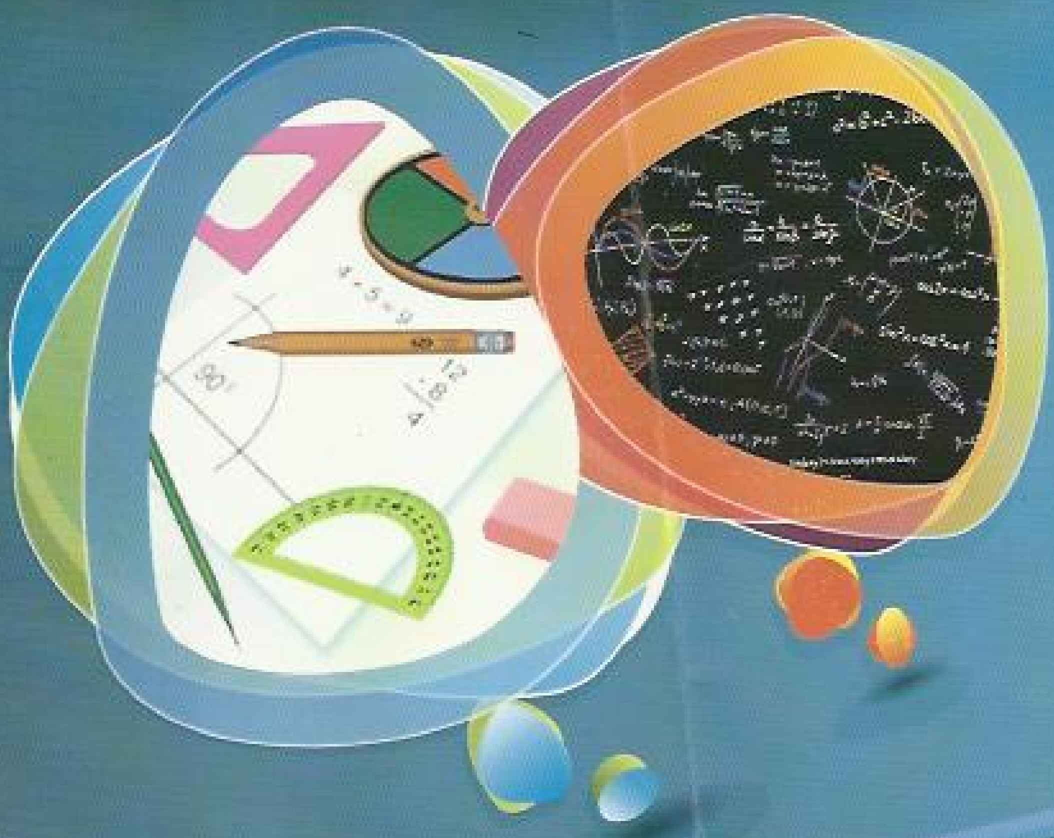
مكتب الاستشارات والتدريب
Consultation & Training Office



جامعة الكويت

# المفاهيم والتطبيقات الأساسية

# لمادة الرياضيات



**مكتب الاستشارات والتدريب**

**كلية العلوم - جامعة الكويت**

**٢٠١١ - ٢٠١٢**

# المحتوى

# الفصل الأول

# الأعداد الحقيقية

# الأعداد الحقيقية

## (١ - ١) مقدمة عن الأعداد الحقيقية

إن معظم المفاهيم الأساسية في علم التفاضل والتكامل تعتمد على الأعداد الحقيقية حيث يتم التعامل مع دوال ذات متغيرات حقيقية.

ولإعطاء فكرة عن الأعداد الحقيقية نورد فيما يلي بعض أنواعها:

١ - الأعداد الصحيحة

وهي عناصر المجموعة التالية والتي تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة

ص = { ...، -٣، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ... }

وإذا اقتصرنا على الأعداد الصحيحة الموجبة فإننا نحصل على مجموعة العد التالية :

ط = { ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ... }

٢- الأعداد النسبية

وهي الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{\text{ب}}{\text{ج}}$

حيث ب، ج عددان صحيحان ، ج $\neq$ ٠

مثال

الأعداد التالية هي أعداد نسبية

$\frac{١٢}{٥}$، ٣ = $\frac{٣}{١}$ ، ٠ = $\frac{٠}{٤}$ ، $-\frac{٢}{٣}$ ، ٢,٥ = $\frac{٥}{٢}$

٣ـ الأعداد غير النسبية

وهي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة عدد نسبى

مثال

الأعداد التالية هي أعداد غير نسبية

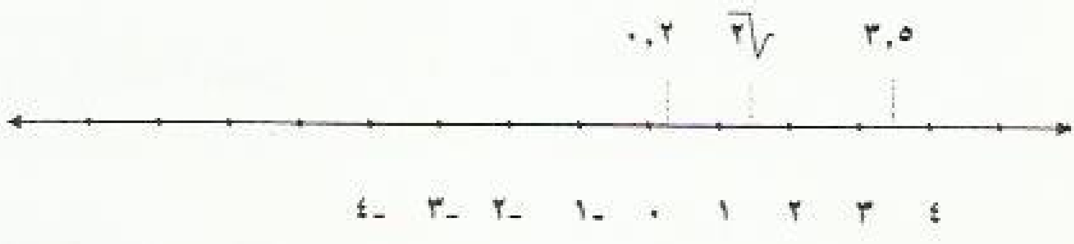
$\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٧}$ ، $\pi$

٤ ـ مجموعة الأعداد الحقيقية ح

هي المجموعة التي تتكون من جميع الأعداد النسبية وغير النسبية يمكن تمثيل الأعداد الحقيقية على خط مستقيم يسمى خط الأعداد الحقيقية بحيث يتم تمثيل كل عدد حقيقي بنقطة واحدة فقط على خط الأعداد وبالعكس فان كل نقطة على خط الأعداد تقابل عددا حقيقيا وحيدا .

جميع الأعداد الحقيقية عدا الصفر إما أن تكون سالبة أو موجبة فالأعداد التي تقابل النقاط الواقعة على يمين الصفر تكون موجبة والأعداد التي تقابل النقاط الواقعة على يسار الصفر تكون سالبة. وإذا كان لدينا عددان على خط الأعداد فإن العدد الواقع على اليسار يكون أصغر من العدد الواقع على اليمين

فمثلا $-٤ < -٣$ ، $٦ < \frac{١٧}{٢}$



## (١ - ٢) خواص الأعداد الحقيقية

لتكن أ ، ب ، ج أعدادا حقيقية فإن

١- أ + ب = ب + أ ، أ ب = ب أ

٨ + ٣ = ٣ + ٨ = ١١ ، (١٧) (٥) = (٥) (١٧) = ٨٥

٢ - (أ + ب) + ج = أ + (ب + ج) ، (أ ب) ج = أ (ب ج)

(٧ + ٥) + ٢ = ٧ + (٥ + ٢) = ١٤ ، (٥ × ٣) × ٤ = ٥ × (٣ × ٤) = ٦٠

٣ - أ (ب + ج) = أ ب + أ ج

٢٥ × (٤ + ٦) = ٢٥ × ٤ + ٢٥ × ٦ = ٢٥٠

٤- إذا كان العددان أ ، ب موجبين فإن العددين أ + ب ، أ ب موجبين أيضا

٥- إذا كان العددان أ ، ب سالبين فإن العدد أ + ب يكون سالبا والعدد أ ب يكون موجبا

٦- إذا كان العدد أ موجبا والعدد ب سالبا فإن العدد أ ب يكون سالبا

٧- إذا كان أ ب = ٠ فإما أن يكون أ = ٠ أو ب = ٠

فمثلا إذا كان ٣ ب = ٠ فإن ب = ٠

## (١ - ٣) الكسور

ليكن أ ، ب عددان حقيقيان بحيث ب ≠ ٠

نسمي العدد $\frac{أ}{ب}$ كسرا وفي هذه الحالة يسمى العدد أ بسطا ويسمى العدد ب مقاما

* $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ إذا وفقط إذا كان أ د = ب جـ

فمثلا $\frac{٧}{٣} = \frac{١٤}{٦}$ لان ٧×٦ = ٣×١٤ = ٤٢

* $\frac{أ}{ب} = \frac{أ \times جـ}{ب \times جـ}$ حيث جـ ≠ ٠

فمثلا $\frac{٢}{٣} = \frac{٢ \times ٥}{٣ \times ٥} = \frac{١٠}{١٥}$

$\frac{١٤}{١٨} = \frac{٧ \times ٢}{٩ \times ٢} = \frac{٧}{٩}$

العمليات على الكسور

| | العملية | مثال توضيحي |
|---|---|---|
| ١ | $\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{د} = \frac{أ د + ب جـ}{ب د}$ | $\frac{٥}{٤} + \frac{٢}{٣} = \frac{٥ \times ٣ + ٤ \times ٢}{٤ \times ٣} = \frac{٢٣}{١٢}$ |
| ٢ | $\frac{أ}{ب} - \frac{جـ}{د} = \frac{أ د - ب جـ}{ب د}$ | $\frac{٥}{٤} - \frac{٢}{٣} = \frac{٥ \times ٣ - ٤ \times ٢}{٤ \times ٣} = \frac{٧}{١٢}$ |
| ٣ | $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{أ جـ}{ب د}$ | $\frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٧} = \frac{٣ \times ٤}{٥ \times ٧} = \frac{١٢}{٣٥}$ |
| ٤ | $\frac{أ}{ب} \div \frac{جـ}{د} = \frac{أ د}{ب جـ}$ | $\frac{٢}{٣} \div \frac{٧}{٥} = \frac{٢ \times ٥}{٣ \times ٧} = \frac{١٠}{٢١}$ |

مثال    اكتب الكسر التالي في ابسط صورة    $\dfrac{\frac{٣}{٤}+\frac{٢}{٥}}{\frac{٢}{٣}-\frac{٣}{٥}}$

حل

$$\dfrac{\frac{٣}{٤}+\frac{٢}{٥}}{\frac{٢}{٣}-\frac{٣}{٥}} = \dfrac{\frac{١٥+٨}{٢٠}}{\frac{١٠-٩}{١٥}}$$

$$= \frac{٢٣}{٢٠} \div \frac{١}{١٥} = \frac{٢٣\times١٥}{٢٠\times١} = \frac{٦٩}{٤}$$

حل آخر    نضرب كلا من البسط والمقام بالمضاعف المشترك الأصغر للمقامات ٣، ٤، ٥

والذي يساوى ٦٠

$$\dfrac{\frac{٣}{٤}+\frac{٢}{٥}}{\frac{٢}{٣}-\frac{٣}{٥}} = \dfrac{٦٠\times\left(\frac{٣}{٤}+\frac{٢}{٥}\right)}{٦٠\times\left(\frac{٢}{٣}+\frac{٣}{٥}\right)} = \dfrac{٣\times١٥+٢\times١٢}{٢\times٢٠-٣\times١٢}$$

$$= \frac{٤٥+٢٤}{٤٠-٣٦} = \frac{٦٩}{٤}$$

## (١ - ٤)    الأسس الصحيحة

ليكن أ عددا حقيقيا وليكن ن عددا صحيحا موجبا فان

$$أ^{ن} = \underbrace{أ\times أ\times\cdots\times أ}_{\text{ن مرة}}$$

يسمى العدد أ الأساس ويسمى العدد ن الأس

أمثلة

$$(٣)^{٥} = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ = ٢٤٣$$

$$\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} = \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٢ \times ٢ \times ٢}{٣ \times ٣ \times ٣} = \frac{٨}{٢٧}$$

$$(-٥)^{٣} = (-٥)(-٥)(-٥) = -٥ \times ٥ \times ٥ = -١٢٥$$

الأسس الصفري والأس السالب

ليكن أ عددا حقيقيا لا يساوى الصفر ، وليكن ن عددا صحيحا موجبا فإن

$$\text{أ}^{٠} = ١ \quad ، \quad \text{أ}^{-\text{ن}} = \frac{١}{\text{أ}^{\text{ن}}}$$

مثال

$$(-٢٤٣)^{٠} = ١ \quad ، \quad \left(\sqrt{\frac{٥}{٩}}\right)^{٠} = ١$$

$$(٣)^{-٤} = \frac{١}{٣^{٤}} = \frac{١}{٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣} = \frac{١}{٨١}$$

قوانين الأسس الصحيحة

١ - $\text{أ}^{\text{م}}\,\text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}+\text{ن}}$

٢ - $\dfrac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{أ}^{\text{ن}}} = \text{أ}^{\text{م}-\text{ن}}$

٣ - $\left(\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = \dfrac{\text{أ}^{\text{ن}}}{\text{ب}^{\text{ن}}}$ : $\left(\dfrac{٢}{٣}\right)^{٤} = \dfrac{٢^{٤}}{٣^{٤}} = \dfrac{١٦}{٨١}$

٤ - $(\text{أ}^{\text{م}})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}\text{ن}}$ : $(٢^{٢})^{٣} = ٢^{٦} = ٦٤$

$$\left(\frac{-١}{٢٤٣}\right)^{\frac{٢}{٥}} = \left(\sqrt[٥]{\frac{-١}{٢٤٣}}\right)^{٢} = \left(\frac{-١}{٣}\right)^{٢} = \frac{١}{٩}$$

مثال

اكتب كلا مما يلي في ابسط صورة :

(أ) $\sqrt{٢٠} + \sqrt{٨٠}$ (ب) $\sqrt{\frac{١٦٢}{٤٩}}$

(ج) $\sqrt[٣]{١٦} + \sqrt[٣]{٢٥٠} - \sqrt[٣]{١٢٨}$

حل

(أ) $\sqrt{٢٠} + \sqrt{٨٠} = \sqrt{٤ \times ٥} + \sqrt{١٦ \times ٥}$

$= \sqrt{٤} \times \sqrt{٥} + \sqrt{١٦} \times \sqrt{٥}$

$= ٢\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٥} = ٦\sqrt{٥}$

(ب) $\sqrt{\frac{١٦٢}{٤٩}} = \frac{\sqrt{١٦٢}}{\sqrt{٤٩}} = \frac{\sqrt{٨١ \times ٢}}{٧} = \frac{٩\sqrt{٢}}{٧}$

(ج) $\sqrt[٣]{١٦} + \sqrt[٣]{٢٥٠} - \sqrt[٣]{١٢٨} = \sqrt[٣]{٨ \times ٢} + \sqrt[٣]{١٢٥ \times ٢} - \sqrt[٣]{٦٤ \times ٢}$

$= ٢\sqrt[٣]{٢} + ٥\sqrt[٣]{٢} - ٤\sqrt[٣]{٢} = ٣\sqrt[٣]{٢}$

**إزالة الجذر التربيعي من مقام كسر**

**الأمثلة التالية توضح طريقة إزالة الجذر $\sqrt{أ}$ من مقام كسر**

$$\frac{٣}{\sqrt{٢}} = \frac{٣ \times \sqrt{٢}}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}} = \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$$

$$\sqrt{\frac{٥}{٣}} = \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٥} \times \sqrt{٣}}{\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{١٥}}{٣}$$

ولإزالة الجذور على الصورة أ $\pm \sqrt{ب}$ أو $\sqrt{أ} \pm \sqrt{ب}$ إننا نضرب كلا من بسط ومقام الكسر في مرافق المقام

يسمى المقداران في كل زوج مما يلي مقداران مترافقان

$$أ - \sqrt{ب} \quad ، \quad أ + \sqrt{ب}$$

$$\sqrt{أ} - \sqrt{ب} \quad ، \quad \sqrt{أ} + \sqrt{ب}$$

مثال

بسط كلا مما يلي بإزالة الجذر من المقام

(أ) $\frac{٢}{\sqrt{٣} + \sqrt{٥}}$ (ب) $\frac{٣}{+\sqrt{٢}}$

حل

(أ) $$\frac{٢}{\sqrt{٣} + \sqrt{٥}} = \frac{٢}{\sqrt{٣} + \sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٣} - \sqrt{٥}}{\sqrt{٣} - \sqrt{٥}}$$

$$= \frac{٢(\sqrt{٣} - \sqrt{٥})}{٣ - ٥}$$

$$= \frac{٢(\sqrt{٣} - \sqrt{٥})}{-٢} = \sqrt{٥} - \sqrt{٣}$$

(ب) $$\frac{٣ + \sqrt{٢}}{٣ - \sqrt{٢}} = \frac{٣ + \sqrt{٢}}{٣ - \sqrt{٢}} \times \frac{٣ + \sqrt{٢}}{٣ + \sqrt{٢}}$$

$$= \frac{(٣ + \sqrt{٢})^٢}{٩ - ٢} = \frac{٩ + ٦\sqrt{٢} + ٢}{٧} = \frac{١١ + ٦\sqrt{٢}}{٧}$$

## تمارين على الفصل الأول

**بسط كلا مما يلي**

١) $\dfrac{\left(١ - \dfrac{١}{٣}\right)^{٢} - \dfrac{٣}{٩}}{\dfrac{٢}{٣} - \dfrac{٢}{٩}}$

٢) $(-٢٧)^{\frac{٢}{٣}}\,(٤)^{\frac{-٥}{٢}}$

٣) $\dfrac{\left(\dfrac{٤}{٢٥}\right)^{\frac{٣}{٢}}\left(\dfrac{٨}{٢٧}\right)^{\frac{-٢}{٣}}}{\left(\dfrac{٩}{٦٤}\right)^{\frac{١}{٢}}}$

٤) $\dfrac{\left|\dfrac{١}{٣} - \dfrac{١}{٢}\right|}{\dfrac{٧}{٦} - ١}$

٥) $\left(\dfrac{\text{أ}\ \text{ب}^{-٣}}{١٢٥\,\text{أ}^{-٨}\ \text{ب}^{٠}}\right)^{\frac{-١}{٣}}$

٦) $\left(\dfrac{١}{١٢} \div ١\dfrac{٣}{٤}\right) \div ٢\dfrac{٢}{٣}$

٧) $\left(\left(٥^{-١}\right)^{-٢}\right)^{-١}$

٨) $\left(\dfrac{\text{أ}^{-١}+\text{ب}^{-١}}{\text{أ}^{-١}}\right)^{-١}$

٩) $\left(٢^{-١} + ٣^{-١} + ٤^{-١}\right)^{-١}$

١٠) $\left|\sqrt{٨} - \sqrt{١٠}\right|$

١١) $\dfrac{\dfrac{١}{\text{س} + ١} + \dfrac{١}{\text{س}}}{\dfrac{١}{\text{س} + ١} - \dfrac{١}{\text{س}}}$

١٢) $\dfrac{(\text{س}\ \text{ص}^{-١})^{-٣}\,\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢}}{(\text{س}^{٠}\ \text{ص}^{٢})^{-٣}\,\text{س}\ \text{ص}}$

١٣) $\dfrac{٣}{٥ - ٢\sqrt{٧}}$

١٤) $\dfrac{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}}{\sqrt{٥} + \sqrt{٢}}$

١٥) $\dfrac{١٩}{٧ - \sqrt{١١}}$

١٦) $\dfrac{٢ - \sqrt{٣}}{٢ + \sqrt{٣}}$

١٧) $\dfrac{٢}{١ + \sqrt{٣}}$

١٨) $\dfrac{٤}{١ - \sqrt{٥}}$

## مسائل مختارة لاختبار القدرات عن الفصل الأول

١) $(-٢)^{٤} + (٢)^{٤} =$

(أ) صفر　　(ب) -٣٢　　(ج) ٣٢　　(د) $\frac{١}{٣٢}$

٢) $(٢٧)^{\frac{٢}{٣}} - (-٣٢)^{\frac{-٣}{٥}} =$

(أ) $\frac{٨}{٣٧}$　　(ب) $\frac{٧١}{٨}$　　(ج) $\frac{٧٣}{٨}$　　(د) $\frac{٨}{٧١}$

٣) $\frac{١}{\sqrt{٢}} - ٣\sqrt{٥٠} =$

(أ) $\frac{-٢٩\sqrt{٢}}{٢}$　　(ب) $٢٨\sqrt{٢}$　　(ج) $-١٥\sqrt{٢}$　　(د) $١٥\sqrt{٢}$

٤) $\sqrt[٤]{(-٣)^{٤}} + \sqrt[٥]{(-٧)^{٥}} =$

(أ) -١٠　　(ب) ١٠　　(ج) -٤　　(د) ٤

٥) $(\sqrt[٥]{-٣})^{٥} =$

(أ) -٣　　(ب) ٣　　(ج) ٥　　(د) ليس أيا مما ذكر

٦) $\dfrac{\frac{٢}{٥} + \frac{٣}{٤}}{\frac{٢}{٣} - \frac{٣}{٥}} =$

(أ) $\frac{٤}{٦٩}$　　(ب) $\frac{٦٩}{٤}$　　(ج) ١٠　　(د) -١٠

٧) $(\sqrt{٥} + \sqrt{٢٤})^{٢} =$

(أ) $(\sqrt{٢} - \sqrt{٣})^{٢}$　　(ب) $(\sqrt{٢} + \sqrt{٣})^{٢}$

(ج) $(\sqrt{٥} - \sqrt{٢٤})^{٢}$　　(د) $\sqrt{٢} + \sqrt{٣}$

٨) $\dfrac{١ - \sqrt{٢}}{١ + \sqrt{٢}} =$

(أ) $٣ - ٢\sqrt{٢}$　　(ب) $٣ + ٢\sqrt{٢}$　　(ج) $-٣ - ٢\sqrt{٢}$　　(د) $-٣ + ٢\sqrt{٢}$

٩) $\sqrt{٢١٦\,س^{٥}\,ص^{٣}} =$

(أ) $٦س^{٢}\,|ص|\,\sqrt{٤س\,ص}$　　(ب) $٦س^{٢}\,ص\,\sqrt{٦س\,ص}$

(ج) $٦س^{٢}\,|ص|\,\sqrt{٦س\,ص}$　　(د) $٦س\,ص^{٢}\,\sqrt{٦س\,ص}$

١٠) $\left(\dfrac{٣أ^{٢}ب}{٢}\right)\left(\dfrac{أ\,ب^{٢}}{٨}\right)^{-١} =$

(أ) $\dfrac{٨أ}{ب}$　　(ب) $\dfrac{أ}{١٢ب}$　　(ج) $\dfrac{٢٤أ}{ب}$　　(د) $\dfrac{١٢أ}{ب}$

١١) $(٨)^{\frac{١}{٣}}\ (١٦)^{\frac{٣}{٤}}\ (-٤)^{٠} =$

(أ) ٢　　(ب) ٤　　(ج) ١٦　　(د) ٣٢

١٢) $\sqrt{س^{٣}} + \dfrac{١}{س} =$

(أ) $\dfrac{س^{٢}+١}{س}$　　(ب) $\dfrac{س+١}{س}$　　(ج) $\dfrac{\sqrt{س^{٣}+١}}{س}$　　(د) $\dfrac{س|س|+١}{س}$

١٣) $\dfrac{(٢أ^{-٢}\,ب)^{-٤}\,(-٣أ\,ب)^{-٣}}{أ^{-٤}} =$

(أ) $-\dfrac{أ^{٩}}{٤٣٢ب^{٧}}$ (ب) $\dfrac{أ^{٩}}{٤٣٢ب^{٧}}$ (ج) $\dfrac{٤٣٢ب^{٧}}{أ^{٩}}$ (د) $\dfrac{١}{أ}$

١٤) $أ^{-١} - ب^{-٢} - جـ^{٠} =$

(أ) $\dfrac{أ\,ب^{٢}}{ب^{٢} + أ}$ (ب) $(أ\,ب)^{٢}$ (ج) $ب^{٢} + أ$ (د) $\dfrac{ب^{٢} - أ - أ\,ب^{٢}}{أ\,ب^{٢}}$

١٥) إذا كان $ب = ٢^{س}$ فإن $٢^{٣-س}$

(أ) $\dfrac{١}{٨\,ب}$ (ب) $٨ب^{-١}$ (ج) $\dfrac{-٨}{ب}$ (د) $\dfrac{ب}{٨}$

١٦) $\sqrt{\dfrac{ص^{٢}}{٢٥} + \dfrac{ص^{٢}}{١٦}} =$

(أ) $\dfrac{\sqrt{٤١}\,|ص|}{٢٠}$ (ب) $\dfrac{٩\,|ص|}{٢٠}$ (ج) $\dfrac{\sqrt{٤١}\,ص}{٢٠}$ (د) $\dfrac{٢\,|ص|}{٢٠}$

١٧) $٣^{٥} + ٣^{-٥} =$

(أ) ١ (ب) $\dfrac{٣^{٢٥}}{٣^{٥}+١}$ (ج) $\dfrac{٣^{٦}-١}{٣}$ (د) $\dfrac{٣^{١٠}+١}{٣^{٥}}$

١٨) إذا كان أ = ـ ٥ ، ب = ـ ٢ فإن $\dfrac{|أ - ب|}{|أ| - |ب|} =$

(أ) ١- (ب) ١ (ج) ٢- (د) ٢

١٩) إذا كان س = ٣ ، ص = ٤ فإن $\dfrac{س\,ص}{\dfrac{١}{س} + \dfrac{١}{ص}}$

(أ) $\dfrac{١٤٤}{٧}$ (ب) ١٢ (ج) $\dfrac{٧}{١٢}$ (د) $\dfrac{١٢}{٧}$

٢٠) إذا كان $س \neq ٢$ فإن $\frac{٢س^{٢} - ٨}{س + ٢} =$

(أ) س – ٤ (ب) س + ٤ (ج) $س^{٢} - ٤$ (د) ٢س – ٤

٢١) إذا كان ناتج ضرب الأعداد الصحيحة ٢ ، ٣ ، ...... ، ١٥ يساوي ل

فان ل ليس مضاعفا للعدد

(أ) ٥٧ (ب) ٦٥ (ج) ٧٢ (د) ٨٤

٢٢) إذا كان $أ ب جـ \neq ٠$ فان $\frac{أ ب + ب جـ + أ جـ}{\frac{١}{أ} + \frac{١}{ب} + \frac{١}{جـ}} =$

(أ) أ + ب + جـ (ب) أ ب جـ (ج) $\frac{١}{أ + ب + جـ}$ (د) أ ب + أ جـ + ب جـ

٢٣) إذا كان أ ، ب عددان صحيحان بحيث أ + ب = ٥ فان العبارة الصحيحة فيما يلي هي :

(١) ناتج ضرب أ ، ب عدد فردي

(٢) إذا كان أ عددا فرديا فان ب عدد زوجي

(٣) إذا كان $ا < ٠$ فان $ب > ٠$

(أ) (١) فقط صحيحة (ب) (٢) فقط صحيحة (ج) (١) و (٢) فقط (د) (٢) و (٣) فقط

٢٤) إذا كان $-\frac{١}{٢} \leq س \leq -\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{١}{٤} \leq ص \leq -\frac{١}{٥}$ فان القيمة

الصغرى للمقدار $س ص^{٢}$ هي

(أ) $-\frac{١}{١٦}$ (ب) $-\frac{١}{٣٢}$ (ج) $-\frac{١}{٤٨}$ (د) $-\frac{١}{٧٥}$

٢٥) إذا كان المتوسط الحسابي لستة أعداد يساوي ٢٤ وكان مجموع أربعة من هذه الأعداد

يساوي ١٠٦ فان المتوسط الحسابي للعددين الباقيين يساوي

(أ) ١٢ (ب) ١٩ (ج) ٤٨ (د) ٧٢

# الفصل الثاني

## الحدوديات

## الحدوديات

يشتمل هذا الفصل على تعريف الحدودية ، العمليات على الحدوديات وحل بعض المعادلات

### ( ٢ -١) تعريف الحدودية

ليكن ن عددا صحيحا غير سالب . تسمى حدودية في المتغير س كل تعبير على الصورة

أ$_{ن}$ س$^{ن}$ + أ$_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + ... + أ$_{١}$ س + أ$_{٠}$

حيث أ$_{ن}$ ، أ$_{ن-١}$ ، ... ، أ$_{٠}$ هي أعداد حقيقية تسمى معاملات الحدودية

ويسمى العدد ن درجة الحدودية

أمثلة :

١ - $\frac{٣}{٢}$س - ٥ حدودية من الدرجة الأولى ( حدودية خطية )

٢ - ٣ص$^{٢}$ -٢ ص +١٦ حدودية من الدرجة الثانية ( حدودية تربيعية )

٣ - $\sqrt{٣}$ع$^{٥}$ - $\pi$ ع$^{٢}$ - ١٧ حدودية من الدرجة الخامسة

٤ - س$^{\frac{١}{٢}}$ + ٥ ليست حدودية لأن ن = $\frac{١}{٢}$ ليس عددا صحيحا

### ( ٢ - ٢ ) العمليات على الحدوديات

(١) عملية الجمع

نجمع معاملات الحدود المتشابهة كما في المثال التالي

( س$^{٣}$ + ٥ س$^{٢}$ - ٣ س + ٢ ) + ( ٢س$^{٢}$ + س - ٧ )

= س$^{٣}$ + ٧ س$^{٢}$ - ٢س - ٥

### (٢) عملية الطرح

نطرح معاملات الحدود المتشابهة في الحدوديتين

مثال   اطرح ٥ س$^{٢}$ + ٤ س - ٤  من ٣ س$^{٢}$ – ٥س + ٢

( ٣ س$^{٢}$ – ٥س + ٢ ) – ( ٥ س$^{٢}$ + ٤ س - ٤ ) = – ٢ س$^{٢}$ - ٩ س + ٦

### (٣) عملية الضرب

لضرب حدوديتين فإننا نضرب كل حد من إحداهما في كل حد من الأخرى مع مراعاة قوانين الأسس .المثال التالي يوضح طريقة ضرب وحيد الحد( حدودية ذات حد واحد ) في حدودية

٣س$^{٢}$ ( ٢س$^{٣}$ – ٣س + ٧ ) = ٣س$^{٢}$ ( ٢س$^{٣}$ ) +٣س$^{٢}$ (- ٣س) + ٣س$^{٢}$ (٧)

= ٦س$^{٥}$ – ٩س$^{٣}$ + ٢١س$^{٢}$

مثال   أوجد ناتج الضرب ( ٣س – ٤ ) ( ٢س$^{٢}$ – ٧س + ٨ )

( ٣س – ٤ ) ( ٢س$^{٢}$ – ٧س + ٨ )

= ٦س$^{٣}$ – ٢١ س$^{٢}$ + ٢٤س – ٨س$^{٢}$ + ٢٨س – ٣٢

= ٦س$^{٣}$ – ٢٩س$^{٢}$ + ٥٢س- ٣٢

### متطابقات هامة

المتطابقات التالية تستخدم في عملية الضرب

١) (أ + ب )$^{٢}$ = أ$^{٢}$ + ٢أب + ب$^{٢}$   مربع كامل

٢) (أ - ب )$^{٢}$ = أ$^{٢}$ – ٢أب + ب$^{٢}$   مربع كامل

٣) (أ + ب )$^{٣}$ = أ$^{٣}$ + ٣أ$^{٢}$ب +٣أب$^{٢}$ + ب$^{٣}$

٤) (أ - ب )$^{٣}$ = أ$^{٣}$ – ٣ أ$^{٢}$ب + ٣ أ ب$^{٢}$ – ب$^{٣}$

٥) ( أ + ب ) ( أ – ب ) = أ$^{٢}$ – ب$^{٢}$ الفرق بين مربعين

٦) ( أ + ب ) ( أ$^{٢}$ – أب + ب$^{٢}$ ) = أ$^{٣}$ + ب$^{٣}$ الجمع بين مكعبين

٧) ( أ – ب ) ( أ$^{٢}$ + أب + ب$^{٢}$ ) = أ$^{٣}$ – ب$^{٣}$ الفرق بين مكعبين

مثال أوجد ناتج الضرب في كل مما يلي

١) ( ٢س + ٩ ) ( ٢س – ٩ ) = ( ٢س )$^{٢}$ – ( ٩ )$^{٢}$ = ٤س$^{٢}$ – ٨١

٢) ( ٢س$^{٢}$ – ٣س )$^{٢}$ = ( ٢س$^{٢}$ )$^{٢}$ - ٢ ( ٢س$^{٢}$ ) ( ٣س ) + (٣س)$^{٢}$

= ٤س$^{٤}$ -١٢س$^{٣}$ + ٩س$^{٢}$

٣) ( س – ٥ )$^{٣}$ = س$^{٣}$ – ٣ ( س )$^{٢}$ ( ٥ ) + ٣ (س) ( ٥ )$^{٢}$ - ( ٥ )$^{٣}$

= س$^{٣}$ – ١٥ س$^{٢}$ + ٧٥س – ١٢٥

٤) ( ٢س$^{٢}$ +٣س )$^{٣}$ = ( ٢س$^{٢}$ )$^{٣}$ + ٣ ( ٢س$^{٢}$ )$^{٢}$ ( ٣س ) +٣ ( ٢س$^{٢}$ ) (٣س)$^{٢}$ +(٣س )$^{٣}$

= ٨س$^{٦}$ + ٣٦س$^{٥}$ +٥٤س$^{٤}$ + ٢٧س$^{٣}$

## تمارين

أوجد ناتج ما يلي

١) ( ٢ص -٥ )$^{٢}$

٢) ( ٣ع + ١ )$^{٣}$

٣) ( ٣س – ٢ص ) ( ٣س +٢ص )

٤) ( ٣ ص+ ٢ع + ١ )$^{٢}$

٥) (س+١+ ص) (س +١- ص)

٦) (ص$^{٢}$-٢س)(ص$^{٢}$+٢س)

٧) [ س$^{٢}$ - ( س+١ ) ]$^{٣}$

٨) [ (ب + ٢ ) + ب$^{٢}$ ]$^{٢}$

## ( ٢ – ٣ )  تحليل الحدوديات

نعلم أن  $(٣س + ٢)(٢س - ٣) = ٦س^{٢} - ٥س - ٦$

وهذه تكتب على الصورة التالية

$$٦س^{٢} - ٥س - ٦ = (٣س + ٢)(٢س - ٣)$$

وفي هذه الحالة نقول إننا قمنا بتحليل الحدودية  $٦س^{٢} - ٥س - ٦$

إلى العاملين  $٣س + ٢$ ، $٢س - ٣$

يمكن تحليل الحدودية  $س^{٣} - ٩س$  كما يلي

$$س^{٣} - ٩س = س(س^{٢} - ٩)$$

ولكن عملية التحليل ليست كاملة لأنه يمكن تحليل العامل $س^{٢} - ٩$ إلى عاملين هما

$س - ٣$ ، $س + ٣$  وبالتالي فإن الصورة النهائية للتحليل هي

$$س^{٣} - ٩س = س(س - ٣)(س + ٣)$$

فيما يلي نورد بعض الطرائق التي تستخدم في تحليل الحدوديات

١) التحليل بإخراج العامل المشترك بين الحدود

أمثلة توضيحية

$$س^{٦} + ٢س^{٢} = س^{٢}(س^{٤} + ٢)$$

$$٢٧س^{٥} - ٩س^{٣} + ٢١س^{٢} = ٣س^{٢}(٩س^{٣} - ٣س + ٧)$$

$$٤س ص^{٢} - ٦س^{٣}ص^{٤} + ٨س^{٤}ص^{٢} = ٢س ص^{٢}(٢ - ٣س^{٢}ص^{٢} + ٤س^{٣})$$

## ٢ ) التحليل بالمحاولة والخطأ

**أمثلة توضيحية**

$$س^{٢} - ٨ س + ١٥ = (س - ٣)(س - ٥)$$

$$س^{٢} + س - ٦ = (س + ٣)(س - ٢)$$

$$٢ س^{٢} + ١٣ س - ١٥ = (٢ س - ١٥)(س + ١)$$

## ٣) المربع الكامل

$$أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢} = (أ + ب)^{٢}$$

$$أ^{٢} - ٢ أ ب + ب^{٢} = (أ - ب)^{٢}$$

**أمثلة توضيحية**

$$٤ س^{٢} - ١٢ س + ٩ = (٢ س)^{٢} - ٢ \times (٢ س)(٣) + (٣)^{٢}$$

$$= (٢ س - ٣)^{٢}$$

$$س^{٤} + ٢ س^{٢} ص^{٣} + ص^{٦} = (س^{٢})^{٢} + ٢ (س^{٢})(ص^{٣}) + (ص^{٣})^{٢}$$

$$= (س^{٢} + ص^{٣})^{٢}$$

## ٤ ) الفرق بين مربعين

$$أ^{٢} - ب^{٢} = (أ - ب)(أ + ب)$$

**أمثلة توضيحية**

$$س^{٢} - ١٦ = (س)^{٢} - (٤)^{٢} = (س - ٤)(س + ٤)$$

$$٤ ص^{٢} - ٩ س^{٢} = (٢ ص)^{٢} - (٣ س)^{٢} = (٢ ص - ٣ س)(٢ ص + ٣ س)$$

$$٤ س^{٢} ص^{٦} - ٢٥ ع^{٤} = (٢ س ص^{٣})^{٢} - (٥ ع^{٢})^{٢}$$

$$= (٢ س ص^{٣} - ٥ ع^{٢})(٢ س ص^{٣} + ٥ ع^{٢})$$

٥ ) الفرق والجمع بين مكعبين

أ$^{٣}$ – ب$^{٣}$ = ( أ – ب ) ( أ$^{٢}$ + أ ب + ب$^{٢}$ )

أ$^{٣}$ + ب$^{٣}$ = ( أ + ب ) ( أ$^{٢}$ - أ ب + ب$^{٢}$ )

**أمثلة توضيحية**

٨ س$^{٣}$ + ٢٧ = ( ٢ س )$^{٣}$ + ( ٣ )$^{٣}$ = ( ٢ س + ٣ ) ( ٤ س$^{٢}$ - ٦ س + ٩ )

س$^{٣}$ ص$^{٣}$ – ١٠٠٠ = ( س ص )$^{٣}$ – ( ١٠ )$^{٣}$

= ( س ص – ١٠ ) ( س$^{٢}$ ص$^{٢}$ + ١٠ س ص + ١٠٠ )

٦ ) التحليل علي خطوات

**أمثلة توضيحية**

٣ س$^{٣}$ - ١٢ س ص$^{٢}$ = ٣ س ( س$^{٢}$ – ٤ ص$^{٢}$ )

= ٣ س ( س – ٢ ص ) ( س + ٢ ص )

س$^{٦}$ – ص$^{٦}$ = ( س$^{٢}$ )$^{٣}$ – ( ص$^{٢}$ )$^{٣}$ = ( س$^{٢}$ – ص$^{٢}$ ) ( س$^{٤}$ + س$^{٢}$ ص$^{٢}$ + ص$^{٤}$ )

= ( س – ص ) ( س + ص ) ( س$^{٤}$ + س$^{٢}$ ص$^{٢}$ + ص$^{٤}$ )

أو

س$^{٦}$ – ص$^{٦}$ = ( س$^{٣}$ )$^{٢}$ – ( ص$^{٣}$ )$^{٢}$ = ( س$^{٣}$ – ص$^{٣}$ ) ( س$^{٣}$ + ص$^{٣}$ )

= ( س – ص ) ( س$^{٢}$ + س ص + ص$^{٢}$ ) ( س + ص ) ( س$^{٢}$ - س ص + ص$^{٢}$ )

٧ ) التحليل بتجميع الحدود

أ$^{٢}$ - ٤ أ ب + ٤ ب$^{٢}$ – جـ$^{٢}$ = ( أ$^{٢}$ - ٤ أ ب + ٤ ب$^{٢}$ ) – جـ$^{٢}$

= ( أ – ٢ ب )$^{٢}$ – جـ$^{٢}$ = ( أ – ٢ ب – جـ ) ( أ – ٢ ب + جـ )

## تمارين

حلل كلا مما يلي ( تحليلا كاملا )

١) $٤ - ٩\,\text{ب}^{٢}$

٢) $٩\text{م}^{٢} + ٦\,\text{م} + ١$

٣) $\text{س}^{٣}\text{ص}^{٢} + \text{س}^{٢}\text{ص}^{٣} + ٢\text{س}\,\text{ص}^{٤}$

٤) $٦\,\text{س}^{٢} - ٥\text{س} - ٦$

٥) $٥\,\text{س}^{٣} - ٢٠\text{س}$

٦) $\text{س}^{٢} + ٤\,\text{س}\,\text{ص} + ٤\,\text{ص}^{٢} - \text{س}^{٢}\text{ص}^{٢}$

٧) $٢\text{ل}^{٤} - ٧\text{ل}^{٢} + ٥$

٨) $\text{س}^{٢} - ٦\,\text{س}\,\text{ص} + ٩\,\text{ص}^{٢} + ٤\text{س} - ١٢\text{ص}$

٩) $٣\,\text{س}^{٢} - ١٨\text{س} + ٢٧$

١٠) $\text{س}^{٤} - \text{س}^{٣} - ٢\,\text{س}^{٢}$

## ( ٢- ٤ ) المقادير النسبية

نسمي مقدارا نسبيا كل تعبير على الصورة $\dfrac{\text{د}(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})}$

حيث د( س ) ، ل( س) هما حدوديتان ، $\text{ل}(\text{س}) \neq ٠$

المقادير التالية هي أمثلة على المقادير النسبية :

$$\frac{\text{س}}{٢\,\text{س} + ٣} \quad ، \quad \frac{٣\,\text{س}^{٢} + ٥}{\text{س}^{٣} + ٢\,\text{س} - ٧} \quad ، \quad \frac{\text{س}^{٦} + ٤\,\text{س}}{٥\,\text{س}^{٢} + ١١}$$

يكون المقدار النسبي $\dfrac{\text{د}(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})}$ في أبسط صورة إذا لم يكن هناك عامل مشترك

بين الحدوديتين د( س ) ، ل( س)

فالمقدار $\dfrac{\text{س}}{\text{س} + ٢}$ في أبسط صورة بينما $\dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س}}$

ليس في أبسط صورة لأن $\dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س}} = \dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س}(\text{س} + ٣)} = \dfrac{\text{س}}{\text{س} + ٣}$

مثال اختصر كلا مما يلي إلى ابسط صورة :

أ ) $\frac{س^{٢} + ٧س + ١٠}{س^{٢} - ٢٥}$ ب ) $\frac{٢س^{٢} + ٥س ص - ٣ص^{٢}}{٢س^{٢} + س ص - ص^{٢}}$

حل

أ) $$\frac{س^{٢} + ٧س + ١٠}{س^{٢} - ٢٥} = \frac{(س + ٢)(س + ٥)}{(س - ٥)(س + ٥)} = \frac{(س + ٢)}{(س - ٥)}$$

ب) $$\frac{٢س^{٢} + ٥س ص - ٣ص^{٢}}{٢س^{٢} + س ص - ص^{٢}} = \frac{(٢س - ص)(س + ٣ص)}{(٢س - ص)(س + ص)}$$

$$= \frac{س + ٣ص}{س + ص}$$

## جمع وطرح المقادير النسبية

يتم جمع وطرح المقادير النسبية بنفس الطريقة المتبعة في جمع و طرح الكسور حيث نبدأ بإيجاد المقام المشترك الأصغر ثم نستخدم القاعدة :

$$\frac{أ}{جـ} + \frac{ب}{جـ} = \frac{أ + ب}{جـ}$$

أمثلة توضيحية

١) $$\frac{٣س}{س^{٢} - ١} + \frac{٢س + ١}{س^{٢} - ٢س + ١} = \frac{٣س}{(س-١)(س+١)} + \frac{٢س + ١}{(س-١)^{٢}}$$

$$= \frac{٣س(س-١)}{(س-١)^{٢}(س+١)} + \frac{(٢س+١)(س+١)}{(س-١)^{٢}(س+١)}$$

$$= \frac{٣س^{٢} - ٣س + ٢س^{٢} + ٣س + ١}{(س-١)^{٢}(س+١)}$$

$$= \frac{٥س^{٢} + ١}{(س-١)^{٢}(س+١)}$$

٢) $\frac{\text{٢س}}{\text{س} + ١} - \frac{٣}{\text{س} + ٢} = \frac{\text{٢س} (\text{س} + ٢)}{(\text{س} + ١)(\text{س} + ٢)} - \frac{٣ (\text{س} + ١)}{(\text{س} + ٢)(\text{س} + ١)}$

$$= \frac{\text{٢س}^٢ + \text{٤س} - \text{٣س} - ٣}{(\text{س} + ١)(\text{س} + ٢)}$$

$$= \frac{\text{٢س}^٢ + \text{س} - ٣}{(\text{س} + ١)(\text{س} + ٢)} = \frac{\text{٢س}^٢ + \text{س} - ٣}{\text{س}^٢ + \text{٣س} + ٢}$$

ضرب المقادير النسبية

**هنا أيضا نستخدم قاعدة ضرب الكسور لضرب المقادير النسبية**

**أمثلة توضيحية**

١) $\frac{\text{س} + ٢}{\text{س} - ٤} \cdot \frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ٥} = \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٥)} = \frac{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢٠}$

٢) $\frac{\text{٢س} - ٣}{\text{س} + ٥} \cdot \frac{\text{س}^٢ - ٢٥}{\text{٦س ص} - \text{٩ص}} = \frac{(\text{٢س} - ٣)(\text{س}^٢ - ١٥)}{(\text{س} + ٥)(\text{٦س ص} - \text{٩ص})}$

$$= \frac{(\text{٢س} - ٣)(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٥)}{(\text{س} + ٥)(\text{٣ص})(\text{٢س} - ٣)} = \frac{\text{س} - ٥}{\text{٣ص}}$$

قسمة المقادير النسبية

**كما هو الحال في قسمة الكسور فإننا نحول عملية القسمة إلى عملية ضرب**

**أمثلة توضيحية**

١) $\frac{١}{\text{س}^٢ - ٤} \div \frac{\text{س}}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢} = \frac{١}{\text{س}^٢ - ٤} \times \frac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢}{\text{س}}$

$$= \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)\text{س}} = \frac{\text{س} + ١}{\text{س} (\text{س} + ٢)}$$

$$\text{٢)}\quad \frac{\text{س}^{٢} - \text{٥س} + \text{٤}}{\text{٢س} + \text{٦}} \div \frac{\text{٢س}^{٢} - \text{س} - \text{١}}{\text{س}^{٢} + \text{٥س} + \text{٦}} = \frac{\text{س}^{٢} - \text{٥س} + \text{٤}}{\text{٢س} + \text{٦}} \cdot \frac{\text{س}^{٢} + \text{٥س} + \text{٦}}{\text{٢س}^{٢} - \text{س} - \text{١}}$$

$$= \frac{(\text{س} - \text{٤})(\text{س} - \text{١})(\text{س} + \text{٢})(\text{س} + \text{٣})}{\text{٢}(\text{س} + \text{٣})(\text{٢س} + \text{١})(\text{س} - \text{١})}$$

$$= \frac{(\text{س} - \text{٤})(\text{س} + \text{٢})}{\text{٢}(\text{٢س} + \text{١})}$$

### عمليات على المقادير النسبية

**في بعض الأحيان قد نستخدم أكثر من عملية على المقادير النسبية**

### أمثلة توضيحية

$$\text{١)}\quad \frac{\dfrac{\text{٢}}{\text{س} + \text{هـ}} - \dfrac{\text{٢}}{\text{س}}}{\text{هـ}} = \frac{\dfrac{\text{٢}}{\text{س} + \text{هـ}} - \dfrac{\text{٢}}{\text{س}}}{\text{هـ}} \cdot \frac{\text{س}(\text{س} + \text{هـ})}{\text{س}(\text{س} + \text{هـ})}$$

$$= \frac{\text{٢س} - \text{٢}(\text{س} + \text{هـ})}{\text{هـ س}(\text{س} + \text{هـ})}$$

$$= \frac{\text{٢س} - \text{٢س} - \text{٢هـ}}{\text{هـ س}(\text{س} + \text{هـ})} = \frac{-\text{٢}}{\text{س}(\text{س} + \text{هـ})}$$

$$\text{٢)}\quad \frac{\text{١} + \dfrac{\text{٢}}{\text{ل}}}{\text{١} - \dfrac{\text{٤}}{\text{ل}^{٢}}} = \frac{\text{١} + \dfrac{\text{٢}}{\text{ل}}}{\text{١} - \dfrac{\text{٤}}{\text{ل}^{٢}}} \cdot \frac{\text{ل}^{٢}}{\text{ل}^{٢}} = \frac{\text{ل}^{٢} + \text{٢ل}}{\text{ل}^{٢} - \text{٤}}$$

$$= \frac{\text{ل}(\text{ل} + \text{٢})}{(\text{ل} - \text{٢})(\text{ل} + \text{٢})} = \frac{\text{ل}}{\text{ل} - \text{٢}}$$

٣) $\frac{\text{س}}{(١-٢\text{س})^{\frac{٣}{٢}}} + \frac{١}{(١-٢\text{س})^{\frac{١}{٢}}} = \frac{\text{س}}{(١-٢\text{س})^{\frac{٣}{٢}}} + \frac{١-٢\text{س}}{(١-٢\text{س})^{\frac{٣}{٢}}}$

$= \frac{\text{س}+١-٢\text{س}}{(١-٢\text{س})^{\frac{٣}{٢}}} = \frac{١-\text{س}}{(١-٢\text{س})^{\frac{٣}{٢}}}$

٤) $\frac{\sqrt{٤-\text{س}^٢} + \frac{\text{س}^٢}{\sqrt{٤-\text{س}^٢}}}{٤-\text{س}^٢} = \frac{\sqrt{٤-\text{س}^٢} + \frac{\text{س}^٢}{\sqrt{٤-\text{س}^٢}}}{٤-\text{س}^٢} \cdot \frac{\sqrt{٤-\text{س}^٢}}{\sqrt{٤-\text{س}^٢}}$

$= \frac{٤-\text{س}^٢+\text{س}^٢}{(٤-\text{س}^٢)\sqrt{٤-\text{س}^٢}} = \frac{٤}{(٤-\text{س}^٢)^{\frac{٣}{٢}}}$

## تمارين

بسط كلا مما يلي

١) $\frac{٤}{٢\text{س}-١} + \frac{\text{س}}{١-٢\text{س}}$

٢) $\frac{\text{س}}{٦\text{س}-٢} - \frac{٣}{١-٣\text{س}}$

٣) $\frac{٣}{\text{س}^٢-٢\text{س}} \cdot \frac{\text{س}-٢}{\text{س}}$

٤) $\frac{\text{س}+٢}{\text{س}^٢-٩} \cdot \frac{\text{س}+٣}{\text{س}^٢-٤}$

٥) $\frac{\frac{٥}{٢\text{س}-١}}{\frac{\text{س}}{٤\text{س}^٢-١}}$

٦) $\frac{\frac{\text{ص}^٢+\text{ص}-٢}{\text{ص}^٢+٤\text{ص}}}{\frac{٢\text{ص}^٢-٨}{\text{ص}^٢+٢\text{ص}-٨}}$

٧) $١ - \frac{\text{س}-\frac{١}{\text{س}}}{١-\frac{١}{\text{س}}}$

٨) $\frac{\frac{\text{س}+\text{هـ}}{\text{س}+\text{هـ}+٤} - \frac{\text{س}}{\text{س}+٤}}{\text{هـ}}$

## (٢ -٥) بعض أنواع المعادلات وطرق حلها

١) المعادلات الخطية (المعادلات من الدرجة الأولى)

هي كل معادلة تؤول إلى الصورة القياسية

أس + ب = ٠ حيث أ ≠ ٠

مثال أوجد مجموعة الحل للمعادلة

٦ (س – ١) + ٤ = ٧س + ١

حل

٦ س – ٦ + ٤ = ٧س + ١

٦س – ٢ = ٧س +١

٦س – ٧ س = ١ + ٢

- س = ٣ ومنها س = - ٣

∴ مجموعة الحل هي { - ٣ }

مثال أوجد مجموعة الحل للمعادلة

$$\frac{\text{س}}{٣} + \frac{٣\text{س}}{٤} = ٢$$

حل بضرب طرفي المعادلة في ١٢

٤س + ٩س = ٢٤

١٣س = ٢٤ ومنها س = $\frac{٢٤}{١٣}$

∴ مجموعة الحل هي { $\frac{٢٤}{١٣}$ }

٢) المعادلات التربيعية ( المعادلات من الدرجة الثانية )

هي كل معادلة تؤول إلى الصورة القياسية

أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ حيث أ ≠ ٠

سوف نوضح فيما يلي بعض الطرق المستخدمة لحل المعادلات التربيعية

١) طريقة التحليل

مثال أوجد مجموعة الحل للمعادلة س٢ – س – ٦ = ٠

حل

س$^{٢}$ - س – ٦ = ( س – ٣ ) ( س + ٢ ) = ٠

س – ٣ = ٠ ومنها س = ٣

أو

س + ٢ = ٠ ومنها س = – ٢

مجموعة الحل هي { - ٢ ، ٣ }

٢) طريقة الجذر التربيعي

مثال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ( س + ٣ )$^{٢}$ = ١٦

حل ( س + ٣ )$^{٢}$ = ١٦ ومنها س + ٣ = ± $\sqrt{١٦}$ = ± ٤

س + ٣ = - ٤ ومنها س = - ٧

أو

س + ٣ = ٤ ومنها س = ١

مجموعة الحل هي { - ٧ ، ١ }

جـ ) طريقة الإتمام إلى مربع كامل

$$س^2 + ب\,س = \left(س + \frac{ب}{2}\right)^2 - \frac{ب^2}{4}$$

مثال

أوجد مجموعة الحل للمعادلة $س^2 + 6\,س - 5 = 0$

حل $س^2 + 6\,س = (س + 3)^2 - 9$

$س^2 + 6\,س - 5 = (س + 3)^2 - 14 = 0$

$(س + 3)^2 = 14$ ومنها $س + 3 = \pm\sqrt{14}$

$س + 3 = -\sqrt{14}$ ومنها $س = -3 - \sqrt{14}$

أو

$س + 3 = \sqrt{14}$ ومنها $س = -3 + \sqrt{14}$

مجموعة الحل هي $\{-3 - \sqrt{14}\,،\,-3 + \sqrt{14}\}$

د ) طريقة المميز

$أ\,س^2 + ب\,س + جـ = 0$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4\,أ\,جـ}}{2\,أ}$$

يسمي الحد $(ب^2 - 4\,أ\,جـ)$ المميز

1) إذا كان $ب^2 - 4\,أ\,جـ > 0$ فإن للمعادلة جذرين حقيقيين غير متساويين

2) إذا كان $ب^2 - 4\,أ\,جـ = 0$ فإن للمعادلة جذرين حقيقيين متساويين

3) إذا كان $ب^2 - 4\,أ\,جـ < 0$ فإن ا لمعادلة ليس لها جذورا حقيقية

مثال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢ س$^{٢}$ + ٣ س − ١ = ٠

حل أ = ٢ ، ب = ٣ ، جـ = - ١

ب$^{٢}$ - ٤ أ جـ = ( ٣ )$^{٢}$ − ٤ ( ٢ ) ( - ١ ) = ٩ + ٨ = ١٧ > ٠

س = $\frac{-٣ \pm \sqrt{٧١}}{(٢)٢}$ = $\frac{-٣ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$

مجموعة الحل هي { $\frac{-٣ - \sqrt{١٧}}{٤}$ ، $\frac{-٣ + \sqrt{١٧}}{٤}$ }

٣) معادلات حدودية ذات درجات عليا

مثال أوجد مجموعة الحل للمعادلة س$^{٤}$ - ٣ س$^{٢}$ + ٢ = ٠

حل نضع ص = س$^{٢}$ فتصبح المعادلة على الصورة

ص$^{٢}$ - ٣ ص + ٢ = ٠

( ص − ١ ) ( ص − ٢ ) = ٠

ص - ١ = ٠ ⇐ ص = ١ ⇐ س$^{٢}$ = ١ ⇐ س = ± ١

أو ص − ٢ = ٠ ⇐ ص = ٢ ⇐ س$^{٢}$ = ٢ ⇐ س = ± $\sqrt{٢}$

مجموعة الحل هي { - ١ ، ١ ، - $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٢}$ }

مثال أوجد مجموعة الحل للمعادلة س$^{٣}$ - ٣ س$^{٢}$ − ٣ س + ٩ = ٠

حل س$^{٣}$ - ٣ س$^{٢}$ − ٣ س + ٩ = س$^{٢}$ ( س - ٣ ) − ٣ ( س − ٣ )

= ( س - ٣ ) ( س$^{٢}$ - ٣ ) = ٠

س - ٣ = ٠ ⇐ س = ٣

س$^{٢}$ − ٣ = ٠ ⇐ س$^{٢}$ = ٣ ⇐ س = ± $\sqrt{٣}$

مجموعة الحل هي { - $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$ ، ٣ }

## وهي المعادلات التي تحتوي على جذور

مثال أوجد مجموعة الحل للمعادلة $\sqrt{٢س+٧}$ = س + ٢

حل $\sqrt{٢س+٧}$ = س + ٢

٢س + ٧ = س$^{٢}$ + ٤ س + ٤

س$^{٢}$ + ٢ س – ٣ = ٠

( س + ٣ ) ( س – ١ ) = ٠

س + ٣ = ٠ ومنها س = -٣

أو

س – ١ = ٠ ومنها س = ١

بالتعويض في المعادلة الأصلية س = -٣ لا يحقق المعادلة

مجموعة الحل هي { ١ }

مثال أوجد مجموعة الحل للمعادلة $\sqrt{٢س+٦}$ - $\sqrt{س+٤}$ = ١

حل $\sqrt{٢س+٦}$ = ١ + $\sqrt{س+٤}$

٢س + ٦ = ١ + ٢ $\sqrt{س+٤}$ + س + ٤

س + ١ = ٢ $\sqrt{س+٤}$

س$^{٢}$ + ٢س + ١ = ٤ ( س + ٤ )

س$^{٢}$ – ٢س – ١٥ = ( س + ٣ ) ( س – ٥ ) = ٠

س + ٣ = ٠ $\Leftarrow$ س = -٣ أو س – ٥ = ٠ $\Leftarrow$ س = ٥

بالتعويض س = -٣ لا يحقق المعادلة الأصلية ، مجموعة الحل هي { ٥ }

## تمارين

**أوجد مجموعة الحل بطريقة الإتمام إلى مربع كامل**

١) س$^{٢}$ + ٨ س = ٩      ٢) س$^{٢}$ - ١٢ س = ٤٥

**أوجد مجموعة الحل باستخدام قانون المميز**

٣) س$^{٢}$ + ٢س - ١٥ = ٠      ٤) س$^{٢}$ + ٥ س + ٣ = ٠

٥) ١٠ س$^{٢}$ - ١١س = ٦      ٦) ٦ س$^{٢}$ + س - ٢ = ٠

٧) ٢ س$^{٢}$ - س = ٤      ٨) ٦ س$^{٢}$ - ١٧ س - ١٤ = ٠

**عبر عن ص بدلالة س**

٩) (ص - ٢)$^{٢}$ = ٤ س$^{٢}$      ١٠) (ص + ٣س)$^{٢}$ = ٩

١١) (ص + ٣س)$^{٢}$ = ٩ س$^{٢}$      ١٢) (ص + ٢س)$^{٢}$ - ٨ (ص + ٢س) + ١٥ = ٠

**أوجد مجموعة الحل**

١٣) (٢ س - ١)$^{٢}$ = $\frac{٩}{٤}$      ١٤) ٢ س$^{٢}$ + ٣ س = س$^{٢}$ + ٢ س + ١٢

١٥) ٩ص$^{٢}$ - ٣ ص - ١ = ٠      ١٦) س - ٤ $\sqrt{\text{س}}$ + ٣ = ٠

١٧) $\frac{١}{\text{س} + ٢} + \frac{١}{\text{س} - ٢} = ١$      ١٨) $\sqrt{٢\,\text{س} + ١} = \sqrt{\text{س}} + ١$

## مسائل مختارة لاختبار القدرات عن الفصل الثاني

١) $(٢س + ٣)^{٢} - (١٢س + ٥) =$

أ) $س^{٢} + ٤$ ب) $٤س^{٢} + ١$ ج) $٤(س^{٢} + ١)$ د) $٤(س + ١)^{٢}$

٢) $(٢س^{٢} + ٣س)^{٢} =$

أ) $٤س^{٤} - ١٢س^{٣} + ٩س$ ب) $٤س^{٤} + ١٢س^{٣} + ٩س^{٢}$

ج) $٤س^{٤} - ٩س$ د) $٤س^{٤} + ٩س^{٢}$

٣) $\frac{س + ٢}{س - ٢} \cdot \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} + س - ٢} =$

أ) $\frac{س - ١}{س + ١}$ ب) $\frac{س + ٢}{س - ١}$ ج) $\frac{س - ٢}{س + ١}$ د) $\frac{س + ٢}{س - ٢}$

٤) $\frac{١}{٢س} + \frac{٥س}{س^{٢} - ١} + \frac{٣}{س + ١} =$

أ) $\frac{١٥س^{٢} - ٦س - ١}{٢س^{٣} - ٢س}$ ب) $\frac{١٥س^{٢} - ٦س - ١}{٢س^{٣} + ٢س}$

ج) $\frac{١٧س^{٢} - ٦س - ١}{٢س^{٣} + ٢س}$ د) $\frac{١٧س^{٢} - ٦س - ١}{٢س^{٣} - ٢س}$

٥) $\frac{س}{س^{٢} + ٥س + ٦} - \frac{٢}{س^{٢} + ٣س + ٢} =$

أ) $\frac{س - ٢}{(س^{٢} + ٥س + ٦)(س^{٢} + ٣س + ٢)}$ ب) $\frac{س + ٣}{(س + ١)(س - ٣)}$

ج) $\frac{س - ٣}{(س + ١)(س + ٣)}$ د) $\frac{س - ٣}{(س - ١)(س + ٣)}$

٦) $\dfrac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٤}{٢\text{س} + ٦} \div \dfrac{٢\text{س}^{٢} - \text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٦} =$

(أ) $\dfrac{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٢)}{٢(\text{س} + ١)}$ (ب) $\dfrac{(\text{س} + ٤)(\text{س} - ٢)}{٢(\text{س} + ١)}$

(ج) $\dfrac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٨}{٤\text{س} + ٢}$ (د) $\dfrac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٨}{٤\text{س} + ٢}$

٧) $\dfrac{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٦}{\text{س} + ١} \div \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤} =$

(أ) $\dfrac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ١٢}{\text{س} - ٢}$ (ب) $\dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} + ١٢}{\text{س} - ٢}$

(ج) $\dfrac{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١٢}{\text{س} - ٢}$ (د) $\dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ١٢}{\text{س} - ٢}$

٨) $\dfrac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٤} \div \dfrac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٨} =$

(أ) $\dfrac{١}{\text{س} + ١}$ (ب) $\text{س} + ١$ (ج) $\dfrac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ١}$ (د) $\dfrac{١}{\text{س} - ٢}$

٩) إن مجموعة الحل للمعادلة $٨\text{س}^{٢} - ٢٤\text{س} + ١٨ = ٠$ هي

(أ) $\{\frac{٢}{٣}\}$ (ب) $\{-\frac{٣}{٢}\}$ (ج) $\{١ ، ٢\}$ (د) $\{\frac{١}{٢} ، \frac{٢}{٣}\}$

١٠) إذا كان ( س + ٢ ) احد عوامل الحدودية س $^{٢}$ - ٢ س + ب فإن ب =

(أ) - ٨ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

١١) إن مجموعة الحل للمعادلة $\frac{س}{س+٢} = ٢ \mp \frac{١}{س-١}$ هي

(أ) { - ٢ ، ١ } (ب) { - ١ ، ٠ ، ٢ }

(ج) { - ١ ± $\sqrt{٧}$ } (د) { ١ ± $\sqrt{٧}$ }

١٢) إن مجموعة الحل للمعادلة $\frac{١٤}{س+٢} - \frac{١}{س-٤} = ١$ هي

(أ) { ١٠ } (ب) { ٥ } (ج) { ٥ ، ١٠ } (د) $\phi$

١٣) إن مجموعة الحل للمعادلة ٢ س $^{٢}$ - ٣س – ١ = ٠ هي

(أ) { $\frac{٣ \pm \sqrt{١٣}}{٤}$ } (ب) { - ٣ ، ٣ } (ج) { $\frac{٣ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$ } (د) { $\frac{٣ - \sqrt{١٧}}{٤}$ }

١٤) إن مجموعة الحل للمعادلة $\sqrt[٣]{٤س^{٢}+١} = ٥$ هي

(أ) { $\sqrt{٣١}$ } (ب) { - $\sqrt{٣١}$ } (ج) { ١ } (د) { ± $\sqrt{٣١}$ }

١٥) إن مجموعة الحل للمعادلة $\sqrt{٢س-٥} - \sqrt{س-٣} = ١$ هي

(أ) { ٠ } (ب) { ٣ } (ج) { ٧ } (د) { ٣ ، ٧ }

١٦) إن مجموعة الحل للمعادلة $س^{\frac{٢}{٣}} + س^{\frac{١}{٣}} - ٦ = ٠$ هي

(أ) { ٨ } (ب) { ٢٧ } (ج) { -٢٧ ، ٨ } (د) { ٨ ، ٢٧ }

١٧) إن مجموعة الحل للمعادلة ٢ س$^{٣}$ − س$^{٢}$ = ٣ س هي

(أ) { ٠ }  (ب) { ٠ ، $\frac{٣}{٢}$ }  (ج) { −١ }  (د) { −١ ، ٠ ، $\frac{٣}{٢}$ }

١٨) إن مجموعة الحل للمعادلة ( س − ١ )$^{٢}$ + ( س + ١ )$^{٢}$ = ١٠٠ هي

(أ) { ± ٥ $\sqrt{٢}$ }  (ب) { ± ٢ $\sqrt{٥}$ }

(ج) { −٧ ، ٧ }  (د) { −٤ ، ٦ }

١٩) أحد حلول المعادلة س$^{٤}$ − ٣ س$^{٢}$ + ٢ = ٠ هو

(أ) − $\frac{١}{٢}$  (ب) $\frac{١}{٢}$  (ج) $\sqrt{٣}$  (د) $\sqrt{٢}$

٢٠) قيمة ل الموجبة التي تجعل للمعادلة ٢ س$^{٢}$ − ل س + ٣ = ٠ جذران حقيقيان متساويان هي

(أ) $\sqrt{٦}$  (ب) ٢ $\sqrt{٣}$  (ج) ٢ $\sqrt{٦}$  (د) $\sqrt{٣}$

٢١) قيمة ل التي تجعل س$^{٢}$ + ١٨ س − ٢ ل مربعا كاملا هي

(أ) ٩  (ب) − ٩  (ج) $\frac{-٨١}{٢}$  (د) $\frac{٨١}{٢}$

٢٢) س$^{٣}$ − س$^{٢}$ + ٤ س − ٤ =

(أ) ( س$^{٢}$ + ٤ ) ( س − ١ )  (ب) ( س$^{٢}$ + ٤ ) ( س + ١ )

(ج) ( س$^{٢}$ − ٤ ) ( س + ١ )  (د) ( س$^{٢}$ + ٤ ) ( س − ٤ )

٢٣) $\dfrac{\dfrac{٢}{س + هـ} - \dfrac{٢}{س}}{هـ} =$

(أ) $\dfrac{٢}{س\ (\ س + هـ)}$ (ب) $\dfrac{س + هـ}{٢}$ (ج) $\dfrac{س\ (\ س + هـ)}{٢}$ (د) $\dfrac{-٢}{س\ (\ س + هـ)}$

٢٤) إن باقي قسمة $س^{٢} + ٣ س + ٥$ على (س+١) هو

(أ) ٣ (ب) ٠ (ج) -٣ (د) ٢

٢٥) إن باقي قسمة ق (س) على (٢ س - ٣) هو

(أ) ق (س) (ب) ق (-٣) (ج) ق $\left(\dfrac{٣}{٢}\right)$ (د) ق $\left(\dfrac{-٣}{٢}\right)$

# الفصل الثالث

# المتباينات

## المتباينات

### (٣ ـ ١) تعريف

ليكن د ( س ) ، ل ( س ) تعبيران رياضيان في المتغير س . نسمي متباينة في المتغير س كل علاقة من العلاقات التالية

د ( س ) < ل ( س ) ، د ( س ) > ل ( س )

د ( س ) ≤ ل ( س ) ، د ( س ) ≥ ل ( س )

أمثلة

٥ س ـ ٣ < ٩ ، س$^{٢}$ ـ س ≤ ١ + س ، س ≥ $\frac{\text{٣ س}}{\text{س}^{٢}-\text{٤}}$

نسمي مجموعة الحل لمتباينة المجموعة التي تحتوي على جميع الأعداد التي تحقق المتباينة.

وسوف نجد أن مجموعة الحل للمتباينات تعطى على صورة فترات وفيما يلي نورد وصفا لبعض الفترات الأساسية

فترات منتهية:

(أ ، ب ) = { س ∈ ح : أ < س < ب } فترة مفتوحة

[أ ، ب ] = { س ∈ ح : أ ≤ س ≤ ب } فترة مغلقة

(أ ، ب ] = { س ∈ ح : أ < س ≤ ب } فترة نصف مفتوحة

[أ ، ب ) = { س ∈ ح : أ ≤ س < ب } فترة نصف مفتوحة

فترات غير منتهية:

(-∞ ، ب ) = { س ∈ ح : -∞ < س < ب }

(أ ، ∞ ) = { س ∈ ح : أ < س < ∞ }

(-∞ ، ب ] = { س ∈ ح : -∞ < س ≤ ب }

[أ ، ∞ ) = { س ∈ ح : أ ≤ س < ∞ }

(-∞ ، ∞ ) = ح

## ( ٣ - ٢ ) خواص المتباينات

لتكن أ ، ب ، جـ ، د أعدادا حقيقية

١) إذا كان أ < ب ، ب < جـ فان أ < جـ

٢) إذا كان أ < ب ، فان أ + جـ < ب + جـ

٣) إذا كان أ < ب ، فان أ - جـ < ب - جـ

٤) إذا كان أ < ب ، جـ < د فان أ + جـ < ب + د

٥) إذا كان ٠ < أ < ب ، ٠ < جـ < د فان أ جـ < ب د

٦) إذا كان أ < ب ، جـ > ٠ فان أ جـ < ب جـ

٧) إذا كان أ < ب ، جـ < ٠ فان أ جـ > ب جـ

٨) إذا كان ٠ < أ < ب فان $\frac{١}{أ} > \frac{١}{ب}$

٩) إذا كان ٠ < أ < ب ، ن عدد صحيح موجب فان $أ^{ن} < ب^{ن}$

١٠) إذا كان ٠ < أ < ب ، ن عدد صحيح موجب فان $\sqrt[ن]{أ} < \sqrt[ن]{ب}$

**جميع هذه الخواص صحيحة بالنسبة للعلاقات الثلاث الأخرى > ، ≤ ، ≥**

## ( ٣ - ٣ ) المتباينات من الدرجة الأولى ( المتباينات الخطية )

هي كل متباينة تؤول إلى الصورة القياسية

أ س + ب < ٠ ( > ٠ ، ≥ ٠ ، ≤ ٠ )

أمثلة

٣ س − ١١ < س + ٥ ، $\frac{٢ س - ٣}{٤}$ ≥ س + ٢

**مثال** أوجد مجموعة الحل للمتباينة ٣ س − ٢ > ٥ + س

**حل** ٣س − ٢ > ٥ + س

٣ س − س > ٥ + ٢

٢ س > ٧ ومنها س > $\frac{٧}{٢}$

مجموعة الحل هي ( $\frac{٧}{٢}$ ، ∞ )

**مثال** أوجد مجموعة الحل للمتباينة $\frac{٥ س + ٤}{-٢}$ ≤ ٣

**حل** ٥ س + ٤ ≥ − ٦

٥ س ≥ − ١٠ ومنها س ≥ − ٢

مجموعة الحل هي ( − ∞ ، − ٢ ]

## ( ٣ − ٤ ) المتباينات من الدرجة الثانية ( المتباينات التربيعية)

**هي كل متباينة تؤول إلى الصورة القياسية**

أ س$^{٢}$ + ب س + جـ > ٠ ( < ٠ ، ≥ ٠ ، ≤ ٠ )

**أمثلة**

٣ س$^{٢}$ + ٢١ > س$^{٢}$ − ٢ س + ٣ ، س$^{٢}$ − ٢ ≤ ٣س + ٧

**لإيجاد مجموعة الحل لمتباينة من الدرجة الثانية نكتب المتباينة بحيث يكون معامل س$^{٢}$ موجبا ثم نوجد مجموعة الحل للمعادلة**

أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ حيث أ > ٠

**وأخيرا نستخدم القاعدة التالية**

قاعدة

لتكن $ل_-$ ، $ل_+$ مجموعة الحل للمتباينتين

أ س$^2$ + ب س + جـ $<$ ٠ ، أ س$^2$ + ب س + جـ $>$ ٠ (أ $>$ ٠)

بالاستناد إلى جذور المعادلة أ س$^2$ + ب س + جـ = ٠

يكون لدينا الحالات التالية :

١) للمعادلة جذران حقيقيان $م_1$ ، $م_2$ حيث $م_1 < م_2$

$ل_-$ = ( $م_1$ ، $م_2$ ) ، $ل_+$ = ح − [ $م_1$ ، $م_2$ ]

٢) للمعادلة جذران حقيقيان متساويان $م_1$ = $م_2$ = م

$ل_- = \phi$ ، $ل_+$ = ح − { م }

٣) ليس للمعادلة جذورا حقيقية

$ل_- = \phi$ ، $ل_+$ = ح

ملاحظة إذا كان في المتباينة $\geq$ أو $\leq$ فإننا نضيف جذور المعادلة إن وجدت إلى مجموعة الحل

مثال

أوجد مجموعة الحل للمتباينة ٢س$^2$ + ٣س $<$ ٢

حل ٢س$^2$ + ٣س - ٢ $<$ ٠

٢س$^2$ + ٣ س - ٢ = (س+٢) ( ٢س - ١)

المعادلة ٢س$^2$ + ٣س - ٢ = ٠ لها جذران $م_1$ = - ٢ $م_2$ = $\frac{١}{٢}$

مجموعة الحل هي ( -٢ ، $\frac{١}{٢}$ )

### ملاحظة

بالاستناد إلى نتيجة المثال السابق يمكننا إيجاد ما يلي

١ ) مجموعة الحل للمتباينة ٢ س$^{٢}$ + ٣ س − ٢ ≥ ٠ هي [ - ٢ ، $\frac{١}{٢}$ ]

٢ ) مجموعة الحل للمتباينة ٢ س$^{٢}$ + ٣ س − ٢ ≥ ٠ هي

ح - [ - ٢ ، $\frac{١}{٢}$ ] = ( - ∞ ، -٢ ) ∪ ( $\frac{١}{٢}$ ، ∞ )

٣ ) مجموعة الحل للمتباينة ٢ س$^{٢}$ + ٣ س − ٢ ≤ ٠ هي

ح - ( - ٢ ، $\frac{١}{٢}$ ) = ( - ∞ ، -٢ ] ∪ [ $\frac{١}{٢}$ ، ∞ )

### مثال

أوجد مجموعة الحل للمتباينة - س$^{٢}$ + ٤ س < ٤

حل نكتب المتباينة على صورة س$^{٢}$ - ٤ س + ٤ > ٠

س$^{٢}$ - ٤ س + ٤ = ( س − ٢ )$^{٢}$

المعادلة س$^{٢}$ + ٤ س + ٤ = ٠ لها جذران متساويان م = ٢

مجموعة الحل هي ح − { ٢ }

### ملاحظة

١ ) إن مجموعة الحل للمتباينة س$^{٢}$ - ٤ س + ٤ ≤ ٠ هي ح = ( - ∞ ، ∞ )

٢ ) إن مجموعة الحل للمتباينة س$^{٢}$ - ٤ س + ٤ < ٠ هي ϕ

٣ ) إن مجموعة الحل للمتباينة س$^{٢}$ - ٤ س + ٤ ≥ ٠ هي { ٢ }

مثال

أوجد مجموعة الحل للمتباينة $-٣س^{٢} + ٢س - ٥ > ٠$

حل نكتب المتباينة على الصورة

$٣س^{٢} - ٢س + ٥ > ٠$

المعادلة $٣س^{٢} - ٢س + ٥ = ٠$ ليس لها جذورا حقيقية

لأن المميز $ب^{٢} - ٤أجـ = (-٢)^{٢} - ٤(٣)(٥) = -٥٦ < ٠$

وبالتالي فإن مجموعة الحل للمتباينة هي ح

مثال

أوجد مجموعة الحل للمتباينة $٢س^{٢} - ٦س > -١$

حل نكتب المتباينة على الصورة $٢س^{٢} - ٦س + ١ > ٠$

نوجد المميز $ب^{٢} - ٤أجـ = (-٦)^{٢} - ٤(٢)(١) = ٢٨ > ٠$

وبالتالي فإن للمعادلة $٢س^{٢} - ٦س + ١ = ٠$ جذرين حقيقيين

$م_{١} = \frac{٣ - \sqrt{٧}}{٢}$ ، $م_{٢} = \frac{٣ + \sqrt{٧}}{٢}$

مجموعة الحل للمتباينة هي

$$ح - [م_{١}، م_{٢}] = \left(-\infty ، \frac{٣ - \sqrt{٧}}{٢}\right) \cup \left(\frac{٣ + \sqrt{٧}}{٢} ، \infty\right)$$

ملاحظة

لإيجاد مجموعة الحل لمتباينة من الدرجة الثانية يمكن استخدام جدول لدراسة الإشارات كما هو موضح في المثال التالي. وهذه الطريقة تستخدم لإيجاد مجموعة الحل لمتباينات من درجة أعلى من الدرجة الثانية.

**مثال** أوجد مجموعة الحل لكل متباينة

أ) س$^{٢}$ ـ ٣ س > ١٠            ب) ٢ س$^{٢}$ ≤ س + ٣

حل (أ) س$^{٢}$ ـ ٣ س ـ ١٠ > ٠    ⇐    (س – ٥ ) (س + ٢) > ٠

ندرس إشارة العاملين س – ٥ ، س + ٢ كما يلي :

س – ٥ > ٠ ⟺ س > ٥ ، س – ٥ < ٠ ⟺ س < ٥

س + ٢ > ٠ ⟺ س > -٢ ، س + ٢ < ٠ ⟺ س < -٢

نضع هذه النتائج في جدول كما يلي :

| الفترة | ( -∞ ، -٢ ) | ( -٢ ، ٥ ) | ( ٥ ، ∞ ) |
|---|---|---|---|
| إشارة ( س – ٥ ) | - | - | + |
| إشارة ( س + ٢ ) | - | + | + |
| إشارة (س – ٥ ) (س + ٢ ) | + | - | + |

نستنتج من السطر الأخير في الجدول أن مجموعة الحل للمتباينة هي

( -∞ ، -٢ ) ∪ ( ٥ ، ∞ )

حل (ب) ٢ س$^{٢}$ - س – ٣ ≤ ٠ ⇐ ( ٢ س –٣) (س + ١) ≤ ٠

كما هو الحل في (أ) نحصل على معلومات نضعها في جدول كما يلي

| الفترة | ( -∞ ، -١ ) | ( -١ ، $\frac{٣}{٢}$ ) | ( $\frac{٣}{٢}$ ، ∞ ) |
|---|---|---|---|
| إشارة ( ٢ س – ٣ ) | - | - | + |
| إشارة ( س + ١ ) | - | + | + |
| إشارة (٢س – ٣) (س+ ١) | + | - | + |

نستنتج من السطر الأخير في الجدول أن مجموعة الحل للمتباينة هي [ -١ ، $\frac{٣}{٢}$ ]

## ( ٣ – ٥ ) المتباينات النسبية

هي كل متباينة تؤول إلى الصورة القياسية

$$\frac{\text{د ( س )}}{\text{ل ( س )}} < ٠ \qquad ( > ٠ \text{ ، } \le ٠ \text{ ، } \ge ٠ )$$

حيث د ( س) ، ل ( س ) حدوديتان

سوف تقتصر دراستنا على المتباينات النسبية التي تؤول إلى الصورة

$$\frac{\text{أ س + ب}}{\text{جـ س + د}} < ٠ \qquad ( > ٠ \text{ ، } \le ٠ \text{ ، } \ge ٠ ) \qquad \text{أ} > ٠ \text{ ، جـ} > ٠$$

و بالاستناد إلى قاعدة ضرب وقسمة الإشارات نجد أن

المتباينة $\frac{\text{أ س + ب}}{\text{جـ س + د}} < ٠ \quad ( > ٠ )$ تكافئ المتباينة

( أ س + ب ) ( جـ س + د ) $< ٠$ ( $> ٠$ ) أي أن للمتباينتين مجموعة الحل نفسها .

مثال

أوجد مجموعة الحل للمتباينة

$$\frac{\text{س + ٢}}{\text{س - ٣}} < ٠$$

حل

نوجد مجموعة الحل المتباينة المكافئة

( س + ٢ ) ( س – ٣ ) $< ٠$

وهي كما نعلم ( -٢ ، ٣ )

**مثال** أوجد مجموعة الحل للمتباينة $٢ \leq \frac{١}{س - ٣}$

**حل**

$$٠ \leq ٢ - \frac{١}{س - ٣}$$

$$٠ \leq \frac{١ - ٢ س + ٦}{س - ٣}$$

$$٠ \leq \frac{- ٢ س + ٧}{س - ٣}$$

**وبالتالي فإن المتباينة تكافئ المتباينة**

$(٢س - ٧)(س - ٣) \leq ٠$ حيث $س \neq ٣$

**وعليه فإن مجموعة الحل هي** $(٣ ، \frac{٧}{٢}]$

**مثال** أوجد مجموعة الحل للمتباينة

$$\frac{٢}{٢ س - ٥} > \frac{١}{س + ١}$$

**حل**

$$٠ > \frac{٢}{٢ س - ٥} - \frac{١}{س + ١}$$

$$٠ > \frac{٢ س - ٥ - ٢ س - ٢}{(س + ١)(٢ س - ٥)}$$

$$٠ > \frac{-٧}{(س + ١)(٢ س - ٥)}$$

**و بالتالي فإن المتباينة تكافئ المتباينة**

$$(س+١)(٢س - ٥) > ٠$$

**وعليه فإن مجموعة الحل هي** $(-\infty ، -١) \cup (\frac{٥}{٢} ، \infty)$

## ( ٣ ـ ٦ )   المتباينات المضاعفة

هي كل متباينة على الصورة

ل ( س ) < د ( س ) < هـ ( س )   ( أو ≥ )

حيث ل ( س ) ، د ( س ) ، هـ ( س ) حدوديات أو تعابير نسبية

سوف تقتصر دراستنا على المتباينات المضاعفة بحيث تؤول كل من المتباينتين

ل ( س ) < د ( س ) ، د ( س ) < هـ ( س )

إلي الصورة $\frac{\text{أ س + ب}}{\text{جـ س + د}}$ > ٠ ( < ٠ ، ≥ ٠ ، ≤ ٠ ) ، أ > ٠ ، جـ > ٠

مثال

أوجد مجموعة الحل للمتباينة

- ٧ < ٣ س ـ ٤ ≥ ١١

حل

بالاستناد إلى خواص المتباينات

- ٣ < ٣ س ≥ ١٥

- ١ < س ≥ ٥

و بالتالي فإن مجموعة الحل هي ( - ١ ، ٥ ]

مثال

أوجد مجموعة الحل للمتباينة

$$\frac{١}{\text{س} + ١} > \frac{١}{\text{س} - ٣} > \frac{٣}{٣\text{س} + ٢}$$

حل   نوجد أولا مجموعة الحل للمتباينة

$$\frac{٣}{٣\text{س} + ٢} < \frac{١}{\text{س} - ٣}$$

$$\frac{٣}{٣\text{س} + ٢} - \frac{١}{\text{س} - ٣} < ٠$$

$$\frac{-١١}{(٣\text{س} + ٢)(\text{س} - ٣)} < ٠$$

و هذه تكافئ المتباينة $(٣\text{س} + ٢)(\text{س} - ٣) > ٠$

والتي لها مجموعة الحل $\text{ل}_{١} = (-\infty ، -\frac{٢}{٣}) \cup (٣ ، \infty)$

نوجد الآن مجموعة الحل للمتباينة

$$\frac{١}{\text{س} - ٣} > \frac{١}{\text{س} + ١}$$

$$\frac{١}{\text{س} - ٣} - \frac{١}{\text{س} \ ١ \ ١} > ٠$$

$$\frac{٤}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ١)} > ٠$$

و هذه تكافئ المتباينة $(\text{س} - ٣)(\text{س} + ١) > ٠$

والتي لها مجموعة الحل $\text{ل}_{٢} = (-\infty ، -١) \cup (٣ ، \infty)$

وأخيرا فإن مجموعة الحل للمتباينة المضاعفة هي

$$\text{ل}_{١} \cap \text{ل}_{٢} = (-\infty ، -١) \cup (٣ ، \infty)$$

# تمارين على الفصل الثالث

١) $٢(١ - \text{س}) \geq ٣\text{س}$

٢) $٢(\text{س} - ٣) + ٥ > ٥ - \text{س}$

٣) $٦(\text{س} - ٢) + ١١ > ٢(٢\text{س} + ٣)$

٤) $٣(\text{س} - ٥) + ١٠ \geq ٥(\text{س} + ٧)$

٥) $\frac{\text{س} - ٣}{٤} - ١ > \frac{\text{س}}{٢}$

٦) $\frac{٤\text{س} - ٣}{٣} + ٨ < ٦ + \frac{٣\text{س}}{٢}$

٧) $٢\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٣ > ٠$

٨) $٣\text{س}^٢ - \text{س} + ٤ > ٠$

٩) $٧\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١ \geq ٠$

١٠) $١٥\text{س}^٢ - ١٢\text{س} < -٨\text{س}$

١١) $\text{س}(٣\text{س} + ١٠) > ٧٧$

١٢) $٢\text{س}(٤\text{س} + ١٥) \leq ٢٧$

١٣) $\text{س}(٣\text{س} - ١) \leq ٤$

١٤) $\text{س}(٢\text{س} + ٣) \geq ٥$

١٥) $(١٤ + ٢\text{س})(١١ + ٢\text{س}) > ٢٧٠$

١٦) $(٨ + \text{س})(١٠ + \text{س}) > ١٢٠$

١٧) $٣ \leq \frac{٢\text{س} - ٣}{٥} < ٧$

١٨) $-١ < \frac{-١١\text{س} + ٤}{٧} < ١٠$

## مسائل مختارة لاختبار القدرات عن الفصل الثالث

١) إن مجموعة الحل للمتباينة $\frac{١ + س}{٣} + ٢ > -\frac{س}{٤}$ هي

(أ) $(-\infty، -٤]$ (ب) $(-\infty، ٤)$ (ج) $(٤، \infty)$ (د) $(-٤، \infty)$

٢) إن مجموعة الحل للمتباينة $-٣س + ٢ \le ٢س - ٥$ هي

(أ) $(-\infty، \frac{٥}{٧}]$ (ب) $[-\frac{٧}{٥}، \infty)$ (ج) $[\frac{٧}{٥}، \infty)$ (د) $[-\frac{٥}{٧}، \infty)$

٣) إن مجموعة الحل للمتباينة $٢ \le ٣ - ٤س \le ٧$ هي

(أ) $(-١، \frac{٢}{٣}]$ (ب) $[-\frac{٢}{٣}، ١)$ (ج) $[-٢، \frac{٧}{٣})$ (د) $[-١، \frac{١}{٤}]$

٤) إن مجموعة الحل للمتباينة $\frac{٣}{٥} \le \frac{٢ - ٣س}{٢} \le ١$ هي

(أ) $[\frac{١٦}{١٥}، \frac{٤}{٣}]$ (ب) $[٠، \frac{٤}{١٥}]$ (ج) $[-\frac{١٢}{٥}، ٠]$ (د) $[-\frac{٤}{١٥}، ٠]$

٥) إن مجموعة الحل للمتباينة $س^٢ - س \le ١٠ + ٢س$ هي

(أ) $(-\infty، ٥]$ (ب) $[-٥، ٢]$ (ج) $[-٢، ٥]$ (د) $[-٢، \infty)$

٦) إن مجموعة الحل للمتباينة $\frac{س + ١}{١ - س} \ge ٠$ هي

(أ) $[-١، ١]$ (ب) $(-١، ١)$ (ج) $(-١، ١]$ (د) $[-١، ١)$

٧) إن مجموعة الحل للمتباينة $٣س^٢ - ٢ < ٥س$ هي

(أ) $(-\frac{١}{٣}، ٢)$ (ب) $(-٢، \frac{١}{٤})$ (ج) $(-١، \frac{١}{٣})$ (د) $(-٣، ٤)$

٨) إن مجموعة الحل للمتباينة $\frac{٥س + ٢}{س - ٢} \geq ٣$ هي

(أ) $(-\infty ، -٤]$ (ب) $[-٤ ، ٢)$ (ج) $[-٢ ، ٤]$ (د) $(٢ ، \infty)$

٩) إن مجموعة الحل للمتباينة $٣س^٢ - ٥س < ١٢$ هي

(أ) $(-١ ، \frac{١}{٤})$ (ب) $(-٢ ، \frac{١}{٤})$ (ج) $(-١ ، \frac{١}{٣})$ (د) $(\frac{-٤}{٣} ، ٣)$

١٠) إن مجموعة الحل للمتباينة $\frac{٢س + ٣}{س - ٢} \geq \frac{س - ٣}{س - ٢}$ هي

(أ) $(-\infty ، -٦]$ (ب) $[-٦ ، ٢)$ (ج) $[-٦ ، ٦]$ (د) $(٦ ، \infty)$

١١) إن مجموعة الحل للمتباينة $(٢س - ١)(٢س + ٣) \geq ٤س(س - ٢)$ هي

(أ) $[-\frac{١}{٤} ، \frac{١}{٤}]$ (ب) $(-\infty ، \frac{-١}{٤}]$ (ج) $[\frac{١}{٤} ، \infty)$ (د) $(-\infty ، \frac{١}{٤}]$

١٢) إن مجموعة الحل للمتباينة $(س^٢ + ٢)(س + ١) \geq س(س^٢ + ٥)$ هي

(أ) $[-٢ ، ١]$ (ب) $[-٢ ، -١]$ (ج) $[١ ، ٢]$ (د) $[-١ ، ٢]$

١٣) إن مجموعة الحل للمتباينة $\frac{٣س + ٢}{س - ٢} \geq ٢$ هي

(أ) $(-\infty ، -٦]$ (ب) $[-٦ ، ٢)$ (ج) $[-٢ ، ٦]$ (د) $[٦ ، \infty)$

١٤) إن مجموعة الحل للمتباينة $٢ < \frac{٣}{س - ١} \leq ٤$ هي

(أ) $[\frac{٧}{٤} ، \frac{٥}{٢}]$ (ب) $(\frac{٧}{٤} ، \frac{٥}{٢}]$ (ج) $(١ ، \frac{٧}{٤}]$ (د) $(١ ، \frac{٥}{٢})$

# الفصل الرابع

# القيمة المطلقة

## الفصل الرابع

### القيمة المطلقة

في هذا الفصل سوف نعرف القيمة المطلقة ونذكر خواصها ونوضح كيفية إيجاد مجموعة الحل للمعادلة أو للمتباينة التي تحتوي على قيمة مطلقة

### ( ٤ – ١ ) القيمة المطلقة

تعريف : القيمة المطلقة للعدد الحقيقي س يرمز لها بالرمز |س| حيث

$$|\text{س}| = \begin{cases} -\text{س} & \text{إذا كان س} < ٠ \\ ٠ & \text{إذا كان س} = ٠ \\ \text{س} & \text{إذا كان س} > ٠ \end{cases}$$

فمثلا

$$|٤| = ٤ \quad ، \quad \left|\frac{-٧}{٢}\right| = -\left(\frac{-٧}{٢}\right) = \frac{٧}{٢} \quad ، \quad |٠| = ٠$$

نلاحظ أن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي هي عدد موجب أو صفر

مثال أوجد قيمة $\frac{|\text{س}|}{\text{س}}$ عندما س < ٠ ، س > ٠

حل إذا كان س < ٠ فإن |س| = - س وبالتالي

$$\frac{|\text{س}|}{\text{س}} = \frac{-\text{س}}{\text{س}} = -١$$

إذا كان س > ٠ فإن |س| = س وبالتالي

$$\frac{|\text{س}|}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{س}} = ١$$

أمثلة توضيحية

$\because \pi = 3.1417$ فان $3 - \pi < 0$ وبالتالي

$$|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$$

$\because \sqrt{3} > \sqrt{2}$ فان $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$ ، $\sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$ وبالتالي

$$|\sqrt{3} - \sqrt{2}| - |\sqrt{2} - \sqrt{3}| = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 0$$

**( ٤ - ٢ ) خواص القيمة المطلقة**

ليكن أ ، ب عددين حقيقيين

١) $|\text{أ}| \geq 0$

٢) $|-\text{أ}| = |\text{أ}|$

٣) $|\text{أب}| = |\text{أ}|\,|\text{ب}|$

٤) $\left|\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}\right| = \dfrac{|\text{أ}|}{|\text{ب}|}$

٥) $|\text{أ}| = \text{ب} \Leftrightarrow \text{أ} = -\text{ب}$ أو $\text{أ} = \text{ب}$

٦) $|\text{أ}| < \text{ب} \Leftrightarrow -\text{ب} < \text{أ} < \text{ب}$

٧) $|\text{أ}| > \text{ب} \Leftrightarrow \text{أ} < -\text{ب}$ أو $\text{أ} > \text{ب}$

٨) $-|\text{أ}| \leq \text{أ} \leq |\text{أ}|$

٩) $|\text{أ} + \text{ب}| \leq |\text{أ}| + |\text{ب}|$

## ( ٤-٣ ) العلاقة بين الجذر التربيعي و القيمة المطلقة

لكل عدد حقيقي س فان

$$\sqrt{س^{٢}} = |س|$$

مثال

اكتب في ابسط صورة $\frac{\sqrt{س^{٤} + س^{٢}}}{س}$ إذا كان $س < ٠$

حل

عندما $س < ٠$ فان $|س| = -س$

$$\frac{\sqrt{س^{٤} + س^{٢}}}{س} = \frac{\sqrt{س^{٢}(س^{٢} + ١)}}{س} = \frac{\sqrt{س^{٢}}\sqrt{س^{٢} + ١}}{س}$$

$$= \frac{|س|\sqrt{س^{٢} + ١}}{س} = \frac{-س\sqrt{س^{٢} + ١}}{س} = -\sqrt{س^{٢} + ١}$$

مثال

اكتب في ابسط صورة $\frac{\sqrt{س^{٢} + ٢س + ١}}{س^{٢} - ١}$ إذا كان $س > -١$

حل

$$\frac{\sqrt{س^{٢} + ٢س + ١}}{س^{٢} - ١} = \frac{\sqrt{(س + ١)^{٢}}}{س^{٢} - ١} = \frac{|س + ١|}{(س - ١)(س + ١)}$$

$$= \frac{س + ١}{(س - ١)(س + ١)}$$ ( لأن $س + ١ > ٠$ )

$$= \frac{١}{س - ١}$$

## ( ٤ - ٤ ) معادلات تحتوي قيمة مطلقة

نستخدم الخاصية ( ٥ )

| أ | = ب ⟺ أ = - ب أو أ = ب

مثال أوجد مجموعة الحل للمعادلة

| س - ٣ | = ٤

حل | س - ٣ | = ٤ ⟺

س - ٣ = - ٤ أو س - ٣ = ٤

س = - ١ أو س = ٧

مجموعة الحل هي { -١ ، ٧ }

مثال أوجد مجموعة الحل للمعادلة

| ٣ س - ٢ | = | ٥ س + ٤ |

حل | ٣ س - ٢ | = | ٥ س + ٤ | ⟺

٣ س - ٢ = - ( ٥ س + ٤ ) أو ٣ س - ٢ = ٥ س + ٤

٣ س - ٢ = - ٥ س - ٤ أو ٣ س - ٥ س = ٤ + ٢

٣ س + ٥ س = - ٤ + ٢ أو -٢ س = ٦

٨ س = -٢ س = $\frac{٦}{٢-}$

س = $\frac{١-}{٤}$ س = - ٣

مجموعة الحل هي { -٣ ، $\frac{١-}{٤}$ }

## ( ٤ – ٥ ) متباينات تحتوي قيمة مطلقة

نستخدم الخاصية ( ٦ ) | أ | < ب ⇔ -ب < أ < ب

أو الخاصية ( ٧ ) | أ | > ب ⇔ أ < -ب أو أ > ب

**مثال** أوجد مجموعة الحل للمتباينة | س – ٣ | < ٤

**حل** | س -٣ | < ٤ ⇔ -٤ < س – ٣ < ٤ ⇔ -١ < س – ٣ < ٤ ⇔ -١ < س < ٧

مجموعة الحل هي ( -١ ، ٧ )

**مثال** أوجد مجموعة الحل للمتباينة | س+ ٤ | ≥ ٢

**حل** | س + ٤ | ≥ ٢ ⇔ س + ٤ ≤ -٢ أو س + ٤ ≥ ٢

⇔ س ≤ -٦ أو س ≥ -٢

مجموعة الحل هي ( -∞ ، -٦ ] ∪ [ -٢ ، ∞ )

**مثال** أوجد مجموعة الحل للمتباينة $\frac{١}{|٢س - ٣|}$ > ٥

**حل** نلاحظ أن س = $\frac{٣}{٢}$ لا يمكن أن يكون حلا للمتباينة ومن جهة أخرى نعلم أنه إذا كان

٠< أ < ب فإن $\frac{١}{أ}$ > $\frac{١}{ب}$ وبالتالي فإن المتباينة تكافئ | ٢ س – ٣ | < $\frac{١}{٥}$ حيث س ≠ $\frac{٣}{٢}$

أو -$\frac{١}{٥}$ < ٢س – ٣ < $\frac{١}{٥}$ ⇔ -$\frac{١}{٥}$ + ٣ < ٢س < $\frac{١}{٥}$ + ٣

⇔ $\frac{١٤}{٥}$ < ٢س < $\frac{١٦}{٥}$ ⇔ $\frac{٧}{٥}$ < س < $\frac{٨}{٥}$

مجموعة الحل هي ( $\frac{٧}{٥}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ) ∪ ( $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٨}{٥}$ )

# الفصل الخامس

## الدوال

# الدوال الحقيقية

## ( ٥ـ ١ ) مقدمة

يعتبر مفهوم الدالة واحدا من أهم المفاهيم الرياضية حيث يلعب دورا أساسيا في مواضيع الحسبان . سوف نعطي في هذا الفصل فكرة مختصرة عن مجال تعريف الدالة وتصنيف الدوال والعمليات عليها .

## ( ٥ ـ ٢ ) الدوال الحقيقية

نعلم أن الدالة هي علاقة بين مجموعتين بحيث يقترن كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر وحيد من المجموعة الثانية .

سوف نركز اهتمامنا على الدوال الحقيقية أي تلك الدوال التي تكون معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها وتأخذ قيما حقيقية وفي هذه الحالة نكتفي بذكر قاعدة الاقتران ونرمز للدالة بأحد الرموز

ق ( س ) ، د ( س ) ، هـ ( س ) ،...

## ( ٥ـ ٣ ) مجال الدالة

نسمي مجموعة جميع قيم س التي تكون لأجلها الدالة د( س ) معرفة مجال الدالة .

فالدالة الحدودية معرفة على ح ولذلك فإن مجالها يساوي ح

أمثلة توضيحية

١) الدالة $د(س) = \sqrt{٢س+٦}$ معرفة لكل قيم س

بحيث يكون $٢س + ٦ \geq ٠$ أو $٢س \geq -٦$ أو $س \geq -٣$

و بالتالي فإن مجال الدالة $د(س)$ هو $[-٣ ، \infty)$

٢) الدالة $ق(س) = \frac{١}{س^٢ - ٦س - ٧}$ معرفة لكل قيم س

بحيث يكون $س^٢ - ٦س - ٧ \neq ٠$

$س^٢ - ٦س - ٧ = (س - ٧)(س + ١) = ٠$

عندما $س = ٧$ أو $س = -١$

و بالتالي فإن مجال الدالة $ق(س)$ هو $ح - \{-١ ، ٧\}$

٣) الدالة $هـ(س) = \sqrt[٣]{س^٢ + ٣س}$ معرفة لكل قيم س

و بالتالي فإن مجال الدالة هـ (س) هو ح

## ( ٥ - ٤ ) الدوال المعرفة جزئيا

يتم تعريف بعض الدوال بأكثر من قاعدة وفي هذه الحالة نقول عن الدالة إنها معرفة جزئيا و يكون مجال هذه الدالة مساويا إلى مجموعة جميع قيم س التي تجعل الدالة معرفة

و المثال التالي يوضح ذلك

مثال

ليكن

د (س) =
- س - ١ إذا كان -٥ ≤ س < -١
- $س^{٣}$ إذا كان -١ ≤ س < ٢
- ٦ إذا كان س > ٢

بما أن العدد ١ يقع في الفترة [ -١ ، ٢ ) فإننا

نعتبر د (س) = $س^{٣}$ لإيجاد د ( ١ ) = $( ١ )^{٣}$ = ١

وبما أن العدد ٥ يقع في الفترة ( ٢ ، ٥ ) فإننا نجد أن

د( ٥ ) = ٦ حيث د (س ) = ٦ في هذه الفترة

ولإيجاد د( -٥ ) نعتبر د(س ) = س - ١ فيكون

د(-٥ ) = -٥ - ١ = -٦

نلاحظ أن الدالة غير معرفة عند العدد ٢ وأن

مجال الدالة د (س ) هو [ -٥ ، ∞ ) – { ٢ }

## ( ٥ – ٥ ) تصنيف الدوال

١ ) الدالة الثابتة : د (س ) = أ لكل س في مجال الدالة

ق (س ) = ٧ ، د (س ) = – $\frac{٥}{٢}$ هي دوال ثابتة

٢) الدالة الخطية: د (س ) = أ س + ب حيث أ ، ب ∈ ح ، أ ≠ ٠

ق (س ) = ٢ س – ٥ ، د(س ) = $\frac{٣}{٤}$ س ، هـ (س ) = – ٥س – ١

هي دوال خطية

٣) الدالة التربيعية : د(س) = أ س$^{٢}$ + ب س + جـ ، أ ≠ ٠

د (س) = ٣ س$^{٢}$ – ١ ، ق(س) = ٥ س$^{٢}$ + ٢ س – ٧

هي دوال تربيعية

٤) الدالة الحدودية : د (س) = أ$_{ن}$ س$^{ن}$ + أ$_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + ...... + أ$_{١}$ س + أ$_{٠}$

د(س) = - ٢ س$^{٥}$ +٣ س + ١ ، هـ (س) = س$^{٧}$ + ٤ س$^{٢}$ + ٥

هي دوال حدودية . لاحظ أن الدوال الثابتة والخطية و التربيعية هي دوال حدودية

٥) الدالة النسبية : د (س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{ل (س)}}$ ، ل (س) ≠ ٠

ق (س) ، ل (س) دالتان حدوديتان

د (س) = $\frac{\text{٢ س + ١}}{\text{٣ س}^{٢}\text{ + ٧}}$ ، هـ (س) = $\frac{\text{٥ س}^{٢}\text{ + ٨ س+٢}}{\text{س}^{٢}\text{ +٢س - ٥}}$

هي دوال نسبية

٦) الدالة المحايدة : د (س) = س لكل قيم س في مجال الدالة

٧) دالة القيمة المطلقة : د (س) = | س | لكل قيم س في مجال الدالة

٨) الدالة الزوجية : د (- س) = د (س) لكل قيم س في مجال الدالة

د(س) = س$^{٢}$ + ١ ، ق (س) = ٧ س$^{٤}$ + ٥س$^{٢}$ + ١

هي دوال زوجية

٩) الدالة الفردية : د (- س) = - د (س) لكل قيم س في مجال الدالة

د (س) = س$^{٣}$ ، ق (س) = - ٣ س$^{٥}$ + س هي دوال فردية

## ( ٥ ـ ٦ ) العمليات على الدوال

لتكن د ( س ) ، هـ ( س ) دالتين حقيقيتين

١ ) دالة جمع دالتين

( د + هـ ) ( س ) = د ( س ) + هـ ( س )

٢ ) دالة فرق دالتين

( د ـ هـ ) ( س ) = د ( س ) ـ هـ ( س )

٣ ) دالة ضرب دالتين

( د هـ ) ( س ) = د ( س ) هـ ( س )

٤ ) دالة قسمة دالتين

$\left( \frac{\text{د}}{\text{هـ}} \right)$ ( س ) = $\frac{\text{د ( س )}}{\text{هـ ( س )}}$ ، هـ ( س ) ≠ ٠

ملاحظة

مجال ( د + هـ ) = مجال ( د ـ هـ ) = مجال ( د هـ ) = مجال د $\cap$ مجال هـ

مجال $\frac{\text{د ( س )}}{\text{هـ ( س )}}$ = مجال د $\cap$ مجال هـ ، هـ ( س ) ≠ ٠

مثال

ليكن د ( س ) = س$^{٢}$ + ١ ، هـ ( س ) = $\sqrt{\text{س}}$

أوجد الدوال د + هـ ، د ـ هـ ، د هـ ، $\frac{\text{د}}{\text{هـ}}$ ومجال كل منها

حل

مجال د( س ) = ح ، مجال هـ ( س ) = [ ٠ ، ∞ )

١ ) $(د + هـ)(س) = د(س) + هـ(س)$

$= س^{2} + ١ + \sqrt{س} = س^{2} + \sqrt{س} + ١$

مجال $(د + هـ) = ح \cap [٠ ، \infty) = [٠ ، \infty)$

٢ ) $(د - هـ)(س) = د(س) - هـ(س)$

$= س^{2} + ١ - \sqrt{س} = س^{2} - \sqrt{س} + ١$

مجال $(د - هـ) = ح \cap [٠ ، \infty) = [٠ ، \infty)$

٣) $(د . هـ)(س) = د(س) . هـ(س)$

$= (س^{2} + ١) . (\sqrt{س}) = س^{\frac{٥}{٢}} + س^{\frac{١}{٢}}$

مجال $(د . هـ) = ح \cap [٠ ، \infty) = [٠ ، \infty)$

٤ ) $\left(\frac{د}{هـ}\right)(س) = \frac{د(س)}{هـ(س)}$

$$\frac{س^{2} + ١}{\sqrt{س}} = \frac{س^{2}}{\sqrt{س}} + \frac{١}{\sqrt{س}} = س^{\frac{٣}{٢}} + س^{\frac{-١}{٢}}$$

مجال $\left(\frac{د}{هـ}\right) = ح \cap [٠ ، \infty) - \{٠\} = (٠ ، \infty)$

## ( ٥ - ٧ ) تركيب دالتين

إن تركيب الدالتين د ، هـ هو دالة يرمز لها بالرمز د ٥ هـ حيث

$(د \circ هـ)(س) = د(هـ(س))$

سوف نوضح من خلال الأمثلة أن

$(د \circ هـ) \neq (هـ \circ د)$ بصورة عامة

**مثال** ليكن $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٣\text{س}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٢\text{س} + ١$

أوجد كلا من $\text{د} \circ \text{هـ}$ ، $\text{هـ} \circ \text{د}$

**الحل** $(\text{د} \circ \text{هـ})(\text{س}) = \text{د}(\text{هـ}(\text{س}))$

$$= \text{د}(٢\text{س} + ١) = (٢\text{س} + ١)^{٢} - ٣(٢\text{س} + ١)$$

$$= ٤\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ١ - ٦\text{س} - ٣$$

$$= ٤\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٢$$

$$(\text{هـ} \circ \text{د})(\text{س}) = \text{هـ}(\text{د}(\text{س}))$$

$$= \text{هـ}(\text{س}^{٢} - ٣\text{س}) = ٢(\text{س}^{٢} - ٣\text{س}) + ١$$

$$= ٢\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ١$$

**لاحظ أن** $(\text{د} \circ \text{هـ})(\text{س}) \neq (\text{هـ} \circ \text{د})(\text{س})$

**مثال**

ليكن $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} + ١}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س} - ١}$

**أوجد كلا من** $\text{د} \circ \text{هـ}$ ، $\text{هـ} \circ \text{د}$

**الحل**

$$(\text{د} \circ \text{هـ})(\text{س}) = \text{د}(\text{هـ}(\text{س})) = \text{د}\left(\frac{٢}{\text{س} - ١}\right) = \frac{\frac{٢}{\text{س} - ١}}{\frac{٢}{\text{س} - ١} + ١}$$

$$= \frac{٢}{٢ + \text{س} - ١} = \frac{٢}{\text{س} + ١}$$

$$(\text{هـ} \circ \text{د})(\text{س}) = \text{هـ}(\text{د}(\text{س})) = \text{هـ}\left(\frac{\text{س}}{\text{س} + ١}\right) = \frac{٢}{\frac{\text{س}}{\text{س} + ١} - ١}$$

$$= \frac{٢(\text{س} + ١)}{\text{س} - (\text{س} + ١)} = \frac{٢(\text{س} + ١)}{\text{س} - \text{س} - ١} = -٢(\text{س} + ١)$$

## مسائل مختارة لاختبار القدرات عن الفصل الخامس

١) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ١ + |٣ - ٢س| & \text{عندما } س > ١ \\ (٤س + ٢)^{\frac{١}{٢}} & \text{عندما } س \le ١ \end{cases}$$

فإن ق(٦) – ق(-١) =

(أ) -٣ (ب) ٣ (ج) ٩ (د) ٨١

٢) إذا كان د(س) = $س^٢$ – ٣س + ٢ ، هـ(س) = ٤س – ١

فإن (د هـ)(-١) =

(أ) ٤٢ (ب) -٣٠ (ج) ٣٠ (د) ١٨

٣) إذا كان ق(س) = $\frac{٣س + ٦}{س + ٣}$ فإن ق(م + ٢)

(أ) $\frac{٣م + ٦}{م + ٣}$ (ب) $\frac{٣م + ٨}{م + ٥}$ (ج) $\frac{٣م + ١٢}{م + ٥}$ (د) $\frac{٣م + ١٢}{م + ٣}$

٤) إذا كان د(س) = ٢$س^٢$ – س فإن د(١ - $\sqrt{٣}$) =

(أ) ٧ + $\sqrt{٣}$ (ب) ٧ - ٣$\sqrt{٣}$ (ج) ٧ – ٥$\sqrt{٣}$ (د) – ٥ + $\sqrt{٣}$

٥) إذا كان هـ(س) = ٤ - $س^٢$ فإن $\frac{هـ(س + ل) - هـ(س)}{ل}$ =

(أ) ٢س – ل (ب) ٢س + ل (ج) – ٢س + ل (د) - ٢س - ل

٦) إذا كان ق(س) = - $\frac{٥}{س}$ فإن $\frac{ق(س) - ق(ل)}{س - ل}$ =

(أ) $\frac{٥}{ل س}$ (ب) - $\frac{٥}{ل س}$ (ج) - $\frac{ل س}{٥}$ (د) ٥ ل س

٧) إذا كان $د(س) = \frac{س - ١}{س + ١}$ فإن $د(س + ١) + د(\frac{٢}{س}) =$

(أ) $\frac{١}{س + ١}$ (ب) $\frac{١}{س + ٢}$ (ج) $\frac{٢}{س + ١}$ (د) $\frac{٢}{س + ٢}$

٨) إن مجال الدالة $ق(س) = \sqrt{س - ٢} + \sqrt{٣ - س}$ هو

(أ) $[٣ ، \infty)$ (ب) $(-\infty ، ٣]$ (ج) $[٢ ، ٣]$ (د) $[٢ ، \infty)$

٩) إن مجال الدالة $ق(س) = \sqrt{س^٢ - ٢س}$ هو

(أ) $(-\infty ، ٠)$ (ب) $(-\infty ، ٠] \cup [٢ ، \infty)$ (ج) $[٠ ، ٢]$ (د) $[٢ ، \infty)$

١٠) إن مجال الدالة $ق(س) = \frac{\sqrt{٢ - س - س^٢}}{س - ١}$ هو

(أ) $[-١ ، ١]$ (ب) $[-٢ ، ١)$ (ج) $(-٢ ، ١]$ (د) $(-٢ ، ١)$ .

١١) إن مجال الدالة $ق(س) = \sqrt[٣]{س + ١} + \sqrt{١ - س}$ هو

(أ) $(-\infty ، ١]$ (ب) $[١ ، \infty)$ (ج) $[-١ ، ١]$ (د) $[-١ ، \infty)$

١٢) إذا كان $د(س) = ٣س - ٢$ ، $هـ(س) = -س^٢ - ٢س$ فإن $(هـ \circ د)(س) =$

(أ) $-٩س^٢ - ٦س + ٨$ (ب) $-٩س^٢ + ٦س$

(ج) $-٩س^٢ - ٦س$ (د) $-٩س^٢ - ٤$

١٣) إذا كان $ق(س) = \frac{س}{س + ١}$ ، $ل(س) = ٢س - ١$ فإن $(ل \circ ق)(س) =$

(أ) $\frac{س - ١}{س + ١}$ (ب) $\frac{٢س - ١}{س + ١}$ (ج) $\frac{-٢}{س + ١}$ (د) $\frac{٢}{س + ١}$

١٤) إذا كان $د(س) = س^{٢}$ ، $ق(س) = \sqrt{س^{٢} - ١}$ فإن $(د \circ ق)(س) =$

(أ) $(س - ١)^{٢}$ (ب) $\sqrt{س^{٤} - ١}$ (ج) $س^{٢} - ١$ (د) $\sqrt{س^{٢} + ١}$

١٥) إذا كان $هـ(س) = \sqrt{س} + ٣$ ، $د(س) = |س + ١|$ فإن $(د \circ هـ)(س) =$

(أ) $|س+١|(س + ٣)$ (ب) $\sqrt{س + ٤}$ (ج) $\sqrt{|س + ١|} + ٣$ (د) $\sqrt{س} + ٤$

١٦) إذا كان $د(س) = \frac{١}{س}$ ، $ق(س) = \sqrt{س}$ ، $هـ(س) = س^{٢} + ٢س + ١$

فإن $(د \circ ق \circ هـ)(س) =$

(أ) $\frac{١}{س + ١}$ (ب) $\frac{١}{|س + ١|}$ (ج) $س + ١$ (د) $|س + ١|$

١٧) إذا كان $ل(س) = \sqrt{س + ١}$ فإن $\frac{ل(س + هـ) - ل(س)}{هـ} =$

(أ) $\frac{١}{٢\sqrt{س + هـ}}$ (ب) $\frac{١}{٢\sqrt{س + ١}}$

(ج) $\sqrt{هـ + ١}$ (د) $\frac{١}{\sqrt{س + ١} + \sqrt{س + هـ + ١}}$

١٨) إذا كان $ق(س) = س^{٢} + ١$ فإن $\frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} =$

(أ) $٢س$ (ب) $٢س + هـ$ (ج) $٢هـ + س$ (د) ليس أيا مما سبق

١٩) إن مجال الدالة $ق(س) = \frac{\sqrt{٣ - س}}{٢ - س} + \sqrt{س - ٢}$ هو

(أ) $(٢ ، ٣)$ (ب) $(-\infty ، ٣)$ (ج) $[٢ ، ٣]$ (د) $(٢ ، ٣]$

٢٠) إذا كان $ق(س) = -٣س^{٢} - س$ ، $د(س) = ٢ - ٥س$ فإن $ق(د(١)) =$

(أ) ٣٠ (ب) -٢٤ (ج) -١٥ (د) ١٨

# الفصل السادس

# تطبيقات حياتية

# تطبيقات حياتية

يشتمل هذا الفصل على عدة تطبيقات حياتية مثل تحويل الوحدات والمساحات و الحجوم والأوزان والنسب والتناسب و النسب المنوية

## ( ٦ – ١ ) تحويل الوحدات

سوف نوضح من خلال الأمثلة عمليات التحويل في عدة مجالات منها :

الأوزان ، المساحة و الحجوم ، السرعة وتحويل العملات .

وتجدر الإشارة إلى أن التحويل يجب أن يكون ضمن النظام المتري وإذا كان هناك تحويل بين أكثر من نظام ( كالتحويل مثلا من الإمبراطوري إلى المتري وبالعكس ) فإن المعلومات اللازمة سوف تعطى لذلك .

مثال إذا كان الرطل يساوي ٤٥٤ غرام فإن

٣٥٠ كلغ = ٣٥٠ ÷ ٠,٤٥٤ = ٧٧٠,٩ رطلا

١٠٥ غ = ١٠٥ ÷ ٤٥٤ = ٠,٢٣ رطلا

١٣ رطلا = ١٣ × ٠,٤٥٤ = ٥,٩ كلغ

مثال ٣م$^{٣}$ = ٣ × ( ١٠٠ )$^{٣}$ = ٣× ١٠٠٠٠٠٠ = ٣٠٠٠٠٠٠ سم$^{٣}$

٢٠٠ ليتر = ٢٠٠ × ١٠٠٠ سم$^{٣}$ = ٢٠٠٠٠٠سم$^{٣}$

٧ م$^{٢}$ = ٧ × ( ١٠٠ )$^{٢}$ سم$^{٢}$= ٧ × ١٠٠٠٠ = ٧٠٠٠٠سم$^{٢}$

١٥٠٠٠٠ سم$^{٢}$ = ١٥٠٠٠٠ ÷ ( ١٠٠ )$^{٢}$ م$^{٢}$ = ١٥٠٠٠٠ ÷ ١٠٠٠٠ = ١٥ م$^{٢}$

مثال إذا كانت سرعة سيارة تساوي ٩٠كم/سا فإن سرعتها مقدرة بالمتر في الدقيقة هي

$$٩٠ \text{ كم/سا} = ٩٠ \times \frac{١٠٠٠\text{م}}{٦٠\text{ د}} = ١٥٠٠\text{م/د}$$

مثال

إذا كان الدولار الأمريكي يعادل ٣٠٠ فلس كويتي فكم دولارا يمكن أن نحصل عليها إذا كان لدينا ٤٥٠ دينارا

حل

$$\text{الفلس} = \frac{١}{٣٠٠}\$$$

$$٤٥٠ \text{ دك} = ٤٥٠ \times ١٠٠ \times \frac{١}{٣٠٠} = ١٥٠٠\$$$

مثال

إذا كان تركيز محلول يساوي ٠,٠٤كلغ / ل فإن تركيزه مقدرا بالملغ/سم$^{٣}$ هو

$$\frac{٠,٠٤\text{كلغ}}{\text{ليتر}} = \frac{٠,٠٤ \times ١٠٠٠٠٠٠}{١٠٠٠\text{سم}^{٣}} = ٤٠\text{ملغ/سم}^{٣}$$

مثال

إذا كان وزن أحمد يساوي ٨٥ كلغ فكم رطلا يزن أحمد إذا علمت أن الرطل الواحد يعادل ٠,٤٥٤ كلغ ؟

حل

$$١ \text{ كلغ} = \frac{١}{٠,٤٥٤} \text{ رطلا} = ٢,٢٠ \text{ رطل}$$

$$٨٥ \text{ كلغ} = ٨٥ \times ٢,٢٠ = ١٨٧ \text{ رطلا}$$

## ( ٦ - ٢ ) المساحة

سوف نبين في هذا البند كيف نوجد مساحة بعض الأشكال المستوية مع العلم أن وحدة المساحة هي مربع وحدة الطول .

فيما يلي بعض القوانين المستخدمة في حساب المساحة

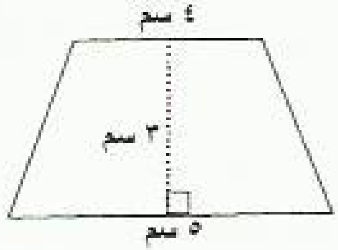
مساحة مثلث $= \frac{١}{٢} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

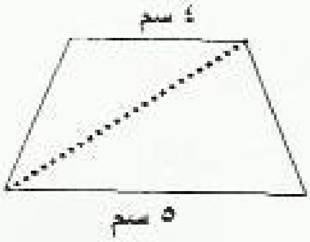
مساحة مستطيل = الطول $\times$ العرض

مساحة مربع = طول الضلع $\times$ طول الضلع

مساحة دائرة $= \pi$ ( نصف القطر )$^٢$

مثال أوجد مساحة شبه المنحرف المبين في الشكل التالي




حل نقسم شبه المنحرف إلي مثلثين كما هو مبين في الشكل المجاور .

نلاحظ أن المثلثين لهما نفس الارتفاع ٣ سم وان قاعدتيهما

٤ سم ، ٥ سم

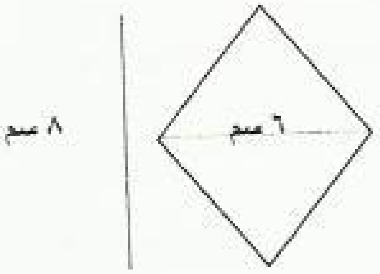
وبالتالي فان مساحة شبه المنحرف تساوي مجموع مساحتي هذين المثلثين

المساحة $= \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٣ + \frac{١}{٢} \times ٥ \times ٣ = ٦ + ٧,٥ = ١٣,٥$ سم$^٢$

ملاحظة : يمكن حساب المساحة باستخدام قاعدة مساحة شبه المنحرف

مساحة شبه المنحرف $= \frac{١}{٢}$ ( مجموع القاعدتين ) $\times$ الارتفاع

مثال أوجد مساحة المعين في الشكل التالي




حل

نقسم المعين إلى مثلثين متطابقين قاعدة كل منهما ٦سم وارتفاعه ٤ سم وبالتالي

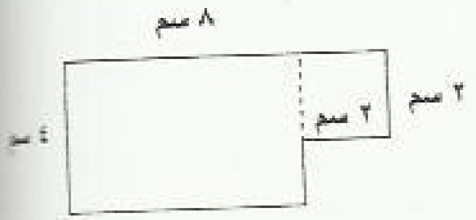
فإن مساحة المعين تساوي ضعف مساحة أحد هذين المثلثين

المساحة $= 2 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 24$ سم$^2$

ملاحظة يمكن حساب المساحة باستخدام قاعدة مساحة المعين

المساحة تساوي نصف ناتج ضرب قطري المعين

مثال أوجد مساحة المنطقة المبينة في الشكل



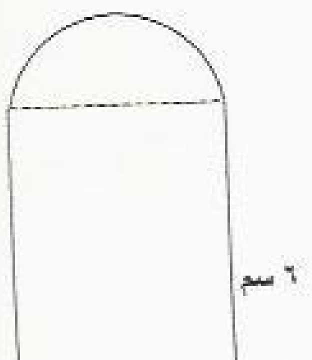

حل نقسم الشكل إلي مستطيل ومربع

المساحة $= (6 \times 4) + (2 \times 2)$

$= 24 + 4 = 28$ سم$^2$

مثال

أوجد مساحة المنطقة المبينة في الشكل




حل نقسم المنطقة إلى مستطيل ونصف دائرة

المساحة $= (4 \times 6) + (\frac{1}{2}\pi \times 2^2)$

$= (24 + 2\pi)$ سم$^2$

## (٦-٣) الحجم

سوف نبين في هذا البند كيف نوجد حجم بعض المجسمات مع العلم أن وحدة الحجم هي مكعب وحدة الطول .

فيما يلي بعض القوانين المستخدمة في حساب الحجم

حجم شبة المكعب ( متوازي المستطيلات ) = الطول × العرض × الارتفاع

حجم المكعب = طول الضلع × طول الضلع × طول الضلع

حجم اسطوانة دائرية قائمة = $\pi$ ( نصف القطر )$^{٢}$ × الارتفاع

حجم مخروط دائري قائم = $\frac{١}{٣}$ $\pi$ ( نصف القطر )$^{٢}$ × الارتفاع

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ $\pi$ ( نصف القطر )$^{٣}$

مثال

أوجد حجم صندوق على شكل متوازي مستطيلات طوله ٨ سم ، عرضه ٥سم وارتفاعه ٧سم

حل الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

= ٨ × ٥ × ٧ = ٢٨٠ سم$^{٣}$

مثال

يراد تعبئة ١٢٨ ليترا من العصير في زجاجات سعة كل منها ربع ليتر. أوجد عدد الزجاجات اللازمة

حل عدد الزجاجات المطلوبة = ١٢٨ ÷ $\frac{١}{٤}$

= ١٢٨ × ٤ = ٥١٢ زجاجة

مثال

مصنع لتعقيم وتوزيع الحليب يتم تعقيم الحليب في براميل اسطوانية قطر قاعدة كل برميل مترا واحدا وارتفاعه متران ثم يوزع الحليب بعد التعقيم في علب سعة كل علبة ٣١٤ سم$^{٣}$ .

أوجد عدد العلب اللازمة لتفريغ برميل واحد مملوء بالحليب (اعتبر $\pi$ = ٣،١٤)

حل

حجم البرميل = $\pi$ نق$^{٢}$ × الارتفاع

= ٣,١٤ × ( ٥٠ )$^{٢}$ × ٢٠٠ = ١٥٧٠٠٠٠٠سم$^{٣}$

عدد العلب = ١٥٧٠٠٠٠ ÷ ٣١٤ = ٥٠٠٠ علبة

مثال

طريق طوله ٣ كم وعرضه ١٤م يراد فرشه بالإسفلت بسماكة ٣٠سم ، كم شاحنة من الإسفلت يلزم لذلك إذا كانت سعة الشاحنة الواحدة ١٢ م$^{٣}$ ؟

الحل

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

= ( ٣ × ١٠٠٠ ) × ١٤ × ( ٣٠ ÷ ١٠٠ )

= ٣٠٠٠ × ١٤ × ٠,٣

= ١٢٦٠٠ م$^{٣}$

عدد الشاحنات = ١٢٦٠٠ ÷ ١٢

= ١٠٥٠ شاحنة

## ( ٦- ٤ ) الأوزان

قبل إعطاء أمثلة حياتية عن الأوزان نذكر بعض الاختصارات المستخدمة لوحدات الأوزان

غ للغرام كلغ للكيلوغرام ملغ للمليغرام

مثال

وزن أحمد وخالد معا ١٢٠كلغ . أوجد وزن كل منهما إذا كان وزن أحمد يزيد عن وزن خالد بمقدار ٢٤كلغ

حل بما أن وزن أحمد يزيد ٢٤كلغ عن وزن خالد فإذا استبعدنا هذا الفرق بين الوزنين من مجموع الوزنين فإننا سوف نحصل على ٩٦كلغ وهذا يمثل ضعف وزن خالد وبالتالي فإن

وزن خالد = ٩٦ ÷ ٢ = ٤٨كلغ

وزن أحمد = ٤٨ + ٢٤ = ٧٢كلغ

ملاحظة يمكن إيجاد الأوزان جبريا بأن نفرض أن وزن خالد س فيكون وزن أحمد س+٢٤ وبالتالي س + س + ٢٤ = ١٢٠

و منها س = ٤٨ كلغ وزن خالد وهكذا . .

مثال

الوزن الإجمالي لطاولة وكرسي وحقيبة ٤٢كلغ . إذا كان وزن الكرسي ضعف وزن الحقيبة ، ووزن الطاولة ضعف وزن الكرسي فما هو وزن الطاولة ؟

حل نفرض أن وزن الحقيبة س فيكون وزن الكرسي ٢س و وزن الطاولة ٤س

س + ٢س + ٤س = ٤٢ أو ٧س = ٤٢ ومنها س = ٦

وزن الطاولة = ٤ × ٦ = ٢٤كلغ

## ( ٦ ـ ٥) معدل التغير

كثيرا ما تصادفنا حالات تتطلب منا إيجاد معدل تغير كمية بالنسبة إلى كمية أخرى فالسرعة الوسطى مثلا هي معدل تغير موضع جسم بالنسبة للزمن وذلك عندما ينتقل الجسم من مكان إلى أخر خلال فترة زمنية معينة ويكون

$$\text{السرعة الوسطى( معدل التغير )} = \frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{الزمن اللازم لقطع المسافة}}$$

أو المسافة = المعدل × الزمن

مثال سيارة سرعتها ٧٠كم/سا . أوجد المسافة التي تقطعها السيارة خلال ٤ ساعات

حل المسافة = السرعة × الزمن

= ٧٠ × ٤ = ٢٨٠كم

مثال قطعت سيارة مسافة ٤٠٠ ميلا على مرحلتين حيث كانت سرعتها ٤٠ ميلا في الساعة خلال نصف المسافة الأولى وكانت سرعتها ٥٠ميلا في الساعة خلال النصف الأخر . أوجد السرعة الوسطى للسيارة خلال الرحلة

حل نوجد أولا الزمن الذي استغرقته السيارة لقطع المسافة الكلية .

$$\text{الزمن اللازم لقطع المرحلة الأولى} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{٢٠٠}{٤٠} = ٥ \text{ ساعات}$$

$$\text{الزمن اللازم لقطع المرحلة الثانية} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{٢٠٠}{٥٠} = ٤ \text{ ساعات}$$

الزمن الكلي = ٥ + ٤ = ٩ ساعات

$$\text{السرعة الوسطى} = \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلي}} = \frac{٤٠٠}{٩} \text{ ميل /سا}$$

لاحظ أن السرعة الوسطى لا تساوي متوسط السرعتين

## ( ٦ ـ ٦ ) النسبة والتناسب

النسبة هي المقارنة بين كميتين أو أكثر. فمثلا عندما تكون نسبة دخلي الشهري إلى دخل أخي هي ٣ : ٢ فإن هذا يعني أنه كلما حصل أخي على دينارين فإنني أحصل على ثلاثة دنانير وإذا ربح أخي ٢٠٠ دينارا فإنني أربح ٣٠٠دينارا وهكذا

قاعدة إذا ضربنا طرفي النسبة بعدد ما فإن النسبة لا تتغير فالنسب ٦:٤ ، ١٥:١٠ ، ٤٢ :٢٨ جميعها تساوي النسبة ٣:٢

وبذلك يمكن معاملة النسبة ٣:٢ معاملة الكسر $\frac{٣}{٢}$

مثال

إذا كانت نسبة فوز أحد النوادي الرياضية إلى خسارته١٥ : ١٦ و كان عدد مرات خسارته ٦٤ مرة فما هو عدد مرات فوزه ؟

حل ليكن ف عدد مرات الفوز ، خ عدد مرات الخسارة

لدينا $\frac{ف}{خ} = \frac{١٥}{١٦}$ ومنها ١٦ ف = ١٥خ

عندما خ = ٦٤ فإن ١٦ ف = ١٥ × ٦٤ أو ف = ٦٠ مرة

مثال نسبة ما يملك علي وسامي وبدر هي ٣: ٢ : ٥

أوجد المبلغ الإجمالي الذي يملكه الثلاثة معا إذا كان ما يملك سامي ١٤ دك

حل مجموع الحصص = ٣ + ٢+ ٥ = ١٠ حصص

بما أن سامي يملك ١٤ دينار وهذا يقابل حصتين

فإن الحصة الواحدة ٧ دك وبالتالي المبلغ الإجمالي = ١٠× ٧ = ٧٠ دك

## التناسب الطردي

إذا كان هناك كميتان متغيرتان بحيث تبقى النسب بينهما ثابتة فإننا نقول عن الكميتين أنهما متناسبتان طرديا أو إن بينهما تناسبا

فمثلا ، إذا اشترينا عددا من الأقلام المتشابهة ، فإن هناك تناسبا بين ثمن الأقلام وعددها لأن

$$\frac{\text{ثمن الأقلام}}{\text{عدد الأقلام}} = \text{ثابت وهو ثمن القلم الواحد}$$

مثال

إذا كان ثمن ١١ قلم يساوى ٣٣ دك فما هو ثمن ١٥ قلما ؟

حل ثمن القلم الواحد = ٣٣ ÷ ١١ = ٣ دك

ثمن ١٥ قلما = ١٥ × ٣ = ٤٥ دك

## التناسب العكسي

إذا كان هناك تناسب بين كمية ومقلوب كمية أخرى فإننا نقول عن الكميتين أنهما متناسبتان عكسيا . فمثلا نجد أن هناك تناسبا عكسيا بين عدد العمال والزمن اللازم كي ينجزوا عملا ما فكلما زاد عدد العمال كلما قل الوقت اللازم لإنجاز العمل

مثال

يحتاج أربعة عمال إلى عشرة أيام لطلاء جدران منزل ما فكم يوما يحتاج خمسة عمال لإنجاز هذا العمل ؟

حل

لإنجاز العمل يحتاج العامل الواحد إلى ٤× ١٠ = ٤٠ يوما

لإنجاز العمل يحتاج خمسة عمال إلى ٤٠ ÷ ٥ = ٨ أيام

## (٦ -٧) النسب المئوية

عندما نريد أن نعبر عن جزء من مئة نستخدم الرمز٪ الذي يعبر عن النسبة المئوية

فمثلا عندما نكتب ١٣٪ فإننا نقصد بذلك ١٣ من مائه ويمكن التعبير عن النسبة المئوية على صورة كسر أو على صورة عدد عشري فمثلا

$$١٣٪ = \frac{١٣}{١٠٠} = ٠,١٣$$

إذا أردنا استخراج ٢٠٪ من ٩٠ مثلا فإننا نكتب

$$٩٠\times ٠,٢٠ = ٩٠\times \frac{٢٠}{١٠٠} = ١٨$$

مثال

فصل دراسي فيه ٢٥ تلميذ . إذا كان ٧٢٪ من التلاميذ يجيدون اللغة العربية فما هو عدد التلاميذ الذين لا يجيدون هذه اللغة ؟

حل

عدد الذين يجيدون اللغة $= ٢٥ \times \frac{٧٢}{١٠٠} =$ ١٨ تلميذ

عدد الذين لا يجيدون اللغة = ٢٥ ـ ١٨ = ٧ تلاميذ

يمكن الحصول علي هذه النتيجة إذا لاحظنا أن النسبة المئوية للتلاميذ الذين لا يجيدون اللغة هي ٢٨٪ وبالتالي فان عددهم $= ٢٥ \times \frac{٢٨}{١٠٠} = ٧$

مثال

وزن إبراهيم اليوم هو ٨ ٪ أكثر مما كان عليه السنة الماضية .

أوجد وزنه اليوم إذا كان وزنه السنة الماضية ٥٥كلغ

حل

مقدار الزيادة في الوزن $= ٥٥ \times \frac{٨}{١٠٠} =$ ٤,٤كلغ

وزنه اليوم = ٥٥ + ٤,٤ = ٥٩,٤ كلغ

ملاحظة عندما تتغير كمية ما ( كأن تزداد أو تنقص ) فإن

$$\text{النسبة المئوية للتغير} = \frac{\text{التغيير الفعلي}}{\text{الكمية الأصلية}} \times ١٠٠ \%$$

مثال

ارتفع سعر سيارة من ٤٠٠٠دك إلى ٥٠٠٠ د ك . أوجد النسبة المئوية للزيادة

حل

$$\text{النسبة المئوية للزيادة} = \frac{\text{التغيير الفعلي}}{\text{الكمية الأصلية}} \times ١٠٠ \%$$

$$= \frac{٥٠٠٠ - ٤٠٠٠}{٤٠٠٠} \times ١٠٠ \% = ٢٥ \%$$

مثال

في أحد التنزيلات انخفض سعر إحدى السلع من ٦٠ دك إلى ٤٨ دك.
أوجد النسبة المئوية للتخفيض.

حل

$$\text{النسبة المئوية للتخفيض} = \frac{\text{التغيير الفعلي}}{\text{الكمية الأصلية}} \times ١٠٠ \%$$

$$= \frac{٦٠ - ٤٨}{٦٠} \times ١٠٠ \% = ٢٠ \%$$

مثال

في أحد التنزيلات كانت النسبة المئوية لتخفيض الأسعار ٣٥ ٪

إذا كان سعر قميص في التنزيلات ١٣ دك فما هو سعره قبل التنزيلات ؟

حل

السعر بعد التنزيلات = السعر الأصلي × ٠,٦٥

١٣ = السعر الأصلي × ٠,٦٥

السعر الأصلي = ١٣ ÷ ٠,٦٥ = ٢٠ دك

## مسائل مختارة لاختبار القدرات عن الفصل السادس

١) في أحد التنزيلات جرى تخفيض الأسعار على كافة السلع بنسبة ٣٠٪

إذا كان سعر تلفزيون في التنزيلات ٢١٠د ك فإن سعره الأصلي هو

(أ) ٢٧٠د ك (ب) ٢٨٠د ك (ج) ٣٠٠د ك (د) ٧٠٠د ك

٢) وزن بسام اليوم ٧٢كلغ . إذا كان وزنه السنة الماضية ٦٤كلغ

فإن النسبة المئوية للزيادة في وزنه هي

(أ) ١٢,٥٪ (ب) ١٠,٥٪ (ج) ٩٪ (د) ٨٪

٣) إذا انخفض سعر هاتف نقال من ١٦٠د ك إلى ١٢٨د ك فإن النسبة المئوية للتخفيض هي

(أ) ٢٠٪ (ب) ٢٥٪ (ج) ٣٠٪ (د) ٨٠٪

٤) إذا كانت سرعة سيارة ٤٥٪كم/سا فإن سرعتها مقدرة بالكيلومتر/دقيقة هي

(أ) ٠,٥ (ب) ١,٣٣ (ج) ٢,٧ (د) ٠,٧٥

٥) إذا كان سرعة سيارة ١٥م/ثا فإن سرعتها مقدرة بالكيلومتر/ساعة هي

(أ) ٥٥ (ب) ٦٠ (ج) ٥٤ (د) ١٥٠

٦) إذا قطعت سيارة مسافة ٢٤٠كم خلال ساعتين فإن سرعة السيارة مقدرة بالمتر/دقيقة هي

(أ) ٤٠٠٠ (ب) ٢٠٠٠ (ج) ٧٢٠٠ (د) ٢٠٠

٧) مستطيل طوله يساوي ضعف عرضه . إذا كانت مساحة المستطيل ٥٠سم²

فإن محيطه يساوي

(أ) ١٥سم (ب) ٣٠سم (ج) ٤٠سم (د) ٦٠سم

٨) يزيد طول مستطيل ٢م عن عرضه . إذا كانت مساحة المستطيل ٢٤م$^{٢}$ فإن طول المستطيل يساوي

(أ) ١٢م (ب) ٨م (ج) ٤م (د) ٦م

٩) في مثلث قائم الزاوية إذا كان طول أحد الضلعين القائمين ضعف طول الضلع القائم الأخر وإذا كانت مساحة المثلث ٤سم$^{٢}$ فإن طول الوتر يساوي

(أ) $\sqrt{١٠}$ سم (ب) $\sqrt{٢٠}$ سم (ج) $\sqrt{٥}$ سم (د) ٥سم

١٠) مصنع عصير يحفظ العصير في خزانات سعة كل منها ١,٥م$^{٣}$ . يتم توزيع ا لعصير بعد ذلك في علب سعة كل علبة ٣٠٠سم$^{٣}$ . إذا كان سعر العلبة الواحدة ١٠٠ فلس فإن سعر العصير في الخزان الواحد هو

(أ) ٢٥٠دك (ب) ٥٠٠ دك (ج) ٧٥٠دك (د) ١٠٠٠دك

١١) حوض سباحة طوله ٢٧م ، عرضه ٥م وعمقه ٢م ، نريد ملء الحوض بالماء وذلك باستخدام سيارات نقل مياه . إذا كانت سعة خزان كل سيارة ٩م$^{٣}$ من الماء فإن عدد السيارات اللازمة لملء الحوض

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (ج) ٣٠ (د) ٤٠

١٢) كمية من الماء تكفي ستة مسافرين لمدة عشرة أيام . إذا استخدم الماء خمسة فقط من المسافرين وبنفس المعدل فإنها تكفيهم

(أ) ٦أيام (ب) ٣ أيام (ج) ١٥يوما (د) ١٢ يوما

# الفصل السابع

## استراتيجيات الحل والنمذجة