الفصل الأول

الأعداد الطبيعية N

الأعداد الصحيحة Z

الأعداد العادية Q

الأعداد الحقيقية R

القيمة المطلقة

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x : x\geq 0 \\ 0 : x=0 \\ -x : x\leq 0 \end{cases}$$

خواصه

إذا كان $a\geq 0$ عندئذ

$$1)|x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq +a$$

$$2)|x.y|=|x|.|y|$$

$$3)\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|} : y\neq 0$$

$$4)|x+y|\leq |x|+|y|$$

$$5)|x-y|\geq |x|-|y|$$

تعريف: المسافة بين عددين حقيقيين

لدينا $x_1, x_2 \in R$ نسمي المسافة أو البعد بين العددين الحقيقين x_1, x_2 : $d(x_1,x_2)$ أي:

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$$

تعريف: مجاورة عدد حقيقي

ليكن $x_0 \in R$ وليكن δ عدد حقيقي موجب نطلق على مجموعة الأعداد الحقيقية $x \in R$

والتي تبعد عن العدد x_0 المسافة $d(x, x_0) < \delta$ اسم المجاور δ للعدد x_0

نرمز إلى هذه المجاورة بالرمز $\delta(x_0)$ حيث نطلق على العدد δ اسم نصف قطر المجاور

بما أن المسافة بين x, x_0 يعطى بالعلاقة التالية

$$d(x, x_0) = |x - x_0|$$

فإن المجاورة δ للعدد x_0 تكون من $x \in R$ حيث تتحقق المتراجحة التالية

$$|x - x_0| < \delta$$

وحسب خواص القيمة المطلقة ينتج

$$-\delta < x - x_0 < \delta$$
$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

وهذا يعني أن المجاورة δ للعدد x_0 تمثل مجموعة الأعداد التي تنتمي إلى المجال المفتوح:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

المجموعة المحدودة

نقول عن المجموعة G أنها محدودة من الأعلى إذا وجد عدد $b \in R$ بحيث تتحقق

المتراجحة:

$$\forall x \in G : x \leq b$$

نسمي b الحد الأعلى للمجموعة G

نقول عن المجموعة G أنها محدودة من الأدنى إذا وجد $a \in R$ بحيث:

$$\forall x \in G : x \geq a$$

a: يسمى الحد الأدنى للمجموعة

نقول أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى والأدنى معاً ومنه المجموعة G

محدودة إذا وجد عدد حقيقي مثل M>0 بحيث تتحقق العلاقة:

$$|x| \leq M : \forall x \in G$$

$$-M \leq x \leq +M \quad \forall x \in G$$

<u>تعريف</u>

نقول عن b_0 من G حد أعلى أصغري إذا كان أي حد آخر $b \in G$ أكبر أويساوي b_0

ونرمز للحد الأعلى الأصغري b للمجموعة G بـ

$$b_0 = \sup_{x \in G} x$$

$$b_0 = \sup G$$

ونسمي الحد الأدنى $a_0 \in G$ حد أدنى أعظمي لـ G إذا كان أي حد أدنى آخر $a \in G$

أصغر أو يساوي a ونرمز له بـ infG

$$a = \inf_{x \in G} x$$

$$a_0 = \inf G$$

المتوالية العددية

تعريف المتوالية الحسابية:

هي تطبيق من $f : N \to R$ هي مجموعة من الأعداد مرتبة على الشكل التالي

a , a + r , a+2r , ,…..

حيث a الحد الأول r: الأساس

و الحد العام الذي رتبيته n يعطى بالدستور

$a_n = L = a_1 + (n-1)r \quad ;n = 1,2,\ldots\ldots$

ومجموعة n يعطى بالعلاقة:

$$S = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)r] = \frac{n}{2[a_1 + L]}$$

$$r = a_n - a_{n-1}$$

تعريف المتوالية الهندسية

هي مجموعة من الأعداد مرتبة بالشكل التالي

$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ar^n$

حيث a الحد الأول r: الأساس

الحد العام L يعطى بالعلاقة

$$L = ar^{n-1}$$

ومجموعة nحد يعطى بالعلاقة:

$$S = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

وفي حالة خاصة

$$0 < r < 1 \quad , \quad n \to \infty$$

$$S = \frac{a}{1-r} \quad : \quad r = \frac{r^n}{r^{n-1}}$$

<u>تعريف: دستور ذي الحدين لنيوتن</u>

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1).......(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

<u>متراجحة برنو لي</u>

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall x > 0$$

في حالة (1+x) = A فإن $A \geq 1$ نلاحظ

$$A^n \geq 1+n(A-1) \qquad \forall n \in N$$

<u>مجموعة الأعداد العقدية</u>

$x^2 = -1$ ليس لها جذر

$$i^2 = -1$$

$$i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1$$

نستنتج أن القوى للعدد I محصورة بين 1,-1,-i,i

من العلاقة $Z = a+ib$ حيث $a,b \in R$

ندرس : الجمع، الفرق، الضرب وأخيراً القسمة

<u>الضرب</u>

$Z=a+ib \quad , \quad Z_1=a_1+ib_1$

$Z.Z_1=(ac-bd)+(ad+bc)i$

<u>القسمة</u>

لنأخذ جذر العدد $Z.Z_1$ والمساوي $a+ib$

$(c+id)(x+iy)=a+ib$

والمطلوب العدد العقدي لها $x+iy$ نلاحظ

$cx-dy+(dx+cy)i=a+bi$

ومنه نلاحظ

$cx-dy=a$

$dx+cy=b$

يحل جملة المعادلة نلاحظ

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}}=\frac{ac+ba}{c^2+d^2}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}}{c^2 + d^2} = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

ولكن $c^2 + d^2 \neq 0$ ومنه نكتب

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

X + Yi

<u>تمرين:</u>

أحسب مجموع جميع الأعداد الطبيعية الفردية والتي هي أقل من 500

إن هذه الأعداد هي

1,3,5,………..,499

$a_1=1$, $r=2$, $a_n=499$

إذاً

$L=a_1+(n-1)r$

$L=1+(n-1)2=499$

$$S_n = \frac{(1+499)n}{2} = \frac{(a + a_n)n}{2}$$

نحصل

$n=250$, $S_n=62500$

تمرين: بين مجموع أول عشرة حدود للمتوالية العددية والمعلوم لدينا

$a_9=35$, $a_5=19$

من الشروط لدينا

$a_5 = a_1+4r=19$

$a_9=a_1+8r=35$

بحل هذه الجملة نحصل

$a_1=3$, $r=4$

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)r]$$

$$s_{10} = \frac{2a_1 + 9r}{2} * 10 = (6+36) \times 5 = 210$$

<u>تمرين</u>

أحسب أول خمسة حدود للمتوالية الهندسية حيث معلوم لدينا

$a_2=4$, $a_5=32$

استناداً إلى العلاقة

$a_n=a_1r^{n-1}$

$a_2=a_1r=4$

$a_5=a_1r^4=32$

بحل الجملة نحصل $a_1 = 2$ $r=2$

يكون لدينا خمسة حدود

2,4,8,16,32

الـفـصل الـثـانـي

المتتاليات العددية

تعريف المتتالية العددية

نسمي أي تطبيق $X : N^* \to R$ منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية N^* ومستقره

مجموعة الأعداد الحقيقية R بمتتالية عددية

فلو رمزنا بـ x_n لصورة العدد $n \in N$ أي $x(n) = x_n$

وفق التطبيق السابق لتشكت لدينا مجموعة الأعداد

$\{x, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

التي تسمى متتالية عددية حيث يسمى كل عدد فيها حداً ويسمى x_n بالحد العام

للمتتالية ونرمز لمتتالية بـ

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أو $\{x_n\}$ وهي الصيغة المولدة لعناصر المتتالية التي حدها العام x_n أي

نكتب

$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$

إن الطريقة الأساسية لإعطاء المتتالية بإعطاء الحد العام للمتتالية x_n

أمثلة

1) المتتالية التي حدها العام $x_n = \frac{n+1}{n^2}$ هي

$$\left\{\frac{n+1}{n^2}\right\} = \left\{2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, ..., \frac{n+1}{n^2}\right\}$$

2) المتتالية التي حدها العام $x_n = \frac{1}{n}$ هي

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}\right\}$$

3) المتتالية التي حدها العام $x_n = \frac{n-1}{n}$ هي:

$$\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, ..., \frac{n-1}{n}, ...\right\}$$

4) المتتالية التي حدها العام $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ هي

$$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, ..., \frac{(-1)^n}{n}\right\}$$

بإعطاء علاقة تربط بين الحد العام وعدد منته من الحدود التي تسبقه مع إعطاء قيمة للحد الأول للمتتالية x_1 حيث بواسطة x_1 وعلاقة الربط يتم إيجاد أي حد من حدود المتتالية

أمثلة

1) إيجاد المتتالية التي تتحقق من أجلها العلاقة

$$x_n = 5x_{n-1} + 3x_{n-2}$$

حيث حدها الأول x_1 يساوي 1 أو حدها الثاني يساوي 3 حسب العلاقة نجد:

$$x_3 = 5(3) + 3(1) = 15 + 3 = 18$$
$$x_4 = 5(18) + 3(3) = 8 + 9 = 89$$

وهكذا نحصل على الحدود المتتالية:

2) المتتالية الحسابية والتي شكلها العام

$$x_n = a + (n-1)b$$

B أساسها ، $x_1=a$ حدها الأول ومن معرفتهم يتم حساب كافة حدودها

مثال

إذا فرضنا b=2 ، $x_1=3$ ينتج

$$x_2 = x_1 + (2-1)b$$
$$x_2 = 3 + 2 = 5$$
$$x_3 = 3 + 2(2) = 7$$
$$x_4 = 3 + 2(3) = 9$$

$$\{x_n\} = \{3,5,7,9,.......\}$$

3) المتتالية الهندسية والتي شكل حدها العام

$$x_n = aq^{n-1}$$

حيث $x_1=a$ حدها الأول ، q أساسها

فرضنا a=3 ، q=2 ينتج:

$$x_2 = x_1 q^{n-1} = 3(2) = 6$$
$$x_3 = 3(2)^2 = 12$$
$$x_4 = 3(2)^3 = 24$$
$$x_5 = 3(2)^4 = 48$$

$$\{x_n\} = \{3,6,12,24,48,.......\}$$

2-2- المتتالية المتقاربة- مفهوم نهاية المتتالية

1- المتتالية المتقاربة (شرط كوشي)

نقول عن المتتالية العددية $\{x_n\}$ أنها متقاربة من العدد الحقيقي a (أو أن نهايتها العدد a) إذا استطعنا أن نرفق كل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ بعدد طبيعي $m = m(\varepsilon)$ بحيث مهما يكن العدد الطبيعي n>m تتحقق المتراجحة $|x_n - a| < \varepsilon$ وهذا يكافئ شرط كوشي للتقارب المعرف كما يلي:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in N : \forall n > m \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

نسمي a نقطة تقارب المتتالية $\{x_n\}$ كما نقول أحياناً أن المتتالية متقاربة (دون أن نذكر نقطة تقاربها أحياناً). وإذا لم تكن المتتالية متقاربة فنسميها متباعدة.

إذا كانت المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة إلى النقطة a فإننا نكتب في هذه الحالة

$$x_n \to a \qquad \text{أو} \qquad \lim x_n = a \qquad \text{أو} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

<u>ملاحظة:</u>

1- عند دراسة التقارب نستطيع استخدام المتراجحة $(\leq)$ بدل عن $(<)$ ونحصل على تعريف مكافئ للسابق كما يلي

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m \in N : \forall n > m \Rightarrow |x_n - a| \leq \varepsilon$$

<u>مثال</u>

برهن أن المتتالية التي حدها العام $x_n = \dfrac{n-1}{n}$ تتقارب من الواحد

الحل: ليكن $\varepsilon > 0$ عدداً حقيقياً معطى ونطبق شرط كوشي للتقارب نجد:

$$|x_n - a| = \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n-1-n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

إذا كان $\frac{1}{m} < \varepsilon$ أو $\frac{1}{\varepsilon} > m$ نجد بسهولة أن:

$$\forall m \le n \Rightarrow |x_n - 1| = \frac{1}{n} \le \frac{1}{m} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim x_n = 1$$

وقبل متابعة الأمثلة سندرس المعنى الهندسي للتقارب

المعنى الهندسي لتقارب المتتاليات:

لتكن $\{x_n\}$ متتالية متقاربة من النقطة a إن معنى ذلك أنه من أجل $\varepsilon > 0$ يمكن إيجاد m من N بحيث تتحقق المتراجحة:

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

من أجل جميع قيم $m \le n$

معنى ذلك أنه من أجل $m \le n$ يجب أن يكون $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ وهذا يعني أنه ابتداء من الرتبة m يجب أن تقع حدود المتتالية في المجال المفتوح $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

ينتج مما سبق أنه إذا كانت المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة من النقطة a فإنه مهما يكن العدد الحقيقي $\varepsilon > 0$ يمكن إيجاد عدد طبيعي m بحيث تقع جميع حدود المتتالية اعتباراً من هذه الرتبة m في المجال $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

وبشكل آخر إذا كانت المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة من النقطة a فإنه من أجل أي $\varepsilon > 0$ يجب أن يحوي المجال المفتوح $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ جميع حدود المتتالية اعتباراً من رتبة

معينة (أو يجب أن يحوي المجال المفتوح جميع حدود المتتالية ما عدا عدد منته منها)

يجب أن نلاحظ هنا أن العكس صحيح أيضاً وذلك لأنه إذا كان $\varepsilon > 0$ عدداً حقيقياً

معطى فإنه من كون المجال المفتوح $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ يحوي جميع حدود المتتالية

اعتباراً من رتبة معينة m مثلاً ينتج أنه إذا كان $m \le n$ فإن:

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

نسمي المجال المفتوح $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ بالمجال المفتوح الذي مركزه a ونصف قطره

ε. بناء على ما سبق يمكن صياغة النظرية التالية:

<u>نظرية(1-1)</u>

الشرط اللازم والكافي لكي تتقارب المتتالية $\{x_n\}$ إلى النقطة a هو أن يحوي أي

مجال مفتوح مركزه a ونصف قطره $\varepsilon > 0$ جميع حدود المتتالية ما عد عدد منته

منها

<u>ملاحظة (2-1)</u>

ليكن (c,d) مجالاً مفتوحاً ولتكن النقطة a تنتمي إليه بسهولة نجد أن هذا المجال

يحوي مجالاً مفتوحاً مركزه a وذو نصف قطر موجب إذا كان

$$\varepsilon = \min\{a-c, d-a\}$$

نجد أن

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \le (c,d)$$

نسمي أي مجال مفتوح يحوي النقطة a جواراً للنقطة a بالاعتماد على الملاحظة

السابقة يمكن صياغة النظرية التالية:

نظرية (3-1)

الشرط اللازم والكافي لتقارب المتتالية $\{x_n\}$ إلى النقطة a هو أن يحوي أي جوار للنقطة a (أي مجال مفتوح تنتمي النقطة a إليه) جميع حدود المتتالية ما عدا عدد منته منها

مثال (2):

برهن أن المتتالية $\left\{\frac{2}{n^2(n+1)}\right\}$ تتقارب من الصفر

الحل ليكن $\varepsilon > 0$ عدداً حقيقياً معطى ولنطبق شرط كوشي للتقارب

$$|x_n - a| = \left|\frac{2}{n^2(n+1)} - 0\right| \le \frac{2}{n^3}$$

بفرض m عدد طبيعي يحقق المتراجحة $\frac{2}{m^3} < \varepsilon$ أو $\sqrt[3]{\frac{2}{\varepsilon}} < m$ من أجل أي عدد طبيعي $n > m \ge \sqrt[3]{\frac{2}{\varepsilon}}$ يعتبر حلاً لهذه المسألة حيث نلاحظ إذا أخذنا $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ فإن

$$n > m \ge \sqrt[3]{\frac{2}{0.001}} > 13$$

إن جميع الحدود التي تلي العدد 13 تقع ضمن المجال المفتوح الذي مركزه الصفر ونصف قطره $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

مثال

برهن أن نهاية المتتالية $\left\{\frac{-2n+1}{n+1}\right\}$ متقاربة من العدد -2

الحل

ليكن $\varepsilon > 0$ عدداً حقيقياً معطى ولنطبق شرط التقارب

$$|x_n - a| = \left|\frac{-2n+1}{n+1} - (-2)\right| = \left|\frac{-2n+1+2n+2}{n+1}\right| = \left|\frac{3}{n+1}\right| = \frac{3}{n+1}$$

بفرض m عدد طبيعي يحقق المتراجحة $\frac{3}{m+1} < \varepsilon$ ⇐

$$3 < \varepsilon(m+1) \Rightarrow m > \frac{3}{\varepsilon} - 1$$

نجد بسهولة من أجل أي عدد طبيعي

$$n > m \geq \frac{3}{\varepsilon} - 1$$

يعتبر حلاً لهذه المسألة فمن أجل $\varepsilon = \frac{1}{100}$ نجد

$$n > m \geq \frac{3}{\frac{1}{100}} - 1 = 299$$

إذاً جميع الحدود التي تلي العدد 299 تقع ضمن المجال المفتوح الذي مركزه (2-)

ونصف قطره $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ⇐ $\lim_{n\to\infty} x_n = -2$

والمتتالية متقاربة من العدد (2-)

<u>ملاحظة (2-2-2)</u>

إن أي عدد طبيعي $m' > m$ هو حل لمسألة نهاية المتتالية إذا كان m حلاً لها وعلى ذلك ليس من الضروري إيجاد كل الأعداد $m' > m$ التي هي حلول لمسألة النهاية بل يكفي إثبات وجود أحد هذه الأعداد فقط

المتتالية المتباعدة

نقول عن متتالية $\{x_n\}$ أنها متباعدة إذا كانت غير متقاربة ويمكن كتابة شرط تباعد متتالية كنقيض منطقي لشرط التقارب أي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in N : \forall n > m \Rightarrow |x_n - a| > \varepsilon$$

بعبارة أخرى تكون المتتالية $\{x_n\}$ متباعدة إذا كان كل جوار للعدد a لا يحتوي على عدد غير منته من حدود المتتالية

أمثلة: المتتاليات التالية

$$\{x_n\} = \{n\} = 1,2,3,...$$

$$\{x_n\} = \{(-1)^n\} = -1,+1,-1,.....$$

$$\{x_n\} = \{\sin n\} = \sin 1, \sin 2, \sin 3,.....$$

كلها متقاربة

نظرية (2-2-1) : وحدانية النهاية

لكل متتالية عددية متقاربة نقطة تقارب وحيدة

البرهان: لتكن $\{x_n\}$ متتالية من الأعداد الحقيقية ومتقاربة من العدد الحقيقي a

ولنبرهن a وحيدة: لنفرض b نهاية ثانية للمتتالية ولنبرهن أن a=b

بما أن a نهاية للمتتالية. استناداً إلى شرط كوشي للتقارب يمكن أن نرفق كل عدد $\varepsilon > 0$ بعدد طبيعي m1 بحيث

$$\forall n > m_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وكذلك من أجل b يكون

$$\forall n > m_2 \Rightarrow |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

لنختار $m = \max(m_1, m_2)$ ويكون من أجل n>m لدينا معاً

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ولنحسب $|a-b|$ من أجل n>m

$$|a-b| = |a - x_n + x_n - b| \le |a - x_n| + |x_n - b|$$

أي أن $|a-b| < \varepsilon$ وبما أن ε مقدار صغير موجب إذاً $|a-b|$ أصغر من أي عدد

موجب وبالتالي:

$$|a-b| = 0 \Rightarrow a = b$$

و هو المطلوب

2-3- المتتالية الجزئية:

نقول عن المتتالية $\{x_{nk}\}$ أنها متتالية جزئية من المتتالية $\{x_n\}$ إذا كانت عناصر

المتتالية $\{x_{nk}\}$ تتشكل من عناصر $\{x_n\}$

مثال:

المتتالية $\{x_{nk}\} = \{2n\}$ متتالية جزئية من المتتالية $\{x_n\} = \{n\}$

نظرية (2-3-1)

إذا كانت المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة من x_0 فكل متتالية جزئية منها $\{x_{nk}\}$ متقاربة من a

البرهان:

بما أن المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة إذاً يمكن إيجاد $m = m(\varepsilon)$ حيث

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists m \in N : \forall n \geq m \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

$\Leftarrow$ مهما يكن $n_k > m$ ينتج $|x_{nk} - a| < \varepsilon$ والمتتالية $\{x_{nk}\}$ متقاربة من a

مثال:

المتتاليتان $\{y_n\} = \left\{\frac{1}{2n}\right\}$ ، $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

نلاحظ أن $\{y_n\}$ جزئية من $\{x_n\}$ فهي متقاربة

ملاحظة (2-3-1):

إذا احتوت المتتالية $\{x_n\}$ كل متتالية جزئية متقاربة $\{x_{nk}\}$ فليس من الضرورة أن تكون هي نفسها متقاربة

مثال

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1+\frac{1}{n}}{(-1)^n}\right\} \quad , \quad \{y_n\} = \left\{\frac{1+\frac{1}{2n}}{(-1)^{2n}}\right\}$$

نلاحظ $\{y_n\}$ جزئية من $\{x_n\}$ وهي متقاربة في حين $\{x_n\}$ متباعدة

2-4- المتتاليات المحدودة

نسمي المتتالية العددية $\{x_n\}$ محدودة إذا وجد عددين حقيقيين m_1, m_2 بحيث يكون

$$m_1 < x_n < m_2, \forall n = 1,2,.........$$

أو يوجد عدد حقيقي موجب 0<M بحيث تتحقق المتراجحة

$|x_n| < M, \forall n = 1,2,.......$

بسهولة نجد أن المتتالية $\{x_n\}$ تكون محدودة إذا وفقط إذا وجد مجال مفتوح حاوي

جميع حدود المتتالية

في الحقيقية إذا كانت المتتالية $\{x_n\}$ محدودة فإنه يوجد 0<M بحيث يكون $\{x_n\}$M>

أي أن $-M < x_n < +M$ وذلك $\forall n = 1,2,.......$ وبالتالي المجال المفتوح $(-M,+M)$

يحوي جميع حدود المتتالية

العكس: ليكن المجال المفتوح (m_1, m_2) يحوي جميع حدود المتتالية $\{x_n\}$ عند ذلك

بفرض $M = \max\{|m_1|,|m_2|\}$ فإن المجال $(-M,+M)$ يحوي المجال (m_1, m_2) ومن ثم

$x_n \in (-M,+M), \forall n = 1,2,........$

إذاً $|x_n| < M, \forall n = 1,2,...........$

ونقول عن المتتالية $\{x_n\}$ أنها غير محدودة إذا وجد بعض حدودها تنتمي إلى خارج

المجال المفتوح (m_1, m_2) مهما تكن $m_1, m_2 \in R$

<u>1-4-2 المتتالية المحدودة من الأعلى</u>

نقول عن المتتالية $\{x_n\}$ أنها محدودة من الأعلى (أو من اليمين) إذا وجد العدد

الحقيقي M

بحيث تتحقق المتراجحة $x_n < M, \forall n = 1,2,....$ وهذا يؤدي إلى أن جميع حدودها

تنتمي إلى المجال المفتوح $(-\infty, M)$

2-4-2- المتتالية المحدودة من الأدنى

نقول عن المتتالية $\{x_n\}$ أنها محدودة من الأدنى (أو من اليسار) إذا وجد عدد حقيقي

m بحيث تتحقق المتراجحة $m < x_n , \forall n = 1,2,.....$

و هذا يؤدي إلى أن جميع حدود المتتالية $\{x_n\}$ تنتمي إلى المجال المفتوح $(m,+\infty)$

ملاحظة (2-4-1) المتتالية الغير محدودة قد تكون محدودة من الأعلى أو من الأدنى

أو من الاثنين معاً

أمثلة

1- المتتالية $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ محدودة لأن $n < \frac{n}{n+1} < 1, \forall n = 1,2,.....$

أو M=1 بحيث تحقق x_n المتراجحة $|x_n| < M, \forall n = 1,2,.........$ وذلك من أجل جميع

$n \geq 1$

2- المتتالية $\{-n\}$ غير محدودة لأنه لا يوجد عدد حقيقي M يحقق المتراجحة

$|x_n| < M, \forall n = 1,2,.........$

ولكنها محدودة من اليمين أو من الأعلى لأن جميع حدودها تقع ضمن المجال $(-\infty,0)$

3-ومن أسلوب المثال السابق تكون المتتالية $\{n\}$ غير محدودة، ولكنها محدودة من

اليسار أو من الادنى لأن جميع حدودها تقع ضمن المجال $(n,+\infty)$

4-المتتالية $\{(-1)^n n\}$ هي متتالية غير محدودة وبنفس الوقت غير محدودة من الأسفل

ولا من الأعلى لأن حدودها تقع في المجال $(-\infty,+\infty)$ وطرفي المجال هما عددان

غير محدودين

2-5- المتتالية المرتبة

نقول عن المتتالية العددية $\{x_n\}$ أنها مرتبة إذا كانت متزايدة أو متناقصة

2-5-1- المتتالية المتزايدة

نقول عن المتتالية $\{x_n\}$ أنها متزايدة (غير متناقصة) إذا كان

$$x_{n+1} \geq x_n, \forall n = 1,2,.., n+1$$

ونرمز لها بـ $x_n \uparrow$ وإذا كانت المتراجحة تامة أي $x_{n+1} > x_n$ نقول أن المتتالية $\{x_n\}$ متزايدة تماماً

2-5-2- المتتالية المتناقصة

نقول عن المتتالية $\{x_n\}$ أنها متناقصة (غير متزايدة) إذا كان

$$x_{n+1} \leq x_n, \forall n = 1,2,........$$

ونرمز لها بـ $x_n \downarrow$ وإذا كانت المتراجحة تامة أي $x_{n+1} < x_n$ نقول أن المتتالية متناقصة تماماً

ملاحظة 2-5-1-

نستدل على ترتيب متتالية من دراسة إشارة الفرق $x_{n+1} - x_n$ فإذا كانت الإشارة موجبة فإن المتتالية متزايدة وإذا كانت الإشارة سالبة فإن المتتالية متناقصة.

أو بمقارنة النسبة $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ بالعدد واحد حيث النسبة أكبر من الواحد متزايدة وأصغر من الواحد متناقصة

أمثلة

1- أثبت أن المتتاليات التي حدها العام $x_n = \frac{n}{n+1}$ هي متزايدة تماماً

لنبرهن في هذه الحالة أن: $x_n - x_{n-1} > 0$

لنوجد

$$x_n - x_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - n^2 + 1}{(n+1)n} = \frac{1}{(n+1)n}$$

إن الكسر $\frac{1}{(n+1)n}$ هو موجب وذلك مهما يكن العدد الطبيعي n إذاً المتتالية هي

متزايدة تماماً

2- أثبت أن المتتالية التي حدها العام هو $x_n = \frac{n+1}{n}$ هي متناقصة تماماً

في هذه الحالة نثبت أن $x_n - x_{n-1} < 0$ إذاً لنوجد :

$$x_n - x_{n-1} = \frac{n+1}{n} - \frac{n-1+1}{n-1} = \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1} = \frac{n^2 - 1 - n^2}{n(n-1)} = \frac{-1}{n(n-1)}$$

إن الكسر $\frac{-1}{n(n-1)}$ هو سالب وذلك مهما كان العدد الطبيعي n>1 إذاً المتتالية هي

متناقصة تماماً

2-5-3: المتتالية الموجبة

نسمي المتتالية العددية $\{x_n\}$ موجبة إذا كانت جميع حدودها موجبة ونرمز لها بـ

$(x_n >> 0)$

2-5-4- المتتالية السالبة:

نسمي المتتالية العددية $\{x_n\}$ سالبة إذا كانت جميع حدودها سالبة ونرمز لها بـ

$(x_n << 0)$

نظرية:

كل متتالية متقاربة هي متتالية محدودة

البرهان

ليكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية متقاربة من العدد a عندئذ من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$ يمكن إيجاد

$n \geq m$ بحيث:

$$\forall n \geq m, |x_n - a| < \varepsilon$$

أي $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

$$\alpha = \min(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, a - \varepsilon)$$
$$\beta = \max(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, a + \varepsilon)$$

نجد أن:

$$\alpha \leq x_n \leq \beta, \forall n \in N$$

إذاً $\{x_n\}$ محدودة

ملاحظة:

إن عكس هذه النظرية ليس من الضروري أن يكون صحيح. أي إذا كانت

المتتالية$\{x_n\}$ محدودة فليس من الضروري أن تكون متقاربة .

مثال:

المتتالية $\{x_n\}=\{\cos n\pi\}$ محدودة لأن $|\cos n\pi|\le 1$ محدودة ولكن غير متقاربة لأن حدودها

$$\{\cos n\pi\}=\{-1,1,-1,......,(-1)^n,.......\}$$

ليس لها نهاية محدودة

كذلك نلاحظ المتتالية $\{x_n\}=\left\{\sin\frac{\pi}{2}\right\}$

نظرية:

كل متتالية متزايدة (متناقصة) محدودة من الأعلى (من الأدنى) هي متتالية متقاربة

(أي كل متتالية مرتبة ومحدودة متقاربة)

البرهان

لتكن $\{x_n\}$ متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى وحدها الأعلى العدد L إي

$$\sup\{x_n\}=L$$

إذا كان $\varepsilon>0$ عدد موجب معطى كيفياً عندئذ يوجد عنصر على الأقل x_m من المتتالية بحيث تتحقق المتراجحة

$$L-\varepsilon<x_m\le L$$
$$-\varepsilon<x_m-L\le 0$$

ومنه $-\varepsilon<x_m-L\le\varepsilon$ وهذه المتراجحة صحيحة من أجل كل m<n إذاً $|x_n-L|<\varepsilon$ وهو شرط التقارب

ومنه ينتج $\lim_{n\to\infty}x_n=L$ وهو المطلوب

ملاحظة:

يمكن بنفس الطريقة إثبات أن المتتالية المتناقصة و المحدودة من الأدنى متقاربة

مثال:

المتتاليتان $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ، $\{y_n\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ محدودتان ومتقاربتان

2-6- العمليات الحسابية على النهايات

لتكن لدينا $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ متتاليتين عدديتين سنحاول من هاتين المتتاليتين أن نبني متتاليات جديدة: المتتالية الناتجة من جمع الحدود المتقابلة في المتتاليتين المعطيتين تسمى مجموع المتتاليتين وتساوي $\{(x_n+y_n\}$ بنفس الطريقة يمكن أن نعرف $\{x_n-y_n\}$ و $\{x_n.y_n\}$ إذا كان $y_n\neq 0$ وذلك مهما يكن n فإنه يمكن تعريف المتتالية

$$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$$

نظرية:

إذا كانت $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ متتاليتين متقاربتين فإن:

1) $\lim(x_n \mp y_n)=\lim x_n \mp \lim y_n$

2) $\lim(x_n.y_n)=\lim x_n.\lim y_n$

3) $\lim(x_n/y_n)=\lim x_n/\lim y_n \qquad : \quad \lim y_n\neq 0$

هذه النظرية يجب أن تفهم كما يلي: إذا كانت المتتاليتان $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متقاربتان فإن متتالية المجموع والطرح و الضرب والتقسيم (مع الشرط المضاف) تتقارب ونقاط تقاربها تحقق العلاقات السابقة

البرهان

لنبرهن (1):

لنفرض أن $x_n \to a$ و $y_n \to b$ وليكن $\varepsilon > 0$ عدداً حقيقياً معطى.

بما أن $x_n \to a$ فإنه من أجل العدد $\frac{\varepsilon}{2}$ يمكن إيجاد عدد طبيعي n_1 بحيث يكون $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ من أجل جميع قيم $n_1 \le n$ وبما أن $y_n \to b$ فإنه من أجل العدد $\frac{\varepsilon}{2}$ يمكن إيجاد عدد طبيعي n_2 بحيث يكون $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. من أجل $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ نجد بسهولة أنه إذا كان $n_0 \le n$ فإن

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

بناء على ذلك إذا كان $n_0 \le n$ نجد بسهولة أن:

$$\begin{aligned}&|(x_n \mp y_n) - (a \mp b)| = |(x_n - a) \mp (y_n - b)| \le |x_n - a| + |\mp (y_n - b)| \\ &= |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

وهو المطلوب الأول

2) من أجل ذلك لنحسب المقدار التالي:

$$\begin{aligned}&|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \le |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| \\ &\le |y_n|.|x_n - a| + |a|.|y_n - b|\end{aligned}$$

بما أن المتتالية $\{y_n\}$ متقاربة فإنها تكون محدودة ومن ثم يوجد L بحيث يكون

$\{y_n\} < L$ مهما يكن n ومن ثم يمكن إيجاد عدد M يحقق العلاقتين التاليتين $\{y_n\} < M$

وذلك مهما يكن n و $|a| < M$

من أجل البرهان على (2) لنأخذ $\varepsilon > 0$ عدداً كيفياً بما أن $x_n \to 0$ فإنه يمكن إيجاد n_1

بحيث تتحقق المتراجحة $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$ من أجل $n_1 \le n$ وبنفس الطريقة يمكن إيجاد

عدد طبيعي n_2 بحيث تتحقق المتراجحة $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$ من أجل $n_2 \le n$ بفرض n_0

أكبر العددين n_1, n_2 نجد بسهولة أن

$$|y_n x_n - ab| < M.\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

و هو المطلوب الثاني

من أجل البرهان على (3) لنفرض أن $x_n \to a$ و $y_n \to b$ و $b \ne 0$ ولنحسب بعد ذلك

المقدار التالي

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - y_n b}{y_n . b}\right| = \frac{|(x_n - a)b + (b - y_n)a|}{|y_n|.|b|} \le \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|b - y_n||a|}{|y_n|.|b|}$$

الآن حسب النظرية يكون $\frac{|b|}{2} < |y_n|$ من أجل $n_1 \le n$ لنفرض أخيراً أن $\varepsilon > 0$ عدد

كيفي معطى عند ذلك بما أن $x_n \to a$ فإنه يمكن إيجاد n_2 بحيث تتحقق المتراجحة

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon |b|}{4}$$

وبما أن $y_n \to b$ فإنه يمكن إيجاد n_3 بحيث تتحقق المتراجحة

$$|a||y_n - b| < \frac{\varepsilon b^2 4}{}$$

بفرض $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ نجد أنه إذا كان $n_0 \leq n$ فإن:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{\varepsilon|b|}{4} \cdot \frac{2}{|b|} + \frac{\varepsilon b^3}{4} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot \frac{2}{|b|} < \varepsilon$$

و هو المطلوب الأخير

ملاحظة:

يجب أن نلاحظ هنا أن المتتاليتين $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ قد تكونا غير متقاربتين مع أن

$\{x_n \mp y_n\}$ أو $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ تكونا متقاربتين.فعلى سبيل المثال نجد أن المتتاليتين

$\{x_n\} = \{y_n\} = \{n\}$ متباعدتان رغم أن المتتاليتين $\{x_n - y_n\}$ و $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ متقاربتان

نتيجة (1)

لتكن $\{x_n\}$ متتالية متقاربة من العدد a و $0 \neq \lambda \in R$ عدد اختياري فإن المتتالية $\{\lambda x_n\}$

متقاربة إلى العدد $\lambda.a$

نتيجة (2)

لتكن $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ ، $y_n \neq 0$ ، $b \neq 0$

عندئذ من أجل جميع قيم n يتحقق

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$$

نظرية

إذا كانت $\{x_n\}$ متقاربة وكان $x_n \geq 0$ من أجل جميع $n \geq 1$ فإن $\lim_{n\to\infty} x_n \geq 0$

نظرية:

إذا كانت $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متتاليتن متقاربتين وتحققان المتراجحة $x_n \leq y_n$ من أجل جميع $n \geq 1$ فإن $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$

نظرية

إذا كانت المتتاليات الثلاث $\{x_n\}$و$\{y_n\}$و$\{Z_n\}$ تحقق دوماً المتراجحات $x_n \leq y_n \leq Z_n$

وإذا كانت المتتاليتان $\{x_n\}$و$\{Z_n\}$ تتقاربان من نهاية مشتركة واحدة a أي:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Z_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

العدد e لنأخذ المتغير $\alpha_n = (1+\frac{1}{n})^n$ أو المتتالية التي حدها العام α_n ولندرس هذه المتتالية نلاحظ أولاً أن:

$$\alpha_n = 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + ... = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + ...$$

وبشكل مشابه نجد:

$$\alpha_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1}) + ...$$

وهذا يعني أن $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ ويعود ذلك لأن العناصر المتقابلة في α_{n+1} أكبر من عناصر α_n بالإضافة إلى وجود حد موجب في α_{n+1} وغير موجود ما يقابله في α_n إذاً المتتالية $\{\alpha_n\}$ متزايدة ومن ناحية ثانية لدينا:

$$\alpha_n = 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + ... < 2 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$$
$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} < 2 + 1 = 3$$

ومن ثم فإن المتتالية محدودة من الأعلى إذاً بالاعتماد على النظرية السابقة تكون

متقاربة لعدد أقل أو يساوي العدد 3 نرمز لنهاية هذه المتتالية بـ e إذاً

$$\lim(1+\frac{1}{n})^n = e$$

إن العدد e يلعب دوراً كبيراً في التحليل الرياضي. فهو يؤخذ كأساس للوغارتم

الطبيعي يسمى عادة العدد e بالعدد النبري باسم العالم نيبر و هو عدد غير عادي

ويساوي تقريباً (بدقة ستة أعداد بعد الفاصلة) e = 2.718281

<u>معيار كوشي لوجود النهاية</u>

لتكن لدينا المتتالية $\{x_n\}$ ولنفرض أنها تتقارب إلى العدد a أي أن $\lim x_n = a$ عند ذلك

من أجل أي عدد موجب معطى ε يمكن إيجاد n_0 بحيث تتحقق المتراجحة

$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ من أجل جميع قيم $n_0 \le n$

لتكن n,m أعداداً طبيعية أكبر أو تساوي n_0 عند ذلك نجد بسهولة أن

$|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ و $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

وبالتالي ينتج أن:

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \le |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وبالتالي نحصل على الخلاصة التالية:

إذا كانت المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة فإنه من أجل أي عدد موجب $\varepsilon > 0$ معطى يمكن إيجاد عدد طبيعي n_0 بحيث تتحقق المتراجحة $|x_n - x_m| < \varepsilon$ من أجل جميع قيم n و $n_0 \leq m$

في الحقيقة العكس صحيح أيضاً ونقبل ذلك بدون برهان ويلخص ذلك في النظرية التالية:

<u>نظرية</u>

تتقارب المتتالية $\{x_n\}$ إذا وفقط إذا وجد من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي n_0 بحيث تتحقق المتراجحة $|x_n - x_m| < \varepsilon$ من أجل جميع قيم n و $n_0 \leq m$

إن الشرط السابق يسمى عادة بشرط كوشي وتتميز أهميته في أننا نستطيع أن نعرف هل المتتالية متقاربة أم لا دون معرفة النقطة التي تتقارب إليها.

المتتاليات المتناهية في الكبر(المتتاليات التي تسعى إلى اللانهاية)

تعريف كل متتالية محدودة من الأدنى وغير محدودة من الأعلى وليس لها نقطة تكاثف (نهاية محدودة) تسمى متتالية متناهية إلى اللانهاية الموجبة

كما تسمى كل متتالية غير محدودة من الأدنى ومحدودة من الأعلى متتالية متناهية إلى اللانهاية السالبة

يمكن التعبير عن المتتالية المتناهية إلى اللانهاية الموجبة أو السالبة كما يلي:

نقول عن متتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أنها تؤول إلى $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ إذا استطعنا من أجل كل عدد كيفي موجب A كبير بمقدار كاف إيجاد عدد طبيعي m ومن أجل كل m<n يكون:

$|X_n| > A \Rightarrow$ $x_n < -A$

$x_n > A$

ونرمز لذلك بما يلي:

$$\forall A > 0 \quad \exists m \in N \quad : \ \forall n > m \Rightarrow x_n > A \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \to \infty$$

أو

$$\forall A > 0 \quad \exists m \in N \quad : \forall n > m \Rightarrow x_n < -A \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_x \to -\infty$$

مثال

المتتالية التي حدها العام $x_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$ تسعى إلى اللانهاية حيث أن:

$$x_n = \frac{n^2+1}{n+1} > \frac{n^2}{n+1} > \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$$

من أجل $n \geq 2$ نجد أن $x_n > \dfrac{n}{2}$ بذلك نجد أ، المتتالية غير محدودة من الأعلى وليس لها نقطة تكاثف لأن $x_n > 0$ و هي أيضاً محدودة من الأدنى بالصفر

بعض خواص المتتاليات المتناهية في الكبر

1- إذا كان $\lim_{n\to\infty} x_n \to +\infty(-\infty)$ وكانت $\{y_n\}$ محدودة

فإن $\lim_{n\to\infty}(X_n \pm Y_n) \to +\infty(-\infty)$

2- إذا كان $\lim_{n\to\infty} x_n \to +\infty(-\infty)$ وإذا كان $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty(-\infty)$ فإن

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty(-\infty)$$

3- إذا كان $\lim_{n\to\infty} X_n \to +\infty(-\infty)$ وإذا كانت $\{y_n\}$ محدودة فإن

$$\lim_{n\to\infty}(x_n . y_n) = +\infty, (-\infty)$$

4- إذا كان $\lim_{n\to\infty} x_n \to +\infty(-\infty)$ فإن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} \to \pm 0$

إن الرمز $\lim_{n\to\infty} x_n = +0$ يعني أن المتتالية $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ تسعى إلى الصفر بقيم موجبة،

وأن 0- يعني أن المتتالية تسعى إلى الصفر بقيم سالبة

5- إذا كان $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ وكانت $\{x_n\}$ محدودة، وإذا وجد عدد طبيعي m بحيث أنه

من أجل كل n>m ، يكون $x_n > 0$ فإن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \pm 0$

6- إذا وجد عدد طبيعي m بحيث من أجل كل n>m يكون $0 < \alpha < x_n$

(أو $0 > \beta > x_n$) وإذا كانت النهاية $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ بالاحتفاظ بإشارة ثابتة فإن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$$

وتتحدد الإشارة حسب إشارة x_n و y_n

ملاحظات

1- إذا كان $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ و $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$

فلا نستطيع أن نقول أي شيء عن النهاية

$\lim(x_n + y_n)$

لأنها حالة من حالات عدم التعيين ويجب دراسة كل حالة خاصة على حدة

2- إذا كان $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ وكان $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ فلا نستطيع أن نقول شيئاً مسبقاً عن نهاية

المتتالية $\{x_n . y_n\}$

أمثلة

1- إذا كان $\{x_n\} = \{n^3\}$ و $\{y_n\} = \{-n^2\}$ فما هي النهاية $\lim x_n + y_n$

الحل

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}(n^3 - n^2) = \lim_{n\to\infty} n^3\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n^3\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \infty : \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

2- $\{x_n\} = \{\sqrt{n+1}\}$ و $\{y_n\} = \{-\sqrt{n}\}$ فإن

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

3- إذا كان $\{x_n\}=\{n\}$ و $\{y_n\}=\frac{1}{n}\sin n$ فإن

$$\lim_{n\to\infty}(x_n.y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(n.\frac{1}{n}\sin n\right)=\lim_{n\to\infty}\sin n$$

لا يوجد نهاية محددة

4- $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ و $\{y_n\}=\{n\}$ فإن

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n)=\lim_{n\to\infty}(\tfrac{1}{\sqrt{n}}.n)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$$

5- إذا كان $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ و $\{y_n\}=\{2n\}$ فإن

$$\lim_{n\to\infty}(x_n.y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}=2$$

المتتاليات المتناهية في الصغر (المتتاليات الصفرية) (المتتاليات التى تؤول إلى الصفر)

تعريف:

تدعى المتتالية المتقاربة التي تنتهيإلى الصفر متتالية متناهية في الصغر أو متتالية صفرية

تتمتع المتتاليات الصفرية بالخواص التالية:

1) $\lim_{n\to\infty} x_n=0\Rightarrow|x_n|<\varepsilon$

2) $\lim_{n\to\infty} X_n=0$, $\lim_{n\to\infty} y_n=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=0$

3) $\lim_{n\to\infty} x_n=0,\{y_n\}$ محدودة $\lim x_n y_n=0$

4) $x_n > y_n > z_n \quad \Rightarrow \lim x_n = \lim z_n = 0 \quad \Rightarrow \lim y_n = 0$

إن المتتالية الأساسية للمتتالية الصفرية هي $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

إن كل متتالية من النوع $\left\{\frac{1}{n^s}\right\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $s \geq 1$ هي متتالية صفرية

<u>نهايات القوة</u>

$\{x_n\} \to a$ متقاربة $x_n > 0$ ، $a \geq 0$ ، $b > 0$ ، $L_n \to a$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n)^b = (\lim x_n)^b = a^b$$

<u>مثال</u>

المتتالية التي حدها العام

$$x_n = \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots\dots + a_k n^k}{n^{k+1}}$$

حيث $a_1, a_2, \dots\dots, a_k$ هي أعداد مستقلة عن n و $s \geq 1$ هي متتالية صفرية. بالفعل

نجد:

$$x_n = a_0 \frac{1}{n^{s+1}} + a_1 \frac{1}{n^s} + \dots\dots + a_k \frac{1}{n}$$

وبما أن المتتالية $\left\{\frac{1}{n^s}\right\}_{n=1}^{\infty}$ صفرية وحسب الخاصة (2) فإن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي صفرية

تعريف:

نقول أن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تسعى إلى الصفر بسرعة أكبر من المتتالية $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ إذا

كانت المتتالية $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ صفرية

مثال: المتتاليتان $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ و $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ صفريتان ولكن:

$$\left\{\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \quad \text{صفرية}$$

وهذا يدل على أن $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ تسعى إلى الصفر بسرعة أكبر من $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

نظرية (5):

حسب الخاصة (1) سندرس المتتالية $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$

بما أن $|a|<1$ نستطيع أ، نكتب $|a| = \frac{1}{1+\lambda}, \lambda > 0$ وبالتالي

$$|a^n| = \frac{1}{(1+\lambda)^n}, \lambda > 0$$

وبما أن $(1+\lambda)^n > 1+n\lambda > n\lambda$ نجد:

$$0 \le |a^n| = \frac{1}{(1+\lambda)^n} < \frac{1}{n\lambda}$$

إن المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ صفرية وبالتالي $\left\{\frac{1}{n\lambda}\right\}_{n=1}^{\infty}$ أيضاً هي صفرية حيث $\lambda \neq 0$

وحسب الخاصة (4) فإن المتتالية $\{|a|^n\}_{n=1}^{\infty}$ و $|a|<1$ هي أيضاً صفرية وبذلك برهنا

أن: $|a|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^n = 0$

اعتماداً على العلاقة السابقة، يمكن أن نحصل على النظرية التالية الخاصة بالمتتاليات الصفرية:

نظرية (6):

إذا كانت المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تحقق واحداً من الشرطين التاليين

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|<1$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}<1$$

فإن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ صفرية

مثال:

المتتالية $\left\{\frac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ صفرية

الحل:

إن $x_n=\frac{a^n}{n!}$ و $x_{n+1}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$ وبالتالي

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{a^n}\right|=\frac{|a|}{n+1}\to 0, n\to\infty$$

نظرية (7):

تتقارب المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ إلى العدد a إذا وفقط إذا كانت متتالية الفرق $\{|x_n-a|\}_{n=1}^{\infty}$ متناهية في الصفر (صفرية)

البرهان: لنضع $\alpha_n=x_n-a$

لزوم الشرط: نفرض $\underset{n\to\infty}{x_n \to a}$ ولنبرهن أن $\underset{n\to\infty}{\alpha_n = x_n - a \to 0}$

بما أن $x_n \to a$ فإنه من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي m بحيث يكون:

$$\forall n > m \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

أو

$$\forall n > m \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon$$

أي أن $\alpha_n \to 0$ عندما $n \to \infty$ حسب تعريف المتناهي في الصغر

كفاية الشرط: لنفرض أن $\alpha_n \to 0$ عندما $n \to \infty$ فإنه من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي m بحيث يكون:

$$\forall n > m \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon$$

أو

$$\forall n > m \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

وحسب تعريف تقارب متتالية، فإن المتراجحة الأخيرة تفيد بأن $\{x_n\}$ تتقارب نحو العدد a وهو المطلوب.

<u>مثال 2:</u>

برهن أن المتتالية $\left\{\frac{n^2}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب إلى العدد a=1 لنحسب الفرق $|x_n - a|$ فنجد

$$|x_n - a| = \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n^2 - n^2 - 1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \to 0, n \to \infty$$

وهذا يعني أن $|x_n - 1| \to 0$ عندما $n \to \infty$ إذاً:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

بفرض s عدد طبيعي، برهن أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^s = 1$$

لنأخذ الفرق

$$\left|x_n - 1\right| = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^s - 1 = 1 + s\frac{1}{n} + \frac{s(s-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \dots\dots + \frac{1}{n^s} - 1$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty}\frac{s}{n}=0$ حيث $s>0$ نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^s - 1\right| = 0$$

وبالتالي $\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^s = 1$

<u>مثال 4:</u>

برهن أن كل متتالية من النوع $\{n^k.a^n\}$ هي متناهية في الصغر: حيث k>0 و

$|a|<1$.

لندرس النسبة:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^k.a^{n+1}}{n^k.a^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k |a| = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^k.|a|$$

وحسب المثال 3 نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = |a|\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^k = |a|.1 = |a| < 1, k>0$$

وحسب النظرية 6 فإن المتتالية $\{n^k.a^n\}$ متناهية في الصغر.

متتاليات شهيرة:

1- المتتالية $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $a \in R$

لتكن $x_n = a^n$ ولندرس الحالات التالية:

$$|a| < 1, |a| > 1, a = 1, a = -1$$

أ- $|a| < 1$ وجدنا أ، $\lim\limits_{n \to 0} a^n = 0$

ب- a=1 نجد $x_n = 1^n = 1$ وبالتالي نجد المتتالية:

$$\{x_n\} = 1,1,1,.........$$

وهي متقاربة ونهايتها الواحد.

جـ- a=-1 نأخذ المتتالية بالشكل:

$$\{(-1)^n\} = -1,1,-1,......$$

وهي متباعدة لأن نهايتها غير محدودة فهي إما 1- أو +1

ء- $|a| > 1$ وهنا العدد a>1 أو a<-1

لندرس الحالة a>1 عندئذ نستطيع أن نكتب $a = 1 + \beta$ حيث $\beta > 0$

$$a^n = (1+\beta)^n = 1 + \frac{n}{1!}\beta + \frac{n(n-1)}{2!}\beta^2 + ... + \beta^n > n\beta + 1 > n\beta$$

أي $a^n > n\beta$ و $\beta > 0$ وهذا يدل على أ، المتتالية متباعدة.

الحالة a<-1 في هذه الحالة يمكن أ، نجزئ المتتالية $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ إلى متتاليتين جزئيتين

$\{a^{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ ، $\{a^{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ إن المتتالية الأولى تتناهى إلى $-\infty$ وأما الثانية ذات القوى

الزوجية فهي تتناهى إلى $+\infty$

2- من أجل كل $k>0$ و $|a|<1$ فإن: $\lim\limits_{n\to\infty} n^k.a^n = 0$

فمثلاً يمكن المتتالية $\left\{\dfrac{n^3}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ أن تكتب بالشكل: $\{n^3(\tfrac{1}{2})^n\}_{n=1}^{\infty}$

و هنا نجد $k=3$ و $a=\dfrac{1}{2}<1$ وبالتالي فالمتتالية متقاربة ونهايتها $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{2^n}=0$

يمكن أن نكتب بعض حدودها كما يلي:

$$\{n^3(\tfrac{1}{2})^n\}_{n=1}^{\infty} = \tfrac{1}{2}, 2, \tfrac{27}{8}, 4, \tfrac{125}{32}, ...$$

3- المتتالية $\left\{\dfrac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$

لهذه المتتالية أهمية عندما a>1 وسنبرهن أنها صفرية لذلك نفرض:

$x_n = \dfrac{a^n}{n!}$ و $x_{n+1} = \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}$ ومنه نجد:

$$x_{n+1} = \frac{a^n.a}{(n+1)n!} = x_n.\frac{a}{n+1}$$

عندما $n\geq 1$ نجد $\dfrac{a}{n+1}\leq 1$ وبالتالي $x_{n+1}\leq x_n$ وبالتالي فإن $x_n \downarrow$ وبما أن $x_n>0$

فإن المتتالية متقاربة أما نهايتها فتحسب كما يلي:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n \frac{a}{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n . \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1} = 0$$

وبذلك نجد $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$

4- المتتالية $\{\sqrt[n]{a}\}_{n=1}^{\infty}$ ، a>0

1) لنفرض أن a>1 عندئذ $\sqrt[n]{a}>1$ نفرض $\varepsilon_n>0$ ، $\sqrt[n]{a} = 1+\varepsilon$

وسنبرهن أن المتتالية $\{\varepsilon_n\}$ صفرية

لنرفع طرفي العلاقة $\sqrt[n]{a}=1+\varepsilon$ إلى الدرجة n فنجد:

حسب علاقة برنولي $a=(1+\varepsilon_n)^n=1+n\varepsilon_n+........>n\varepsilon_n$

أي $a>n\varepsilon_n$ أو $\frac{a}{n}>\varepsilon_n>0$

بالاعتماد على الخاصة 4 نجد أن $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ وبالتالي: a>1 ، $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$

2- عندما a=1 فإن $\sqrt[n]{1}=1$ دائماً وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$

3- عندما 0<a<1 لنفرض $a=\frac{1}{b}$ حيث b>1 عندئذ:

$$\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{b}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\lim\sqrt[n]{b}}=\frac{1}{1}=1$$

<u>ملاحظة:</u>

نعلم أن $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ ووجدنا أن $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ وهذا برهان جديد على أن $a^0=1$ حيث a>0 ويمكن أن نكتب:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=a^{\lim\frac{1}{n}}=a^0=1$$

برهن تقارب المتتالية

5- المتتالية $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ لنكتب $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$

لنشكل المتتالية:

$$y_n=x_n(1+\tfrac{1}{n})=(1+\tfrac{1}{n})^{n+1}$$

إن $0 < x_n < y_n$

ولكن المتتالية $\{y_n\}$ متناقصة باضطراد وبما أنها موجبة فهي محدودة من اليسار

وبالتالي فإن $\{y_n\}$ متقاربة.

من أجل المتتالية $\{x_n\}$ نكتب $x_n = \frac{y_n}{1+\frac{1}{n}}$

بأخذ النهاية نجد:

$$\lim x_n = \frac{\lim y_n}{\lim(1+\frac{1}{n})} = \lim y_n$$

بذلك برهن أن المتتالية $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ متقاربة ونهايتها العدد النبري e أي

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n = e = 2.718182$$

<u>أمثلة محلولة</u>

1- أوجد نهايات المتتاليات التالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ إذا كان:

1) $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

2) $x_n = \frac{3^n}{\sqrt{n!}}$

3) $x_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

4) $x_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

5) $x_n = \left(\frac{n+5}{n+3}\right)^{2n+4}$

6) $x_n = (-1)^n (1 + \frac{7}{n})$

$$7)\ x_n = \frac{(-5)^n + 5^n}{n!}$$

$$8)\ x_n = \sqrt[n]{2n+1}$$

<u>الحل</u>

1) نضع الحد العام ونقسمه على مرافق x_n

$$x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

بالتقسيم على $\sqrt{n}$ نجد:

$$x_n = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$$

بما أن $1 < \sqrt{1+\frac{2}{n}} < 1+\frac{2}{n}$ و $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n}) = 1+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1+2.0 = 1$

إذاً: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n}} = 1$

عندئذ:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) = \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = \frac{2}{1+1} = 1$$

2) $x_n = \frac{3^n}{\sqrt{n!}}$ سنبرهن أن هذه المتتالية متناهية في الصغر باستخدام العلاقة:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = q < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{3^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \times \frac{\sqrt{n!}}{3^n}\right| = 3\sqrt{\frac{n!}{(n+1)!}} = \frac{3}{\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=3\times 0=0<1\Rightarrow \lim x_n=0$$

$$x_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\ldots\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad (3$$

باستخدام المطابقة

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

وبذلك سيأخذ الحد العام للمتتالية الشكل:

$$x_n=\frac{1}{2}\left[\left(\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}\right)+\left(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}\right)+\ldots\ldots+\left(\tfrac{1}{2n-1}-\tfrac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$x_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

عندئذ بحساب النهاية نجد

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

$$x_n=\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}} \quad (4$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left[\left(-\tfrac{2}{3}\right)^n+1\right]}{3^{n+1}\left[\left(-\tfrac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]}=\frac{1}{3}\,\frac{1+\lim\left(-\tfrac{2}{3}\right)^n}{1+\lim\left(-\tfrac{2}{3}\right)^{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1+0}{1+0}=\frac{1}{3}$$

لأن $\lim_{n\to\infty}\left(-\tfrac{2}{3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(-\tfrac{2}{3}\right)^{n+1}=0$

$$x_n=\left(\frac{n+5}{n+3}\right)^{2n+4} \quad (5$$

نقسم البسط والمقام على n فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{5}{n})^{2n+4}}{(1+\frac{3}{n})^{2n+4}}$$

$$= \frac{\lim(1+\frac{5}{n})^{2n}.\lim(1+\frac{5}{n})^{4}}{\lim(1+\frac{3}{n})^{2n}.\lim(1+\frac{3}{n})^{4}}$$

$$= \frac{[\lim(1+\frac{5}{n})^{n}]^2.[1+\lim(\frac{5}{n})]^4}{[\lim(1+\frac{3}{n})^{n}]^2.[1+\lim(\frac{3}{n})]^4}$$

$$= \frac{[\lim(1+\frac{5}{n})^{\frac{n}{5}}]^{10}.[1+0]^4}{[\lim(1+\frac{3}{n})^{\frac{n}{3}}]^{6}.[1+0]^4}$$

$$= \frac{e^{10}}{e^{6}} = e^4$$

استخدمنا النهاية $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^{\frac{n}{k}} = e$

إذاً $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+3}\right)^{2n+4} = e^4$

6) $x_n = (-1)^n(1+\frac{7}{n})$

إن جميع عناصر هذه المتتالية محتواة في المتتاليتين:

$x_{2n} = 1+\frac{7}{2n}$ ، $x_{2n-1} = -1-\frac{7}{2n-1}$

بما أن $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 1$ ، $\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = -1$

وبالتالي فإن للمتتالية $\{(-1)^n(1+\frac{7}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ نقطتان للتكاثف هما 1,-1

وبالتالي فالمتتالية متباعدة، أي ليس لها نهاية.

$$x_n = \frac{(-5)^n + 5^n}{n!} \quad (7$$

يمكن أن نكتب الحد العام بالشكل:

$$x_n = \frac{5^n}{n!}\left[(-1)^n + 1\right]$$

و هنا يمكن اعتبار المتتالية التي حدها العام x_n كجداء متتاليتين

$$\{z_n\} = (-1)^n + 1 \quad ، \quad \{y_n\} = \left\{\frac{5^n}{n!}\right\}$$

نعلم أن:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{n!} = 0$$

$$|z_n| = \left|(-1)^n + 1\right| \le 2$$

وبالتالي فإن $\{z_n\}$ متتالية محدودة وبالتالي فإن:

$$\frac{5^n}{n!}\left[(-1)^n + 1\right] \to 0 \quad \text{عندما} \quad n \to \infty$$

أي $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{n!}\left[(-1)^n + 1\right] = 0$

(8 $x_n = \sqrt[n]{2n+1}$ يمكن أن نكتب

$$\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{2n+1} \le \sqrt[n]{2n+n} = \sqrt[n]{3n} = \sqrt[n]{3}.\sqrt[n]{n}$$

أو

$$\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{2n+1} \le \sqrt[n]{3}.\sqrt[n]{n}$$

قانون:

إذا كانت متتالية محصورة بين متتاليتين متساويتين فهي تساويهم

إن $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$$\lim \sqrt[n]{3}.\lim \sqrt[n]{n} = 1.1 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+1} = 1$$

2- اكتب بعض الحدود الأولى من المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث:

$$1)\ x_n = \frac{1}{n}\sin n\tfrac{\pi}{2}$$

$$2)\ x_n = \frac{1}{(3n-1)(3n+1)}$$

$$3)\ x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n};n & \text{فردي} \\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n};n & \text{زوجي} \end{cases}$$

$$4)\ x_n = \frac{1+2+3+.......+n}{n^2}$$

$$5)\ x_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right).......\left(1-\frac{1}{n^2}\right); x_1 = 1$$

$$6)\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2}; x_1 = 1, x_2 = 1$$

الحل

$$1)\ \{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2}\right\} = 1,0,-\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},........$$

$$2)\ \{x_n\} = \left\{\frac{1}{(3n-1)(3n+1)}\right\} = \frac{1}{2.4},\frac{1}{5.7},\frac{1}{8.10},\frac{1}{11.13}$$

$$3)\ \{x_n\}=1,-\frac{1}{4},\frac{1}{3},-\frac{1}{16},\frac{1}{5},-\frac{1}{32},.........$$

$$4)\ \{x_n\}=\left\{\frac{1+2+3+.....+n}{n^2}\right\}=1,\frac{3}{4},\frac{2}{3},\frac{5}{8},\frac{3}{5},\frac{7}{12},.........$$

$$5)\ \{x_n\}=\left\{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right).....\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right\},x_1=1$$

$$=1,\frac{3}{4},\frac{2}{3},\frac{5}{8},\frac{3}{5},\frac{7}{12},\frac{4}{7},........$$

$$6)\ \{x_n\}=\{x_{n-1}+x_{n-2}\};x_1=1,x_2=1$$

$$=1,1,2,3,5,8,13,........$$

3- أوجد صيغة الحد العام للمتتاليات التالية واستنتج أياً منها محدودة:

$$1)\ \frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{4}{6},........,\frac{n}{n+2},..........$$

إذاً $x_n=\frac{n}{n+2}$ وهي متتالية محدودة بالمجال $(0,1)$

$$2)\ \frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{16},........,\frac{(-1)^{n+1}}{2^n},........$$

إذاً $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ ، إن $|x_n|\le\frac{1}{2}$

$$3)\ 1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{1}{9},.........,\frac{1}{2n+1},.........$$

إذاً $x_n=\frac{1}{2n1}$ ، $x_n\in(0,1)$

$$4)\ \frac{1}{2^2},\frac{13}{2^3},\frac{19}{2^4},\frac{97}{2^5},..........,\frac{3^n+(-2)^n}{2^{n+1}}$$

إذاً $x_n = \frac{3^n + (-2)^n}{2^{n+1}}$ وغير محدودة.

$$5)\ \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

$$x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}, x_1 = \sqrt{2}$$
$$x_n < 1 + \sqrt{2}$$

4ـ ما هي المتتاليات $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ المرتبة من المتتاليات التي حدودها العامة التالية

$$1)\ x_n = \frac{4^n}{4^n + 1}, x_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{4^{n+1} + 1} = \frac{4^n.4}{4^n.4 + 1}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{4^{n+1}}{4^{n+1} + 1} \times \frac{4^n + 1}{4^n} = \frac{4^n.4}{4^n.4 + 1} \times \frac{4^n + 1}{4^n} = \frac{4.4^n + 4}{4.4^n + 1} = \frac{4^n + 1}{4^n + \frac{1}{4}} > 1$$

إذاً $x_{n+1} > x_n$ والمتتالية متزايدة.

$$2)\ x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, x_{n+1} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} \times \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}$$

$$= \frac{n+2-n-1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} + (n+1) - \sqrt{n}\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}(1 - \sqrt{n})}$$

يمكن إعطاء n قيمتين متتاليتين والتأكد من أن الفرق بين حدين متتاليين سالب

وبالتالي المتتالية متناقصة.

$$3)\ x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$$

$$\{x_n\} = 0,1,0,\frac{1}{2},........$$

المتتالية غير مرتبة:

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})$$
$$=\sqrt{n+1}.\sqrt{n+2}-\sqrt{n}.\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

تمارين

أوجد نهايات المتتاليات التالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ إذا كان

1- $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$

نضع الحد العام ونقسمه على مرافق x_n

$$x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

بالتقسيم على $\sqrt{n}$ نجد:

$$x_n = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$$

بما أن $1<\sqrt{1+\frac{2}{n}}<1+\frac{2}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{2}{n}) = 1+2\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n} = 1+2.0 = 1$$

إذاً $\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n}} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) = \frac{2}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = \frac{2}{1+1} = 1$$

2- $x_n = \frac{3^n}{\sqrt{n!}}$ لنبرهن أن هذه المتتالية متناهية في الصغر:

باستخدام العلاقة: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = q < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{3^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \times \frac{\sqrt{n!}}{3^n}\right| = 3\sqrt{\frac{n!}{(n+1)!}} = \frac{3}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 3\times 0 = 0 < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

-3 $x_n = \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left[(-\frac{2}{3})^n + 1\right]}{3^{n+1}\left[(-\frac{2}{3})^{n+1} + 1\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}\frac{1+\lim(-\frac{2}{3})^n}{1+\lim(-\frac{2}{3})^{n+1}} = \frac{1}{3}.\frac{1+0}{1+0} = \frac{1}{3}$$

لأن $\lim_{n\to\infty}(-\frac{2}{3})^n = \lim_{n\to\infty}(-\frac{2}{3})^{n+1} = 0$

-4 $x_n = \left(\dfrac{n+5}{n+3}\right)^{2n+4}$

نقسم البسط و المقام على n فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{5}{n})^{2n+4}}{(1+\frac{3}{n})^{2n+4}} = \frac{\lim(1+\frac{5}{n})^{2n}.\lim(1+\frac{5}{n})^4}{\lim(1+\frac{3}{n})^{2n}.\lim(1+\frac{3}{n})^4} = \frac{[\lim(1+\frac{5}{n})^n]^2.[1+\lim\frac{5}{n}]^4}{[\lim(1+\frac{3}{n})^n]^2.[1+\lim\frac{3}{n}]^4}$$

$$= \frac{[\lim(1+\frac{5}{n})^{\frac{n}{5}}]^{10}.[1+0]^4}{[\lim(1+\frac{3}{n})^{\frac{n}{3}}]^6.[1+0]^4} = \frac{e^{10}}{e^6} = e^4$$

حيث استخدمنا النهاية $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^{\frac{n}{k}} = e$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+3}\right)^{2n+4} = e^4$$

5- $x_n = \frac{(-5)^n + 5^n}{n!}$

يكتب الحد العام بالشكل:

$$x_n = \frac{5^n}{n!}\left[(-1)^n + 1\right]$$

يمكن اعتبار المتتالية التي حدها العام x_n كجداء متتاليتين

$\{z_n\} = (-1)^n + 1$ ، $\{y_n\} = \left\{\frac{5^n}{n!}\right\}$

نعلم أن:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n}{n!} = 0$

مرة موجب ومرة سالب $\qquad$ $|z_n| = \left|(-1)^n + 1\right| \le 2$

وبالتالي فإن $\{z_n\}$ متتالية محدودة وبالتالي فإن:

$n \to \infty$ عندما $\frac{5^n}{n!}\left[(-1)^n + 1\right] \to 0$

أي $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n}{n!}\left[(-1)^n + 1\right] = 0$

6) $x_n = \sqrt[n]{2n+1}$ يمكن أن نكتب

$$\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{2n+1} \le \sqrt[n]{2n+n} = \sqrt[n]{3n} = \sqrt[n]{3}.\sqrt[n]{n}$$

أو $\qquad$ $\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{2n+1} \le \sqrt[n]{3}.\sqrt[n]{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

إذاً $\qquad$ $\lim \sqrt[n]{3}.\lim \sqrt[n]{n} = 1.1 = 1$

إذاً $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+1} = 1$

إذا كانت متتالية محصورة بين متتاليتين متساويتين فهي تساويهم

ـ أوجد النهايات التالية:

$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ ، $\{y_n\} = \{n\}$

$\lim_{n\to\infty} x_n . y_n = ?$

نضرب بـ $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

$\lim_{n\to\infty} x_n . y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$

$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ ، $\{y_n\} = \{2n\}$

$\lim_{n\to\infty} x_n . y_n = ?$

$$\lim_{n\to\infty} x_n . y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{1+0} = 2$$

ـ بين فيما إذا كانت المتتاليات التالية مرتبة:

أ) $x_n = \frac{4^n}{4^n+1}, x_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{4^{n+1}+1} = \frac{4^n.4}{4^n.4+1}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{4^{n+1}}{4^{n+1}+1} \times \frac{4^n+1}{4^n} = \frac{4^n.4}{4^n.4+1} \times \frac{4^n+1}{4^n} = \frac{4.4^n+4}{4.4^n+1} = \frac{4^n+1}{4^n+\frac{1}{4}} > 1$$

إذاً $x_{n+1} > x_n$ والمتتالية متزايدة.

ب) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, x_{n+1} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\times\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}$$

$$=\frac{n+2-n-1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}+(n+1)-\sqrt{n}\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}(1-\sqrt{n})}$$

يمكن إعطاء n قيمتين متتاليتين والتأكد من أن الفرق بين حدين متتاليين سالب

وبالتالي المتتالية متناقصة.

جـ) $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$

$$\{x_n\}=0,1,0,\frac{1}{2},........$$

المتتالية غير مرتبة.

المتتاليات

المتتالية: -1 $\left\{\dfrac{n^2}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}\Leftarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}=1$

-2 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s=1$ s: عدد طبيعي

-3 $\{n^k.a^n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متناهية في الصغر

<u>المتتاليات الشهيرة</u>

-1 $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ $a\in R$

هناك أربع حالات

أ- $|a| < 1$ $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$

ب- a=1 $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$

جـ- a=-1

متباعدة نهايتها إما 1- أو 1+

ء- $|a| > 1$ هنا العدد a>1 أو a<-1

2- $\lim_{n\to\infty} n^k . a^n = 0$ $\{n^k . a^n\}_{n=1}^{\infty}$

3- $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ $\left\{\frac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$

4- $\{\sqrt[n]{a}\}_{n=1}^{\infty}$ ، a>0

أ- a>1 $\sqrt[n]{a} > 1$

ب-a=1 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

جـ- 0<a<1 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

5- $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$

8- أوجد نهاية المتتالية:

$$x_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

باستخدام المطابقة

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

سيأخذ الحد العام للمتتالية الشكل:

$$x_n=\frac{1}{2}\left[\left(\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}\right)+\left(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}\right)+\ldots\ldots+\left(\tfrac{1}{2n-1}-\tfrac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$x_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

عندئذ بحساب النهاية نجد

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

تابع -7-

أوجد نهاية ما يلي:

-1 $\{x_n\}=\{n^3\}$ ، $\{y_n\}=\{-n^2\}$ ما هي نهاية $\lim x_n+y_n$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}(n^3-n^2)=\lim_{n\to\infty}n^3(1-\tfrac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}n^3(1-0)=\infty$$

-2 $\{x_n\}=\{\sqrt{n+1}\}$ $\{y_n\}=\{-\sqrt{n}\}$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

-3 إذا كان $\{x_n\}=\{n\}$ ، $\{y_n\}=\frac{1}{n}\sin n$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n.y_n)=\lim_{n\to\infty}(n.\frac{1}{n}\sin n)=\lim_{n\to\infty}\sin n$$

لا يوجد نهاية محدودة.

الفصل الثالث
السلاسل العددية

3-1 تعريف السلسلة العددية:

هي المجموعة اللانهائي لحدود متتالية عددية لا نهائية فإذا كانت $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من

الأعداد الحقيقية حدودها $u_1, u_2, ..., u_n$ فإن المجموع اللانهائي لهذه الحدود

$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ بشكل سلسلة عددية ونرمز لها بـ $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$

نسمي u_1 بالحد الأول للسلسلة، u_2 حدها الثاني، u_n حدها ذا المرتبة n أو الحد

العام وهو الصيغة الرياضية التي تولد جميع حدود السلسلة.

تمثل السلسلة إما بإعطاء جميع حدودها أو بإعطاء حدها العام وتكتب اختصاراً

بالشكل: $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ حيث u_n هو الحد العام للسلسلة المفروضة.

أمثلة

1) السلسلة $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ...$

تسمى هذه السلسلة بالسلسلة التوافقية، حدها العام $u_n = \frac{1}{n}$ وتكتب بالشكل المختصر

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

2) السلسلة

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$$

حدها العام $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ ونكتب بالشكل المختصر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

3) السلسلة $2 - 6 + 18 - ...... + 2(-3)^{n-1}$ حدها العام $u_n 2(-3)^{n-1}$ وشكلها المختصر

$$2\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^{n-1}$$

4) السلسلة $1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{n-1} + ...$ حيث $a \neq 0$ عدد حقيقي

ونسمي هذه السلسلة بالسلسلة الهندسية، حدها العام $u_n = a^{n-1}$

5) السلسلة $a + 2a + 3a + ... + (n-1)a + ...$

تسمى السلسلة الحسابية وفيها الحد العام $u_n = (n-1)a$

مجموع السلسلة

إذا كان المجموع $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$ منتهياً فيمكن أن نجد قيمته الدقيقة ويسمى مجموع السلسلة أما إذا كان المجموع لانهائياً فلا نستطيع أن نقول شيئا عنهً إلا في بعض الحالات الخاصة.

<u>متتالية المجاميع الجزئية</u>

لتكن لدينا متتالية الأعداد الحقيقية الآتية:

$$u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n \qquad (1)$$

وإذا بدأنا بالتتالي بأخذ المجاميع الجزئية لحدودها كما يلي

$$\begin{aligned}
&S_1 = u_1 \\
&S_2 = u_1 + u_2 = S_1 + u_2 \\
&S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = S_2 + u_3 \\
&.S_n = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n = S_{n-1} + u_n
\end{aligned}$$

تمثل المتتالية $s_1, s_2, \ldots\ldots\ldots, s_n$ المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ وتسمى متتالية المجاميع الجزئية ونرمز لها بـ $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$

<u>السلاسل المتقاربة و السلاسل المتباعدة</u>

إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ونهايتها s أي $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ فإن العدد s يمثل مجموع السلسلة وتكون السلسلة في هذه الحالة متقاربة. أما إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة أي ليس لها نهاية محددة، فإن السلسة نفسها تكون متباعدة وليس لها مجموع محدد.

إن الحديث عن مجموع السلسلة يخص السلاسل المتقاربة وأما السلاسل المتباعدة فلا معنى للحديث عن مجموعها.

من السلاسل المتباعدة: السلسلة الآتية:

$1+1+1+1+\dots\dots\dots+1+\dots.$

و هي متباعدة لأن متتالية المجاميع الجزئية:

$1,2,3,\dots\dots\dots,n,\dots\dots.$

متباعدة كما نعلم. حيث أنها تؤول إلى اللانهاية

أمثلة

1) السلسلة $1+1+1+1+\dots\dots..+1+\dots\dots$

لنأخذ متتالية المجاميع الجزئية لها فنحصل

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1\\
s_2 &= 1+1=2\\
s_3 &= 1+1+1=3\\
&.\\
&.\\
s_n &= 1+1+\dots\dots+1=n
\end{aligned}
$$

وتكون متتالية المجاميع الجزئية لها:

$1,2,3,\dots\dots\dots,n,\dots..$

و هي متباعدة لأنها تؤول إلى اللانهاية

2) السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

لنأخذ المجاميع الجزئية لها نحصل

$$S_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

.

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots\dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

وتكون متتالية المجاميع الجزئية لها $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة لأن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \tfrac{1}{n+1}) = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1$$

3) السلسلة

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{n-1} = 2 - 6 + 18 - 54 + 162 + \dots.. + 2(-3)^{n-1} + \dots...$$

بأخذ المجاميع الجزئية لها نحصل

$$S_1 = 2, S_2 = -4, S_3 = 14, S_4 = -40, S_5 = 122$$

بسهولة نلاحظ أن متتالية المجاميع الجزئية لها لا تتقارب إلى أي عدد حقيقي أي أن السلسلة متباعدة

لندرس بعض السلاسل الهامة، التي تلعب دوراً أساسياً في الرياضيات

<u>السلسلة الحسابية</u>

السلسلة الحسابية: هي مجموع حدود المتتالية الحسابية، وهي متتالية الأعداد التي ينشأ كل حد فيها عن سابقه بإضافة مقدار ثابت r يسمى أساس المتتالية أي:

$$a_k = a_{k-1} + r$$

وبذلك نجد حدود المتتالية الحسابية، تأخذ الشكل الآتي:

$$a, a+r, a+2r, ..., a+(n-1)r, ...$$

ويكون مجموعها النوني

$$A_n = a + (a+r) + (a+2r) + ... + [a+(n-1)r]$$

خواص السلسلة الحسابية

1- يعطى الحد العام بالصيغة الآتية

$$a_n = a + (n-1)r$$

2- الفرق بين حدين متتاليين يساوي مقداراً ثابتاً هو أساس السلسلة r أي

$$r = a_k - a_{k-1}$$

3- كل حد فيها هو وسط حسابي بين مجاوريه ما عدا الحد الأول أي

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$$

4- إن مجموع حدين متقابلين في السلسلة يساوي مقداراً ثابتاً هو $2a_1 + (n-1)r$

بالحقيقة إذا كانت حدود السلسلة على الشكل:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + ...$$

فإن

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)r = 2a_1 + (n-1)r$$
$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_1 + (n-2)r = 2a_1 + (n-1)r$$
$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2r + a_1 + (n-3)r = 2a_1 + (n-1)r$$

5- مجموع حدود السلسلة الحسابية

لنكتب مجموع حدود السلسلة الحسابية المنتهية مرتين بشكل متعاكس كما يلي

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$$

نجمع كل حدين متقابلين

$$(a_1 + a_n)(a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

وبحسب الخاصة (4) وبملاحظة أن مجموع الأزواج يساوي n زوجاً وأن كل زوج

يساوي $[2a_1 + (n-1)r]$ إذاً

$$2A_n = n[2a_1 + (n-1)r]$$

$$A_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r] \qquad \text{(I)}$$

$$A_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad \text{(I')}$$

العلاقتان (I') , (I) تعطيان مجموع n حداً من حدود السلسلة الحسابية

من البديهي أننا لا نستطيع إيجاد المجموع اللانهائي لحدود السلسلة الحسابية، لأنه

وحسب الصيغتين (I') , (I) فإن $A_n \to \infty$ عندما $n \to \infty$. إذاً فالسلسلة الحسابية

متباعدة دوماً

أمثلة

1- مجموع المائة حد الأولى من الأعداد الطبيعية هو

$$A_{100}=\frac{100}{2}(1+10)=5050$$

2- مجموع المائة حد الأولى من الأعداد الطبيعية الزوجية هو

$$A_{100}=\frac{100}{2}[2+(100-1)2]=10000$$

3- مجموع المائة حد الأولى من الأعداد الطبيعية الفردية هو

$$A_{100}=\frac{100}{2}[1+(100-1)2]=9950$$

2- السلسة الهندسية

تعريف: نسمي السلسلة

$$a_1+a_2+.....+a_n+.......$$

سلسلة هندسية إذا كانت القسمة بين حدين متتاليين فيهما تساوي مقداراً ثابتاً q حيث

$q\neq 1$ يسمى أساس السلسلة الهندسية، أي:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q\Rightarrow a_n=a_{n-1}q, n=2,3,...........$$

وعلى ذلك نستطيع كتابة حدود السلسلة الهندسية بالشكل

$$a+aq+aq^2+aq^3+........+aq^{n-1}+......$$

لنسمي هذا المجموع G_n

$$G_n=a+aq+aq^2+........+aq^{n-1}+......(1)$$

لنضرب طرفي هذه العلاقة بـ q فنجد

$$qG_n = aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^n + ...(2)$$

بطرح (1) من (2)

$$qG_n - G_n = aq^n - a$$

$$G_n(q-1) = a(q^n - 1)$$

$$G_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

<u>خواص السلسلة الهندسية</u>

1- ينتج كل حدودها عن سابقه بضربه بعدد ثابت q أساس السلسلة

$$a_k = a_{k-1}.q$$

2- كل حد a_k من حدودها وسط هندسي بين مجاوريه ما عدا الحد الأول

$$a_k^2 = a_{k-1}.a_{k+1} \Rightarrow a_k = \sqrt{a_{k-1}.a_{k+1}}, k = 2,3,.....$$

برهن العلاقة

3- مجموع n حداً من حدودها يعطى بالعلاقة

$$G_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1} = a\frac{1 - q^n}{1 - q}$$

<u>دراسة تقارب السلسلة الهندسية</u>

1- عندما $|q| < 1$ أي $-1 < q < 1$ نعلم أن $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

وبالتالي فإن:

$$G = \lim_{n\to\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \lim_{n\to\infty}\frac{aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}$$

أي أن النهاية موجودة ومحدودة فالسلسلة متقاربة

2- $|q|>1$ أي $q>1$ أو $q<-1$

بأخذ نهاية المجموع

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q}$$

ولكن $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ عندما $|q|>1$

إذاً $\lim_{n\to\infty} G_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\right)=\infty$

أي أن السلسلة متباعدة

3- q=1 تكون حدود السلسلة ثابتة وتساوي a وعندئذ مجموعها $G_n = na$

$$\lim_{n\to\infty} G_n = a\lim_{n\to\infty} n = \infty$$

أي السلسلة أيضاً متباعدة

4- -1 يكون مجموع حدود السلسلة

$$G_n = a-a+a-a+.........+(-1)^{n-1}a$$

إن متتالية المجاميع الجزئية تساوي 0 أو a وذلك حسبما يكون n زوجياً أو فردياً، إذاً

لا نستطيع تحديد نهاية لهذه المتتالية فهي متباعدة، علماً أن مجموعها مقداراً ثابتاً 0

أو a

باقي حدود السلسلة غير المنتهية

نقول إن السلسلة غير المنتهية $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ بأنها سلسلة متقاربة حين يكون الـ n حداً

الأولى منها مقداراً محدداً. أي عندما تكون نهاية الـ n حداً الأولى منها نهاية محددة

و هكذا عندما تكون السلسلة متقاربة فإن مجموع هذه السلسلة يؤدي إلى تقاربها

إذاً مجموع الـ n من السلسلة يمثل قيمة تقريبية لمجموع السلسلة لنفرض الخطأ في

تقدير مجموع السلسلة R_n حيث

$$R_n = A - A_n$$

يسمى R_n باقي السلسلة:

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots\dots\dots\dots$$

في السلاسل الهندسية المتقاربة عندما $|q| < 1$ يكون

$$R_n = G - G_n = \frac{a}{1-q} - \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{aq^n}{1-q}$$

النظريات الأساسية للسلاسل المتقاربة

نظرية 1: الشرط اللازم لتقارب سلسلة عددية هو أن يتناهى حدها العام إلى الصفر

البرهان: لنفرض $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ سلسلة متقاربة.إذاً المجموع النوني لحدودها ينتهي إلى نهاية

محدودة ووحيدة. ولتكن A عندما $n \to \infty$.

إن الحد العام للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ هو الفرق بين المجموعتين S_n ، S_{n-1}

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

نتيجة:

نفهم من هذه النظرية أنه إذا كان الحد العام لا ينتهي إلى الصفر فهذا يدل على أن السلسلة متباعدة.كمثال على ذلك السلسلة الهندسية التي فيها $|q|>1$ وجدنا أنها متباعدة حيث $\lim\limits_{n\to\infty} q^n \neq 0$

إن الشرط $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ هو لازم لتقارب السلسلة وليس كافياً لنأخذ كمثال على ذلك السلسلة التوافقية $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ التي فيها $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ ولكنها متباعدة. بالحقيقة لدينا إن حدود السلسلة هي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+.......+\frac{1}{n}+.........$$

يمكن أن نكتب حدود هذه السلسلة ابتداء من الحد الثاني على شكل مجموعات عدد حدودها $1,2,8,.......,2^{k-1}$ حيث k ترتيب المجموعة

$$\sum\frac{1}{n}=1+(\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8})+(\tfrac{1}{9}+......+\tfrac{1}{16})+.....$$

وإذا أخذنا من كل مجموعة أصغر حدودها وهو الأخير وضربناه بعدد الحدود فيها نحصل على قيمة أصغر من القيمة الحقيقية لمجموع عناصر المجموعة أي:

$$\sum\frac{1}{n}>1+\tfrac{1}{2}+2\tfrac{1}{4}+4\tfrac{1}{8}+8\tfrac{1}{16}+........=1+\tfrac{1}{2}(1+1+1+......)=1+\tfrac{n}{2}$$

إن مجموع الـ (n-1) حداً الأولى منها وهو $\frac{n}{2}$ يتناهى إلى اللانهاية لذلك نجد أن

مجموع حدود هذه السلسلة يتناهى إلى اللانهاية وبالتالي فهي متباعدة.على الرغم من

أن $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

نظرية 2:

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ سلسلتين متقاربتين إلى العدد A و B إن مجموعهما

وفرقهما هو سلسلة متقاربة نحو العدد $A\pm B$ أي:

$$\lim_{n\to\infty}(u_n\pm v_n)=A\pm B$$

البرهان:

لنأخذ المجموع (الفرق) لـ n حد الأولى للمتتالية $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$

$$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+.....+(u_n\pm v_n)=(u_1+u_2+u_3+....+u_n)\pm(v_1+v_2+v_3+....+v_n)$$

ومنه ينتج:

$$\lim_{n\to\infty}(u_n\pm v_n)=\lim_{n\to\infty}u_n\pm\lim_{n\to\infty}v_n=A\pm B$$

نظرية 3:

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ متقاربة ومجموعها العدد A فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda u_n$ متقاربة

ومجموعها العدد $\lambda A\in R$

البرهان:

يمكن أن نكتب

$$\lambda\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda u_n=\lambda u_1+\lambda u_2+......+\lambda u_n+..........$$
$$=\lambda(u_1+u_2+u_3+.......+u_n+.....)=\lambda A$$

و هو المطلوب

<u>نظرية 4:</u>

إذا أضفنا أو حذفنا من السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ عدداً منته من حدودها الأولى فلا تتغير طبيعة السلسلة من حيث التقارب أو التباعد.

<u>البرهان</u>

لنأخذ السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ ولنحذف منها k حد الأولى فينتج السلسلتين

$$(1)\qquad u_1+u_2+u_3+........+u_k+.....u_n+.......$$

$$(2)\qquad u_{k+1}+u_{k+2}+.........+u_n+.......$$

ولنرمز بـ A_n لمجموع الحدود الـ (n) الأولى للسلسلة (1) و A'_n لمجموع الحدود الـ n الأولى للسلسلة (2) نلاحظ:

$$A'_n=A_n-(u_1+u_2+.......+u_k)$$

بفرض $u_1+u_2+......+u_k=M$ حيث k عدد محدود ينتج M عدد محدود.

وبأخذ نهاية الطرفين للعلاقة الأخيرة نجد:

$$\lim_{n\to\infty}A'_n=\lim_{n\to\infty}A_n-(u_1+u_2+......+u_k)=\lim_{n\to\infty}A_n-M$$

إذا كان $\lim A_n$ موجودة ينتج $\lim A'_n$ موجودة وبالعكس. وبالتالي لا تتغير طبيعة السلسلة من حيث تقاربها أو تباعدها.

نظرية 4: إذا أضفنا أو طرحنا من السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ عدداً منته من الحدود، لا تتغير طبيعة السلسلة من حيث تقاربها أو تباعدها.

<u>البرهان</u>

لتكن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ولنحذف منها 'n حداً الأولى نحصل على سلسلة جديدة $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ حيث

$$v_1 = u_{n'+1}, v_2 = u_{n'+2}, v_3 = u_{n'+3}, ...$$

عندئذ من أجل n'>n لدينا:

$$u_1 + u_2 + ... + u_{n'} + u_{n'+1} + u_{n'+2} + ...u_n$$
$$= (u_1 + u_2 + ... + u_{n'}) + (v_1 + v_2 + ... + v_{n-n'})$$

نرمز للمجموع الجزئي للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ بـ U_n وللمجموع الجزئي للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ بـ V_n عندئذ نجد:

$$U_n + U_{n'} + (U_n - U_{n'}) = U_{n'} + V_{n-n'}$$

فإذا كانت النهاية $\lim U_n$ موجودة (أو غير موجودة) فإن النهاية $\lim V_{n-n'}$ تكون موجودة (أو غير موجودة) إذاً $U_{n'}$ لا يتعلق بـ n

السلاسل ذات الحدود الموجبة (غير السالبة)

إن السلاسل ذات الحدود الموجبة هي السلاسل التي تكون جميع حدودها $u_n \geq 0$

حيث $n = 1,2,3,.......$

إن السلاسل ذات الحدود الموجبة (أو غير السالبة) هي إما متقاربة أو متباعدة أي

إما $A_n \to A$ أو $A_n \to +\infty$

إن متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة الموجبة $A_1, A_2, ..., A_n$ هي متتالية متزايدة.

حيث $A_{n+1} = A_n + a_{n+1}$ ولكن $a_{n+1} \geq 0$

إذاً $A_{n+1} \geq A_n$

نظرية 5:

تتقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متقاربة، عندئذ نوجد النهاية $\lim_{n\to\infty} A_n = A$

حيث A_n هو الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لهذه السلسلة. وبملاحظة أن $\{A_n\}$

متزايدة لكون حدودها موجبة ومتقاربة من A، ينتج أن $A_n \leq A$ وذلك من أجل كل

$n \in N$، إذاً المتتالية $\{A_n\}$ محدودة من الأعلى بالعدد A ومن الأدنى بالعدد صفر

$A_n \geq 0$

كفاية الشرط: لنفرض أن $\{A_n\}$ محدودة للسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$، ولما كانت هذه

السلسلة ذات حدود موجبة، فإن متتالية المجاميع الجزئية $\{A_n\}$ متزايدة.

إذاً $\{A_n\}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى وبالتالي فهي متقاربة، أي أن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

مثال

السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ذات حدود موجبة ومتقاربة لأن متتالية المجاميع الجزئية $\{A_n\}$ محدودة من الأعلى لأن:

$$A_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$$

وهنا استبدلنا بحدود A_n حدوداً أكبر منها وهي حدود سلسلة هندسية متقاربة وذلك لأن $q = \frac{1}{2} < 1$ واستناداً لما سبق يكون:

$$A_n < \frac{1 - \frac{1}{2^2}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

إذاً متتالية المجاميع الجزئية محدودة بالعدد 2

مثال:

برهن أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ متباعدة.

$$\ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$$

لنشكل متتالية المجاميع الجزئية

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k$$

$$S_1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$
$$S_2 = \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = \ln 3$$
$$S_3 = S_2 + \ln 4 - \ln 3 = \ln 3 + \ln 4 - \ln 3 = \ln 4$$
$$S_4 = \ln 4 + \ln 5 - \ln 4 = \ln 5$$
$$S_n = S_{n-1} + \ln(n+1) - \ln n = \ln n + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$$

إذاً $S_n = \ln(n+1)$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$$

إذاً $\{S_n\}$ متتالية موجبة متزايدة و غير محدودة من الأعلى فهي متباعدة إذاً السلسلة

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ متباعدة.

اختبارات تقارب السلاسل:

1- اختبار المقارنة:

لتكن لدينا السلسلتان العدديتان الآتيتان ذوات الحدود غير السالبة:

$$\sum_{N=\infty}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n + \dots. \qquad (1)$$

$$\sum_{N=\infty}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \dots\dots + v_n + \dots. \qquad (2)$$

وليكن $u_n \le v_n$ من أجل $n_0 < n$ حيث n_0 ترتيب حد من السلسلتين عندئذ

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ متقاربة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متقاربة

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متباعدة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ متباعدة

البرهان

ليكن

$S'_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

$S''_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$

من الواضح $S'_n \le S''_n$ حسب شروط النظرية بما أن السلسلة (2) متقاربة، فإن المتتالية

$S''_1, S''_2, ..., S''_n, ...$

متقاربة أيضاً، وبالتالي فهي محدودة.

<u>مثال:</u>

ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

إن حدود هذه السلسلة أصغر من حدود السلسلة $\sum \frac{2}{-} n(n+1)$ المتقاربة من السلسلة

$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة (درست سابقاً) إذاً السلسلة المفروضة متقاربة حيث نلاحظ

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + ... \le 1 + \frac{2}{6} + \frac{2}{12} + \frac{2}{20} + \frac{2}{30} + \frac{2}{40} + ...$$

3ـ أما إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ متباعدة، فلا نستطيع معرفة طبيعة السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$،

فقد تكون متقاربة وقد تكون متباعدة

<u>ملاحظة 2:</u>

إن تطبيق اختبار المقارنة يحتاج إلى معرفة تقارب عدد من السلاسل أو تباعدها

ونذكر هنا بعضاً منها:

1- السلسلة الحسابية متباعدة دوماً

2- السلسلة الهندسية متباعدة عندما $|q| \geq 1$ ومتقاربة عندما $|q| < 1$

3- السلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة دوماً

4- سلسلة ريمن ذات الشكل العام $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ حيث $P \in Q$ متقاربة عندما p>1

ومتباعدة عندما $p \leq 1$

مثال 1: لتكن السلسلة العددية

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{17}+.....+\frac{1}{2^{n-1}+1}+.........$$

إن حدودها أصغر من حدود السلسلة:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+......+\frac{1}{2^{n-1}}$$

وبما أن السلسلة الثانية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}<1$ فهي متقاربة. إذاً وحسب اختبار

المقارنة فإن السلسلة المفروضة متقاربة.

مثال 2: ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$

الحل: باستخدام المتراجحة $\frac{1}{k(2k+1)} < \frac{1}{k^2}$

من أجل $k=1,2,3,......$ على حدود السلسلة المفروضة، نجد أن

$$\frac{1}{1.3}<\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2.5}<\frac{1}{2^2}, \frac{1}{3.7}<\frac{1}{3^2}$$

$$\frac{1}{n(2n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

أي أننا اخترنا السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ المتقاربة لأنها سلسلة ريمن فيها $p=2>1$ وحسب

اختبار المقارنة فالسلسلة المفروضة متقاربة

مثال 3: ادرس تقارب السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n + 2n}$$

إن هذه السلسلة ذات حدود موجبة، لأن الحد العام

$$u_n = \frac{1}{5^n + 2n}$$

موجب دوماً. ولكن نجد أن:

$$\frac{1}{5^n + 2n} < \frac{1}{5^n}$$

وأن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ فهي سلسلة هندسية متقاربة لأن أساسها $q = \frac{1}{5} < 1$ إذاً فالسلسلة

المفروضة متقاربة

مثال 4:

ادرس تقارب السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(3^n + 1)}$$

<u>الحل</u>

بدراسة الحد العام للسلسلة المفروضة نجد:

$$u_n = \frac{3^n}{n(3^n+1)} > \frac{3^n}{n.2.3^n} = \frac{1}{2}.\frac{1}{n}$$

إن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{n}$ متباعدة لأنها شكل خاص من السلسلة التوافقية المتباعدة، إذاً

السلسلة المفرضة متباعدة حسب اختبار المقارنة.

<u>مثال 5:</u>

ادرس تقارب السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}}$$

<u>الحل</u>

بما أن $\ln(n+1)>0$ من أجل $n\geq 2$ الطرفين على $\sqrt[3]{n^2}$ نجد:

$$\frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$$

السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ متباعدة لأنها سلسلة ريمن فيها $p=\frac{2}{3}<1$

إذاً السلسلة المفروضة متباعدة

مثال:

ادرس تقارب السلسلة

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-4\sqrt{n}}{n^2-2n}$$

الحل

إن حدود هذه السلسلة غير سالبة من أجل $n \geq 16$. ولذلك فإننا سنخرج الحدود غير السالبة، دون أن يؤثر ذلك على تقاربها، لأن عدد الحدود المحذوفة محدود. ولذلك سندرس تقارب السلسلة الجديدة

$$\sum_{n=16}^{\infty} \frac{n-4\sqrt{n}}{n^2-2n}$$

$$u_n = \frac{n-4\sqrt{n}}{n^2-2n} > \frac{n-4\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{4}{n^{\frac{3}{2}}}$$

إن السلسلة ذات الحد العام $\left(\frac{1}{n} - 4\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ هي حاصل طرح سلسلة متقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^{\frac{3}{2}}}$ من سلسلة متباعدة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ فهي سلسلة متباعدة.

وحسب اختبار المقارنة فالسلسلة المفروضة متباعدة

ملاحظة اعتماداً على الملاحظتين السابقتين

إذا كان لدينا السلسلتين U_n , V_n ولحساب النهاية

$$\lim \frac{V_n}{U_n} = \begin{cases} \text{محدودة} \\ \text{معدومة} \\ \text{غير محدودة} \end{cases}$$

1- إذا كانت النهاية محدودة وغير معدومة فالسلسلتين من نوع واحد

2- إذا كانت النهاية معدومة وكانت $\sum u_n$ متقاربة فإن $\sum v_n$ متقاربة

3- إذا كانت النهاية غير محدودة وكانت $\sum u_n$ متباعدة فإن $\sum v_n$ متباعدة

4- إذا كانت النهاية معدومة وكانت $\sum u_n$ متباعدة فلا نستطيع تحديد طبيعة السلسلة $\sum v_n$

5- إذا كانت النهاية غير محدودة وكانت $\sum u_n$ متقاربة فلا نستطيع تحديد طبيعة السلسلة $\sum v_n$

2- اختبار كوشي

نظرية:

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ سلسلة ذات حدود موجبة ولندرس النهاية $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$

1- إذا كان $l < 1$ فالسلسلة متقاربة

2- إذا كان $l > 1$ فالسلسلة متباعدة

3- إذا كان $l = 1$ فلدينا حالة شك، أي أن اختبار كوشي لا يعطينا نتيجة قاطعة لطبيعة السلسلة

البرهان

إذا كان $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l < 1$ وكان $l < q < 1$ عندئذ يوجد العدد الطبيعي $m \in N$، بحيث من أجل $m < n$ يكون $\sqrt[n]{u_n} < q$ أو $u_n < q^n$ فمن أجل قيم كبيرة لـ n أكبر من m، نجد أ، السلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ متقاربة عندما $0 \le q < 1$ ، وبالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متقاربة أما عندما $q \ge 1$ فإن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l > 1$ ، فمن أجل القيم الكبيرة لـ n، ستكون $\sqrt[n]{u_n} > 1$ وبالتالي $u_n > 1$ وبالتالي فإن الحد العام للسلسلة لا يتناهى إلى الصفر عندما $n \to \infty$ فالسلسلة متباعدة وهو المطلوب.

أمثلة

اعتماداً على اختبار كوشي، ادرس تقارب السلاسل الآتية:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$$

$$2)\sum_{n=1}^{\infty} arctg^{n}\frac{4n}{4n-1}$$

$$3)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^{n}, a>0$$

$$4)\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

<u>الحل</u>

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3}<1$$

والسلسلة متقاربة.

$$2)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{arctg^{n}\frac{4n}{4n-1}}=\lim_{n\to\infty}arctg\frac{4n}{4n-1}=arctg1=\frac{\pi}{4}<1$$

والسلسلة متقاربة.

$$3)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{an}{n+1}\right)^{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{n+1}=a$$

فإن طبيعة السلسلة تتبع العدد a:

- إذا كان $a<1$ فإن السلسلة متقاربة

- إذا كان $a>1$ فإن السلسلة متقاربة

- أما عندما a=1 فلدينا حالة شك، يمكن دراستها بتعويض a=1 في السلسلة، فنحصل على السلسلة.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$$

نعتمد على النظرية (1) في معرفة طبيعة هذه السلسلة لذلك نوجد نهاية الحد العام.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{e} \neq 0$$

وبالتالي السلسلة متباعدة حسب النظرية (1).

$$4)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n} = e > 1$$

و السلسلة متباعدة

تمرين:

اعتماداً على اختبار كوشي، ادرس تقارب (تباعد) السلاسل الآتية:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n} \qquad 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{1000}}$$

$$3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n} \qquad 4)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{4n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$5)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+5}\right)^{n} \qquad 6)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$$

$$7)\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\right)^{n} \qquad 8)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{5^n.n^{n^2}}$$

$$9)\sum_{n=2}^{\infty}\arcsin^n\frac{n}{n+1} \qquad 10)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}.\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

$$11)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n.3^n} \qquad 12)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$$

3) اختبار دالامبير (احتبار النسبية)

نظرية: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ سلسلة ذات حدود موجبة ولندرس النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

1) إذا كان $l<1$ فالسلسلة متقاربة

2) إذا كان $l>1$ فالسلسلة متباعدة

3) إذا كان $l=1$ فلدينا حالة شك في معرفة تقارب أو تباعد السلسلة

1) إذا كان $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l < 1$ فإن $l<q<1$ عندئذ يوجد العدد الطبيعي $m \in N$ بحيث

من أجل جميع قيم $m \le n$ تتحقق المتراجحة

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q \Rightarrow u_{n+1} < qu_n$$

من أجل n=m لدينا

$$u_{m+1} < qu_m$$
$$u_{m+2} < qu_{m+1} < q^2 u_m$$
$$u_{m+3} < qu_{m+2} < q^3 u_m$$

تتشكل لدينا السلسلتين

$$u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \dots\dots\dots\dots(1)$$

$$u_m + qu_m + q^2 u_m + \dots\dots\dots(2)$$

نلاحظ أن أي حد من السلسلة (1) أصغر أو يساوي الحد المقابل له من السلسلة (2)

المتقاربة لأنها سلسلة هندسية أساسها $q<1$ وبالتالي السلسلة (1) متقاربة وبالتالي

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متقاربة

2) لنفرض $l>1$ سيكون لدينا اعتباراً من قيمة معينة $n \geq m$

$$\frac{u_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n , n \geq m$$

إذاً حدود السلسلة متزايدة اعتباراً من m+1 ينتج الحد العام لا ينتهي إلى الصفر أبداً

والسلسلة متباعدة.

4- اختبار راب

نظرية

لتكن السلسلة ذات الحدود الموجبة التالية:

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

إذا انتهت متتالية راب التالية

$$R_r = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$$

إلى R عندما $n \to \infty$ أي أن $\lim_{n\to\infty} R_r = R$

عندئذ:

1- $R>1$ تكون السلسلة متقاربة

2- $R \leq 1$ تكون السلسلة متباعدة

البرهان

نظرية راب تعتمد على مقارنة السلسلة (1) مع السلسلتين التاليتين

1- المتقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+.......+\frac{1}{n^s}+.....,(s>1) \qquad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+........+\frac{1}{n}+....... \qquad (3)$$

وبالاعتماد على نظرية المقارنة، ومن أجل n عدد كبير بشكل كافي تتحقق المترجحة

التالية: $R_r \geq r$

$r>1$ عدد ما، فإن السلسلة تكون متقاربة، وتكون متباعدة عندما $R_n<1$ إذاً يمكن من

أجل n كبير بشكل كاف أن

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)>r>1 \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}}>1+\frac{r}{n} \qquad (4)$$

لنأخذ العدد الأختياري s المحقق للمتراجحة $1<s<r$ وبالإعتماد على صحة

المبرهنة:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^s-1}{\frac{1}{n}}=s$$

إذاً من أجل العدد n الكبير بقدر كاف نجد أن

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^s-1}{\frac{1}{n}}<r \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^s<1+\frac{r}{n} \qquad (5)$$

نستنتج من (5) , (4):

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^s$$

ويمكن صياغة هذه المتراجحة على الشكل التالي:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^s = \frac{\frac{1}{(1+n)^s}}{n^s}$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن علاقة ما بين حدين متتالين للسلسلة (2) المتقاربة

وباستخدام نظرية المقارنة نستنتج أن السلسلة (1) متقاربة

- ويمكن ابتداء من قيمة ما يكون:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) \leq 1 \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1+\frac{1}{n}$$

ويمكن صياغة هذه المتراجحة بالشكل التالي:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن علاقة ما بين حدين متتاليين للسلسلة 3 المتباعدة وباستخدام

نظرية المقارنة نستنتج أن السلسلة 1 متباعدة

أمثلة

ادرس تقارب السلاسل التالية اعتماداً على اختبار راب

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]$$

الحل

$$1)\ u_n=\frac{1}{n^2},u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$$

نطبق اختبار راب

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}-1\right)=2>1$$

إذاً السلسلة متقاربة حيث R=2

2)

$$u_n=\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^3$$

$$u_{n+1}=\left[\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right]^3$$

$$=\left[\frac{(2n+1)(2n-1)!!}{(2n+2)(2n)!!}\right]^3$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^3$$

$$R=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+2)^3}{(2n+1)^3}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\frac{12n^2+18n+7}{(2n+1)^3}=\frac{12+\frac{18}{n}+\frac{7}{n^2}}{(2+\frac{1}{n})^3}=\frac{3}{2}>1$$

و السلسلة متقاربة حيث $R=\frac{3}{2}$

أمثلة

ادرس تقارب السلاسل التالية اعتماداً على اختبار دالمبير:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n}.n!}{n^{n}} \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.4.9.........n^{2}}{1.3.5........(4n-3)(4n-1)}$$

$$3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n)!!} \qquad 4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}.n!}{n^{n}}$$

الحل

$$1)\quad u_{1}=\frac{e^{n}.n!}{n^{n}},u_{n+1}=\frac{e^{n+1}.(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n}}=\frac{e^{n+1}.(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\times\frac{n^{n}}{e^{n}.n!}=\frac{e(n+1).n^{n}}{(n+1)^{n+1}}=e\frac{n^{n}}{(n+1)^{n}}=e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_{n}}=\lim_{n\to\infty}e\times\frac{1}{(\frac{n+1}{n})^{n}}=\frac{e}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}}$$

ولكن $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}$ يتناهى إلى e بقيم أصغر من e ومنه:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_{n}}>1$$

والسلسلة متباعدة.

$$2)\ u_{n}=\frac{1.4.9.........n^{2}}{1.3.5.......(4n-3)(4n-1)}$$

$$u_{n+1}=\frac{1.4.9........n^{2}.(n+1)^{2}}{1.3.5.......(4n+1)(4n+3)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n}}=\frac{1.4.9.........n^{2}(n+1)^{2}}{1.3.5......(4n+1)(4n+3)}\times\frac{1.3.5.7.........(4n-3)(4n-1)}{1.4.9............n^{2}}$$

$$\frac{(n+1)^2}{(4n+1)(4n+3)}=\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{n(4+\frac{1}{n})(n)(4+\frac{3}{n})}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^2}{(4+\frac{1}{n})(4+\frac{3}{n})}=\frac{1}{16}<1$$

والسلسلة متباعدة.

3) $u_n=\dfrac{(2n-1)!}{(2n)!!},u_{n+1}=\dfrac{(2n+1)!}{(2n+2)!!}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+1)!}{(2n+2)!!}\times\frac{(2n)!!}{(2n-1)!}$$

$$=\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)!}{(2n+2)(2n)!!}\times\frac{(2n)!!}{(2n-1)!}=\frac{2n(2n+1)}{2n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(2n+1)}{2n+2}=\infty>1$$

والسلسلة متباعدة.

4) $u_n=\dfrac{2^n.n!}{n^n},u_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}.(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\times\frac{n^n}{2^n.n!}=\frac{2.(n+1).n!.n^n}{(n+1)(n+1)^n.n!}=\frac{2.n^n}{(n+1)^n}=2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{2}{(\frac{n+1}{n})^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$$

والسلسلة متقاربة.

إن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n.n!}{n^n}$ متباعدة لأن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3}{e}>1$$

تمرين:

اعتماداً على اختبار دالمبير ادرس تقارب (تباعد) السلاسل الآتية:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{6^n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{6^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$

5) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2.3^2}} + \frac{9}{\sqrt{3.3^3}} + \frac{13}{\sqrt{4.3^4}} + \dots\dots + \frac{4n-3}{\sqrt{n.3^n}}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(n!)^2}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n.n!}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} . \frac{1}{n.2^{n+1}}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1000)^{3n}}{(2n-1)!}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5.\dots\dots.(2n-1)}{4.8.12.\dots\dots.4n}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100.102.104.\dots\dots\dots(98+2n)}{1.4.7.\dots\dots\dots(3n-2)}$

13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n.n!}$

14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}$

15) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{\pi}{2^n}$

16) $1 + \frac{3}{2.3} + \frac{3^2}{2^2.5} + \frac{3^2}{2^3.7} + \dots\dots\dots + \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}.(2n-1)}$

مثال

ادرس تقارب (تباعد) السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^3$

الحل:

بتطبيق اختبار دالمبير نجد:

$$u_n=\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]$$

$$u_{n+1}=\left[\frac{[2(2n+1)-1]!!}{2(n+1)!!}\right]=\left[\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right]=\left[\frac{(2n+1)(2n-1)!!}{(2n+2)(2n)!!}\right]$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+1)^3[(2n-1)!!]^3}{(2n+2)^3[(2n)!!]^3}\times\frac{[(2n)!!]^3}{[(2n-1)!!]^3}=\frac{(2n+1)^3}{(2n+2)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(2+\frac{1}{n})^3}{n^3(2+\frac{2}{n})^3}=\frac{2}{2}=1$$

إذاً اختبار دالمبير لم يعطينا نتيجة واحدة، لذلك سنطبق اختبار آخر وهو اختبار راب الذي يطبق عادة في مثل هذه الحالات:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\left[\frac{(2n+2)^3}{(2n+1)^3}-1\right]=n\frac{8n^3+24n^2+24n+8}{8n^3+12n^2+6n+1}-1$$

$$=n\times\frac{12n^2+18n+7}{(2n+1)^3}=\frac{n^3(12+\frac{18}{n}+\frac{7}{n^2})}{n^3(2+\frac{1}{n})^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{12+\frac{18}{n}+\frac{7}{n^2}}{8(1+\frac{1}{2n})^3}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}>1$$

والسلسلة متقاربة

مثال:

ادرس تقارب (تباعد) السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$

الحل:

بتطبيق اختبار دالمبير نجد

$$u_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^{n},u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\times\frac{n!.e^{n}}{n^{n}}=\frac{1}{(n+1)(n!)}\times\frac{(n+1)(n+1)^{n}}{e^{n+1}}\times\frac{n!.e^{n}}{n^{n}}=\frac{(n+1)^{n}}{e.n^{n}}$$
$$=\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{e}{e}=1$$

إذاً اختبار دالمبير لا يعطينا حلاً لمسألة تقارب أو تباعد السلسلة نطبق اختبار راب:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^{n}}-1=n\frac{e-(1+\frac{1}{n})^{n}}{(1+\frac{1}{n})^{n}}$$

بما أن $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n=e}$

لنكتب $A=\lim_{n\to\infty}n\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]=\infty.0$

عدم تعيين لذلك نكتب

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{e-(1+\frac{1}{n})^{n}}{\frac{1}{n}}$$

نفرض $\frac{1}{n}=t$

عندما $n\to\infty$ فإن $t\to 0$ بذلك نستطيع تطبيق قاعدة أوبيتال

$$A=\lim_{t\to 0}\frac{e-(1+t)^{\frac{1}{t}}}{t}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{-\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]'}{1}$$

نوجد المشتق في البسط اعتماداً على الاشتقاق اللوغاريتمي، لذلك سنفرض

$$u=(1+t)^{\frac{1}{t}},\ln u=\frac{1}{t}\ln(1+t)$$

بالاشتقاق

$$\frac{u'}{u}=-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)+\frac{1}{t}.\frac{1}{1+t}=\frac{-(1+t)\ln(1+t)+1}{t^2(1+t)}$$

$$u'=(1+t)^{\frac{1}{t}}.\frac{-(1+t)\ln(1+t)+t}{t^2(1+t)}$$

إذاً

$$A=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}}{1+t}.\lim_{t\to 0}\frac{-(1+t)\ln(1+t)+t}{t^2}=e\lim_{t\to 0}\frac{-\ln(1+t)-1+1}{2t}=e\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-1}{1+t}}{2}=\frac{-e}{2}<1$$

وبالتالي السلسلة متباعدة

<u>تمرين:</u>

اعتماداً على اختبار راب، ادرس تقارب السلاسل الآتية:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.\frac{1}{2n+1}$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2).......(a+n)},a>0$$

السلاسل المتناوبة

ستدرس هذه الفقرة نوعاً من السلاسل الخاصة، ذات الأهمية الكبيرة، وهي السلاسل ذا الحدود المختلفة الإشارة، وخاصة السلاسل المتناوبة.

تعريف:

نسمي السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ التي فيها كل حدين متجاورين مختلفين بالإشارة، سلسلة متناوبة.

يمكن أن نكتب السلسلة المتناوبة بالشكل العام التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n-1} u_n + ... \qquad (1)$$

حيث جميع $u_n > 0$ سندرس تقارب السلاسل المتناوبة اعتماداً على الاختبار التالي:

اختبار لايبنتز Leibnitz

نظرية:

تتقارب السلسلة المتناوبة (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ إذا تحققت الشروط التالية:

1) متتالية القيم المطلقة لحدود السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ متناقصة (أو غير متزايدة) أي أن:

$$u_n > u_{n+1}, n = 1,2,3,.......$$

2) مع تحقق الشرط الأول يكون الشرط اللازم والكافي لتقارب السلسلة المتناوبة هو أن يتناهى الحد العام إلى الصفر أي

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

3) القيمة المطلقة لباقي حدود السلسلة لا تتعدى الحد الأول.

<u>البرهان</u>

ضرورة الشرط: إن ضرورة الشرط الثاني تأتي من النظرية (1) حيث أن كل سلسلة متقاربة حدها العام يتناهى إلى الصفر. ولكن مع تحقق الشرط الثاني يكون كافياً الشرط الثالث لتقارب السلسلة (1)

كفاية الشرط:

لنأخذ المجاميع الجزئية للسلسلة (1) ذات الأدلة الزوجية والفردية.

نبحث عن مجموعة عدد زوجي 2n من حدودها الأولى أي:

$$A_{2n}=a_1-a_2+a_3-a_4+................+a_{2n-1}-a_{2n}$$

نكتب المجموع على الشكل التالي

$$A_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+.......+(a_{2n-1}-a_{2n})$$

ولكن القيمة المطلقة لحدود السلسلة متناقصة فرضاً، وعندما يتزايد

n بلا تناه

نستنتج:

$$a_k\geq a_{k+1} \quad , \quad a_{2n+1}-a_{2n+2}\geq 0$$

وبالتالي:

$$A_{2n+2}=A_{2n}+(a_{2n+1}-a_{2n+2})\geq A_{2n}$$

إذاً المقدار المتحول A_{2n} غير متناهي. ومن جهة ثانية لدينا:

$$A_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-...........-(a_{2n-2}-a_{1n-1})-a_{2n}\leq a_1$$

وذلك لأن جميع القيم داخل الأقواس غير سالبة

ومنه إن A_{2n} محدودة مهما تكن n حيث $A_{2n} \le a_1$ أي عندما $n \to \infty$

فإن A_{2n} تسعى إلى نهاية محدودة وقد برهنا أن كل متتالية مطردة

ومحدودة هي متقاربة

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_{2n} \to A$$

أيضاً لدينا

$$A_{2n+1} = A_{2n} + a_{2n+1} \to A$$

حيث $a_{2n+1} \to 0$ ، $n \to \infty$ فرضاً

ومنه إذا كان مجموع عدد زوجي أو عدد فردي من حدود السلسلة

المتناوبة يسعى إلى نهاية محدودة A

لنحسب الآن باقي السلسلة R_n

<u>مثال:</u>

السلسلة المتناوبة: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} . \frac{1}{n}$

إن هذه السلسلة تحقق شروط نظرية لايبنتز. حيث أنها سلسلة

متناوبة أو متتالية القيم المطلقة لحدودها متناقصة, وكذلك

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 0$$

إذاُ السلسلة المفروضة متقاربة

مثال:السلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n.2^n}$

إن هذه السلسلة متناوبة ومتتالية القيم المطلقة لحدودها متناقصة

$$\frac{1}{2}>\frac{1}{8}>\frac{1}{24}>\frac{1}{64}>..........$$

وأما الحد العام فهو يتناهى إلى الصفر

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n.\frac{1}{n.2^n}=0$$

إذاً السلسلة المفروضة متقاربة:

<u>مثال 3:</u>

$$1-\frac{2^3}{3!}+\frac{2^5}{5!}-\frac{2^7}{7!}+..........+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$2-\frac{8}{6}+\frac{32}{120}-\frac{128}{5250}+...........+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}+..........$$

التقارب المطلق للسلاسل ذات الحدود متغيرة الإشارة:

<u>السلاسل المتقاربة مطلقاً</u>

<u>تعريف:</u>

نقول عن السلسلة العددية ذات الحدود متغيرة الإشارة

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots + u_n + \dots\dots\dots$$

حيث الحدود u_i مختلفة الإشارة. إنها متقاربة مطلقاً، إذاً سلسلة القيم المطلقة لحدودها متقاربة، أي إذا كانت السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots\dots\dots |u_n| + ..$$

متقاربة

<u>نتيجة:</u>

إذا تقاربت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ولم تتقارب مطلقاً (أي كانت $\sum |u_n|$ متباعدة)، فإن $\sum u_n$ متقاربة شرطياً.

<u>اختبارات التقارب المطلق:</u>

يمكننا استخدام اختبارات التقارب للسلاسل ذات الحدود غير ؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟ لدراسة اختبار تقارب السلاسل المتناوبة أو السلاسل ؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟بعد أخذ القيم المطلقة لحدودها، فتصبح سلاسل ذات حدود ؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟ ولذلك سنستخدم الاختبارات السابقة مع إشارة القيم ؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟ كما هو الحال بالنسبة:

لاختبار كوشي $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}$

واختبار دالمبير $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$

واختبار راب $\lim_{n\to\infty} n\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right|$

أمثلة

ادرس تقارب السلاسل التالية:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{1+(-5)^{2n}}$

2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n-2}{7n+1}\right)^n \sin\alpha n$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{10}}$

7 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1.4.7.....(3n-2)}{7.9.11........(2n+5)}$

الحل

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{1+(-5)^{2n}}$

ندرس التقارب المطلق لهذه السلسلة:

$$|u_n|=\left|\frac{(-5)^n}{1+(-5)^{2n}}\right|=\frac{5^n}{1+5^{2n}}<\frac{1}{5^n}$$

السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ سلسلة هندسية أساسها $q=\frac{1}{5}<1$ فهي متقاربة.

وحسب اختبار المقارنة فإن السلسلة المفروضة متقاربة مطلقاً.

2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln n};n\geq 2$

نطبق اختبار لايبنتز. حيث أن هذه السلسلة متناوبة، والقيم المطلقة

لحدودها هي:

$$\frac{1}{2\ln 2},\frac{1}{3\ln 3},\frac{1}{4\ln 4},\frac{1}{5\ln 5},..........\frac{1}{n\ln n},........$$

إن هذه المتتالية متناقصة، وحدها العام يتناهى إلى الصفر، إذاً

السلسلة المفروضة متقاربة.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n-2}{7n+1}\right)^n \sin \alpha n$

بدراسة القيمة المطلقة لحدها العام نجد:

$$|u_n|=\left|(-1)^n\left(\frac{3n-2}{7n+1}\right)^n \sin \alpha n\right|=\left(\frac{3n-2}{7n+1}\right)^n.|\sin \alpha n|<\left(\frac{3n-2}{7n+1}\right)^n$$

ندرس تقارب السلسلة ذات الحد العام $u_n=\left(\frac{3n-2}{7n+1}\right)^n$

حسب اختبار كوشي:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n-2}{7n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{7n+1}=\frac{3}{7}<1$$

إذاً هذه السلسلة متقاربة، وحسب اختبار المقارنة، فإن السلسلة المعطاة متقاربة مطلقاً.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$

$$|u_n|=\left|(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}\right|=\frac{2^{n^2}}{n!}$$

بتطبيق اختبار دالمبير نجد:

$$|u_{n+1}|=\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}$$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{2^{n^2}}=\frac{2^{n^2+2n+1}.n!}{(n+1)n!.2^{n^2}}=\frac{2^{2n+1}}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{n+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

نطبق قاعدة أوبيتال على حالة عدم التعيين السابقة

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{n+1}=\frac{2^{2n+1}.2\ln 2}{1}=\infty>1$$

إذاً $\sum|u_n|$ متباعدة. وبالتالي السلسلة المفروضة متباعدة.

$5)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ $\qquad |u_n|=\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}$

بما أن السلسلة $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة فالسلسلة $\sum|u_n|$ متباعدة ولكن السلسلة

$\sum(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ يمكن أن تكون متقاربة شرطياً باعتبارها متناوبة،

نطبق عليها اختبار لايبنتز.

إن متتالية القيم المطلقة

$$\frac{\ln 1}{1},\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln e}{e},\frac{\ln 3}{3},\frac{\ln 5}{5},............$$

لا نستطيع الحكم مباشرة على أن هذه المتتالية متناقصة.

سندرس المتتالية التي حدها العام $\frac{\ln n}{n}$ وسنبرهن أنها متناقصة

وينتهي حدها العام إلى الصفر.

للتأكد من تناقص المتتالية $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$ نأخذ التابع: $y=\frac{\ln x}{x}$ وندرس

مشتقه

$$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$$

بدءاً من $x>e$ وبالتالي التابع $\frac{\ln x}{x}$ أو التابع $\frac{\ln n}{n}$ متناقص من أجل

كل $n>e$

أما نـهاية الحد العام فتحسب كما يلي:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{\infty}{\infty}$$

بتطبيق قاعدة أوبيتال $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$

إذاً المتتالية $\sum (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$ متقاربة شرطياً و غير متقاربة مطلقاً.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{10}}$

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{10}} = 1 \neq 0$$

بما أن الحد العام لا يتناهى إلى الصفر، فإن السلسلة متباعدة

7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.4.7.........(3n-2)}{7.9.11.......(2n+5)}$

$$|u_n| = \frac{1.4.7.........(3n-2)}{7.9.11......(2n+5)}$$

بتطبيق اختبار دالمبير

$$|u_{n+1}| = \frac{1.4.7..........(3n-2)(3n+1)}{7.9.11........(2n+5)(2n+7)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1.4.7........(3n-2)(3n+1)}{7.9.11........(2n+5)(2n+7)} \times \frac{7.9.11........(2n+5)}{1.4.7.........(3n-2)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n+7} = \frac{3}{2} > 1$$

إذاً السلسلة $\sum |u_n|$ متباعدة، وبالتالي فإن السلسلة متباعدة

<u>تمرين:</u>

ما هي السلاسل المتقاربة مطلقاً والمتباعدة شرطياً والمتباعدة من بين السلاسل الآتية:

1) $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2\ln 4} + \frac{1}{3\ln 6} - \frac{1}{4\ln 8} + \dots\dots\dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n\ln 2n} + \dots\dots\dots$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}}{\sqrt{n^5}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n\ln n}}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n\ln n)^2}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha n}{n!}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+4)}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+5)^2}{(n+3)^5}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+n^2}{2+n^3}\right)^3$

11) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n+5}$

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin \alpha n}{n^6}$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$

14) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{5n}$

15) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

16) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{1}{n}$

17) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{n(n-1)}$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n.n}{5n+2}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{3n-2}{7n+1}\right)^n$

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin \alpha n}{(\ln 4)^n}$

21) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}$

حساب مجموع بعض السلاسل:

مثال:

أوجد مجموع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$

إن هذه السلسلة هي مجموع سلسلتين هندسيتين هما:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}},\sum\frac{1}{3^{n-1}}$$

وهما متقاربتان لأن $q_1=\frac{1}{2}<1$ ، $q_2=\frac{1}{3}<1$

لذلك فإن مجموعهما هو:

$$S_1 = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$S_2 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$S = S_1 + S_2 = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

مثال 2 :

أوجد مجموع حدود السلسلة المتقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

نشكل متتالية المجاميع الجزئية

$$u_1 = \frac{1}{1.5}, u_2 = \frac{1}{5.9}, u_3 = \frac{1}{9.13}, u_4 = \frac{1}{13.17}$$

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{1.5}, S_2 = S_1 + u_2 = \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9}, S_3 = S_2 + u_3 = \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13}$$

و هكذا نجد

$$S_n = \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + ... + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

نفرق كسر الحد العام $u_n = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$ إلى مجموع كسرين

$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{A}{4n-3} + \frac{B}{4n+1}$$

بتوحيد المقامات وحذفها نجد

$$1 = A(4n+1) + B(4n-3)$$

$$1 = 4An + A + 4Bn - 3B$$

بالمطابقة نجد:

$$0 = 4A + 4B$$
$$1 = A - 3B$$

بحل جملة المعادلتين السابقتين نجد:

$$A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}$$

إذاً نستطيع أن نكتب الحد العام بالشكل

$$u_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13}\right) + \dots\dots\dots + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4(4n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$$

إذاً السلسلة المفروضة متقاربة ومجموعها $S = \frac{1}{4}$

<u>مثال 3:</u>

أوجد مجموع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$

<u>الحل</u>

نشكل الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية:

$$S_n = \frac{7}{1.2^3} + \frac{19}{2^3.3^3} + \frac{37}{3^3.4^3} + ... + \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$$

نفرق الكسر $\frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$ إلى مجموع كسور بسيطة.

$$\frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3 - n^3}{n^3(n+1)^3} = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}$$

$$S_n = \left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3}\right) + \left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^3}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

إذاً السلسلة متقاربة ومجموعها 1

<u>مثال 4:</u>

أوجد مجموع حدود السلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

<u>الحل</u>

نشكل الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية:

$$S_n = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

نفرق كسر الحد العام $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} + \frac{D}{n+3}$$

بحساب قيم الثوابت نجد:

$$A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}, D = -\frac{1}{6}$$

وبالتالي:

$$u_n = \frac{1}{6n} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{6(n+3)}$$

$$S_n=\left(\frac{1}{6.1}-\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{2.4}\right)+\left(\frac{1}{6.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{6.4}\right)+\left(\frac{1}{6.3}-\frac{1}{2.4}+\frac{1}{2.4}-\frac{1}{6.5}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{6.4}-\frac{1}{2.5}+\frac{1}{2.6}-\frac{1}{6.7}\right)+.......+\left(\frac{1}{6(n-3)}-\frac{1}{2(n-2)}+\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{6(n+2)}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{6(n-2)}-\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{6(n+1)}\right)+\left(\frac{1}{6(n-1)}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{6(n+2)}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{6n}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}-\frac{1}{6(n+3)}\right)$$
$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}-\frac{1}{6(n+1)}-\frac{1}{6(n+2)}-\frac{1}{6(n+3)}+\frac{1}{2(n+2)}$$

$$S_n=\frac{1}{18}-\frac{1}{6(n+1)}+\frac{1}{3(n+2)}-\frac{1}{6(n+3)}$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{18}$$

مثال 5:

أوجد مجموع حدود السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}$

<u>الحل</u>

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{28}+.......+\frac{2n-1}{2^n}$$

لنأخذ الفرق $S_n-\frac{1}{2}S_n$ فنجد:

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+......+\frac{2n-1}{2^n}-\frac{1}{2^2}-\frac{3}{2^3}-\frac{5}{2^4}.......-\frac{2n-3}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{5}{2^3}-\frac{3}{2^3}\right)+......+\left(\frac{2n-1}{2^n}-\frac{2n-3}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+3}}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+.......+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}$$

$$S_n = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 1 + 2 - 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2n-1}{2^n}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 3, \left(\lim \frac{n}{2^n} = 0\right)$$