المُعَادَلاتُ التَّفَاضُلِيَّةُ الجَزْئِيَةُ

تأليف

اس فارلو

تَرْجَمَة

الدُّكْتُورَة / مَهَا عَوَّادُ الْكُبَيْسِيّ

مُرَاجَعَة

الدكتور / مَحْمُود إبْرَاهِيم عَزُّوز

أمين قسم الرياضيات

كلية العلوم – جامعة عمر المختار

الدكتور / عَبْدُ الله نَاصِر

أمين قسم الرياضيات

كلية العلوم – جامعة دبي

منشورات

جامعة عمر المختار

البيضاء

المحتويات

الموضـــــــوع	الصفحة

الموضـــــــوع	الصفحة

مُقَدِّمَةُ الْمُتَرْجِمَةِ

الحمد لله رب العالمين ملهم كل صواب وولي كل خير ، أنطق الكون بآيات وجوده وعظيم سلطانه ، خلق الإنسان وشرفه بحمل أمانة العقل وعلمه البيان ،،، والصلاة والسلام على سيد المرسلين خاتم الأنبياء – محمد بن عبد الله – وعلى آله وصحبه أجمعين .

وبعد ،،،

فلقد وقع اختياري على ترجمة هذا الكتاب من اللغة الإنجليزية إلى اللغة العربية لشموله على عدد كبير من الموضوعات التي تغطي جوانب شتى في مجال المعادلات التفاضلية الجزئية لطلبة وأساتذة العلوم الرياضية .

وأود أن أشير إلى ظهور العديد من المراجع والكتب باللغة الأجنبية تتناول موضوعات كثيرة في الرياضيات ولا شك أن المكتبة العربية تفتقر كثيراً إلى الكتب العلمية – في مختلف فروع العلم – النظرية والتطبيقية والتكنولوجية الأمر الذي أدى إلى جعل المعادلات التفاضلية الجزئية مقصورة على قارئ اللغة الأجنبية ، ولهذا فقد رأيت أن أقوم بهذه المحاولة لترجمة كتاب في المعادلات التفاضلية الجزئية لطلاب كلية العلوم وأيضاً ليكون مرجعاً أساسياً لطلبة الدراسات العليا .

وأود أن أشير أيضاً إلى أن ترجمة الكتاب كانت مرتبة حسب ما ورد في الكتاب الأصلي ولم أبتعد عن النصوص الإنجليزية كما أنني تركت الصيغ والمعادلات الرياضية بالأحرف والأرقام الرياضية الإنجليزية دون أن تفقد الترجمة قيمتها .

وأتقدم بالشكر لكل من ساهم في إنجاز هذا العمل ، وأخص بالذكر الاقتراحات القيمة التي ساهم بها المراجعان وأتوجه بالشكر لجامعة عمر المختار التي أتاحت لي هذه الفرصة لإنجاز هذا العمل .

ولا يفوتني أن أتوجه بالشكر الجزيل إلى الأستاذ الدكتور **فتحي سعد المسماري** مدير مكتب التأليف والترجمة والنشر بالجامعة .

كما أود أن أشكر وأثمن الجهد الرائع والمتميز الذي قام به الأخ **عبد الكريم جاد الله عزوز** في طباعة وإخراج هذا الكتاب إلى النور .

والله من وراء القصد

مها عواد الكبيسي

2005/2/2

مُقَدِّمَةُ الْمُؤَلِّف

خلال السنوات الأخيرة ازداد عدد طلبة الكليات الدارسين لموضوع المعادلات التفاضلية الجزئية زيادة مهمة ، وكثير منهم ذوي اختصاصات تختلف عن الرياضيات ، وهؤلاء يستفيدون من المعالجة الحسية للرياضيات أكثر من المعالجة بواسطة البراهين الرياضية الدقيقة ، وعند كتابتي لهذا الكتاب (المعادلات التفاضلية الجزئية للكليات العلمية والهندسية) عملت على تحفيز إدراك المفاهيم بصورة حسية ، وبدون فقدان كثير من الدقة الرياضية ، فمن ناحية يمكن دراسة الموضوع على مستوى رياضي عال باستخدام طريقة $\varepsilon - \delta$ التي يتبع عنها أن عدداً كبيراً من طلبة الكليات لا يعرفون ما يجري ، ومن الناحية الأخرى يمكن طرح الدقة جانباً إلى الحد الذي يؤول في النهاية إلى أن كلاً من الطالب والمدرس لا يدري ماذا يجري ، وقد عملت على وضع التفكير الرياضي لهذين المسلكين .

لقد نما هذا الكتاب من مجموعة من المحاضرات تم تحضيرها من قبلي في السنوات الخمس الأخيرة ، وعلى خلاف ما هو متبع فقد تم إعداده بسبعة وأربعين درساً يعتمد بعضها جزئياً على البعض الآخر ، وذلك على النقيض من الإعداد المألوف بشكل فصول يلي أحدها الآخر .

لقد تمت دراسة أهم أداتين تحليليتين هما طريقة فصل المتغيرات وطريقة التحويلات التكاملية ، كما درسنا أيضاً مباحث عديدة غير معتادة مثل طرائق مونت كارلو وحساب التغاير ونظرية التحكم ونظرية الجهد والمعادلات التكاملية وذلك لأن أكثر الطلبة سيتعرضون في النهاية إلى هذه المواضيع في وقت ما من دراستهم ، وربما لن يدرسونها بصورة منهجية ما لم يدرسونها هنا ويمكن اتباع هذا الكتاب لفصل دراسي واحد أو اثنين على مستوى مبتدئ أو متقدم ، وذلك يتطلب فقط الإلمام بحساب التفاضل والتكامل والمعادلات

التفاضلية الاعتيادية ، وإن كثير من الدروس تستغرق يوماً واحداً أو يومين وعليه فيمكن وضع منهج لفصل واحد من الـدروس 13-1 و 17-15 و 20-19 و 23-22 و 27-25 و 32-30 و 39-37 ، كما يمكن تغطية جميع الدروس السبعة والأربعين بفصلين مع وفرة من الوقت لحل المسائل .

ويرغب المؤلف لأن يعبر عن شكره للعاملين في **مؤسسة وايلي للنشـــر** لدعوتـهم لـه لكتابة هذا الكتاب ، كما يشكر أيضاً **البروفيسورة كريس والبروفيسور م. خورشـــيد** علـى مراجعة الكتاب والمساعدة الكبرى والاقتراحات .

وإني أثمن كثيراً كل اقتراح ، سواء من الطلبة أو المدرسين ، لتحسين هذا الكتـاب ، وأشكر أيضاً دوروثي وسوزان والكندر وديزي فارلو .

س.ج. فارلو

الدرس الأول
مقدمة إلى المعادلات التفاضلية الجزئية

1–1 الغرض من الدرس

تبيان المقصود بالمعادلات التفاضلية الجزئية ، وكيفية حلولها ، وعرض موجز عن تصنيفها ، ونظرة عامة عن عدد من الأفكار التي ستدرس بالتفصيل لاحقاً .

إن معظم الظواهر الفيزيائية سواء كانت في حقل سريان الموائع الكهربائية ، الميكانيك ، البصريات أو سريان الحرارة يمكن أن توصف بصورة عامة بمعادلات تفاضلية جزئية (م. ت. ج) ، وفي الحقيقة أن معظم الفيزياء الرياضية هي معادلات تفاضلية جزئية ، وعلى الرغم من أن التبسيطات تحول المعادلات قيد الدرس إلى معادلات تفاضلية اعتيادية إلا أن الوصف الكامل لهذه المنظومات يقع ضمن المجال العام للمعادلات التفاضلية الجزئية .

1–2 ما المعادلات التفاضلية الجزئية ؟

المعادلة التفاضلية الجزئية هي معادلة تحتوي على مشتقات جزئية ، وخلافاً للمعادلات التفاضلية الاعتيادية (م. ت. إ) حيث تعتمد الدالة المجهولة على متغير واحد فقط فإن الدالة في المعادلات التفاضلية الجزئية تعتمد على عدد من المتغيرات (مثل درجة الحرارة $u(x,t)$ حيث تعتمد على الموضع x والزمن t .

لندرج الآن بعض المعادلات التفاضلية الجزئية المعروفة ، وللسهولة نستخدم الرموز :

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \ldots$$

3-1 بعض المعادلات التفاضلية الجزئية المعرفة جيداً

1- معادلة التوصيل الحراري في البعد الواحد :

$$u_t = u_{xx}$$

2- معادلة التوصيل الحراري في البعدين :

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}$$

3- معادلة لابلاس بالإحداثيات القطبية :

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

4- معادلة الموجة في الأبعاد الثلاثة :

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

5- معادلة الإرسال البرقي :

$$u_{tt} = u_{xx} + \alpha u_t + \beta u$$

ملاحظة على الأمثلة

الدالة المجهولة u تعتمد دائماً على أكثر من متغير واحد ، والمتغير u (الذي يشتق بالنسبة للمتغيرات الأخرى) يسمى بالمتغير التابع وتسمى المتغيرات الأخرى بالمتغيرات المستقلة ، وعلى سبيل المثال فإنه يتضح من المعادلة :

$$u_t = u_{xx}$$

أن المتغير التابع $u(x,t)$ هو دالة بدلالة المتغيرين t ، x كما يتضح من المعادلة :

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

إن المتغير $u(r,\theta,t)$ يعتمد على r,θ,t .

4-1 المعادلات التفاضلية مفيدة ، لماذا ؟

إن معظم القوانين الطبيعية في الفيزياء مثل معادلات ماكسويل وقوانين نيوتن للتبريد ومعادلات نافير – ستوكس ومعادلات نيوتن للحركة ومعادلة شرودنكر في الميكانيك الكمي كلها مكتوبة (أو يمكن كتابتها) بدلالة المعادلات التفاضلية الجزئية ، وبعبارة أخرى فإن هذه القوانين تصف الظواهر الفيزياوية بإيجاد العلاقات بين الفضاء والمشتقات الجزئية بالنسبة للزمن ، فالمشتقات الجزئية تظهر في هذه المعادلات لكونها تمثل أشياء طبيعية (مثل السرعة والتعجيل والقوة والاحتكاك والفيض والتيار) ، وعليه نحصل على معادلات تربط بين مشتقات جزئية لكميات مجهولة مراد معرفتها .

الغرض من هذا الكتاب تعليم القارئ الشيئين الآتيين :

1- كيفية صياغة المعادلة التفاضلية من المسألة الفيزيائية (بناء النموذج الرياضي) .

2- كيفية حل المعادلة التفاضلية (بحيث تتحقق بعض الشروط الابتدائية وبعض الشروط الحدودية) .

هذا وسنبدأ بنمذجة المسألة الفيزيائية بعد قليل من الدراسة ، أما الآن فسنلقي نظرة عامة على كيفية حل المعادلة التفاضلية الجزئية .

5-1 كيف تحل المعادلة التفاضلية الجزئية ؟

هذا سؤال جيد ، هناك طرق كثيرة جداً مطبقة عملياً وأعظمها أهمية تلك الطرق التي باتباعها تتحول المعادلات التفاضلية الجزئية إلى معادلات تفاضلية اعتيادية ، ومنها الطرق العشر الآتية :

1- فصل التغيرات

بهذه الطريقة يتم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية ذات n من المتغيرات المستقلة إلى n من المعادلات التفاضلية الاعتيادية .

2- التحويلات التكاملية

بهذه الطريقة يتم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية ذات n من المتغيرات المستقلة إلى معادلة تفاضلية جزئية ذات $n-1$ من المتغيرات المستقلة ومن ثم بهذه الطريقة يمكن تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية ذات المتغيرين إلى معادلة تفاضلية اعتيادية .

3- تبديل المتغيرات

بهذه الطريقة يتم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى معادلة تفاضلية اعتيادية أو إلى معادلة تفاضلية جزئية (أسهل) وذلك بتبديل متغيرات المسألة (كالتدوير أو ما شابه ذلك) .

4- تحويل المتغير التابع

بهذه الطريقة يتم تحويل المجهول في المسألة إلى مجهول آخر يمكن احتسابه بطريقة أسهل .

5- الطرائق العددية

تحول المعادلة التفاضلية الجزئية إلى مجموعة من المعادلات الفرقية التي يمكن حلها بعمليات حسابية متكررة بواسطة الحاسبة الإلكترونية ، وفي عدد من الحالات يكون هذا هو الحل الوحيد ، وإضافة لذلك هناك طرائق لتقريب الحلول بسطوح معادلاتها متعددات حدودية (التقريب الشرائحي) .

6- طرائق الترجاف

تحول المسألة غير الخطية إلى متتابعة من المسائل الخطية والتي تقرب للمسألة الأولى .

7- طريقة الحافز والاستجابة

تجزأ الشروط الابتدائية والشروط الحدودية للمسألة إلى حوافز بسيطة ثم توجد استجابات هذه الحوافز وتجمع هذه الاستجابات البسيطة لحساب الاستجابة الكلية .

8- المعادلات التكاملية

تحول المعادلة التفاضلية الجزئية إلى معادلة تكاملية (معادلة يكون المجهول فيها داخل التكامل) ، وبعدئذ تحل المعادلة التكاملية بطرق مختلفة .

9- طرائق حساب التغيرات

يوجد حل للمعادلات التفاضلية الجزئية بإعادة صياغتها كمسألة نهايات صغرى ، وعندئذ يتبع أن النهاية الصغرى لمقدارها (يحتمل أن يمثل المقدار الطاقة الكلية) تكون أيضاً حلاً للمعادلة التفاضلية .

10- طريقة الدوال الذاتية

بهذه الطريقة يتم إيجاد حل المعادلة التفاضلية الجزئية كمجموع عدد غير منته من الدوال الذاتية ، وهذه الدوال الذاتية توجد بحل ما يسمى بمسائل القيم الذاتية المناظرة للمسألة الأصلية .

1-6 حلول بعض المعادلات التفاضلية البسيطة

لكي نتوصل إلى بعض الأفكار التي تخص طبيعة الحلول للمعادلات التفاضلية الجزئية دعونا ندرس الآتي :

مسألة للمناقشة

استخرج حلولاً للمعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} = 6x + 12y^2 \qquad (1)$$

يعتمد المتغير التابع U في (1) على المتغيرين المستقلين y,x لإيجاد الحلول نحاول أن نحدد U بدلالة x و y أي $U(x,y)$ ، إذا كتبنا (1) بالصيغة :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)=6x+12y^2 \qquad (2)$$

فإننا نستطيع أن نكامل بالنسبة إلى x مع الاحتفاظ بـ y ثابتاً لنجد أن :

$$\frac{\partial U}{\partial y}=3x^2+12xy^2+F(y) \qquad (3)$$

حيث أضفنا (ثابت) التكامل الاختياري الذي يمكن أن يعتمد على y ولذلك فهو في الواقع دالة اختيارية لـ y يرمز لها بـ $F(y)$ ، نكامل الآن (3) بالنسبة إلى y مع الاحتفاظ بـ x ثابتاً لنجد أن :

$$U=3x^2y+4xy^3+\int F(y)\,dy+G(x) \qquad (4)$$

في هذه المرة أضفنا دالة اختيارية لـ x معطاة بـ $G(x)$ بما أن تكامل دالة اختيارية لـ y هو عبارة عن دالة اختيارية أخرى لـ y فإننا نستطيع أن نكتب (4) بـ :

$$U=3x^2y+4xy^3+H(y)+G(x) \qquad (5)$$

يمكن التحقق من (5) بتعويضها في (1) والحصول على متطابقة ، بما أن (1) هي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية بينما الحل (5) له دالتان اختياريتان فإن هذا يقودنا مقارنة بالمعادلات التفاضلية الاعتيادية إلى تسمية (5) بـ الحل العام لـ (1) ، باستخدام التشابه نفسه من الطبيعي أن سمي أي حل مستخرج من الحل العام (5) بواسطة اختيارات خاصة

للدوال الاختيارية ، على سبيل المثال $H(y) = y^3$ و $G(x) = \sin 2x$ بالحل الخاص ، إن هذا يقودنا عندئذ لعمل الآتي :

تعريف أعطيت معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الـ n ، يسمى الحل الذي يحتوي على n من الدوال الاختيارية بالحل العام وأن أي حل مستخرج من الحل العام باختيارات خاصة للدوال الاختيارية يسمى بـ الحل الخاص .

كما في دالة المعادلات التفاضلية الاعتيادية فإننا غالباً ما نحتاج إلى تحديد حلول للمعادلات التفاضلية الجزئية التي تحقق شروطاً معطاة ، على سبيل المثال افترض أننا نريد حل المعادلة التفاضلية (1) خاضعة للشرطين :

$$U(1, y) = y^2 - 2y \qquad , \qquad U(x,2) = 5x - 5 \qquad (6)$$

بعد ذلك يقودنا الحل العام (5) والشرط الأول في (6) إلى :

$$u(1, y) = 3\ (1)^2 y + 4(1)y^3 + H(y) + G(1) = y^2 - 2y$$

أو :

$$H(y) = y^2 - 5y - 4y^3 - G(1)$$

لذلك فإن :

$$U = 3x^2 y + 4xy^3 + y^2 - 5y - 4y^3 - G(1) + G(x) \qquad (7)$$

إذا استخدمنا الآن الشرط الثاني في (6) فإن ذلك يقودنا إلى :

$$U(x,2) = 3x^2(2) + 4x(2)^3 + (2)^2 - 5(2) - 4(2)^3 - G(1) + G(x) = 5x - 5$$

التي منها نحصل على :

$$G(x) = 33 - 27x - 6x^2 + G(1)$$

باستخدام هذه الأخيرة في (7) نحصل على الحل المطلوب :

$$U = 3x^2 y + 4xy^3 + y^2 - 5y - 4y^3 - 27x - 6x^2 + 33 \qquad (8)$$

يمكننا أن نستخدم مصطلح مسألتي القيمة الابتدائية والحدودية نفسه بالسبة إلى المعادلات التفاضلية الجزئية .

من ناحية أخرى ، لأن هناك بصورة عامة جمعاً لشروط ابتدائية وحدودية فإننا نشير عادة إلى مسائل من هذا النوع بمسائل القيمة الحدودية .

كما في المسألة التي درست في بداية الدرس فإن صيغة المعادلة التفاضلية الجزئية قد توحي بطريقة حل ، بصورة خاصة النوع البسيط للمعادلات التفاضلية الجزئية هو ذلك النوع الذي يمكن معالجته بطرائق المعادلات التفاضلية الاعتيادية باستخدام متغير مستقل واحد في كل مرة ، المسألة التي درست في بداية الدرس هي مثال على ذلك ، مثال معقد بعض الشيء قد أعطي في الآتي :

مثال توضيحي 1

جد حلاً لمسألة القيمة الحدودية :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} + 2 \qquad , \qquad U(0,y) = 0 \qquad , \qquad U_x(x,0) = x^2$$

الحل بكتابة المعادلة بالصيغة :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y} - U\right) = 2$$

وبالمكاملة بالنسبة إلى x ينتج :

$$\frac{\partial U}{\partial y} - U = 2x + F(y)$$

التي هي معادلة خطية لها عامل تكاملي e^{-y} إذن :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-y}U\right)=2xe^{-y}+e^{-y}F(y)$$

أو :

$$U(x,y)=-2x+e^{y}\int e^{-y}F(y)\,dy+e^{y}G(x)$$

حيث $G(x)$ هي دالة اختيارية بكتابة :

$$H(y)\equiv e^{y}\int e^{-y}F(y)\,dy$$

يكون لدينا :

$$U(x,y)=-2x+H(y)+e^{y}G(x) \qquad (9)$$

من $U(0,y)=0$ نجد أن :

$$H(y)=-G(0)e^{y}$$

لذلك فإن (9) تصبح :

$$U(x,y)=-2x-G(0)e^{y}+e^{y}G(x)$$

بالمفاضلة بالنسبة إلى x وبوضع $y=0$ نجد أن :

$$U_x(x,0)=-2+G'(x)=x^2 \qquad \text{أو} \qquad G(x)=\frac{x^3}{3}+2x+c$$

إذن :

$$U(x,y)=-2x-G(0)e^{y}+e^{y}\left(\frac{x^3}{3}+2x+c\right)$$

بما أن $c=G(0)$ فإن :

$$U(x,y)=\frac{x^3e^{y}}{3}+2xe^{y}-2x$$

كما في حالة المعادلات التفاضلية الاعتيادية فإن المسائل التطبيقية تعد مصدراً مهما للمعادلات التفاضلية الجزئية المطلوب حلها بموجب شروط ذات علاقة ، والتي نسميها

بمسائل القيمة الحدودية ، تعطي مسألة ما في العلوم أو الهندسة ، نبدأ كالمعتاد في بناء النموذج الرياضي الذي يبسط وتأمل يقرب بصورة جيدة الحالة الحقيقية ، بعد ذلك نصوغ المسألة رياضياً فنتوصل إلى مسألة القيمة الحدودية ، يجب أن نشير إلى أن صياغات المعادلات التفاضلية الجزئية والشروط ذات العلاقة في التطبيق قد تكون أحيانا صعبة وربما مستحيلة ، في مكان لاحق من هذا الفصل سوف نشتق بعض المعادلات التفاضلية الجزئية المهمة التي تظهر في مجالات مختلفة ، إذا نجحنا في صياغة مسألة قيمة حدودية فإنه تبقى هناك مهمة إيجاد حل لتلك المسألة ، أي إيجاد حل للمعادلة التفاضلية الجزئية ولكن من الصعب أو حتى من المستحيل إيجاد ذلك الحل الذي يحقق الشروط المعطاة ، كما في المعادلات التفاضلية الاعتيادية هناك منطقياً ثلاثة أسئلة مطلوب منا علميا أن نسألها مع أننا قد نكون غير قادرين على الإجابة عنها :

1- هل يوجد حل لمسألتنا ؟ إذا استطعنا أن نبين – بأية طريقة كانت – أنه لا يوجد حل للمسألة فعندئذ ليس هناك جدوى من البحث عنه لقد نجح علماء الرياضيات في إثبات أن أنواعاً معينة من مسائل القيمة الحدودية تكون لها حلول ، النظريات التي تضمن وجود الحلول تسمى بنظريات وجود الحل وهي ذات فائدة كبيرة .

2- إذا كان هناك حل فهل هو وحيد ؟ إذا لم يكن وحيداً ، أي إذا كانت لدينا إجابتان ممكنتان لمسألة فيزيائية معطاة ، فإن هذا يعني أن هناك حالة مركبة تماماً ، النظريات التي تضمن وحدانية الحلول تسمى بنظريات وحدانية الحل .

3- إذا كان الحل موجوداً ووحيداً فما ذلك الحل ؟ من الطبيعي أننا في المعالجة الأولية يمكننا الاهتمام بالسؤال الأخير فقط ، أي كيفية تحديد حل واحد يحقق المعادلة والشروط ، من الطبيعي أن الحل المذكور يجب أن يتفق مع التجربة أو الرصد ، وإلا فإننا يجب أن نعدل المعادلات .

7-1 المعنى الهندسي للحلول العامة والخاصة

في المسألة المذكورة في بداية الفقرة حصلنا على الحل العام :

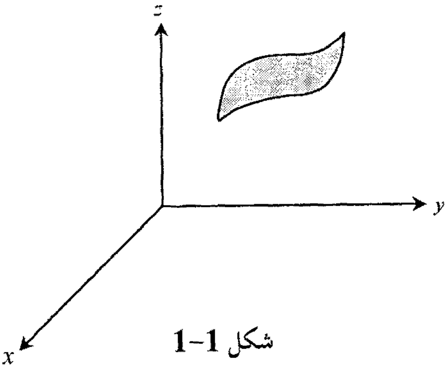
$$U = 3x^2 y + 4xy^3 + H(y) + G(x) \tag{10}$$

لنفترض الآن أننا نختار دالتين خاصتين لـ $H(y)$, $G(x)$ ونبدل U بـ Z عندئذ نأخذ (10) الصيغة :

$$Z = f(x, y)$$

التي يمكن تفسيرها هندسيا سطحاً S في نظام إحداثيات عمودي أو z y x مثل النظام المبين في الشكل 1-1 ، يتكون السطح من نقاط ذات إحداثيات (x , y , z) تحقق (11) بالنسبة لدوال اختيارية لـ $H(y)$ و $G(x)$ نحصل على مجموعة سطوح كل واحد منها يناظر اختياراً خاصاً لـ $H(y)$ و $G(x)$ ، أي يناظر حلاً خاصاً ، المعادلة التفاضلية التي لها هذه السطوح حلولاً تسمى عندئذ بالمعادلة التفاضلية لمجموعة سطوح ، يلاحظ الطالب التشابه مع المعادلات التفاضلية الاعتيادية التي يمثل فيها الحل العام بثوابت اختيارية (بدلاً من دوال) مجموعة منحنيات كل منحن فيها يناظر حلاً خاصاً ، أي يناظر اختياراً خاصاً لتلك الثوابت الاختيارية ، يمكن تعميم هذه الأفكار لحالات يوجد فيها أكثر من متغيرين مستقلين ، لذلك وعلى سبيل المثال ، في حالة كون U دالة لثلاثة متغيرات مستقلة ، والتي يمكن أن نرمز لها بـ x_1 , x_2 , x_3 فإننا نستطيع أن نفكر بحل خاص لمعادلة تفاضلية جزئية يتضمن تلك المتغيرات الثلاثة ومعطى بـ :

$$U = f(x_1 , x_2 , x_3) \tag{12}$$



شكل 1-1

إن هذا لا يمكن تصوره هندسياً كما في شكل 1-1 ولكن نستطيع أن نفكر بمجموعة الأرقام الرباعية $(x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ U)$ على أنها تمثل نقطة في فضاء ذي أربعة أبعاد وعندئذ نشير إلى (12) على أنها سطح ذو أربعة أبعاد أو سطح فوقي ، على سبيل المثال ، تماماً كما تمثل $x^2+y^2+z^2=c^2$ كرة نصف قطرها c في فضاء ذي ثلاثة أبعاد فإن $x_1^2+x_2^2+x_3^2+U^2=c^2$ ستمثل سطحها فوقياً نصف قطره c في فضاء ذي أربعة أبعاد .

معادلات تفاضلية جزئية ناتجة من حذف دوال اختيارية

بما أن الحلول العامة للمعادلات التفاضلية الجزئية تتضمن دوال اختيارية فإنه يبدو منطقياً أن نستخرج معادلات تفاضلية جزئية بعملية عكسية متضمنة اختزال مثل هذه الدوال ، لقد برهنت هذه الفكرة على فائدتها لأنها تساعد على توسيع معرفتنا عن كيفية حل المعادلات التفاضلية الجزئية لندرس بعض الأمثلة .

مثال توضيحي 2

جد معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى حلها العام هو :

$$U=y^2F(x)-3x+4y \tag{13}$$

حيث $F(x)$ دالة اختيارية لـ x .

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2y\ F(x) + 4 \tag{14}$$

بعد ذلك باختزال $F(x)$ بواسطة (13) و (14) نجد المعادلة :

$$y\frac{\partial U}{\partial y} - 2U = 6x - 4y \tag{15}$$

التحقيق :

$$y\frac{\partial U}{\partial y} - 2U = y[2y\ F(x) + 4] - 2\ [y^2 F(x) - 3x + 4y] = 6x - 4y$$

مثال توضيحي 3

جد معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى حلها العام :

$$Z = F(3x - 4y) \tag{16}$$

حيث F دالة اختيارية .

الحل

ضع $u = 3x - 4y$ عندئذ (16) تصبح :

$$Z = F(u) \tag{17}$$

بمفاضلة (17) بالنسبة إلى x يكون لدينا :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\ .\ \frac{\partial u}{\partial x} = F'(u)\ (3) = 3F'(u) \tag{18}$$

بمفاضلة (17) بالنسبة إلى y يكون لدينا :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\ .\ \frac{\partial u}{\partial x} = F'(u)\ (-4) = -4F'(u) \tag{19}$$

باختزال $F'(u)$ بين (18) و (19) تنتج المعادلة المطلوبة :

$$4\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{20}$$

مثال توضيحي 4

جد معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية التي حلها العام هو :

$$U=x\ F(y)+y\ G(x) \tag{21}$$

حيث F و G دالتان اختياريتان .

الحل

نستطيع أن نختزل $F(y)$ في (21) بقسمة كلا طرفي (21) على x ومفاضلة النتيجة بالنسبة إلى x .

بعد ذلك نجد أن :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{U}{x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[F(y)+\frac{y}{x}G(x)\right]$$

أي أن :

$$x\frac{\partial u}{\partial x}-U=x\ y\ G'(x)-y\,G(x)-yG(x)$$

التي يمكن كتابتها بالصيغة :

$$x\frac{\partial U}{\partial x}-U=y\left[\ xG'(x)-G(x)\ \right] \tag{22}$$

إذا قسمنا الآن كلا طرفي (22) على y وفاضلنا بالنسبة إلى y وجدنا أن :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{y}\left(x\frac{\partial U}{\partial x}-U\right)\right]=0$$

(23) أو :

$$xy\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}-x\frac{\partial U}{\partial x}-y\frac{\partial U}{\partial y}+U=0$$

التي تعطي معادلة المرتبة الثانية المطلوبة ، لاحظ أن المعادلة الثانية في (23) يمكن أن تكتب أيضاً بالصيغة :

$$xy\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}-x\frac{\partial U}{\partial x}-y\frac{\partial U}{\partial y}+U=0$$

وذلك لأن :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}$$

يجب ذكر عدة ملاحظات حول النتائج .

- **ملاحظة 1** في مفاضلة الدوال الاختيارية افترضنا في الواقع أنها قابلة للتفاضل ، وإلا فلا يجوز لنا مفاضلتها .
- **ملاحظة 2** المعادلة التفاضلية المستخرجة في كل مثال تمثل معادلة تفاضلية للمجموعة الممثلة بالحل العام .
- **ملاحظة 3** إذا كان الحل يحتوي على عدد n من الدوال الاختيارية فإنه من السهل في الغالب أن نكتب معادلة تفاضلية ذات مرتبة أعلى من n يكون لها الحل المذكور ، على سبيل المثال من السهل أن نرى أن (21) هو الحل لـ :

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial y^2}=0$$

ولكن هذه الأخيرة هي من المرتبة 4 وليست 2 ، عندما نريد إيجاد المعادلة التفاضلية فإننا نبحث عن تلك التي لها أقل مرتبة .

1-8 تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية

تصنف المعادلات الجزئية بناء على اعتبارات عدة ، والتصنيف ذو مفهوم مهم لأن النظرية العامة وطرائق الحل عادة تطبق على صنف معني من المعادلات ، وتصنف المعادلات التفاضلية الجزئية إلى ستة أصناف هي :

1- رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية

وهي رتبة أعلى مشتقة جزئية في المعادلة ، فمثلا :

$u_t = u_{xx}$ من الرتبة الثانية

$u_t = u_x$ من الرتبة الأولى

$u_t = uu_{xxx} + \sin x$ من الرتبة الثالثة

2- عدد المتغيرات

وهو عدد المتغيرات المستقلة ، فمثلا :

$u_t = u_{xx}$ (ذات متغيرين t,x)

$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$ (ذات ثلاث متغيرات r,θ,t)

3- الخطية

المعادلات التفاضلية الجزئية إما أن تكون خطية وإما أن تكون غير خطية ، في المعادلة الخطية يكون المتغير التابع u وجميع مشتقاته تظهر بصيغة خطية (أي أنها غير مضروبة بعضها أو أن إحداها مربعة) وبصورة أدق فإن المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية ذات المتغيرين هي معادلة من الصيغة :

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \qquad (1)$$

حيث أن A,B,C,D,E,F ثوابت أو دوال معلومة بدلالة y ؛ x فمثلاً :

$$u_{tt} = e^{-t}u_{xx} + \sin t \quad (\text{خطية})$$

$$uu_{xx} + u_t = 0 \quad (\text{غير خطية})$$

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0 \quad (\text{خطية})$$

$$xu_x + yu_y + u^2 = 0 \quad (\text{غير خطية})$$

4- التجانس

تكون معادلة (1) متجانسة إذا كان الطرف الأيمن $G(x,y)$ يساوي صفراً لكل x,y .

إذا لم يكن $G(x,y)$ مساوياً للصفر فعندئذ تسمى المعادلة غير متجانسة .

5- نوعية المعاملات

في معادلة (1) إذا كانت A,B,C,D,E,F ثوابت فعندئذ تسمى المعادلة ذات معاملات ثابتة (وإذا لم تكن كذلك فتسمى المعادلة ذات معاملات متغيرة .

6- الأنماط الثلاثة الأساسية للمعادلات الخطية

كل معادلة تفاضلية جزئية خطية مثل (1) تمثل أحد الأنماط الآتية :

أ- القطع المكافئ .

ب- القطع الزائد .

ج- القطع الناقص .

فمعادلات القطع المكافئ تصف سريان الحرارة وعمليات الانتشار وتحقق الخاصية :

$$B^2 - 4AC = 0$$

ومعادلات القطع الزائد تصف حركات الاهتزاز وحركات الموجة وتحقق الخاصية :

$$B^2 - 4AC > 0$$

ومعادلات القطع الناقص تصف ظواهر الحالة المستقرة وتحقق الخاصية :

$$B^2 - 4AC < 0$$

أمثلة

أ- $u_t = u_{xx}$ معادلة قطع مكافئ لأن : $B^2 - 4AC = 0$

ب- $u_{tt} = u_{xx}$ معادلة قطع زائد لأن : $B^2 - 4AC = 4$

ج- $u_{\zeta\eta} = 0$ معادلة قطع زائد لأن : $B^2 - 4AC = 1$

د- $u_{xx} + u_{yy} = 0$ معادلة قطع ناقص لأن $B^2 - 4AC = -4$

هـ - $y_{xx} + u_{yy} = 0 \quad B^2 - 4AC = -4y\begin{cases} y > 0 & \text{عندما يكون قطع ناقص} \\ y = 0 & \text{عندما يكون قطع مكافئ} \\ y < 0 & \text{عندما يكون قطع زائد} \end{cases}$

(في حالة المعاملات المتغيرة يتغير الوضع من نقطة إلى أخرى) .

ملاحظات

1- بصورة عامة يكون $B^2 - 4AC$ دالة بدلالة المتغيرات المستقلة وعليه تتغير المعادلة من نمط لآخر تبعاً لمجال المتغيرات (ولو أن ذلك غير مألوف) .

2- إن المعادلة الخطية العامة (1) قد صيغت بدلالة المتغيرات المستقلة $x\,y$. في معظم المسائل يمثل أحد المتغيرين الزمن وعندئذ يمكن كتابة المعادلة بدلالة x,t .

3- يمكن توضيح مخطط التصنيف العام كما في شكل (1-2) .

خطية				غير خطية			الخطية
1	2	3	4	5	...	m	الرتبة
معاملات ثابتة				معاملات متغيرة			معاملات (المعادلات الخطية)
متجانسة				غير متجانسة			التجانس (المعادلات الخطية)
1	2	3	4	5	...	n	عدد المتغيرات
قطع زائد			قطع مكافئ		قطع ناقص		الأنماط الأساسية

شكل 1–2 مخطط التصنيف العام للمعادلات التفاضلية الجزئية

تمارين

1- صنف المعادلات الآتية تبعاً لكل الصفات الواردة في شكل (1-2) :

(a) $u_t = u_{xx} + 2u_x + u$

(b) $u_t = u_{xx} + e^{-t}$

(c) $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = \sin_x$

(d) $u_{tt} = uu_{xxxx} + e^{-t}$

2- كم عدد حلول المعادلة التفاضلية الجزئية $u_t = u_{xx}$ ؟ هل تستطيع إيجادها ؟ حاول إيجاد الحلول ذات الصيغة $u(x,t) = e^{ax+bt}$.

3- إذا كان كل من $u_1(x,y)$ و $u_2(x,y)$ يحقق معادلة (1) فهل أن مجموعهما يحققها ؟ برهن على صحة ما تقول .

4- يحتمل أن تكون المعادلة الآتية أبسط معادلة تفاضلية جزئية .

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0$$

هل تتمكن من لها ؟ (جد كل الدوال $u(x,y)$ التي تحققها ؟) قارن هذه المعادلة مع معادلة تفاضلية اعتيادية مثل :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

بقدر ما يتعلق الأمر بعدد الحلول .

الدرس الثاني

مسائل الانتشار (معادلات القطع المكافئ)

2–1 الغرض من الدرس

تبيان كيفية استخدام المعادلات التفاضلية الجزئية من نوع القطع المكافئ في نمذجة مسائل سريان الحرارة ومسائل الانتشار ، وتوضيح المعاني الفيزيائية لمختلف الحدود (مثل u_t, u_x, u_{xx}، ثم عرض بعض الأمثلة القليلة لمعادلات القطع المكافئ .

كذلك سيقدم مفهوم مسائل القيم الابتدائية الحدودية من خلال أحد الأمثلة ، كما أن أحد الأهداف المهمة في هذا الدرس إعطاء القارئ تصوراً هندسياً لمعادلات القطع المكافئ .

نبدأ درسنا هذا بإعطاء مسألة فيزيائية بسيطة وتبيان كيفية وصفها بنموذج رياضي (يتضمن معادلة تفاضلية جزئية) ، ومنها ننتقل إلى مسألة أعقد بقليل ونبين كيفية استخدام المعادلات التفاضلية الجزئية الجديدة لوصف الوضع الجديد ، وسوف لا تشتق هذه المعادلات أو تحل في هذا الدرس ولكن ذلك سيكون في دروس أخرى .

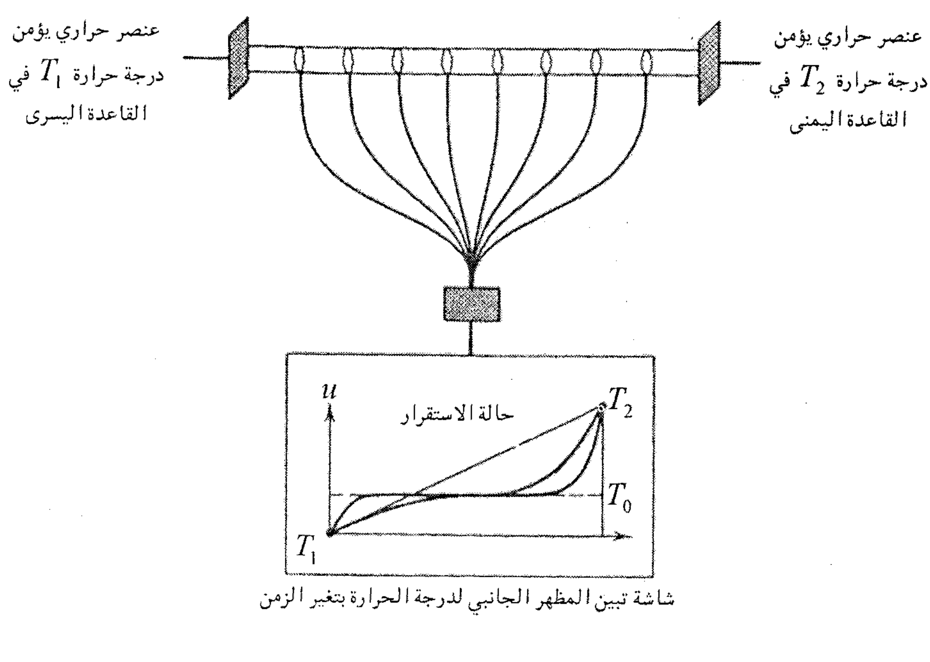
2–2 تجربة بسيطة على سريان الحرارة

لنفرض أن لدينا المسألة البسيطة الآتية والتي سنجزؤها إلى خطوات أربع :

- **الخطوة الأولى** : نبدأ بذراع معدنية (من النحاس مثلاً) بأبعاد مناسبة (مثلاً طولها $m = L$ وقطرها 2 cm) بحيث يكون سطحها الجانبي (وليس قاعدتيها) مغلفاً بمادة عازلة ويمكن أن نبدأ حتى بأنبوب مجوف من النحاس مغلف من الداخل بمادة عازلة ، وبعبارة أخرى يكون تسرب الحرارة خلال القاعدتين فقط وليس من السطح الجانبي .

- **الخطوة الثانية** : والآن نضع الذراع في وسط ذي درجة حرارة ثابتة T_0 درجة مئوية لوقت كاف لتصبح درجة حرارة الذراع كلها مساوية T_0 ، وللسهولة نفرض أن $T_0 = 10° C$.

- **الخطوة الثالثة** : ننقل الذراع من الوسط في زمن معين نسميه $t = 0$ ونربط قاعدتيها بعنصرين حراريين الغرض منهما الحصول على درجتي حرارة T_2 و T_1 في قاعدتي الذراع والمحافظة على هاتين الدرجتين (ولتكونا مثلاً $T_1 = 0° C$ و $T_2 = 50° C$) ، وبعبارة أخرى فإن هذين العنصرين منظمان حراريان يحافظان على ثبوت درجتي حرارة قاعدتي الذراع بحيث إذا تغيرت هاتان الدرجتان عن T_1, T_2 فحينئذ تعطي (أو تؤخذ) حرارة قوية لإرجاع درجتي الحرارة إلى حالتيهما السابقتين ، وتتوضح التجربة في شكل (1-2) .



شكل 1-2 مَخطط بياني للتجربة

- **الخطوة الرابعة** : والآن نبين المظهر الجانبي لدرجة حرارة الذراع على شاشة ما ، (لماذا نقوم بتجربة من هذا النوع ؟ هذا سؤال آخر سنجيب عليه فيما بعد) . بهذا نكون قد أكملنا التجربة ، الغرض الرئيسي لهذا الدرس هو بيان كيفية توضيح (أو نمذجة) هذه المسألة الفيزيائية (أو أشكالها المختلفة) بدلالة المعادلات التفاضلية الجزئية من نمط القطع المكافئ .

2–3 النموذج الرياضي لتجربة سريان الحرارة

إن وصف المسألة الفيزيائية يتطلب ثلاثة أنواع من المعادلات .

1- المعادلة التفاضلية الجزئية التي تصف ظاهرة سريان الحرارة .

2- الشروط الحدودية التي تصف الطبيعة الفيزيائية للمسألة على الحدود .

3- الشروط الابتدائية التي تصف الظاهرة الفيزيائية عند ابتداء التجربة .

فالمعادلة الأساسية لسريان الحرارة في البعد الواحد هي :

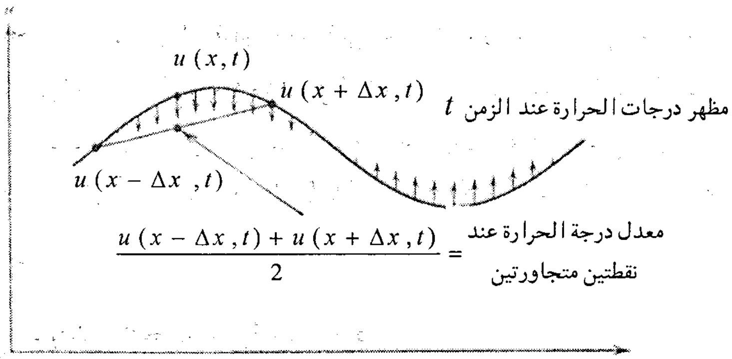
$$\text{PDE} \qquad u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < L \qquad 0 < t < x \qquad (1)$$

التي تربط بين الكميتين .

u_t = معدل تغير الحرارة بالنسبة إلى الزمن (مقاسة بالدرجة / الثانية) .

u_{xx} = تقعر منحنى درجة الحرارة $u(x,t)$ (والذي هو أساس يقارن بين درجة الحرارة عند نقطة ودرجة حرارة النقاط المجاورة لها) .

سنشتق هذه المعادلة من معادلة حفظ الحرارة الأساسية في دروس قادمة إلا أننا في الوقت الحاضر سنناقش المعادلة نفسها ، تنص هذه المعادلة ببساطة على أن درجة الحرارة $u(x,t)$ (في نقطة x على ذراع وفي زمن معين t) متزايدة $(u_t > 0)$ ومتناقضة $(u_t < 0)$ عندما u_{xx} موجبة أو u_{xx} سالبة على التوالي . والشكل 2–2 يبين كيفية تغيير درجة الحرارة عند نقاط الذراع .



شكل 2–2 الأسهم تبين تغير درجة الحرارة تبعاً للمعادلة $u_t = \alpha^2 u_{xx}$

ولمعرفة تفسير u_{xx} كقياس لسريان الحرارة نفرض أننا قربنا u_{xx} بالمعادلة الآتية :

$$u_{xx}(x,t) \cong \frac{1}{\Delta x^2}\left[u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)\right]$$

وعندئذ

$$u_{xx}(x,t) \cong \frac{2}{\Delta x^2}\left[\frac{u(x+\Delta x,t)+u(x-\Delta x,t)}{2} - u(x,t)\right]$$

وعليه يمكن تفسير u_{xx} كما يأتي :

1- إذا كانت درجة الحرارة $u(x,t)$ أقل من معادلة درجة الحرارة عند النقطتين المجاورتين فإن $u_{xx} > 0$ (وفي هذه الحالة تكون محصلة سريان الحرارة عند النقطة x موجبة) .

2- إذا كانت درجة الحرارة $u(x,t)$ تساوي معدل درجة الحرارة عند النقطتين المجاورتين فعندئذ يكون u_{xx} يساوي صفراً (وفي هذه الحالة تكون محصلة سريان الحرارة عند النقطة x مساوية صفراً) .

3- إذا كانت درجة الحرارة $u(x,t)$ أكبر من معدل درجة الحرارة عند النقطتين المجاورتين فعندئذ يكون $u_{xx} < 0$ (وفي هذه الحالة تكون محصلة سريان الحرارة عند النقطة x سالبة) .

وهذا يتضح من شكل 3 ، وبعبارة أخرى إذا كانت درجة الحرارة في نقطة x أكبر من معدل درجة الحرارة للنقطتين $x + \Delta x, x - \Delta x$ فعندئذ تكون درجة الحرارة متناقصة وبصورة أدق فإن تناقص u_t يتناسب مع هذا الفرق ، وثابت التناسب هذا α^2 يعتمد على المادة ، وسندرس هذا الثابت في الدروس القليلة القادمة .

2-4 الشروط الحدودية

إن كل المسائل الفيزيائية تشتمل على حدود من نوع ما وعليه يجب أن نصف ما يحدث عند هذه الحدود بصورة رياضية لكي نضع وصفاً كاملاً للمسألة ، وفي تجربتنا هذه تكون الشروط الحدودية بسيطة تماماً ، فبما أن درجة الحرارة u ثابتة لكل $0 < t$ ومساوية T_2 و T_1 عند نهايتي الذراع $x = L, x = 0$ فيمكن التعبير عن ذلك بما يأتي :

$$\text{BCs}\begin{cases} u(0,t) = T_1 \\ \\ u(L,t) = T_2 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty \qquad (2)$$

2-5 الشروط الابتدائية

إن كل المسائل الفيزيائية تبدأ بزمن معين (يسمى عادة $t = 0$) وعليه يجب أن نخصص الجهاز الفيزيائي عند هذا الزمن ، وفي تجربتنا هذه بما أننا نبدأ بدراسة حرارة الذراع بعد اللحظة التي تكون فيها درجة الحرارة ثابتة وتساوي T_0 فعندئذ يكون :

الشرط الابتدائي :

$$\text{IC} \qquad u(x,0) = T_0 \qquad 0 \le x \le L \qquad (3)$$

وبهذا نكون قد عبرنا عن المسألة بصيغة رياضية ، وبكتابة المعادلات (1) ، (2) ، (3) سوية نكون قد حصلنا على ما يسمى بمسألة ابتدائية – حدودية القيم .

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < L \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = T_1 \\ \\ u(L,t) = T_2 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty \qquad (4)$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = T_0 \qquad 0 \le x \le L$$

هذا وإن الشيء المهم الذي لم يكن واضحاً مطلقاً أعلاه هو وجود دالة واحدة فقط $u(x,t)$ تحقق (4) وهذه الدالة تصف درجة الحرارة في الذراع ، وعليه يكون هدفنا في الدروس القليلة القادمة هو إيجاد الحل الوحيد $u(x,t)$ للمسألة أعلاه .

والآن سنناقش بعض التغيرات لهذه المسألة الأساسية ، ونبدأ ببعض التعديلات لمعادلة الحرارة $u_t = \alpha^2 u_{xx}$.

6–2 معادلات انتشار أخرى

إن التسرب الجانبي للحرارة يتناسب طرديا مع فرق درجات الحرارة حيث أن المعادلة :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta(u - u_0) \qquad \beta > 0$$

تصف سريان الحرارة $\alpha^2 u_{xx}$ في الذراع وكذلك تسرب الحرارة من (أو إلى) جانبي الذراع ، فإذا كانت $\beta < 0$ يكون التسرب من الداخل إلى الخارج وإذا كانت $\beta > 0$ فإن التسرب يكون من الخارج إلى الداخل وفي كلتا الحالتين تكون β تتناسب طرديا مع الفرق بين

درجات الحرارة $u(x,t)$ للذراع ودرجة الحرارة u_0 للوسط ، وإذا كانت β كبيرة جداً بالمقارنة مع α^2 فعندئذ يكون سريان الحرارة جيئة وذهاباً خلال الذراع صغيراً بالمقارنة مع السريان على جانبي الذراع ، وعليه فإن الحرارة تستنزف من الجانبين (عند كل نقطة) تبعاً للمعادلة $u_t = -\beta(u-u_0)$ بصورة تقريبية .

وفي الكيمياء حيث u ترمز إلى التركيز فعندئذ المعادلة الآتية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta(u-u_0)$$

تعني أن معدل التغير (u_t) للمادة يعزى إلى الانتشار $\alpha^2 u_{xx}$ (باتجاه محور x) وإلى أن المادة تفنى $\beta > 0$ أو تستحدث $\beta < 0$ بتفاعل كيماوي وذلك يتناسب طردياً مع الفرق بين التركيزين u_0 و u .

2–7 المصدر الحراري الداخلي

إن المعادلة غير المتجانسة الآتية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t)$$

تمثل الانتشار عندما يزود الذراع بمصدر حراري داخلي (في كل نقاط الذراع وفي كل زمن t) ، فيمكن أن يكون مثلاً سلكاً ناقلاً تياراً كهربائياً ماراً خلال الذراع بحيث تولد المقاومة مصدراً حرارياً ثابتاً $f(x,t) = K$.

2–8 معادلة الانتشار الحملية

نفرض أن هناك تلوثاً في مجرى يتدفق بسرعة v ، يتضح أن التركيز $u(x,t)$ للمادة يتغير كدالة بدلالة كلا المتغيرين x (حيث x المسافة الموجبة باتجاه المجرى) و t الزمن ومعدل التغير u_t يحسب من معادلة الانتشار الحملية الآتية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - v u_x$$

فالحد $\alpha^2 u_{xx}$ يمثل الانتشار والحد $-vu_x$ هو المركبة الحملية ، وحيث أن التلوث ابتدأ أولاً منتشراً أو محمولاً فإن ذلك يعتمد على مدى كبر المعاملين v ولابد أنك لاحظت دخاناً

يتصاعد من مدخنة ، في هذه الحالة يحمل جزيئات الدخان إلى الأعلى بواسطة الهواء الحار وبنفس الوقت أنها تنتشر خلال التيارات الهوائية ، وإضافة إلى هـذه التعديلات في معادلة الحرارة فإنه يمكن أيضاً تعبير الشروط الحدودية للذراع بحيث تتلائم والمسائل الفيزيائيـة ، وسنبحث بعض هذه التعديلات لاحقاً .

ملاحظات

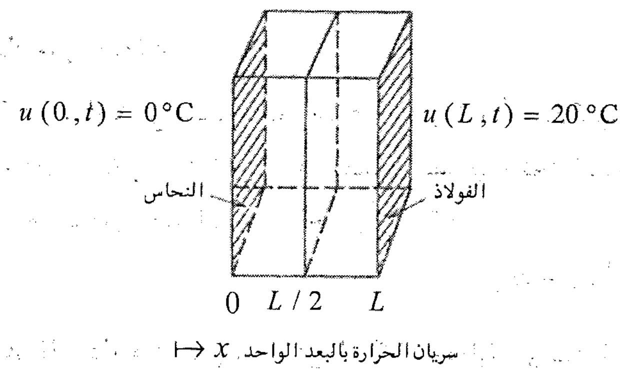
إن معادلة الحرارة $u_t = \alpha^2(x)u_{xx}$ ذات المعامل المتغير $\alpha(x)$ ستبين أن الانتشار خلال الذراع يعتمد على x (حيث هنا المادة غير متجانسة) ، فمثلاً إذا وضع لوحان أحدهما من النحاس والآخر من الفولاذ الصلب بصورة متوازية بالقرب من بعضهما (كما في شكل 2-3) وأمكن تثبيت لوح النحاس بدرجة الصفر المئوي $u(0,t) = 0°\text{C}$ ولوح الفولاذ بدرجة $u(L,t) = 20°\text{C}$ فعندئذ تكون المعادلة التفاضلية الجزئية لوصف سريان الحرارة كما يأتي :

$$u_t = \alpha^2(x)u_{xx} \qquad 0 < x < L$$

حيث :

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_1 & 0 < x < L/2 \\ \alpha_2 & L/2 < x < L \end{cases}$$

حيث α_1 ، α_2 معاملا انتشار النحاس والفولاذ على التوالي :



شكل 2-3

تمارين

1- إذا كانت درجة الحرارة الابتدائية في ذراع معدنية هي :

$$u(x,0) = \sin \pi x \qquad 0 \le x \le 1$$

وكانت الشروط الحدودية هي :

$$u(0,t) = 0$$

$$u(1,t) = 0$$

فكيف يكون سلوك درجة الحرارة $u(x,t)$ لكل قيم t ؟

تلميح : طبق التفسير الفيزيائي لمعادلة الحرارة $u_t = \alpha^2 u_{xx}$

2- لنفرض أن ذراعاً معدنية ذات مصدر حراري ثابت بحيث تكون المعادلة الأساسية لوصف سريان الحرارة في الذراع كالآتي :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + 1 \qquad 0 < x < 1$$

ولنفرض أننا ثبتنا درجتي الحرارة الحدوديتين بما يأتي :

$$u(1,t) = 1 \qquad u(0,t) = 0$$

فما هي الحالة المستقرة لدرجة الحرارة في الذراع ؟ وبعبارة أخرى ، هل أن درجة الحرارة $u(x,t)$ تقترب من درجة حرارة ثابتة $U(x)$ لا تعتمد على الزمن ؟

تلميح : اجعل $u_t = 0$ يمكن الاستفادة من بيان درجة الحرارة هذه ، كذلك ابدأ بدرجة حرارة ابتدائية تساوي صفراً ثم ارسم بيان درجة الحرارة .

3- افرض أن هناك ذراعاً معدنية تفقد حرارة عبر محيطها الجانبي تبعاً للمعادلة :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u \qquad 0 < x < 1$$

وافرض أيضاً أن درجتي الحرارة عند قاعدتيها هما $u(0,t) = 1$ و $u(1,t) = 1$ ، جد الحالة المستقرة لدرجة حرارة الذراع (ارسم بيانها) ، أين تسري الحرارة في هذه المسألة ؟

4- افرض أن درجة الحرارة لذراع معدنية معزولة الجوانب طولها $L = 1$ هي $\sin(3\pi x)$ وأن درجتي حرارة قاعدتيها ثابتتان ومساويتان $0°C$ و $10°C$. ما هي الشروط الابتدائية والحدودية لهذه المسألة ؟

الدرس الثالث

الشروط الحدودية لمسائل الانتشار

1–3 الغرض من الدرس

تبيان أن مسائل سريان الحرارة ومسائل الانتشار تؤدي إلى تشكيلة من الشروط الحدودية وتقديم مفهوم الفيض *flux* ، سنناقش ثلاثة من الشروط الابتدائية المهمة .

1. $u = g(t)$ درجة الحرارة المعينة على الحدود

2. $\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = g(t)$ درجة الحرارة المعينة للوسط

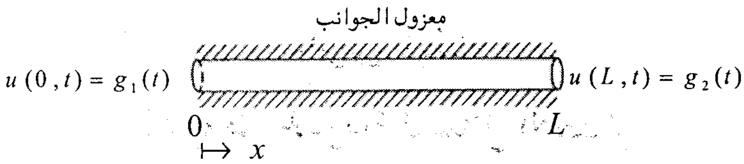
و n العمود على السطح الحدودي باتجاه الخارج

3. $\frac{\partial u}{\partial n} = g(t)$ سريان الحرارة عبر الحدود

لدراسة النماذج المختلفة من الشروط الحدودية التي تتحقق بسريان الحرارة هناك ثلاثة منها أساسية عامة جديرة بالانتباه ، في هذا الدرس نناقش هذه النماذج الثلاثة ونبين كيفية حدوثها في التجارب .

2–3 النموذج الأول (درجة الحرارة الحدودية معينة)

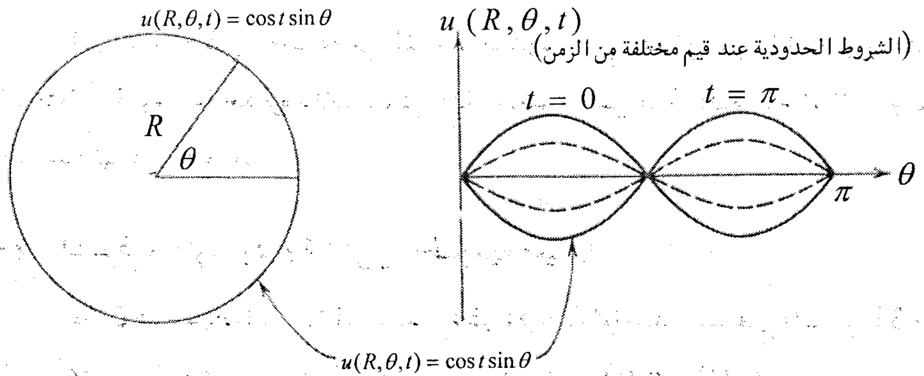
يكون هنا سريان الحرارة في الذراع ذي البعد الواحد كما في الشكل (3–1) وتكون α^2 درجتا حرارتي نهايتي الذراع بموجب الدالتين $g_1(t)$ $g_2(t)$.



شكل 3–1 درجة الحرارة على الحدود

كما ذكرنا سابقاً عن أن الحفاظ على درجتي الحرارة المعينتين في نهايتي الذراع يتطلب منظماً أو مصدراً حرارياً عند كل نهاية فإن المسائل التي تتضمن مثل هذه الشروط الحدودية مألوفة بصورة واضحة تماماً ، وقد يكون هدف المسألة إيجاد الحرارة الحدوديتين (التحكم الحدودي) $g_1(t)$ $g_2(t)$ اللتين تتحكمان بتصرف درجات الحرارة بطريقة مناسبة ، وفي صناعة الفولاذ غالباً ما يكون مهماً إيجاد التحكمات الحدودية بحيث أن درجة حرارة المعدن داخل الفرن تتغير تبعاً للزمن إلا أن التدرج (نسبة الزيادة أو النقص في الحرارة) من نقطة إلى أخرى يكون صغيراً .

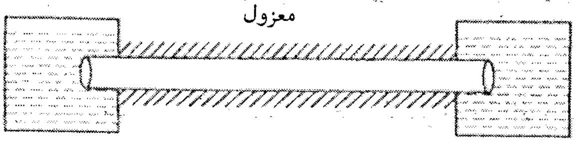
هذا وأن نماذج مماثلة لهذه الشروط الحدودية تطبق أيضاً في مناطق ذات أبعاد أكثر ، ففي المستوى مثلاً يمكن أن نتصور المسألة المهمة لإيجاد درجة الحرارة داخل قرص دائري (نصف قطره R) عندما تعين درجة الحرارة الحدودية وبدلالة الإحداثيات انظر الشكل 3–2 :



شكل 3–2 درجة الحرارة الحدودية المتذبذبة

3-3 النموذج الثاني (درجة حرارة الوسط معينة)

لنتأمل مرة أخرى ذراعاً من النحاس معزولة الجوانب ولكننا بدلاً من أن نفرض أن درجتي حرارة النهايتين $g_1(t)$ $g_2(t)$ فإننا نوصلهما بوسطين لهما درجتا الحرارتين السابقتين ، وبعبارة أخرى نفرض أن النهاية اليسرى مغمورة في صندوق فيه سائل تتغير درجة حرارته وفق الدالة $g_1(t)$ بينما تكون النهاية اليمنى مغمورة في سائل درجة حرارته تتغير وفق الدالة $g_2(t)$ كما هو واضح في شكل (3-3) .



شكل 3-3 التبريد المحلي على الحدود

في هذا النمط لا يمكن أن يكون لنهايتي الذراع نفس درجتي حرارة السائل $g_1(t)$ $g_2(t)$ ولكننا نعلم (بموجب قانون نيوتن للتبريد) أن درجتي الحرارة في النهايتين أقل من درجتي السائلين على التوالي فعندئذ تنتقل الحرارة إلى الذراع بمعدل يتناسب مع الفرق بدرجات الحرارة ، وبعبارة أخرى ، في حالة ذراع البعد الواحد ذي النهايتين $x = 0$ و $x = L$ فإن قانون نيوتن للتبريد ينص على أن :

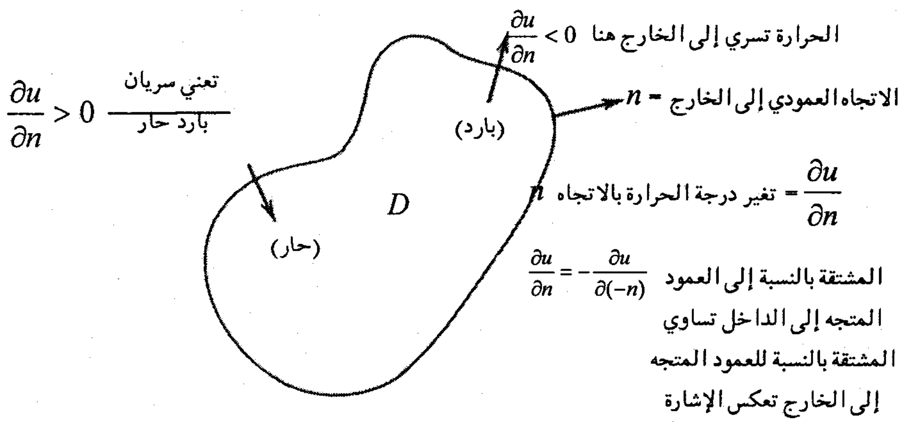
$$\begin{aligned} &\text{الفيض الحراري الخارج عندما } x = 0 \text{ يساوي} \quad h[u(0,t) - g_1(t)] \\ &\text{الفيض الحراري الخارج عندما } x = L \text{ يساوي} \quad h[u(L,t) - g_2(t)] \end{aligned} \qquad (1)$$

حيث أن h معامل التبادل الحراري الذي هو قياس لعدد السعرات الحرارية التي تسري عبر الحدود بفرق درجة واحدة بالثانية الواحدة وأن الفيض الحراري الخارج هو عدد

السعرات الحرارية التي تسري عبر نهايتي الذراع بالثانية الواحدة ، لاحظ أن الفيض الحراري الخارج يكون موجباً في كل من النهايتين إذا كانت درجة حرارة الذراع تزيد على درجة الوسط ، وأن المعادلتين (1) يمكن أن تطبقا مع قانون فورية للتبريد للوصول إلى الشروط الحدودية من النمط الثاني ، وقانون فورية يعطي تمثيلاً آخر للفيض الحراري الخارج (الأول 1) وبمساواة هذين التمثيلين نحصل على شروطنا الحدودية ، نذكر أولاً قانون فورية (المثبت تجريبياً) .

إن الفيض الحراري الخارج عبر الحدود يتناسب طردياً تبع المشتقة العمودية على السطح الحدودي .

وهذا القانون ينص على أنه إذا كانت درجة الحرارة تزداد بسرعة خارج حدود المنطقة D كما هو موضح في (شكل 3-4) فعندئذ تسري الحرارة من الوسط المحيط إلى داخل المنطقة D .



شكل 3-4 إيضاح قانون فوريه

وفي مسألتنا ذات البعد الواحد تكون صيغة قانون فوريه على الوجه الآتي :

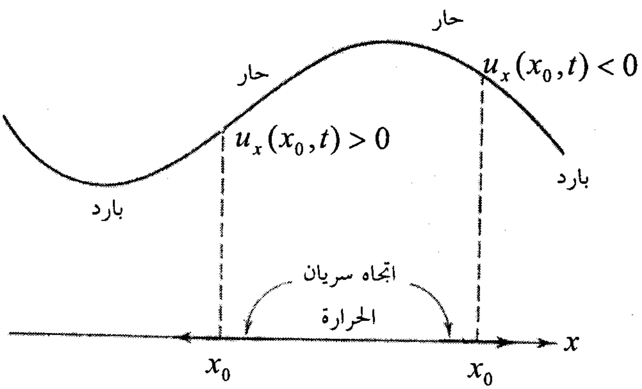
$$\text{(2)}\quad \begin{cases} \text{الفيض الحراري الخارج عندما } x = 0 \text{ يساوي } & k\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} \\ \text{الفيض الحراري الخارج عندما } x = L \text{ يساوي } & -k\dfrac{\partial u(L,t)}{\partial x} \end{cases}$$

حيث k معامل التوصيل الحراري للمعدن الذي يقيس مدى قابلية المعدن لإيصال الحرارة (المواد الضعيفة التوصيل يكون معامل التوصيل الحراري لها قريباً من الصفر وتقاس بوحدات cgs بينما يكون المعامل المذكور لكل من الألمنيوم والنحاس قريباً من واحد) وفي الحقيقة أن قانون فوريه (2) يكون صحيحاً في أي موضع داخل الذراع وليس فقط على الحدود ، فمثلاً :

الفيض الحراري عند النقطة x_0 (من اليسار إلى اليمين) يساوي :

$$-kA\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t) \tag{3}$$

لاحظ شكل (5-3) .



شكل 3-5 إيضاح آخر لقانون فوريه

إن قانون فوريه (3) ينص على أنه إذا كان $u_x(x_0,t) < 0$ فعندئذ يكون سريان الحـرارة مـن اليسار إلى اليمين ، وإذا كان $u_x(x_0,t) > 0$ فإن سريان الحـرارة سـيكون مـن اليميـن إلـى اليسار عند النقطة x_0 (سريان الحرارة يكون من الدرجة الأعلى إلى الدرجة الأدنى) .
وأخـيراً إذا اسـتخدمنا المقداريـن (1) و (2) للفيـض الحـراري فسـنحصل عـل الشـروط الحدودية المناسبة للشكل (3-3) بالصيغة الرياضية كما يأتي :

$$\text{BCs} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{h}{k}\left[u(0,t) - g_1(t)\right] \\ & 0 < t < \infty \\ \dfrac{\partial u(L,t)}{\partial x} = -\dfrac{h}{k}\left[u(L,t) - g_2(t)\right] \end{cases}$$

وللسهولة يعبر عن الثابت h/k بالعدد λ ، وعليه تصبـح الشـروط الحدوديـة BCs لسريان الحرارة عبر الحدود كما يأتي :

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= \lambda\left[u(0,t) - g_1(t)\right] \\ u_x(L,t) &= -\lambda\left[u(L,t) - g_2(t)\right] \end{aligned} \qquad (4)$$

وهناك شروط حدودية مماثلة في حالة البعدين فـأكثر مثـلاً إذا كـانت حـدود قـرص دائري تفصله عن سائل متحرك ذي درجة حرارة $g(\theta,t)$ فعندئذ تكون الشروط الحدودية كمـا يأتي :

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta,t) = -\frac{h}{k}\left[u(R,\theta,t) - g(\theta,t)\right]$$

وهنا $\dfrac{\partial u}{\partial r}(R,\theta,t)$ تمثل المشتقة العموديـة بالاتجـاه الخـارج (بالاتجـاه الموجـب للمتغير r) للمتغير u عند النقطة (R,θ) على الحدود . يسمى هذا النموذج مـن الشـروط

الحدودية بالشروط الحدودية الخطية (لأنها خطية بالمتغيرين $g(\theta,t)$) ولكنها ليست متجانسة ذا كانت الدالة u و u_r تختلف عن الدالة الصفرية .

3-4 النموذج الثالث (تعني الفيض وحالات خاصة من الحدود المعزولة)

الحدود المعزولة وهي الحدود التي لا تسمح بسريان الحرارة عبرها وعليه تكون المشتقة العمودية عليها (سواء إن كانت بالاتجاه الداخل أو الاتجاه الخارج) مساوية صفراً (لأن المشتقة العمودية تتناسب تبع الفيض) ، وفي البعد الواحد في حالة الذراع ذات النهايتين المعزولتين $x = Lx = 0$ هناك شرطان حدوديان هما :

$$u_x(0,t) = 0$$

$$0 < t < \infty$$

$$u_x(L,t) = 0$$

وفي حالة البعدين فإن الحدود المعزولة تعني أن المشتقة العمودية لدرجة الحرارة عبر الحدود تكون مساوية صفراً ، فمثلاً إذا كان القرص الدائري معزولاً فإن الشرط الحدودي سيكون $u_r(R,\theta,t) = 0$ لكل $0 \leq \theta < 2\pi$ ولكل $0 < t < \infty$ ومن الناحية الأخرى إذا علمت كمية الحرارة الداخلة عبر الحدود إلى القرص فعندئذ الشروط الحدودية تكون :

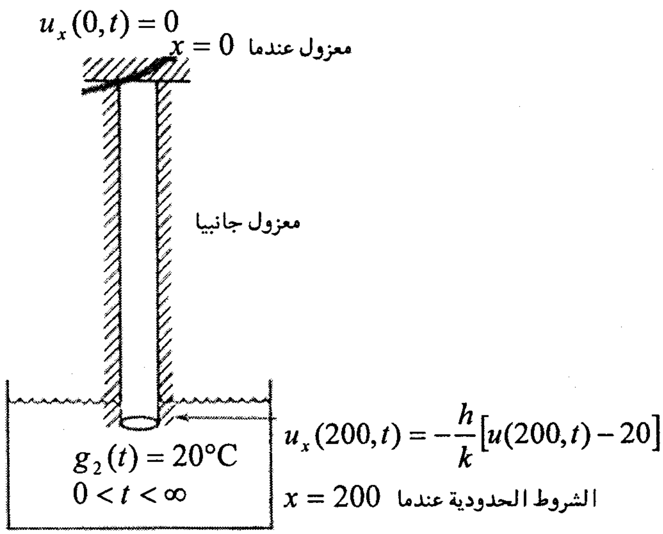
$$u_r(R,\theta,t) = f(\theta,t)$$

حيث $f(\theta,t)$ تمثل كمية الحرارة الداخلة إلى القرص الدائري من مصدر حراري خارجي .

ونوضح الآن نماذج مختلفة من الشروط الحدودية .

3-5 شروط حدودية نموذجية لسريان الحرارة في البعد الواحد

لنفرض أن ذراعاً من النحاس طولها 200 cm معزولة جانبياً ودرجة حرارتها الابتدائية 0°C ولنفرض أيضاً أن النهاية العليا من الذراع $(x = 0)$ معزولة أيضاً إلا أن النهاية السفلى $(x = 200)$ مغمورة في ماء متحرك ذي درجة حرارة مثبتة $g_2(t) = 20°C$ (الشكل 3-6) .



شكل 3-6 مسألة قيم حدودية ابتدائية

إن النموذج الرياضي لهذه المسألة يتمثل بالمعادلات الأربعة الآتية

المعادلة التفاضلية الجزئية $u_t=\alpha^2 u_{xx} \qquad 0<x<200 \qquad 0<t<\infty$

الشروط الحدودية
$$\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(200,t)=-\frac{h}{k}[u(200,t)-20] \end{cases} \qquad 0<t<\infty \quad (5)$$

الشرط الابتدائي $u(x,0)=0°C \qquad 0\le x\le 200$

حيث :

(ثابت الانتشار للنحاس) $\alpha^2=1.16\text{cm}^2/\text{sec}$

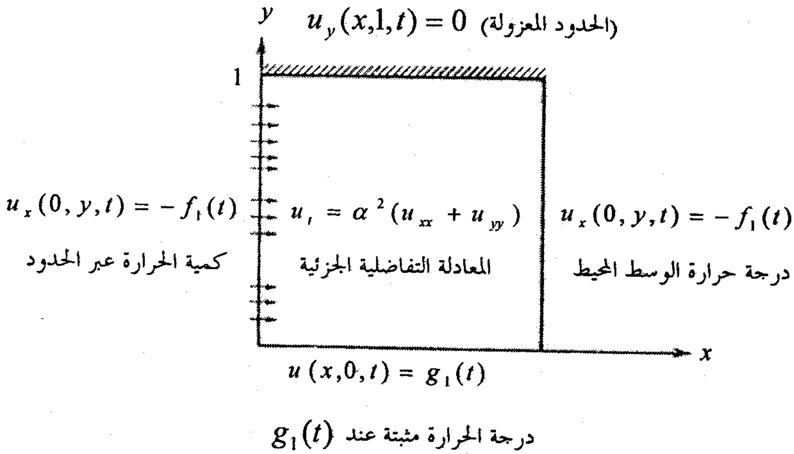
(معامل التوصيل الحراري للنحاس) $k=0.93\text{cal/cm - sec°C}$

h معامل التبادل الحراري .

هذا وإن إيجاد h هو مسألة صعبة بحد ذاتها ، وهو قياس لمعدل الحرارة المتبادلة بين النهاية السفلى للذراع والماء المحيط بها ، وهي دالة تبين سرعة تدوير الماء وطبيعة الحدود المشتركة ، وهكذا ، ويلزم للطالب إجراء تجربة لحساب قيمتها .

ملاحظات

1- نموذج لسريان الحرارة داخل مربع كما في الشكل $(7-3)$



شكل 7-3 نموذج لشروط حدودية لمسألة انتشار داخل مربع

في هذه المسألة بعد أن نعين درجة الحرارة الابتدائية $u(x,y,0)$ داخل المربع تكون المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية في المخطط أعلاه على كل قيم $0<t<\infty$ وتحسب قيم درجة الحرارة $u(x,y,t)$ ، ومهما يكن فإن درجة الحرارة المطلوبة يجب أن تحقق الشروط الحدودية في شكل $(7-3)$.

2- لاحظ أن الشرط الحدودي :

$$u_r(R,\theta,t)=-\frac{h}{k}\left[u(R,\theta,t)-g(\theta,t)\right]$$

على الدائرة لا يتطلب أن تكون درجة الحرارة على الحدود مساوية $g(\theta,t)$ ولكن عندما يكون معامل التبادل الحراري h كبيراً فإن الشرط الحدودي ينص أساساً على أن $u(R,\theta,t)$ تكاد تساوي $g(\theta,t)$.

تمارين

1- ارسم مخططات تقريبية لحل مسألة القيم الحدودية الابتدائية (5) عند قيم مختلفة للزمن ، هل أن مخططاتك تحقق الشروط الحدودية ؟
ما هي الحالة المستقرة لدرجة حرارة الذراع ؟ وهي أن هذا واضح بناءً على تصورك ؟

20 ما تفسيرك لمسألة القيم الحدودية الابتدائية الآتية ؟

المعادلة التفاضلية الجزئية $u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$

الشروط الحدودية
$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u_x(1,t) = 1 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي $u(x,0) = \sin(\pi x) \qquad 0 \le x \le 1$

هل تستطيع رسم مخطط تقريبي للحل عند قيم مختلفة من الزمن .

3- ما تفسيرك الفيزيائي للمسألة الآتية ؟

المعادلة التفاضلية الجزئية $u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$

الشروط الحدودية
$$\begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u_x(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي $u(x,0) = \sin(\pi x) \qquad 0 \le x \le 1$

هل تستطيع رسم مخطط تقريبي للحل عند قيم مختلفة للزمن ؟
ما الحالة المستقرة لدرجة الحرارة ؟

4- لتكن درجة الحرارة الابتدائية 20°C لذراع معدنية معزولة الجوانب ثم تثبت فوراً درجة حرارة إحدى نهايتها على 50°C ، غمر الجزء الباقي من الذراع في سائل درجة حرارته 30°C ، ما هي مسألة القيم الحدودية الابتدائية التي تصف هذه المسألة ؟

الدرس الرابع
استنتاج معادلة الحرارة

4–1 الغرض من الدرس

استنتاج لتوضيح كيف لمعادلة الحرارة في البعد الواحد :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t)$$

أن تشتق من مبدأ حفظ الحرارة ، ومناقشة مفاهيم التوصيل الحراري والسعة الحرارية والكثافة ، ثم بيان كيفية اعتماد انتقال الحرارة على هذه المفاهيم الفيزيائية الأساسية الثلاثة ، وأخيراً مناقشة عدد قليل من الصيغ المختلفة لمعادلة الحرارة الأساسية .

في كل مجالات العلوم نبدأ بمجموعة من الفروض التي تعد صادقة ومنها تتبع كل الأفكار الأخرى ، فتاريخ العلوم يتألف من وضع بديهيات عن الماضي ، فالماضي بحيث يكون اتفاق شامل على نقطة البداية .

وعلى سبيل المثال فإن أحداً يمكن أن يعتقد بأن كل الحقائق الوثيقة الصلة بالموضوع تنطلق من فرض أساس وليكن A ، ومن الفرض B يمكنه أن يبرهن على مبرهنة C ، وهذه بدورها تثبت مبرهنة D وهذه أيضاً بدورها تثبت مبرهنات أخرى (شكل 4–1) .

? ⟵ فرض A ⟵ فرض B ⟵ مبرهنة C ⟵ مبرهنة D ⟵ ؟

شكل 4–1 الطريقة البديهية

وهذا بالطبع تطوراً يمكن للفرد من خلاله إثبات أكبر عدد من النتائج الجديدة وهذه هي الوسيلة التي يتبعها الفيزيائيون والكيميائيون ، والباحثون في علوم الحياة .

ومن ناحية أخرى ، يمكن البحث عن فروض جديدة بدلاً من إثبات مبرهنات جديدة وعلى سبيل المثال إذا كان الفرض A أكثر أساسية من الفرض B فعندئذ يمكن إثبات B من A ، وبهذه الطريقة نتعمق أكثر في الحقول الجديدة للمعرفة .

وفي مجال سريان الحرارة ، عموماً يكون مفهوم حفظ الطاقة (الطاقة الحرارية) ، هو المفهوم الأساسي الذي تتبع منه المبادئ الأخرى (شكل 4-2) .

حفظ الطاقة $\longleftarrow$ $u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t)$ $\longleftarrow$ الخواص الأخرى لسيلان الحرارة

شكل 4-2 حفظ الطاقة ، الركن الأساسي لمسائل سريان الحرارة

هذا ونستطيع طبعاً أن ننسى هذا الموضوع ونجعل معادلة التوصيل الحراري نقطة البداية (كما يرى البعض أن هذه المعادلة بديهية بحد ذاتها) إلا أن هذه البداية غير جدية لأن فروض حفظ الطاقة أساسية للعلم ، وغالباً ما يبدأ الباحثون بنمذجة مسائل معينة بصياغة علاقات حفظ الطاقة ، ثم إعادة صياغتها كمعادلات تفاضلية جزئية .

ننتقل الآن إلى الهدف من هذا الدرس وهو استنتاج معادلة التوصيل الحراري .

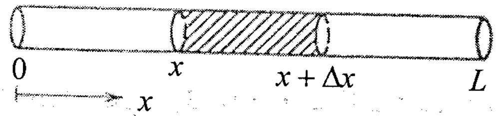
4-2 استنتاج معادلة التوصيل الحراري

لنفرض أن لدينا ذراعاً ذات بعد واحد طوله L بحيث يكون :

1- الذراع مصنوعة من مادة متجانسة واحدة موصلة للحرارة .

2- الذراع معزولة جانبياً (سريان الحرارة باتجاه x فقط) .

3- الذراع رقيقة (تكون درجة الحرارة ثابتة في المقطع العرضي له) .



شكل 4–3 ذراع موصلة رقيقة

فإذا طبقنا مبدأ حفظ الحرارة في النقطة : $[x_1 x+\Delta x]$ فإنه يمكننا القول أن :

(1)	صافي التغيير الحاصل في الحرارة داخل : $[x_1 x+\Delta x]$ يساوي التغير الحاصل عبر الحدود + الحرارة الكلية المتولدة داخل $[x_1 x+\Delta x]$.

والآن ، وبما أن كمية الحرارة الكلية (بالسعرات) داخل $[x, x+\Delta x]$ عند الزمن t تقاس كما يأتي :

الحرارة الكلية داخل $[x, x+\Delta x]$ تساوي :

$$\int_x^{x+\Delta x} c\rho A u(s,t)\, ds$$

حيث :

c = الحرارة النوعية (قياس لقابلية الذراع على خزن الحرارة)

ρ = كثافة الذراع

A = مساحة المقطع العرضي للذراع

نستطيع صياغة معادلة حفظ الطاقة (4–3) باستخدام التفاضل كما يأتي :

$$\frac{d}{dt}\int_x^{x+\Delta x} c\rho A u\,(s,t)\, ds = c\rho A\int_x^{x+\Delta} u_t(s,t)\, ds$$

$$= kA\,[u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)] + A\int_x^{x+\Delta x} f(s,t)\, ds \qquad (2)$$

حيث :

k = معامل التوصيل الحراري للذراع (قياس القدرة على توصيل الحرارة)

$f(x,t)$ = مصدر حراري خارجي (سعرة بالسنتمتر / ثانية)

والآن نعمل على تحويل معادلة (2) إلى أخرى غير حاوية على تكاملات ، وذلك بتطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة من التفاضل .

4–3 مبرهنة القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فعندئذ يوجد عدد واحد على الأقل ζ بحيث أن $a<\zeta<b$ وأن :

$$\int_a^b f(x)dx = f(\zeta)\,(b-a)$$

وبتطبيق هذه النتيجة على المعادلة (2) نحصل على المعادلة الآتية :

$$c\rho A u_t(\zeta,t)\Delta x = kA\left[u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)\right]+Af(\zeta,t)\Delta x$$

حيث :

$x<\zeta<x+\Delta x$ أي أن :

$$u_t(\zeta,t)=\frac{k}{c\rho}\left\{\frac{u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)}{\Delta x}\right\}+\frac{1}{c\rho}f(\zeta,t)$$

وباتخاذ $\Delta x\to 0$ نحصل على النتيجة النهائية :

$$u_t(x,t)=\alpha^2 u_{xx}(x,t)+F(x,t) \qquad (3)$$

حيث :

$\alpha^2=\dfrac{k}{c\rho}$ (تسمى انتشارية الذراع) $F(x,t)=\dfrac{1}{c\rho}f(x,t)$ كثافة المصدر الحراري .

وهذا هو المطلوب .

وقبل الانتهاء ويفرض أن الذراع غير معزولة الجوانب وأنه بالإمكان أن تسري الحرارة إلى الخارج عبر الحد الجانبي بمعدل يتناسب مع الفرق بين درجة الحرارة $u(x,t)$ ودرجة حرارة الوسط التي نحافظ على ثبوتها عند الصفر .

في هذه الحالة يتبع من مبدأ حفظ الحرارة كما يأتي :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u + F(x,t) \tag{4}$$

حيث :

β = المعدل الثابت لسريان الحرارة على الحد الجانبي $(\beta > 0)$

ملاحظات

1- أن الثابت k هو معامل التوصيل الحراري للذراع وهو قياس لسريان الحرارة (بالسعرات) التي تنتقل بالثانية خلال صحيفة سمكها سنتمتر واحد ومساحتها سنتمتر مربع واحد بفرق درجة مئوية واحدة ، وهذه القيم تقترب من 1 في حالة النحاس وتقترب من الصفر في حالة المواد العازلة .

وإذا كانت مادة الذراع متجانسة فعندئذ k لا تعتمد على x .

ولبعض المواد تعتمد k على درجة الحرارة u وعندئذ تكون معادلة التوصيل الحراري .

$$u_t = \frac{1}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}\{k(u)u_x\}$$

غير خطية ، ومع ذلك ، ففي معظم المواد تتغير k ببطء شديد تبع u وهذه اللاخطية تهمل .

2- أن الثابت c يسمى بالحرارة النوعية أو السعة الحرارية للمادة ، وهو قياس لكمية الطاقة التي يمكن خزنها بواسطة المادة .

فمثلاً أن البطاطا المحمصة ذات حرارة نوعية عالية لأنها تخزن كمية كبيرة من الطاقة الحرارية في وحدة الكتلة في البطاطا (ولهذا السبب أنها تستغرق وقتاً طويلاً لتصبح جاهزة للأكل) ، وبصورة أدق ، أن الحرارة النوعية هي كمية الحرارة (بالسعرات) اللازمة لرفع 1 جم من المادة درجة مئوية واحدة ، وفي معظم المسائل يؤخذ c ثابتا لا يعتمد على x و u .

3- أن وحدات قياس بعض الكميات الأساسية لسريان الحرارة (مقاسة بنظام cgs) هي :

u = درجة الحرارة (بالدرجة المئوية)

u_t = معدل تغير درجة الحرارة (°C/sec)

u_x = ميل منحنى درجة الحرارة (°C/cm)

u_{xx} = تحدب أو تقعر منحنى درجة الحرارة ($°C/cm^2$)

c = الحرارة النوعية (cal/g-°C)

k = معامل التوصيل الحراري (cal/cm-sec-°C)

ρ = الكثافة (g/cm^3)

α^2 = الانتشاء (cm^2/sec)

لاحظ أن الانتشارية $\alpha^2 = \dfrac{k}{c\rho}$ للمادة تتناسب طردياً مع معامل التوصيل الحراري k وعكسياً تبع الكثافة ρ والحرارة النوعية c ، هذا يضيف شيئاً ما إلى تصور القارئ .

تمارين

1- عوض بوحدات الكميات ... , u , u_t في المعادلة :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u$$

لتبين أن كلا من حدودها له نفس الوحدات $°C/\sec$.

2- عوض بوحدات الكميات في المعادلة :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - v u_x$$

حيث v له وحدات السرعة ، لتبين أن كلاً من حدودها له نفس الوحدات .

3- برهن على معادلة التوصيل الحراري الآتية :

$$u_t = \frac{1}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\, u_x\right] + f(x,t)$$

إذا علمت أن الحرارة النوعية $k(x)$ تعتمد على x .

4- ليكن $u(x,t)$ تركيز مادة ما في سريان يتحرك بسرعة v ، إذا كان $u(x,t)$ يتغير تبع الانتشار والحمل ، برهن على أن :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - v u_x$$

اعتمد على أن الكتلة بمرور الزمن لا تفنى ولا تستحدث في المنطقة :

$$[x\ ,\ x + \Delta x]$$

تلميح

طبق المعادلة الآتية :

التغير بالكتلة : $[x\ ,\ x + \Delta x]$

= التغير الحاصل بسبب الانتشار عبر الحدود + التغير الحاصل بسبب انتقال المادة عبر الحدود .

الدرس الخامس
فصل المتغيرات

5–1 الغرض من الدرس

إعطاء فصل المتغيرات الطريقة الفعالة لحل مسألة انتشار معروفة ، وبقدر ما تكون هذه الطريقة غير مفهومة لبعض الطلبة بسبب طبيعتها الجبرية الصعبة ، هناك عدد من التفسيرات الملموسة التي تعرض خلال الحل .

والفكرة الأساسية تكمن في تجزئة الشروط الابتدائية إلى مركبات بسيطة ، وحساب تأثير كل من هذه المركبات ثم جمع هذه التأثيرات الفردية ، وهذا يعطي تأثير الشروط الابتدائية المعطاة .

هذا وأن التفسير الأساسي لطريقة فصل المتغيرات يكمن وراء عرض هذه الطريقة خطوة بعد خطوة .

إن طريقة فصل المتغيرات هي إحدى أقدم الطرق لحل مسائل القيم الحدودية الابتدائية وتطبق في المسائل التي تكون فيها :

1– المعادلة التفاضلية الجزئية خطية ومتجانسة (وليست بالضرورة ذات معاملات ثابتة) .

2– الشروط الحدودية من الصيغة .

$$\alpha u_x(0,t) + \beta u(0,t) = 0$$

$$\gamma u_x(1,t) + \delta u(1,t) = 0$$

حيث :

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ثوابت (تسمى الشروط الحدودية في الصيغة أعلاه بشروط حدودية خطية متجانسة) .

ويعود تاريخ هذه الطريقة إلى زمن (جوزيف فوريه) وفي الحقيقة أنـها تدعـى أحيانـاً (بطريقة فوريه) ومن المحتمل أن تكون أكثر الطرق شيوعاً للحل (متى ما أمكن ذلك) .

وبدلاً من ملاحظة كيفية عمل هذه الطريقة بصورة عامة ، نطبقها على مسألة معينة (ثـم نتدارسها بصورة أعم فيما بعد) ، لنتأمل مسألة القيم الحدودية الابتدائيـة (مسـألة الانتشـار) الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

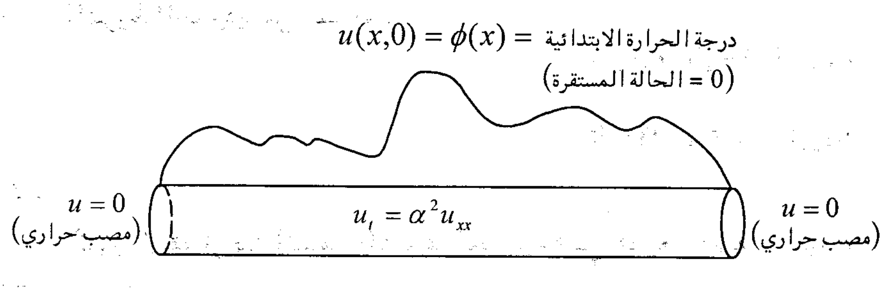
الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad 0 \le x \le 1$$

قبل أن نبدأ بفصل المتغيرات لنتـأمل مسـألتنا هـذه ، لدينـا هنـا ذراع طولـها منتـه ودرجتها حرارتها في نهايتيها مثبتة عند الصفر (يمكن أن تكون مسألة درجة حرارة تفرض فيها درجة الحرارة عند النهايتين ، درجة حرارية قليلة) ، كذلك لدينا بعض القراءات التـي تمثـل



شكل 5–1 مخطط مسألة الانتشار

الشرط الحدودي ، هدفنا من المسألة إيجاد درجة الحرارة $u(x,t)$ في النقاط الأخرى بزمن مناسب ، والآن قبل الابتداء بالطريقة نفسها لنبدأ أولاً بمعاينتها .

2-5 معاينة فصل المتغيرات

إن طريقة فصل المتغيرات تعني بحلول المعادلات التفاضلية الجزئية المبسطة من الصيغة :

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

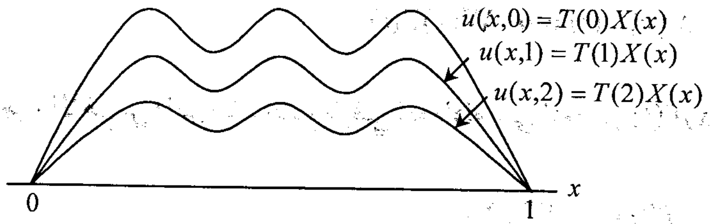
حيث :

$X(x)$ دالة بدلالة x

$T(t)$ دالة بدلالة t

مثل هذه الحلول بسيطة عادة لأن درجة الحرارة $u(x,t)$ من الصيغة أعلاه تحافظ على (الشكل العام) للقيم المختلفة للزمن t (شكل 5-2) .

هذا وأن الفكرة العامة للطريقة هي أنه من الممكن إيجاد عدد غير منته من هذه الحلول للمعادلة التفاضلية الجزئية (والتي تكون ، بنفس الوقت ، محققة الشروط الحدودية ، وهذه الدوال البسيطة $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ تدعى عادة : الحلول الأولية ، وهي تمثل وحدة البناء في مسألتنا هذه ، وعندئذ يوحد الحل الذي نصبو إليه بجمع هذه الحلول الأولية $X_n(x)T_n(t)$ بحيث يصبح المجموع :



شكل 5-2 مخطط $X(x)T(t)$ لقيمة مختلفة للزمن t

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) T_n(t)$$

محققاً الشروط الابتدائية ، ونظراً لأن هذا المجموع يحقق الشروط الحدودية فنكون قد حصلنا على الحل المطلوب للمسألة ، لنتبع الآن ذلك بالتفصيل .

3–5 فصل المتغيرات

الخطوة الأولى : إيجاد الحلول الأولية للمعادلة التفاضلية الجزئية .

يطلب إيجاد الدالة $u(x,t)$ التي تحقق الشروط الأربعة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad 0 \le x \le 1$$

وفي البداية نفرض أن الحل من الصيغة :

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

وبالتعويض عنه في المعادلة التفاضلية الجزئية نحصل على أن :

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t)$$

والآن الجزء الأهم من الطريقة : نقسم طرفي المعادلة على المقدار $\alpha^2 X(x)T(t)$ فنحصل على :

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

فتفصل المتغيرات ، أي أن الطرف الأيمن من المعادلة يعتمد علـى x فقط والطـرف الأيسـر منها يعتمد على t فقط ، وبما أن x,t متغيران مستقلان فإن كلاً من طرفي المعادلة يجـب أن يساوي مقداراً ثابتاً ، وليكن k وعندئذ يكون :

$$\frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X} = k$$

أي أن :

$$T' - k\alpha^2 T = 0$$

$$X'' - kX = 0$$

والآن نجد حل كل من المعادلتين التفاضليتين الاعتياديتين أعلاه ونضرب الحلين لإيجاد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الأصلية (لاحظ أننا حولنا المعادلة التفاضليـة الجزئيـة الأصليـة إلى معادلتين تفاضليتين اعتياديتين) .

ملاحظة مهمة الآن هـي أن نجعـل الثـابت k سالبـاً أو خـلافاً لذلـك لا يقـترب $T(t)$ مـن صفر عندما $t \to \infty$ ، وتمشياً مـع ذلك والممـارسة العمليـة نجعـل $k = -\lambda^2$ حيـث λ لا تساوي صفراً (وعندئذ $-\lambda^2$ يجب أن تكون عدداً سالباً) ، وعندئذ تصبح المعادلتان أعـلاه كما يأتي :

$$T' - \lambda^2 \alpha^2 T = 0$$

$$X'' - \lambda^2 X = 0$$

ولحل المعادلتين أعلاه نلاحظ أن كلاً منهما معادلة اعتيادية ، الأولى مـن المرتبـة الأولـى ، والثانية من المرتبة الثانية ، وعليه يكون حلهما :

$$T(t) = Ae^{-\lambda^2 \alpha^2 t}$$

$$X(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$$

حيث A, B ثوابت اختيارية ، وعليه تكون الدوال :

$$u(x,t) = e^{-\lambda^2\alpha^2 t}\left[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)\right]$$

محققة المعادلة التفاضلية الجزئية الأصلية $u_t = a^2 u_{xx}$ حيث A, B, λ ثوابت اختيارية ، هذا هو برهان المسألة 1 في مجموعة التمارين ، ولحد الآن هناك عدد لا ينتهي من الدوال يحقق المعادلة التفاضلية الجزئية الأصلية .

الخطوة الثانية : (إيجاد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الذي يحقق الشروط الحدودية) .

علمنا أن هناك عدداً لا ينتهي من الحلول للمعادلة التفاضلية الجزئية الأصلية إلا أنها ليست كلها تحقق الشروط الحدودية أو الشروط الابتدائية ، وما علينا الآن سوى اختيار الحلول التي تحقق الشروط الحدودية والشروط الابتدائية من الحلول السابقة ذات الصيغة .

$$e^{-\lambda^2\alpha^2 t}\left[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)\right] \qquad (1)$$

والتي تحقق الشروط الحدودية :

$$u(0,t) = 0$$

$$u(1,t) = 0$$

ولأجل ذلك نعوض حلول (1) في الشروط الحدودية فنحصل على :

$$u(0,t) = Be^{-\lambda^2\alpha^2 t} = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$u(1,t) = Ae^{-\lambda^2\alpha^2 t}\sin\lambda = 0 \Rightarrow \sin\lambda = 0$$

وهذا الشرط الحدودي الأخير يؤدي إلى أن قيم λ هي كل جذور المعادلة $\sin\lambda = 0$ التي تختلف عن الصفر ، وبعبارة أخرى لكي يكون $u(1,t) = 0$ يجب أن يكون :

$$\lambda = \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\ \dots$$

أي أن :

$$\lambda_n = \pm n\pi \qquad n = 1,2,3,...$$

لاحظ أن الشرط الحدودي الأخير يمكن أن يستلزم أن $A = 0$ وفي هذه الحالة الحل في المعادلة (1) يكون صفرياً .

والآن نكون قد أنهينا الخطوة الثانية بإيجاد عدد لا ينتهي من الدوال :

$$u_n(x,t) = A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x) \quad n = 1,2,... \qquad (2)$$

بحيث أن كلاً منها يحقق المعادلة التفاضلية الجزئية الأصلية والشروط الحدودية (لاحظ أن الدوال u_n, u_{-n} يختلفان في الإشارة فقط) ، هذه الدوال تمثل وحدات بناء المسألة وأن الحل المراد سيكون مجموعاً معيناً من هذه الدوال البسيطة ، وهذا المجموع المعين سيعتمد على الشروط الابتدائية ، لاحظ شكل 3 لبيانات هذه الحلول الأولية $u_n(x,t)$.

الخطوة الثالثة : (إيجاد الحلول التي تحقق المعادلة التفاضلية الأصلية والشروط الحدودية والشروط الابتدائية) .

إن الخطوة الأخيرة (والأهم من الناحية الرياضية) هي جمع الحلول الأولية :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x)$$

بحيث (نختار A_n بطريقة ما) يتحقق الشرط الابتدائي :

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) \qquad (3)$$

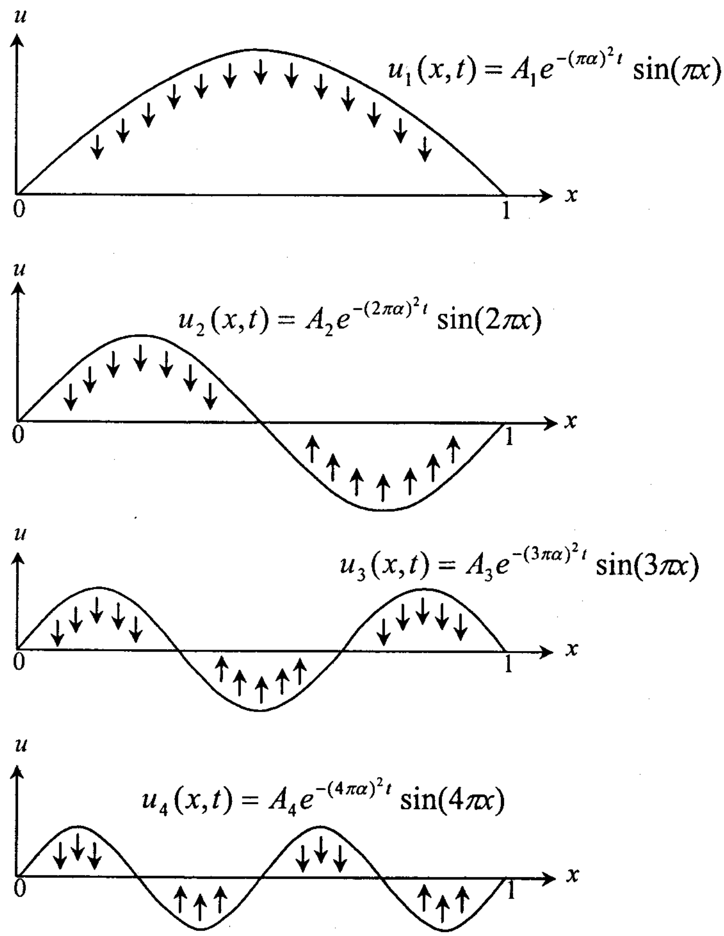
هذه المعادلة تقودنا إلى سؤال مهم أثاره الرياضي الفرنسي (جوزيف فوريه) : هل يمكن التعبير عن درجة الحرارة الابتدائية $\phi(x)$ كمجموع لدوال ابتدائية كما يأتي ؟

$$A_1\sin(\pi x) + A_2\sin(2\pi x) + A_3\sin(3\pi x) + \ ...$$

والجواب على هذا السؤال هو نعم بشرط أن تكون الدالة ϕ مستمرة وتحقق شروط معينة ، وعليه يصبح السؤال الآن هو كيف يمكن إيجاد المعاملات A_n ؟

وهذا في الحقيقة سهل جداً ، باستخدام صفة للدوال :

$$\{\sin(n\pi x); \qquad n = 1,2, \ldots\}$$

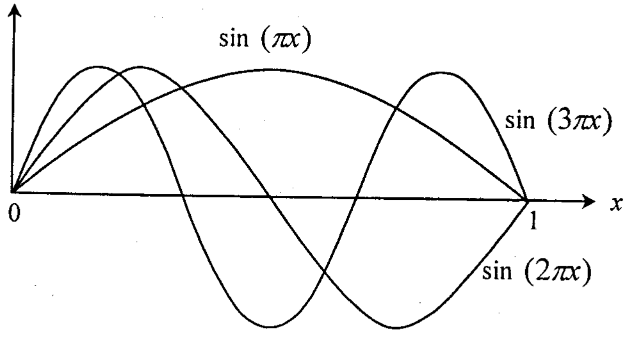


شكل 3-5 الحلول الأولية

تعرف بالتعامد ، أي أن (لاحظ مسألة 2 من تمارين هذا الدرس) الدوال المذكورة متعامدة بعضها على بعض بمعنى أن :

$$\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1/2 & m = n \end{cases}$$

وهذه الصفة تتضح من بيانات هذه الدوال (شكل 5–4) .



شكل 5–4 متتابعة من الدوال المتعامدة

وعليه نحن الآن بصدد حل المعادلة الآتية لإيجاد قيم المعاملات :

$$\phi(x) = A_1 \sin(\pi x) + A_2 \sin(2\pi x) + A_3 \sin(3\pi x) + A_4 \sin(4\pi x) + \ldots A_n$$

نضرب طرفي المعادلة بالمقدار $\sin(m\pi x)$ حيث m عدد صحيح اختياري ثم نكامل من 0 إلى 1 فنحصل على :

$$\int_0^1 \phi(x)\sin(m\pi x)dx = A_m \int_0^1 \sin^2(m\pi x)dx = \frac{1}{2}A_m$$

(لأن كل الحدود الأخرى حيث $n = m$ تكون مساوية صفراً) وعندئذ :

$$A_m = 2\int_0^1 \phi(x)\sin(m\pi x)dx$$

وعندئذ يكون الحل :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x) \qquad (4)$$

حيث المعاملات A_n تعطى من :

$$A_n = 2\int_0^1 \phi(x)\sin(n\pi x)dx \qquad (5)$$

هذا ويمكن أن نبين أن هذا الجواب يحقق كل الشروط الأربعة في المسألة ، هذا ينهي خطوة 3 .

إن كثيراً من الطلبة يشعرون بخيبة الأمل عندما يلاحظون أن هذا الحل بهذه الصعوبة ، وإن عدداً منهم وبصعوبة يعيد دراسة الحل (وهذا غير مشجع أيضاً) ، وسوف لن يجد الطالب صعوبة البتة إذا استغرق وقتاً لازماً لتحليله ، وفي الحقيقة ، كلما يكون الحل معقداً كلما احتوى على معلومات أكثر ، وهنا بعض الملاحظات القليلة التي تساعد على تفسير هذا الحل .

ملاحظات

1- لاحظ أن الاختلاف الفريد بين تعبير فوريه الجيبي للدالة $\phi(x)$ في (3) وفي الحل (4) هو إدخال عامل الزمن :

$$e^{-(n\pi\alpha)^2 t}$$

في كل الحدود ، وعليه إذا كان الشرط الابتدائي ذا مقدار مبسط مثل :

$$\phi(x)=\sin(\pi x)+\frac{1}{2}\sin(3\pi x)$$

فعندئذ يكون الحل كما يأتي :

$$u(x,t)=e^{-(\pi\alpha)^2 t}\sin(\pi x)+\frac{1}{2}e^{-(3\pi\alpha)^2 t}\sin(3\pi x)$$

وفي هذه الحالة إذا عبرنا عن $\phi(x)$ بدلالة سلسلة فورية الجيبية فنحصل على :

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = 0$$

$$A_3 = 1/2$$

$$A_4 = A_5 = \ldots = 0$$

2- يمكن أن نفسر الحل (4) بالطريقة الآتية : نعبر عن درجة الحرارة الابتدائية $\phi(x)$ بدلالة مجموع دوال بسيطة : $A_n \sin(n\pi x)$ ثم نوجد بعد ذلك الحلول الفردية الأولية لكل منها وهي :

$$A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi\alpha);$$

ثم نجمع كل الحلول الفردية الأولية بعد إيجاد قيم A_n التي تحقق الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \phi(x)$$

3- إن حدود الحل :

$$u(x,t) = A_2 e^{-(\pi\alpha)^2 t} \sin(\pi x) + A_2 e^{-(2\pi\alpha)^2 t} \sin(2\pi x) + \ldots$$

هي دوال بدلالة x,t .

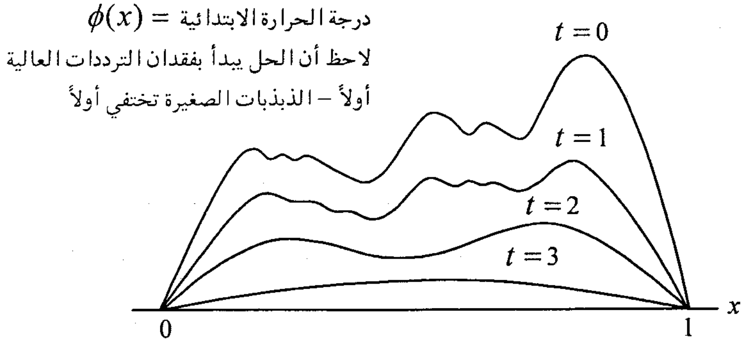
لاحظ أن الحدود في هذه السلسلة تصغر بصورة سريعة جداً بسبب وجود العامل :

$$e^{-(n\pi\alpha)^2 t}$$

وعليه فإن الحل ، على فترات طويلة من الزمن ، يكون مساوياً بصورة تقريبية إلى الحدود :

$$u(x,t) \cong A_1 e^{-(\pi\alpha)^2 t} \sin(\pi x)$$

الذي يمثل شكل منحنى الجيب المتضائل .



شكل 5–5 حدود الرتب العليا تتضائل أسرع في مسائل الانتشار

تمارين

1- أثبت أن :

$$u(x,t)=e^{-\lambda^2\alpha^2 t}\left[A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)\right]$$

يحقق المعادلة التفاضلية الجزئية .

$$u_t=\alpha^2 u_{xx}$$

حيث A,B,λ ثوابت اختيارية .

2- برهن على أن :

$$\int_0^1 \sin(\pi m x)\sin(\pi n x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ 1/2 & m=n\end{cases}$$

تلميح : طبق المتطابقة :

$$\sin(mx)\sin(nx)=\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right]$$

3- جد سلسلة فوريه الجيبية للدالة $\phi(x)=1$ حيث $0\le x\le 1$ ارسم الحدود الثلاثة الأولى .

4- باستخدام نتيجة مسألة 3 ما هو حل مسألة القيم الحدودية الابتدائية الآتية ؟

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t=u_{xx} \qquad 0<x<1$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases}u(0,t)=0\\ u(1,t)=0\end{cases} \qquad 0<t<\infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0)=1 \qquad 0\le x\le 1$$

(لاحظ أن هذه المسألة مستحيلة فيزيائياً نظراً لأننا نسحب درجة الحرارة مـن واحـد إلى صفر بصورة فوريه ، ففـي معظـم المسـائل إذا كـانت القيـم الحدوديـة أصفـاراً فعندئذ تكون درجة الحرارة الابتدائية $\phi(x)$ مساوية صفراً عندما $x = 0$ و $x = 1$) .

5- ما هو حل مسألة 4 إذا تبدل الشرط الابتدائي إلى :

$$u(x,0) = \sin(2\pi x) + \frac{1}{3}\sin(4\pi x) + \frac{1}{5}\sin(6\pi x)$$

6- ماذا سيكون حل مسألة 4 إذا كان الشرط الابتدائي كما يأتي :

$$u(x,0) = x - x^2 \qquad 0 < x < 1$$

الدرس السادس

تحويل الشروط الحدودية غير المتجانسة إلى شروط متجانسة

6-1 الغرض من الدرس

لمعرفة كيفية تحويل مسألة الشروط الحدودية الابتدائية غير المتجانسة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t - \alpha^2 u_{xx} = f(x,t)$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} \alpha_1 u_x(0,t) + \beta_1 u(0,t) = g_1(t) \\ \alpha_2 u_x(L,t) + \beta_2 u(L,t) = g_2(t) \end{cases}$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \phi(x)$$

إلى أخرى ذات شروط حدودية متجانسة مثل :

$$U_t - a^2 U_{xx} = F(x,t)$$

$$\alpha_1 U_x(0,t) + \beta_1 U(0,t) = 0$$

$$\alpha_2 U_x(L,t) + \beta_2 U(L,t) = 0$$

$$U(x,0) = \phi(x)$$

هذه المسألة الأخيرة يمكن أن تحل بالآتي :

1- فصل المتغيرات إذا كانت المعادلة التفاضلية الجزئية الجديدة التي حدثت لتكون متجانسة :

$$\left[F(x,t) = 0\right]$$

2- التحويلات التكاملية والتعبيرات بدلالة الدوال الذاتية عندما :
$F(x,t) \neq 0$

على الرغم من أن طريقة فصل المتغيرات التي مرت في الدرس السابق هي طريقة فعالة جداً وتؤدي إلى حلول مناسبة بدلالة السلاسل إلا أنها لا يمكن أن تطبق في جميع المسائل ، ولكي تكون هذه الطريقة قابلة للتطبيق يجب أن تكون الشروط الحدودية خطية متجانسة ، أي من الصيغة :

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_x(0,t) + \beta_1 u(0,t) = 0 \\ \alpha_2 u_x(L,t) + \beta_2 u(L,t) = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

والغرض من هذا الفصل هو معرفة كيفية تحويل مسائل ذات الشروط الحدودية غير المتجانسة مثل :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t - \alpha^2 u_{xx}$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 u_x(0,t) + \beta_1 u(0,t) = g_1(t) \\ \alpha_2 u_x(L,t) + \beta_2 u(L,t) = g_2(t) \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \phi(x)$$

إلى مسألة ذات شروط حدودية متجانسة ، والمسألة الجديدة تحل بطرائق أخرى (مثل طريقة الدوال الذاتية) ، ونبدأ دراستنا بتحويل مسألة مبسطة للغاية ذات شروط حدودية غير متجانسة إلى أخرى ذات شروط حدودية متجانسة .

2–6 تحويل الشروط الحدودية غير المتجانسة إلى آخر متجانسة

لنتأمل سريان الحرارة في ذراع معزولة بحيث تكون درجتا الحرارة عند نهايتيها ومساويتان k_2 و k_1 أي أن :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < L \qquad 0 < t < \infty$$

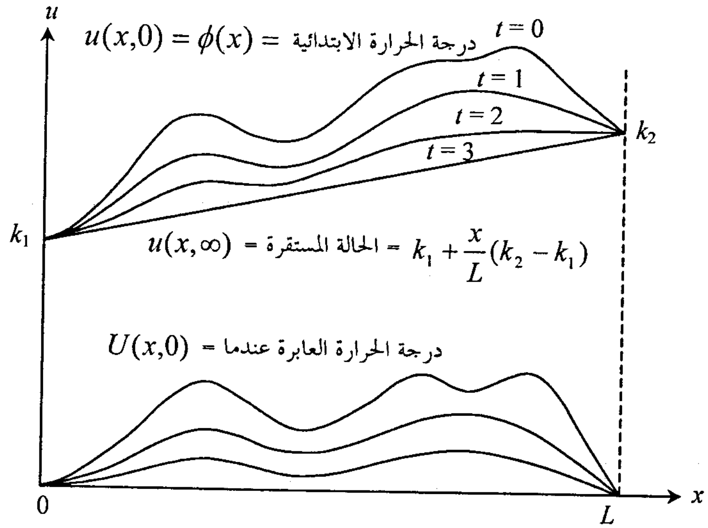
الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = k_1 \\ u(L,t) = k_2 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty \qquad (3)$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad 0 \le x \le L$$

إن الصعوبة هنا تعزى إلى عدم إمكانية حل هذه المسألة بطريقة فصل المتغيرات لأن الشروط الحدودية غير متجانسة ، وعلى الرغم من ذلك فإنه يتضح أن هناك حلاً مستقر الحالة (الحل عندما $t = \infty$) أي أنه يتغير بصورة خطية (في x) بين درجتي الحرارة k_2 و k_1 (شكل 6–1) .



شكل 6–1 حل مسألة (3) لقيم مختلفة من الزمن

وبعبارة أخرى ، يبدو أنه من المناسب اعتبار الحرارة $u(x,t)$ كمجموع جزئين :

$u(x,t)$ = الحالة المستقرة + العابرة

الحل النهائي بعد زمن كبير

جزء الحل الذي يعتمد على الشرط الابتدائي (والذي يقترب من الصفر)

$$=\left[k_1+\frac{x}{L}(k_2-k_1)\right]+U(x,t)$$

وفي هذه الحالة يكون هدفنا إيجاد درجة الحرارة العابرة $U(x,t)$ ، بالتعويض :

$$u(x,t)=\left[k_1+\frac{x}{L}(k_2-k_1)\right]+U(x,t)$$

في المسألة الأصلية (3) نحصل على مسألة جديد بالدالة $U(x,t)$ ، وعندئذ نستطيع حل هذه المسألة الجديدة لإيجاد $U(x,t)$ ثم نضيف لها الحالة المستقرة للحصول على $u(x,t)$ فالمسألة (3) تصبح :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$U_t=\alpha^2U_{xx} \qquad 0<x<L$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} U(0,t)=0 \\ U(L,t)=0 \end{cases} \qquad 0<t<\infty \qquad (4)$$

الشرط الابتدائي :

$$U(x,0)=\phi(x)-\underbrace{\left[k_1+\frac{x}{L}(k_2-k_1)\right]}$$

الشرط الابتدائي الجديد والمعلوم :

$$=\bar{\phi}(x)$$

وهذه المسألة (لحسن الحظ) ذات معادلة تفاضلية جزئية متجانسة وشروط حدودية متجانسة وعليه يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات وفي الحقيقة يكون حلها :

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x/L) \qquad (5)$$

حيث :

$$a_n=\frac{2}{L}\int \bar{\phi}(\xi)\sin(n\pi\xi/L)d\xi$$

هذا بالنسبة إلى الذراع المثبتة درجة حرارة نهايتها ، فما هو الأكثر من ذلك بالنسبة لمشتقات شروط حدودية تتغير تبع الزمن عند النهاية اليمنى والتي هي أقرب للوقع العملي ؟ المفاهيم هنا مشابهة إلى المسألة السابقة مع قليل من الصعوبة .

تأمل المسألة النموذجية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t=\alpha^2 u_{xx} \qquad 0<x<L \qquad 0<t<\infty$$

الشروط الحدودية :

$$\left\{\begin{matrix} u(0,t)=g_1(t) & 0<t<\infty \\ u_x(L,t)+hu(L,t)=g_2(t) & \end{matrix}\right\} \qquad (6)$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0)=\phi(x) \qquad 0\le x\le L$$

لتحويل الشروط الحدودية غير الصفرية إلى أخرى متجانسة (بعد بعض المحاولة والخطأ) نبحث عن حل من الصيغة :

$$u(x,t) = A(t)[1 - x/L] + B(t)[x/L] + U(x,t) \qquad (7)$$

حيث يتم اختيار $B(t)$ و $A(t)$ بحيث تكون الحالة المستقرة :

$$S(x,t) = A(t)[1 - x/L] + B(t)[x/L] \qquad (8)$$

محققة الشروط الحدودية للمسألة ، وبهذه الطريقة تكون المسألة الجديدة ذات شروط حدودية متجانسة ، نعوض عن $S(x,t)$ في الشروط الحدودية :

$$S(0,t) = g_1(t)$$

$$S_x(L,t) + hS(L,t) = g_2(t)$$

فنحصل على معادلتين نحلهما لإيجاد قيم $B(t)$ و $A(t)$ ومن ذلك يتبع أن :

$$A(t) = g_1(t)$$

$$B(t) = \frac{g_1(t) + Lg_2(t)}{1 + Lh} \qquad (9)$$

وعندئذ يكون :

$$u(x,t) = g_1(t)[1 - x/L] + \frac{g_1(t) + Lg_2(t)}{1 + Lh}[x/L] + U(x,t)$$

وإذا عوضنا ذلك في المسألة الأصلية (6) نحصل على المسألة الجديدة بالمتغير $U(x,t)$ (ونترك ذلك للقارئ) الآتية :

معادلة تفاضلية جزئية غير متجانسة :

$$U_t = \alpha^2 U_{xx} - S_t$$

شروط حدودية متجانسة :

$$\begin{cases} U_x(L,t) + hU(L,t) = 0 \\ U(0,t) = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

شروط ابتدائية معلومة :

$$U(x,0) = \phi(x) - S(x,0)$$

والآن لدينا مسألة جديدة ذات شروط حدودية متجانسة (ولكن لسوء الحظ معادلتها التفاضلية الجزئية غير متجانسة) ، ولا يمكن حل هذه المسألة بطريقة فصل المتغيرات ولكن يمكن حلها بطريقة التحويلات التكاملية وطريقة الدوال الذاتية .

ملاحظات

1- كان الهدف من درسنا هذا تحويل مسائل الشروط الحدودية غير المتجانسة إلى مسائل ذات شروط حدودية متجانسة ، وبعد إجراء هذا التحويل ، إذا كانت المعادلة التفاضلية الجزئية الجديدة متجانسة فعندئذ يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات (كما في المثال الأول) ، ومن ناحية أخرى ، إذا كانت المعادلة التفاضلية الجزئية الجديدة غير متجانسة فعندئذ نتبع طريقة أخرى لحلها .

2- أن معظم الشروط الحدودية غير المتجانسة العامة ذوات الصيغة :

$$\alpha_1 u_x(0,t) + \beta_1 u(0,t) = g_1(t)$$

$$\alpha_2 u_x(L,t) + \beta_2 u(L,t) = g_2(t)$$

يمكن تحويلها إلى شروط حدودية متجانسة بطريقة مشابهة لتلك التي اتبعت في المثال الثاني ، وطبعاً فإن المعادلة التفاضلية الجزئية الجديدة تكون غير متجانسة على أكثر احتمال .

1- أن بعض الطرائق لإيجاد الحل لا تتطلب أن تكون الشروط الحدودية متجانسة وعليه فليس من الضروري إجراء أي تحويل في بداية الأمر ، هذا وبعد دراسة تحويل لابلاس سنلاحظ أنه ليس من الضروري أن تكون الشروط الحدودية متجانسة (إلا أن هذه تكون أسهل في بعض الأحيان) .

2- بالنسبة للشروط الحدودية ذوات الصيغة :

$$u(0,t) = g_1(t)$$

$$u(L,t) = g_2(t)$$

يمكن اتباع طريقة المثال الثاني للحصول على التحويل :

$$u(x,t) = \left\{ g_1(t) + \frac{x}{L}\left[g_2(t) - g_1(t)\right] \right\} + U(x,t)$$

تمارين

1- حل مسألة الشروط الحدودية الابتدائية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < L$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = g_1(t) \\ u_x(1,t) + hu(1,t) = 1 \end{cases} \quad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \sin(\pi x) \qquad 0 \le x \le 1$$

بتحويل الشروط الحدودية إلى متجانسة ثم حل المسألة الجديدة ، هل أن الحل يتفق مع تصورك للمسألة .

2- حول الشروط الحدودية للمسألة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < 1$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 1 \\ u_x(1,t) = 1 \end{cases} \quad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = x^2 \qquad 0 \le x \le 1$$

إلى شروط حدودية متجانسة ، كيف يختلف الحل باختلاف الزمن ؟ هل أن الحل يتفق مع تصورك ؟ ما هي الحالة المستقرة للحل ؟ كيف يكون شكل الحل العابر ؟

3- حول الشروط الحدودية للمسألة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < 1$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = g_1(t) \\ u_x(1,t) + hu(1,t) = 1 \end{cases} \quad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \sin(\pi x) \qquad 0 \le x \le 1$$

إلى شروط حدودية متجانسة ، هل أن المعادلة الجديدة متجانسة ؟

الدرس السابع

حل مسائل أكثر صعوبة بطريقة فصل المتغيرات

7–1 الغرض من الدرس

تبيان كيفية حل مسائل أصعب لسريان الحرارة بطريقة فصل المتغيرات ، وهذا الدرس يتألف من عدد من المسائل لتجعل القارئ أكثر معرفة بهذه الطريقة ، ومن المؤمل أن يقدر القارئ استقرائياً المفاهيم المقدمة هنا لكل المسائل المتعلقة به .

نقدم أيضاً مسائل القيم الذاتية ، والتي تعرف باسم مسائل مواجة ليوفيل كما سنناقش بعض خواص هذه المسائل العامة .

إن الغرض من هذا الدرس هو حل مسألة حدودية ابتدائية بطريقة فصل المتغيرات والتي يمكن أن يحد القارئ صعوبة عند محاولته حلها بنفسه ومن المؤمل أن يكن القارئ قادراً على استخدام المفاهيم هنا لحل مسائل أخرى لم ترد في هذا الكتاب .

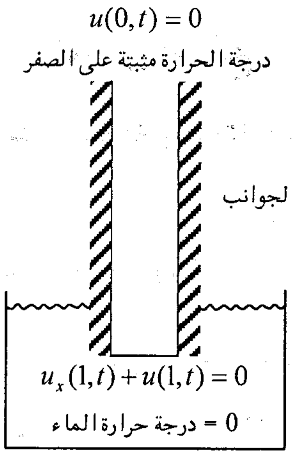
نبدأ بمسألة سريان حرارة ذات بعد واحد أحد شروطها الحدودية يتضمن مشتقات .

7–2 مسألة سريان الحرارة بشروط حدودية تتضمن مشتقات

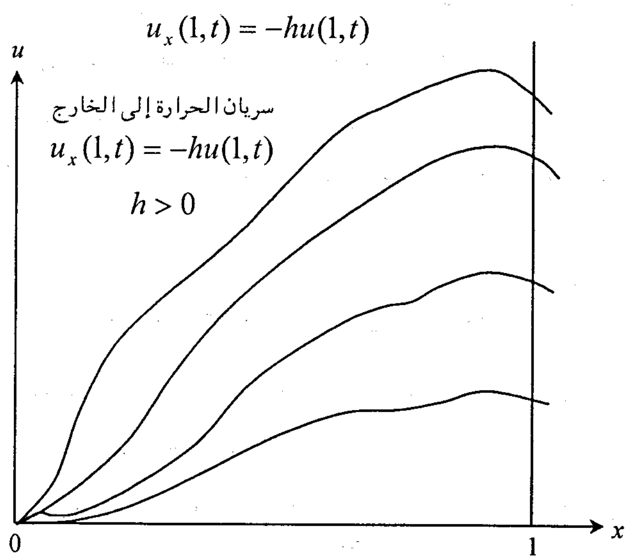
نلاحظ جهازاً يمكن أن يثبت درجة حرارة قمة ذراع على الدرجة $u(0,t) = 0$ ويمكن أيضاً غمر قاعدة الذراع في محلول من الماء مثبتة درجة حرارته على الصفر .

الصفر يشير إلى درجة حرارة مصدر معين ، إن سريان الحرارة الطبيعي (قانون التبريد لنيوتن) ينص على أن الشرط الحدودي عندما $x = 1$ هو :

$$u_x(1,t) = -hu(1,t)$$



شكل 7–1 مخطط مسألة الشروط الحدودية الابتدائية



شكل 7–2 طبيعة المخنيات بالشروط الحدودية

طبيعة المنحنيات بالشروط الحدودية :

$$\begin{Bmatrix} u(0,t) = 0 \\ u_x(1,t) = -hu(1,t) \end{Bmatrix}$$

لنفرض الآن أن درجة الحرارة الابتدائية للذراع هـي $u(x,0) = x$ ولكـن بعـد ذلـك عندما $(t > 0)$ نطبق الشروط الحدودية ، لإيجاد درجة الحرارة التالية يجـب أن نحـل مسـألة القيم الحدودية الابتدائية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u_x(1,t) + hu(1,t) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = x \qquad 0 \le x \le 1$$

ولتطبيق طريقة فصل المتغيرات نتبع الخطوات الآتية :

الخطوة الأولى : (فصل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى معادلتين تفاضليتين اعتياديتين) .

نعوض $u(x,t) = X(x)T(t)$ في المعادلة الأصلية فنحصل على :

$$XT' = \alpha^2 X''T$$

وبالقسمة على $\alpha^2 XT$ يكون :

$$\frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X}$$

بما أن الطرف الأيسر يعتمد على الزمن فقط والطرف الأيمن يعتمـد علـى x فقـط (وبمـا أن x,t مستقلان) فإن كلاً من الطرفين يجب أن يساوي مقداراً ثابتاً وليكن μ ، عندئذ :

$$T' - \mu\alpha^2 T = 0$$
$$X'' - \mu X = 0 \qquad (2)$$

الآن انتهت عملية الفصل .

الخطوة الثانية : (إيجاد ثابت الفصل) .

أولا وقبل كل شيء يجب أن لا يكون μ موجباً وإلا كان $T(t)$ يتزايد أسياً إلى ما لا نهاية (والذي يجعل $u = XT$ يتزايد بدون قيود وهذا مرفوض فيزيائياً) .

وثانياً نفرض أن $\mu = 0$ وفي هذه الحالة يكون :

$$X'' = 0$$

وعليه :

$$X(x) = A + Bx$$

وبما أن الشروط الحدودية للمسألة هي :

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$$

$$u_x(1,t) + hu(1,t) = X'(1)T(t) + hX(1)T(t) = 0$$

ويتبع عندئذ :

$$\begin{matrix} X(0) = 0 & & A = 0 \\ & \Rightarrow & \\ X'(1) + hX(1) = 0 & & B = 0 \end{matrix}$$

والذي يعني أن $u(x,t) = 0$ وبعبارة أخرى $\mu = 0$ يستلزم أن $u = 0$ فنستبعده لأننا نبحث عن حلول غير صفرية وأخيراً إذا كان $\mu < 0$ فنعتبر $\mu = 0\lambda^2$ ونعيد كتابة المعادلتين التفاضليتين الاعتياديتين (2) بالآتي :

$$T' + \lambda^2\alpha^2 T = 0$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

واللتين يكون حلاهما :

$$T(t) = Ae^{-(\lambda\alpha)^2 t}$$

$$X(x) = B\sin(\lambda x) + C\cos(\lambda x)$$

وعليه تكون الدالة :

$$u(x,t) = e^{-(\lambda\alpha)^2 t}\left[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)\right] \qquad (3)$$

حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية لكل قيم B و A و λ (يمكن تحقيق ذلك من قبل القـارئ) ، والآن نجد كم من الدوال تحقق الشروط الحدودية .

$$u(0,t) = 0 \qquad (4)$$

$$u_x(1,t) + hu(1,t) = 0$$

فعند تعويض الحل (3) في الشـروط الحدوديـة (4) نحصـل علـى الشـروط التـي يجـب أن تحققها λ, A, B أي أن :

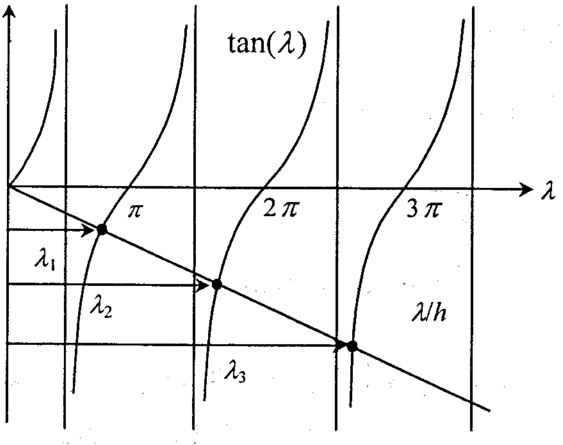
$$Be^{-(\lambda\alpha)^2 t} = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$A\lambda e^{-(\lambda\alpha)^2 t} \cos\lambda + hAe^{-(\lambda\alpha)^2 t} \sin\lambda = 0$$

وبإجراء عمليات جبرية بسيطة على المعادلة الأخيرة هذه نحصل على الشرط المناسـب الـذي تحققه λ ، وهو :

$$\tan\lambda = -\lambda/h$$

وبعبارة أخـرى لإيجـاد λ يجب أن نجد نقاط تقاطع المنحنى $\tan\lambda$ مع المسـتقيم $-\lambda/h$ (شكل 7-3) .



شكل 7-3 بيان يوضح تقاطع $-\lambda/h$ و $\tan(\lambda)$

يمكن حساب القيم ...,λ_1, λ_2 عددياً لكل قيمة معطاة للمتغير h بالحاسبة الإلكترونية وهذه القيم تسمى بالقيم الذاتية لمسألة القيم الحدودية .

$$
\begin{aligned}
&X'' + \lambda^2 X = 0 \\
&X(0) = 0 \\
&X'(1) + hX(1) = 0
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

وبعبارة أخرى ، هي قيم λ التي فيها يكون للمسألة الحدودية حلولاً غير صفرية ، وأن القيم الذاتية λ_n في (5) والتي هي ، في هذه الحالة ، جذور المعادلة $\tan\lambda = \lambda/h$ قد حسبت عددياً (عندما $h = 1$) وأن أول خمسة منها مدرجة في جدول 1 .

إن حلول (5) المناظرة للقيم الذاتية λ_n تسمى بالدوال الذاتية $X_n(x)$ ولهذه المسألة يكون :

$$X_n(X) = \sin(\lambda_n x)$$

جدول 1 جذور $\tan\lambda = -\lambda$

n	λ_n
1	2.02
2	4.91
3	7.98
4	11.08
5	14.20

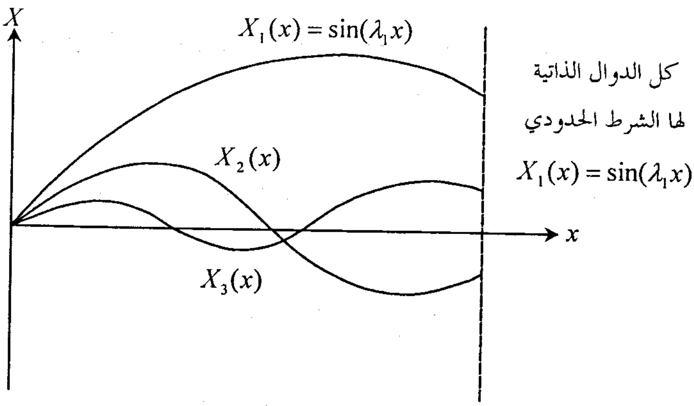
لاحظ شكل 7-4 .

الخطوة الثالثة : (إيجاد الحلول الأولية)

لدينا الآن ما لا نهاية من الدوال (الحلول الأولية) :

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-(\lambda_n\alpha)^2 t}\sin(\lambda_n x)$$

كل منها يحقق المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية .



شكل 7-4 الدوال الذاتية لـ (5) عندما $h = 1$

والخطوة الأخيرة هي جمع كل هذه الدوال معاً (ومجموعها يحقق أيضاً المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية لأن كلا من المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية خطي ومتجانس) بحيث يحقق الشرط الابتدائي عندما $t = 0$ أي أن :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) T_n(t)$$

$$= \sum a_n e^{-(\lambda_n \alpha)^2 t} \sin(\lambda_n x)$$

بحيث يتحقق الشرط الابتدائي $u(x,0) = x$ وبعبارة أخرى .

$$u(x,0) = x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\lambda_n x) \qquad (6)$$

وهذا يقودنا إلى الخطوة الأخيرة .

الخطوة الرابعة : (التعبير عن الشرط الابتدائي كمجموع دوال ذاتية) لإيجاد الثوابت a_n في (6) يجب أن نضرب طرفي المعادلة بالمقدار $\sin(\lambda_m x)$ ونكامل بالنسبة إلى x من 0 إلى 1 ، أي أن :

$$\int_0^1 \xi \sin(\lambda_m \xi) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^1 \sin(\lambda_n \xi) \sin(\lambda_m \xi) d\xi$$

$$= a_m \int_0^1 \sin^2(\lambda_m \xi) d\xi$$

$$= a_m \left(\frac{\lambda_m - \sin \lambda_m \cos \lambda_m}{2\lambda_m} \right)$$

وبعد إيجاد a_m (وتبديل الرمز إلى a_n) نحصل على النتيجة المطلوبة :

$$a_n = \frac{2\lambda_n}{(\lambda_n - \sin\lambda_n \cos\lambda_n)} \int_0^1 \xi \sin(\lambda_n \xi) d\xi \qquad (7)$$

وبعبارة أخرى يكون حل (1) هو :

$$u(x,t) = \sum a_n e^{-(\lambda_n \alpha)^2 t} \sin(\lambda_n x) \qquad (8)$$

حيث تحسب الثوابت a_n بموجب معادلة (7) وفي هذه المسألة تكون قيم الثوابت الخمسة a_n الأولى كما في جدول 2 .

جدول 2 المعاملات a_n في 8

n	a_n
1	0.24
2	0.22
3	-0.03
4	-0.11
5	-0.09

وعليه تكون الحدود الثلاثة لمسألة الشروط الحدودية الابتدائية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

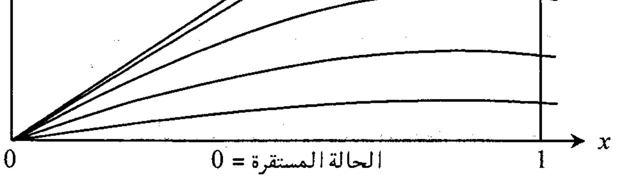
$$\begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u_x(1,t) + n(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty \qquad (9)$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = x \qquad 0 \le x \le 1$$

$$u(x,t) = 0.24e^{-4t}\sin(2x) + 0.22e^{-24t}\sin(4.9x)$$
$$+ 0.03e^{-63.3t}\sin(7.98x) + \ldots$$

ونلاحظ بيان هذا الحل لقيم مختلفة للزمن في شكل 7–5 ، ويمكن أن يسأل القارئ نفسه فيما إذا كان هذا الحل يتفق مع ما يتصور هو وما إذا كان يحقق الشروط الحدودية للمسألة .



شكل 7–5 حل (8–4)

ملاحظات

إن مسألة القيم الذاتية (5) هي حالة خاصة من المسألة العامة الآتية :

المعادلة التفاضلية الاعتيادية :

$$[p(x)y']' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \qquad 0 < x < 1$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0 \\ \alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

وهذه المسألة تعرف باسم مسألة ستورم وليوفيل ، عند حل المعادلات التفاضلية الجزئية بطريقة فصل المتغيرات بالشروط الحدودية المتجانسة ، فإن المعادلة التفاضلية الاعتيادية في $X(x)$ بشروطها الحدودية ستكون دائماً حالة خاصة من مسألة ستورم – ليوفيل ، نلاحظ أن مسألة القيم الذاتية (5) هي حالة خاصة من (10) .

فقد برهن ستورم وليوفيل أنه يفرض شروط معينة على الدوال $r(x)$ و $p(x)$, $p(x)$ فإنه يكون للمسألة (10) ما يأتي :

1- متتابعة لا نهائية من القيم الذاتية :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots \to \infty$$

1- لكل قيمة ذاتية λ_n يوجد حل غير صفري واحد $y_n(x)$ (لا يتضمن مضاعفات ثابتة أخرى للدالة $y_n(x)$) .

2- إذا كان $y_m(x)$ ، $y_n(x)$ دالتين ذاتيتين (مناظرتين للقيمتين $\lambda_n \neq \lambda$ فعندئذ تكونان متعامدتين بالنسبة إلى دالة الوزن $r(x)$ على الفترة المغلقة $(0,1)$ أي أنهما تحققان :

$$\int_0^1 r(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0$$

تمارين

1- حل معادلة سريان الحرارة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u_x(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = x \qquad 0 \le x \le 1$$

بطريقة فصل المتغيرات ، هل يتفق الحل مع تفسيرك للمسألة ؟ ما الحالة المستقرة للحل ؟

2- ما هي القيم الذاتية وما هي الدوال الذاتية لمسألة ستورم – ليوفيل الآتية :

المعادلة التفاضلية الاعتيادية :

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad 0 < x < 1$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X'(1) = 0 \end{cases}$$

ما هي الدوال $p(x)$ ، $q(x)$ ، $r(x)$ لمسألة ستورم ليوفيل العامة بالنسبة للمعادلة أعلاه ؟

3- حل المسألة الآتية بالشروط الحدودية المعطاة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u_x(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = x \qquad 0 \le x \le 1$$

هل الحل يتفق مع تفسيرك للمسألة ؟ ما الحالة المستقرة للحل ؟ وهل لذلك معنى ؟

4- ما القيم الذاتية ؟ وما الدوال الذاتية للمعادلة ؟

المعادلة التفاضلية الاعتيادية :

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad 0 < x < 1$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(1) = 0 \end{cases}$$

الدرس الثامن

تحويل المعادلات الصعبة إلى معادلات أسهل

8-1 الغرض من الدرس

معرفة كيفية تحويل معادلة تفاضلية جزئيـــة بـالمتغير $u(x,t)$ إلـى أخـرى (أسـهل) بالمتغير الجديد $w(x,t)$ بصورة عامة ، يعتمد التحويل أساساً على التفســير الهندسـي وفـي هذا الدرس يتم تحويل كل من المعادلتين التفاضليتين :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u$$

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - v u_x$$

إلى معادلة التوصيل الحراري المتجانسة :

$$w_t = \alpha^2 w_{xx}$$

باتباع التحويلين :

$$u(x,t) = e^{-\beta t} w(x,t)$$

$$u(x,t) = e^{v[x-vt/2]/2\alpha^2} w(x,t)$$

حل المعادلتين الأصليتين (وبالطبع تحول الشروط الحدودية والشرط الابتدائي أيضاً) .

لاحظنا من الفصلين السابقين أن النموذج الوحيد من المعادلات التفاضلية الجزئيـة التي يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات هو :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

وفي الحقيقة أن معادلة التوصيل الحراري هي أبسط المعادلات التفاضليــة مـن نمـط القطع المكافئ والتي يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات ولكنها ليست الوحيدة التي يمن أن

تحل بهذه الطريقة ، وكما ذكرنا سابقاً فإن كل معادلة تفاضلية جزئية خطية متجانسة يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات ، وعلى سبيل المثال ، أن سريان الحرارة في البعدين داخل دائرة يمكن أن يوصف بالمعادلة الآتية :

$$u_t = \alpha^2 \left[u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right]$$

وعلى الرغم من أن هذه المعادلة ذات معاملات متغيرة فإنه يمكن فصلها إلى ثلاث معادلات تفاضلية اعتيادية وفي هذا الفصل يتبين أنه في بعض الأحيان لا يمكن حل المعادلة التفاضلية الجزئية بصورة مباشرة ولكن يمكن ذلك بعد تحويلها إلى أخرى أسهل منها ، وبهذه الطريقة يمكن حل المسألة الأسهل بفصل متغيراتها ، والآن نعطي مثالاً موضحاً لذلك .

8-2 تحويل مسألة سريان الحرارة مع فقدان من الجوانب إلى أخرى معزولة

لنتأمل المسألة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

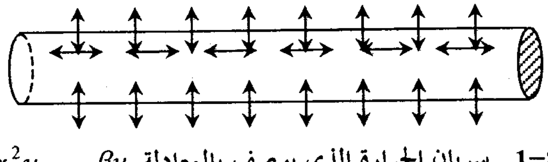
الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty \qquad (1)$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad 0 \le x \le 1$$

حيث يمثل الحد βu – سريان الحرارة عبر الحدود الجانبية (الشكل 8-1) .



شكل 8-1 سريان الحرارة الذي يوصف بالمعادلة $u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u$

الهدف من هـذا الدرس هـو إدخـال (درجة حرارة جيدة) $w(x,t)$ بدلاً من $u(x,t)$ بحيث أن المعـادلة التفـاضلية الجديـدة بدلالـة w تكـون أسهـــل مـــن المعــادلة الأصليـة $u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u$.

وهذا أسلوب مألوف في المعادلات التفاضلية الجزئية ، وأن التحويـل بصـورة عامـة يعتمد أساساً على شعور حسي لسلوك حل المعادلة التفاضلية الجزئية الأصلية ، وعلى ســبيل المثال في المسألة (1) تغير درجة الحرارة $u(x,t)$ عند أي نقطـة x_0 هـو نتيجـة للظـاهرتين الآتيتين :

1- نفوذ الحرارة داخل الذراع (وعزى ذلك إلى $\alpha^2 u_{xx}$) .

2- سريان الحرارة عبر الحد الجانبي (وذلك يعزى إلى $-\beta u$) .

إن المهم هنا هو أنه في حالة عدم وجود انتشار داخل الذراع $(\alpha = 0)$ فعندئذ عند كل نقطة x_0 تتضائل درجة الحرارة أسياً إلى الصفر طبقاً للمعادلة :

$$u(x_0,t) = u(x_0,0)e^{-\beta t}$$

وبموجب هذه الملاحظة ، نتساءل فيما إذا كان من الممكـن تحليـل درجـة الحـرارة $u(x,t)$ لمسألة (1) إلى العاملين :

$$u(x,t) = e^{-\beta t} w(x,t) \qquad (2)$$

وبعبارة أخرى :

درجة الحرارة غير المعزولة = (درجة الحرارة المعزولة) $e^{-\beta t}$ حيث $w(x,t)$ تمثـل درجة الحرارة التي تعزى إلى النفوذ فقط ، لنلاحظ ماذا يحصل إذا عوضنا هذا المقـدار فـي مسألة (1) ، فبعد التبسيط تكون :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$w_t = \alpha^2 w_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} w(0,t) = 0 \\ w(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty \qquad (3)$$

الشرط الابتدائي :

$$w(x,0) = \phi(x) \qquad 0 \le x \le 1$$

وهذه نفس المسألة التي بدأنا بها سوى أنها لا تحتوي على $-\beta u$ ، لذا علينا إيجاد حل مسألة (3) وضربه بالمقدار $e^{-\beta t}$ لإيجاد حل مسألة (1) ، وفي هذه الحالة نكون قد وجدنا حل (3) بطريقة فصل المتغيرات وحصلنا على :

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x) \qquad (4)$$

حيث :

$$a_n = 2\int_0^1 \phi(\xi)\sin(n\pi\xi)d\xi$$

وعليه يكون حل المسألة الأصلية (1) كالآتي :

$$u(x,t) = e^{-\beta t} w(x,t)$$

يحل المثال الأول في الملاحظات الآتية بنفس الأسلوب :

1- حل المسألة :

$$u_t = u_{xx} - u \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(1,t) = 0$$

$$u(x,0) = \sin(\pi x) + 0.5\sin(3\pi x)$$

بما يأتي :

(a) أهمل ، في بداية الأمر ، مقدار الحمل $u-$.

(b) حل المعادلة التفاضلية الجزئية بالشروط الحدودية الابتدائية بدون المقدار $u-$ للحصول على :

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) + 0.5e^{-(3\pi)^2 t}\sin(3\pi x)$$

(c) اضرب هذا الحل بعامل الحمل $e^{-\beta t} = e^{-t}$ للحصول على الحل المطلوب :

$$u(x,t) = e^{-t}\left[e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) + 0.5e^{-(3\pi)^2 t}\sin(3\pi x)\right]$$

2- يمكن حل معادلة النفوذ – الحمل الآتية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - v u_x$$

(حيث v ثابت) أيضاً بتحويلها إلى المعادلة :

$$w_t = \alpha^2 w_{xx}$$

وفي هذه الحالة يكون التحويل كما يأتي :

$$u(x,t) = e^{v(x-vt/2)/2\alpha^2} w(x,t)$$

هذا التحويل أساساً يعمل على إخراج جزء الحل الذي يعزى إلى الوسط المتحرك (العامل الأسي) ، لاحظ أن العامل الأسي يتألف من أس متحرك (يتحرك إلى اليمين بسرعة $v/2$) ، يمكن للقارئ استخدام هذا التحويل لحل بعض المسائل في التمارين الآتية .

تمارين

1- حل معادلة الانتشار الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} - u_x \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = e^{x/2} \qquad 0 \le x \le 1$$

بتحويلها إلى مسألة أسهل ، كيف يظهر الحل ؟ يمكن أن تفسر هذه المسألة باعتبار $u(x,t)$ تركيز وسط متحرك (من اليسار إلى اليمين بسرعة $(v = 1)$ بفرض أن التركيز يبقى مساوياً صفراً في النهايتين (باستخدام مرشحات تعمل على ذلك) وأن التركيز الابتدائي هو $e^{x/2}$ ، هل أن حلك يتفق مع هذا التفسير ؟

2- حل المسألة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} - u + x \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = e^{x/2} \qquad 0 \le x \le 1$$

باتباع ما يأتي :

(a) تحويل الشروط الحدودية غير المتجانسة إلى أخرى متجانسة .

(b) تحويل المعادلة إلى أخرى غير حاوية على المقدار $-u$.

(c) حل المسألة الناتجة .

3- حل المسألة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} - u \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \sin(\pi x) \qquad 0 \le x \le 1$$

بفصل المتغيرات مباشرة وبدون إجراء تحويلات ، هل أن الحل يتفق مع الحل الذي حصلنا عليه سابقاً باتباع التحويل الآتي ؟

$$u(x,t) = e^{-t} w(x,t)$$

الدرس التاسع

حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير المتجانسة بطريقة الدوال الذاتية

9–1 الغرض من الدرس

معرفة كيفية حل مسألة القيم الحدودية الابتدائية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} \alpha_1 u_x(0,t) + \beta_1 u(0,t) = 0 \\ \alpha_2 u_x(1,t) + \beta_2 u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad 0 \le x \le 1$$

يمكن حل المعادلة التفاضلية الجزئية الغير متجانسة بإيجاد سلسلة ذات صيغة :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

حيث $X_n(x)$ هي الدوال الذاتية التي نحصل عليها من حل المعادلة التفاضلية الجزئية المتجانسة المناظرة للمسألة الأولى الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases}\alpha_1 u_x(0,t)+\beta_1 u(0,t)=0\\ \alpha_2 u_x(1,t)+\beta_2 u(1,t)=0\end{cases} \qquad 0<t<\infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0)=\phi(x) \qquad 0\le x\le 1$$

و $T_n(t)$ هي الدوال التي يمكن الحصول عليها من حل متتابعة من المعادلات التفاضلية الاعتيادية .

ناقشنا في الدرس السادس كيف يمكن إجراء تحويلات لتحويل الشروط الحدودية غير المتجانسة إلى أخرى متجانسة ، ولسوء الحظ بقيت المعادلة التفاضلية الجزئية غير متجانسة بهذه الطريقة وبقيت معنا المسألة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t=\alpha^2 u_{xx}+f(x,t) \qquad 0<x<1 \qquad 0<t<\infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases}\alpha_1 u_x(0,t)+\beta_1 u(0,t)=0\\ \alpha_2 u_x(1,t)+\beta_2 u(1,t)=0\end{cases} \qquad 0<t<\infty \qquad (1)$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0)=\phi(x) \qquad 0\le x\le 1$$

والغرض من هذا الفصل هو حل المسلة بطريقة مشابهة لطريقة تغيير الوسائط في حالة المعادلات التفاضلية الاعتيادية وتعرف طريقتنا هذه بطريقة الدوال الذاتية ، وفكرة هذه الطريقة بسيطة تماماً ، فبما أن حل (1) عندما $f(x,t)=0$ (المسألة المتجانسة المناظرة لها) هو :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n\alpha)^2 t} X_n(x)$$

حيث $X_n(x)$ الدوال الذاتية لمسألة ستورم – ليوفيل الآتية :

$$\begin{aligned} &X''+\lambda^2 X = 0 \\ &\alpha_1 X'(0)+\beta_1 X(0) = 0 \\ &\alpha_2 X'(1)+\beta_2 X(1) = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

فإننا نتساءل فيما إذا كان (1) حل المسألة غير المتجانسة يمكن كتابته بصيغة اعم نسبياً بالآتي :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

إن السبب لهذا التخمين يدعو إلى الاهتمام به فيزيائياً بمقدار ما يكون المصدر الحراري $f(x,t)$ داخل الذراع معطياً لمركبة زمن جديدة وليس عامل التضاؤل :

$$e^{-(\lambda_n \alpha)^2 t}$$

كما الحال عندما كان المصدر الحراري في المسألة هو الشرط الابتدائي ولتوضيح هذه الطريقة سنطبقها على مسألة بسيطة لكي لا تكون تفصيلاتها معقدة .

2–9 الحل بطريقة الدوال الذاتية

لاحظ المسألة غير المتجانسة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad 0<x<1 \qquad 0<t<\infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases} \qquad 0<t<\infty \qquad (3)$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0)=\phi(x) \qquad 0\le x\le 1$$

لحل هذه المسألة نجزئ الطريقة إلى الخطوات الآتية :

الخطوة الأولى : أن الفكرة الأساسية لهذه الطريقة هي تجزئة المصدر الحراري $f(x,t)$ إلى مركبات بسيطة :

$$f(x,t) = f_1(t)X_1(x) + f_2(t)X_2(x) + ... + f_n(t)X_n(x) + ...$$

ولكل مركبة $f_n(t)X_n(x)$ نجد $u_n(x,t)$ المناظر لها ، ثم يكون حل المسألة مجمـوع هـذه الحلول :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

هذا وإن عملية تجزئة $f(x,t)$ إلى المركبات $f_n(t)X_n(x)$ هي من المسائل العظمى ، وعندئذ تكون المعاملات $X_n(x)$ في هذه المسـألة هـي نفسـها المتجـهات الذاتيـة لمعـادلات سـتورم – ليوفيل التي نحصل عليها من المسألة المتجانسة المناظرة للمسألة (3) بفصل المتغيرات ، أي :

$$\begin{aligned} &u_t = \alpha^2 u_{xx} \\ &u(0,t) = 0 \\ &u(1,t) = 0 \\ &u(x,0) = \phi(x) \end{aligned} \qquad (4)$$

لاحظ هنا أن $f(x,t) = 0$ في هذه الحالة تكون مسألة ستورم ليوفيل التي نحصل عليها بفصل المتغيرات هي :

$$\begin{aligned} &X'' + \lambda^2 X = 0 \\ &X(0) = 0 \\ &X(1) = 0 \end{aligned}$$

وعندئذ تكون $X_n(x)$ الآتي :

$$X_n(x) = \sin(n\pi x) \qquad n = 1,2,...$$

وعليه تكون تجزئة المصدر الحراري من الصيغة :

$$f(x,t) = f_1(t)\sin(\pi x) + f_2(t)\sin(2\pi x) + ... + f_n(t)\sin(n\pi x) + ... \quad (5)$$

وأخيراً لإيجاد الدالة $f_n(t)$ يكفي أن نضرب طرفي المعادلة بالمقدار $\sin(m\pi x)$ ونكامل من 0 إلى 1 (بالنسبة إلى x) فنحصل على :

$$\int_0^1 f(x,t)\sin(m\pi x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)dx$$

$$= \frac{1}{2} f_m(t)$$

وبتبديل (m إلى n) يكون :

$$f_n(t) = 2\int_0^1 f(x,t)\sin(n\pi x)dx \qquad (6)$$

وهذه تعطينا معادلة المعاملات $f_n(t)$ بدلالة المصدر الحراري $f(x,t)$.

الخطوة الثانية : (إيجاد الاستجابة $u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x)$ للمركبة $(f_n(t)X_n(x))$

نعوض عن $f(x,t)$ بتجزئته :

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin(n\pi x)$$

ونحاول إيجاد $T_n(t)$ فنحصل على حل المسألة :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(n\pi x)$$

إن تعويض $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(n\pi x)$ في المنظومة :

$$u_t=\alpha^2 u_{xx}+\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin(n\pi x)$$

$$u(0,t)=0$$

$$u(1,t)=0$$

$$u(x,0)=\phi(x)$$

يعطينا :

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)\sin(n\pi x)=-\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)^2 T_n(t)\sin(n\pi x)+\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin(n\pi x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)\sin 0=0 \qquad \text{(لا تعني سوى } 0=0\text{)}$$

(7)

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(n\pi)=0 \qquad \text{(لا تعني سوى } 0=0\text{)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin(n\pi x)=\phi(x)$$

وبإعادة كتابة المعادلة التفاضلية الجزئية والشرط الابتدائي :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+(n\pi\alpha)^2 T_n-f_n(t)\right]\sin(n\pi x)=0$$

الشرط الابتدائي :

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin(n\pi x)=\phi(x)$$

نلاحظ أن $T_n(t)$ تحقق مسألة القيم الابتدائية :

$$T_n' + (n\pi\alpha)^2 T_n = f_n(t)$$

$$T_n(0) = 2\int_0^1 \phi(\xi)\sin(n\pi\xi)d\xi = a_n \tag{8}$$

هذه المعادلة التفاضلية هي إحدى المعادلات التي يمكن حلها بصورة أسهل (باستخدام عامل التكامل) وهذا الحل هو :

$$T_n(t) = a_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} + \int_0^1 e^{-(n\pi\alpha)^2(t-\tau)} f_n(\tau)d\tau \tag{9}$$

لذا فإن حل مسألة (3) هو :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(n\pi x) \tag{10}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n \underbrace{e^{-(n\pi\alpha)^2 t}}_{\substack{\text{الجزء المرحل}\\ \text{(بسبب الشرط الابتدائي)}}} \sin(n\pi x)\Big] + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sin(n\pi x)\int_0^1 \underbrace{e^{-(n\pi\alpha)^2(t-\tau)}}_{\substack{\text{الحالة المستقرة}\\ \text{(بسبب الطرف الأيمن } f(x,t)\text{)}}} f_n(\tau)d\tau\Big]$$

يمكن أن نرى من هذا الحل أن الاستجابة في درجة الحرارة يعزى إلى جزئين :

الأول : بسبب الشرط الابتدائي .

الثاني : بسبب المصدر الحراري $f(x,t)$.

إن تعبير ((الحالة المستقرة)) ليس أحسن التعابير التي تصف الجزء الثاني لأنه لا يؤدي بالضرورة إلى السكون (فهو يمكن أن يؤدي إلى حالة مستقرة دورية إذا كانت $f(x,t)$ دورية بدلالة t) ، وهذا يكمل المسألة ، وقبل التوقف سنبين كيفية تطبيق هذه الطريقة خلال مثال نموذجي في الدرس المقبل .

تمارين

1- حل المسألة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} + \sin(\pi x) + \sin(2\pi x) \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = (0) \qquad 0 \le x \le 1$$

الدرس العاشر
حل المسألة بطريقة الدوال الذاتية

10–1 الغرض من الدرس

حل المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام طريقة الدوال الذاتية .

تأمل المسألة البسيطة الآتية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + \sin(3\pi x) \qquad 0 < x < 1$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty \qquad (1)$$

$$u(x,0) = \sin(\pi x) \qquad 0 \le x \le 1$$

هدفنا هو حساب المعاملات $T_n(t)$ في السلسلة :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi x)$$

(الدوال الذاتية $X_n(x)$ بقيت على حالها في هذه المسالة) ، إذا عوضنا عن $u(x,t)$ بالمسألة سنحصل على معادلة تفاضلية اعتيادية للدوال $T_n(t)$ ، وفي الحقيقة سنحصل على :

$$T_n' + (n\pi\alpha)^2 T_n = f_n(t) = 2\int_0^1 \sin(3\pi m)\sin(n\pi x)dx = \begin{cases} 1 & n = 3 \\ 0 & n \ne 3 \end{cases}$$

$$T_n(0) = 2\int \sin(\pi\xi)\sin(n\pi\xi)d\xi = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \ne 1 \end{cases}$$

وبكتابة هذه المعادلات عندما $n = 1, 2, \ldots$ نلاحظ أن :

$$(n=1) \qquad \left.\begin{array}{l} T_1' + (\pi\alpha)^2 T_1 = 0 \\ T_1(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow T_1(t) = e^{-(\pi\alpha)^2 t}$$

$$(n=2) \qquad \left.\begin{array}{l} T_2' + (2\pi\alpha)^2 T_2 = 0 \\ T_2(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow T_2(t) = 0$$

$$(n=3) \qquad \left.\begin{array}{l} T_3' + (3\pi\alpha)^2 T_3 = 1 \\ T_3(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow T_3(t) = \frac{1}{(3\pi\alpha)^2}\left[1 - e^{-(3\pi\alpha)^2 t}\right]$$

$$(n \geq 4) \qquad \left.\begin{array}{l} T_n' + (n\pi\alpha)^2 T_n = 0 \\ T_n(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow T_n(t) = 0$$

وعليه يكون حل المسألة :

$$u(x,t) = e^{-(\pi\alpha)^2 t}\sin(\pi x) + \frac{1}{(3\pi\alpha)^2}\left[1 - e^{-(3\pi\alpha)^2 t}\right]\sin(3\pi x) \qquad (2)$$

المرحل
(بسبب الشروط الابتدائية)

الحالة المستقرة
(بسبب الطرف الأيمن للمعادلة التفاضلية الجزئية)

ملاحظات

1- إن طريقة الدوال الذاتية هي إحدى الطرق الفعالة جداً لحل المعادلات التفاضلية الجزئية غير المتجانسة ، وبعد أن ندرس التحويلات التكاملية سنجد أن هناك طرائق أخرى لحل مثل هذا النوع من المسائل .

2- إن الدوال الذاتية $X_n(x)$ تتغير من مسألة إلى أخرى وتعتمد على المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية ، وسيلاحظ القارئ من مسألة 4 في تمارين الدرس المقبل كيفية إيجاد الدوال الذاتية $X_n(x)$.

3- إذا تذكر القارئ نظرية المعادلات التفاضلية الاعتيادية فإنه سيلاحظ أن حلول المعادلات المناظرة للحدود غير المتجانسة مثل :

$$P_n(x)e^{\alpha x}\begin{cases}\sin(\beta x)\\ \cos(\beta x)\end{cases}$$

يمكن إيجادها بطريقة حساب المعاملات غير المعينة ، ذلك صحيح هنا أيضاً ، ويمكن حل مسألة (1) بالطريقة نفسها .

تمارين

1- حل المسألة الآتية كما في معادلة (2) :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} + \sin(3\pi x) \qquad 0 < x < 1$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \sin(\pi x) \qquad 0 \le x \le 1$$

هل أن الحل يتفق مع ما تعرفه بديهيا ؟ كيف يكون شكل الحل ؟

2- حل المسألة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} + \sin(\pi x) \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = (1) \qquad 0 \le x \le 1$$

بطريقة الدوال الذاتية حيث λ_1 هو الجذر الأول للمعادلة $\tan\lambda = -\lambda$ ما هي الدوال الذاتية $X_n(x)$ لهذه المسألة ؟

3- حل المسألة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = \cos t \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = x \qquad 0 \le x \le 1$$

(a) بتحويلها إلى أخرى ذات شروط حدودية متجانسة .

(b) ثم حل المسألة الناتجة بطريقة الدوال الذاتية .

الدرس الحادي عشر

التحويلات التكاملية (التحويلات الجيبية والتحويلات الجيبتمامية)

11–1 الغرض من الدرس

سنقوم بدراسة هذا الموضوع لتقديم مفهوم التحويلات التكاملية ومعرفة كيفية تحويل المعادلات التفاضلية الجزئية ذات n من المتغيرات إلى أخرى ذات $n-1$ من التغيرات.

كما سنثبت أن هذه التحويلات يمكن أن تفسر كتجزئة إدخال المسألة إلى أجزاء بسيطة (تحليل التردد) وإيجاد الحل لكل جزء ثم جمع هذه الحلول.

وملخص القول أن التحويلات التكاملية تغير التفاضل إلى ضرب وعليه تتحول بعض المشتقات الجزئية إلى مقادير جبرية سنعرف أيضاً التحويلات الجيبية والتحويلات (الجيبتمامية) ونستخدمها لحل مسألة نفوذ لا نهائي، والحل مهم لكونه يتضمن دالة الخطأ – المتمم.

يعرف التحويل التكاملي بأنه تحويل يقرن لكل دالة $f(t)$ دالة جديدة $F(s)$ بموجب صيغة معينة مثل:

$$F(s)=\int_{A}^{B}K(s,t)f(t)dt$$

لاحظ أننا ابتدأنا بدالة بدلالة t وانتهينا بدالة بدلالة s ، الدالة $K(s,t)$ تسمى بنواة التحويل وهي الجزء أو العنصر الأكبر الذي يميز تحويلاً عن آخر، وتؤخذ بحيث يحقق التحويل خواصاً معينة مطلوبة، وأن مدى التكامل A,B يتغيران أيضاً من تحويل إلى آخر.

والفلسفة العامة التي تكمن وراء التحويلات التكاملية هي أنها تستبعد المشتقات الجزئية بالنسبة إلى أحد المتغيرات وعليه فإن المعادلة الجديدة ذات عدد من المتغيرات يقل واحداً عن عدد متغيرات المعادلة الأصلية، وعلى سبيل المثال إذا طبقنا تحويلاً على المعادلة التفاضلية الجزئية:

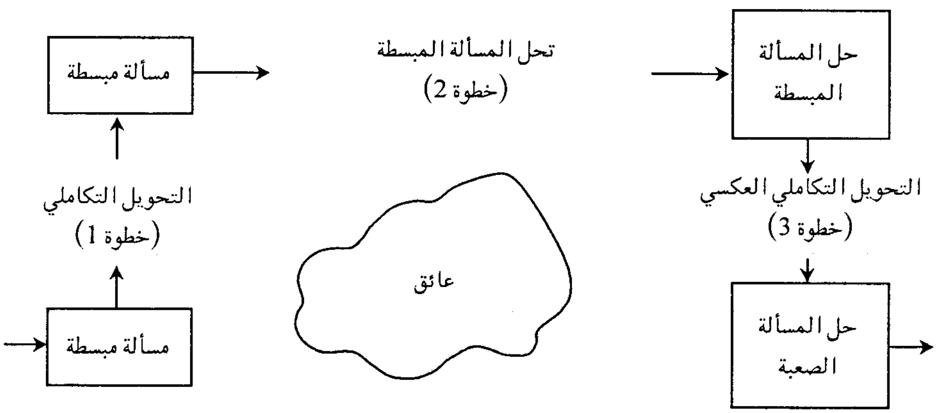
$$u_t = u_{xx}$$

لغرض حذف المشتقة بالنسبة للزمن فسنحصل على معادلة تفاضلية اعتيادية بدلالة x ، ومن ناحية أخرى إذا أخذنا المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

وطبقاً لتحويل فوريه إلى المتغير x فإننا سنحذف المشتقة u_{xx} ونحصل على معادلة تفاضلية جزئية جديدة بالمتغيرين y, z فقط ، وبالطبع نستطيع تطبيق تحويل فوريه مرة أخرى لحذف متغير آخر (ونحصل على معادلة تفاضلية اعتيادية بالمتغير الأخير) ، وبعبارة أخرى فإن التحويل التكاملي يحول المسائل إلى أخرى أسهل ، والمسألة المحولة عندئذ تحل ويتم إيجاد حل المسألة الأصلية بإيجاد التحويل العكسي لحل المسألة المحولة ، ويمكن توضيح هذه الخطة العامة في شكل 11−1 .

من (شكل 11−1) نلاحظ أن لكل تحويل تكاملي يوجد تحويل عكسي الذي يعيد الدالة الأصلية من تحويلها ، التحويل والتحويل العكسي معاً يسميان بزوج التحويل ، وفي جدول 1 ندرج عدداً من أزواج التحويلات المألوفة التي سنطبقها في حل المعادلة التفاضلية الجزئية .



شكل 11−1 الفلسفة العامة للتحويلات

جدول 1 بعض أزواج التحويلات المألوفة

	أزواج التحويلات	
1.	$\mathcal{F}_s[f] = F(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^x f(t)\sin(\omega t)dt$	(تحويل فوريه الجيبي)
	$\mathcal{F}_s^{-1}[F] = f(t) = \int_0^x F(\omega)\sin(\omega t)d\omega$	(التحويل العكسي الجيبي)
2.	$\mathcal{F}_c[f] = F(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^x f(t)\cos(\omega t)dt$	(تحويل فوريه الجيبتمامي)
	$\mathcal{F}_c^{-1}[F] = f(t) = \int_0^x F(\omega)\cos(\omega t)d\omega$	(التحويل العكسي الجيبتمامي)
3.	$\mathcal{F}[f] = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^x f(x)e^{-\iota\omega x}dx$	(تحويل فوريه)
	$\mathcal{F}^{-1}[F] = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^x F(\omega)e^{-\iota\omega x}dx$	(تحويل فوريه العكسي)
4.	$\mathcal{F}_s[f] = S_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin(n\pi x/L)dt$	(التحويل الجيبي المنتهي)
	$\mathcal{F}_s^{-1}[F_n] = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n\sin(n\pi x/L)$	(التحويل العكسي الجيبي المنتهي)
5.	$\mathcal{F}_c[f] = C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos(n\pi x/L)dt$	(التحويل الجيبتممي المنتهي)
	$\mathcal{F}_c^{-1}[F_n] = f(x) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos(n\pi x/L)$	(التحويل العكسي الجيبتمامي المنتهي)
6.	$\mathcal{L}[f] = F(s) = \int_0^x f(t)e^{-st}dt$	(تحويل لابلاس)
	$\mathcal{L}^{-1}[F] = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\iota x}^{c+\iota x} F(s)e^{xt}dx$	(التحويل العكسي للابلاس)
7.	$H[f] = F_n(\xi) = \int_0^x rJ_n(\xi r)f(r)dr$	(تحويل هنكل)
	$H^{-1}[F_n] = f(r)\int_0^x J_n(\xi r)F_n(\xi)d\xi$	(التحويل العكسي لهنكل)

لاحظ أن في هذه التحويلات لدينا عدد من الرموز ، فمثلاً ، في حالة تحويل لابلاس ، الرمز $\mathcal{L}[f]$ يرمز إلى أننا أخذنا هذا التحويل للدالة f في الوقت الذي يرمز $F(s)$ إلى دالة بالمتغير s .

وفي هذا الدرس سوف لن نحاول دراسة كل أزواج التحويلات هذه ، بل دراسة التحويلين الجيبي والجيبتمامي (2-1) وفي الفصول القادمة سندرس عدداً من هذه التحويلات ، الإجابة على عدد من الأسئلة حول العلاقة بين هذه التحويلات عند تطبيقاتها ، ومزايا ومواطن الضعف لكل منها ستأتي في حينها ، ومع ذلك فقبل الابتداء بدراسة التحويلات التكاملية من المفيد أن ندرس ما يسمى بطيف الدالة (أو التحليل الطيفي للدالة) .

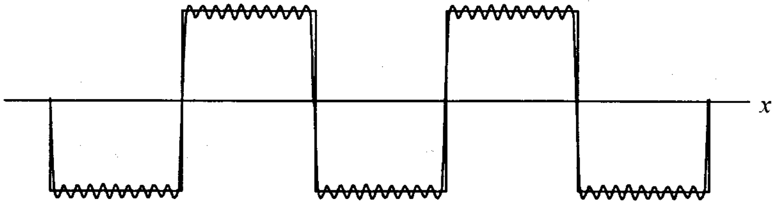
2-10 طيف الدالة

إن مفهومي التحويل التكاملي للدالة وطيف الدالة متقاربان جداً ، وفي الحقيقة ، أن التحويل التكاملي يمكن اعتباره كتحليل دالة إلى مركبات طيف معين ، وكيفية عمل التحويل للتحليل تختلف من تحويل إلى آخر إلا أن الدالة تتحلل إلى شيء على كل حال .

وعلى سبيل المثال ، لنتأمل تحليل دالة دورية $f(x)$ بدلالة الجيوب وجيوب التمام (سلاسل فوريه) كما يأتي :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\right]$$

لاحظ شكل 11-2 .



شكل 11-2 موجة مربعة مقربة بدلالة الجيوب وجيوب التمام

هنا B_n و A_n تمثل المقدار من الدالة $f(x)$ الذي يجمع بدلالة $\cos(nx)$ ، $\sin(nx)$ على التوالي ، بينما يقيس الجذر التربيعي :

$$\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

(الذي يسمى بطيف الدالة)

المقدار من $f(x)$ الذي تردده n .

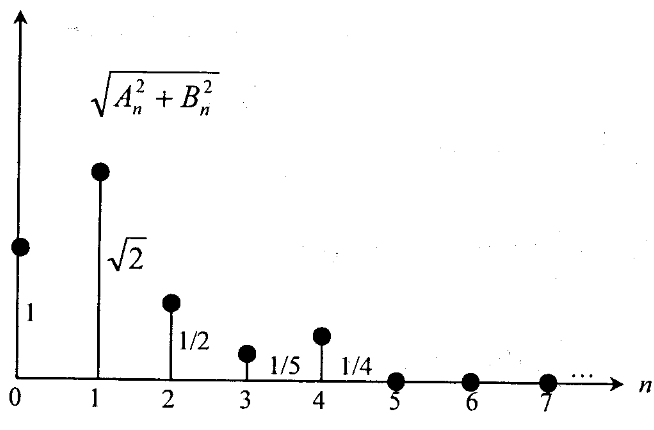
فمثلاً إذا كانت الدالة $f(x)$ مجموعاً بسيطاً من الجيوب وجيوب التمام ، الآتي :

$$f(x) = 1 + \sin x + \frac{1}{5}\sin(3x) + \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos(4x)$$

فعندئذ يكون طيف هذه الدالة (متقطعاً) كما هو مبين في شكل 11-3 .

بقراءة قيم $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ يتم تعيين مركبة $f(x)$ ذات تردد n .

يمكن تحليل الدوال الدورية إلى سلاسل لا نهائية (لها أطياف متقطعة) بينما إذا كانت الدوال غير دورية فإنها تمثل بالأطياف المستمرة للقيم (وبالطبع إذا كانت الدالة معرفة على فترة



شكل 11-3 الطيف المتقطع للدالة $f(x)$

منتهية فقط فيمكن توسيعها خارج الفترة بطريقة دورية وعندئـذ يمكـن الحصـول علـى سلسـلة فوريه للدالة داخل الفترة) ، فمثلاً ، على الرغم من أن دالة لا دورية $f(x)$ لا يمكـن تمثيلـها بسلسلة لا نهائية بدلالة الجيوب وجيوب التمام فمن الممكن أن نعمل على كتابتـها فـي صـورة مناظرة مستمر لسلسلة فوريه أي .

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[C(\omega)\cos(\omega x)+S(\omega)\sin(\omega x)\right]d\omega$$

حيث أن الدالتين $C(\omega)$ و $S(\omega)$ تعينان المركبة الجيبية والجيبتمامية في الدالة $f(x)$ وأن :

$$\sqrt{S^2(\omega)+C^2(\omega)}$$

تعين مركبة $f(x)$ ذات تردد ω وتسمى بطيف (طيف مستمر) الدالة $f(x)$.

مع هذا التفسير البديـهي لطيـف الدالـة سـنتمكن مـن الإحاطـة علمـا بـالتحويلات التكاملية ، والخطوة الأولى ستكون سرد عدد قليل من صفات هذه التحويـلات التـي يجعلـها فعالة .

11-3 التحويلات الجيبية والجيبتمامية للمشتقات

(تبرهن بطريقة التكامل بالتجزئة) :

1. $\mathcal{F}_s[f']=-\omega\ \mathcal{F}_c[f]$

2. $\mathcal{F}_s[f'']=\dfrac{2}{\pi}\omega f(0)-\omega^2\ \mathcal{F}_s[f]$

3. $\mathcal{F}_c[f']=\dfrac{2}{\pi}f(0)+\omega\ \mathcal{F}_s[f]$ (1)

4. $\mathcal{F}_c[f'']=-\dfrac{-2}{\pi}f'(0)-\omega^2\ \mathcal{F}_c[f]$

هناك عدد من التحويلات الجيبية والجيبتمامية الأخرى ومعكوساتها يمكن ملاحظتها في الجداول المذكورة في نهايتات الدروس ، سنبين الآن كيفية حل مسألة قيم حدودية ابتدائية مهمة باستخدام التحويل الجيبي (في الدرس المقبل) .

تمارين

1- برهن على صحة المتطابقات (1) .

2- باستخدام التحويل الجيبي أو التحويل الجيبتمامي حل المسألة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < \infty$$

الشرط الحدودي :

$$u_x(0,t) = 0 \qquad 0 < t < \infty$$

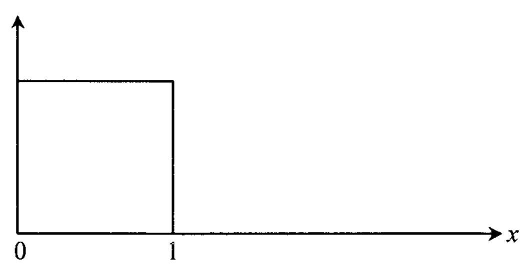
الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = H(1-x) \qquad 0 \le x < \infty$$

حيث : $H(x)$ هي دالة هيفسايد :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \le x \end{cases}$$

وبعبارة أخرى فإن الشرط الابتدائي على الشكل الآتي :



كيف يكون بيان الحل لقيم مختلفة من الزمن ؟

الدرس الثاني عشر

حل مسألة الانتشار اللانهائي بالتحويل الجيبي

12–1 الغرض من الدرس

حل المعادلات التفاضلية الجزئية عن طريق مسألة الانتشار اللانهائي حيث أن مسألة الانتشار التي تهمنا هي :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الحدودي :

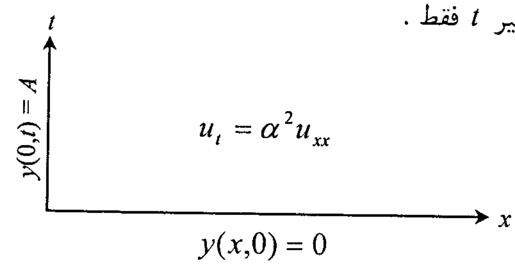
$$u(0,t) = A \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = 0 \qquad 0 \le x < \infty$$

لحل هذه المسألة نجزؤها إلى ثلاث خطوات بسيطة :

الخطوة الأولى : تبديل المتغير x باستخدام تحويل فوريه الجيبي بحيث نحصل على معادلة تفاضلية اعتيادية بالمتغير t فقط .



شكل 12–1 مسألة نفوذ في وسط نصف لا نهائي

فنبدأ بتحويل طرفي المعادلة التفاضلية الجزئية وذلك كما يأتي :

$$\mathcal{F}_s[u_t] = \alpha^2 \ \mathcal{F}_s[u_{xx}]$$

للناقش كلا من الحدين على حدة .

$\mathcal{F}_s[u_t]$ المشتقة الجزئية u_t في هذه المسألة هي ما نسميه بالمشتقة الحفيظة لأن التحويل بالنسبة إلى x ، وفي هذه الحالة ، يمكن القول أن :

$$\mathcal{F}_s[u_t] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty u_t(x,t)\sin(\omega x)dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty u(x,t)\sin(\omega x)dx\right]$$

$$= \frac{d}{dt} \ \mathcal{F}_s[u]$$

$$= \frac{d}{dt}U(t)$$

إن إخراج المشتقة خارج التكامل تتبع من حساب التفاضل والتكامل ، لاحظ أن u هي دالة بدلالة x,t بينما تحويلها :

$$\mathcal{F}_s[u] = U(\omega,t)$$

هي دالة بدلالة ω,t والمتغير ω سيعامل كوسيط في المسألة الجديدة وعليه يمكن أن نقول عن التحويل الجيبي أنه دالة بدلالة t فقط ، أي أن :

$$\mathcal{F}_s[u] = U(t)$$

$\mathcal{F}_s[u_{xx}]$: بالنسبة لهذه المشتقة لدينا المتطابقة الآتية :

$$\mathcal{F}_s[u_{xx}] = \frac{2}{\pi}\omega u(0,t) - \omega^2 \ \mathcal{F}_s[u]$$

$$= \frac{2}{\pi}\omega u(0,t) - \omega^2 U(t)$$
$$= \frac{2A\omega}{\pi} - \omega^2 U(t)$$

نلاحظ أنه عند إثبات المتطابقات (1) أن الدالة f كانت ذات متغير واحد x والآن لدينا الدالة $u(x,t)$ ذات متغيرين x,t وعليه نحتاج لبعض التعديلات الطفيفة ، وذلك بتطبيق المتطابقات المذكورة بالنسبة لأحد المتغيرين واعتبار المتغير الآخر ثابتاً ، وفي هذه الحالة فإن التحويل بالنسبة إلى x ولذا يعتبر ثابتاً ، كما نلاحظ أن الشرط الحدودي $u(0,t) = A$ يطبق عند هذه المرحلة من العملية .

بالتعويض عن المقادير أعلاه في المعادلة التفاضلية الجزئية الأصلية نحصل على المعادلة التفاضلية الاعتيادية :

$$\frac{dU}{dt} = \alpha^2\left[-\omega^2 U(t) + \frac{2A\omega}{\pi}\right]$$

نحول الآن الشرط الابتدائي $u(x,0) = 0$ للدالة u إلى شرط ابتدائي للدالة $U(t)$ فنحصل على :

$$\mathcal{F}_s[u(x,0)] = U(0) = 0$$

وهذا يكمل الخطوة الأولى في عملية التحويل حيث حولنا المسألة الأصلية إلى مسألة قيم ابتدائية هي :

المعادلة التفاضلية الاعتيادية :

$$\text{ODE} \quad \frac{dU}{dt} + \omega^2\alpha^2 U = \frac{2A\omega\alpha^2}{\pi} \qquad (1)$$

الشرط الابتدائي :

$$\text{IC} \qquad U(0) = 0$$

الخطوة الثانية : لحل مسألة القيم الابتدائي هذه سنطبق عدداً من الأساليب الأولية المتبعة في المعادلات التفاضلية الاعتيادية (العامل التكاملي الحل المتجانس والخاص) ، وعلى أي حال فإن الحل هو :

$$U(t) = \frac{2A}{\pi\omega}(1 - e^{-\omega^2\alpha^2 t})$$

وحصلنا الآن على التحويل الجيبي للجواب $u(x,t)$ ، والخطوة الأخيرة هي إيجاد التحويل العكسي للدالة $U(t)$ ، أي أن :

$$u(x,t) = \mathcal{F}_s^{-1}[U]$$

الخطوة الثالثة : لإيجاد الحل يمكن حساب التحويل العكسي مباشرة من التكامل أو الرجوع إلى الجداول ، وباستخدام الجداول نلاحظ أن :

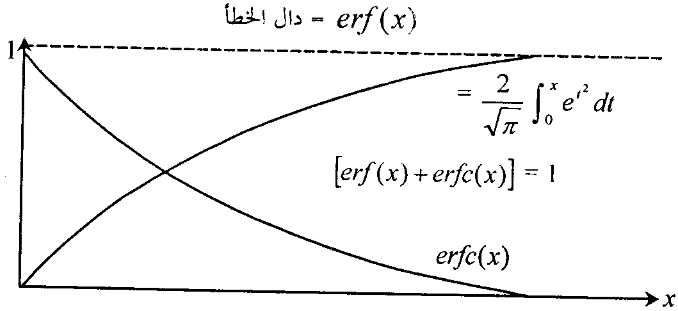
$$u(x,t) = A \text{ erfc } (x / s\alpha\sqrt{t})$$

حيث $\text{erfc }(x)$ $0 < x < \infty,$ تسمى بدالة الخطأ المتمم ، وتعطى بالمعادلة :

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

لاحظ (شكل 12–2) لبيان هذه الدالة .

إن القيم المضبوطة لهذه الدوال المعروفة جيداً يمكن إيجادها في معظم جداول الفيزياء والكيمياء ، ويجب ملاحظة أن هذه التكاملات لا يمكن مكاملتها بالطرق الابتدائية لحساب التفاضل والتكامل .



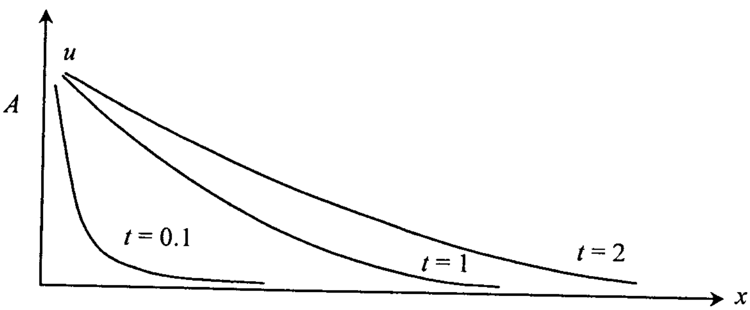
شكل 12-2 بيانا دالة الخطأ ودالة الخطأ المتمم

12-2 تفسير الحل

إن الحل :

$$u(x,t) = A\ erfc\left[x / 2\alpha\sqrt{t}\right]$$

ذو معنى وفير ، فلقيم مختلفة من الزمن نلاحظ من بيان دالة الخطأ المتمم أنه ذو عوامل قياس مختلفة على محور x ، وبتزايد الزمن تحسب دالة الخطأ نفسها مع الاتجاه الموجب لمحور x ، لبيان الحل عند قيم مختلفة للزمن ، لاحظ شكل 12-3 .



شكل 12-3 حل مسألة الذراع نصف اللامنتهية عند ثبوت درجة الحرارة في إحدى نهايتيها على الدرجة A

تمارين

1- حل مسألة المعادلة التفاضلية الاعتيادية (2) .

الفصل الثالث عشر

سلاسل فوريه

13–1 الغرض من الدرس

تعريف سلسلة فوريه وإثبات أنه يمكن تمثيل الدوال الدورية $f(x)$ كمجموع جيوب وجيوبتمام :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x)+b_n\sin(n\pi x)\right]$$

وإذا كانت الدالة غير دوريه معرفة على الفترة $(-\infty,\infty)$ فبرهن علـى أنـه يمكـن أن يسـتخدم تحويل فوريه بدلاً من سلسلة فوريه لتمثيلها كما سنثبت كيفية تمثيل الدال $f(x)$ بصـورة تحليل مستمر من دوال بسيطة .

وهذا التحليل (تكامل فوريه) يمكن أن يكتب بالصيغة المركبة الآتية :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx\right]e^{i\xi x}d\xi$$

التي تؤدي إلى تحويل فوريه وتحويل فوريه العكسي :

(تحويل فوريه) :

$$\mathcal{F}[f]=F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\xi x}dx$$

(تحويل فوريه العكسي) :

$$\mathcal{F}^{-1}[F]=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)e^{i\xi x}d\xi$$

إن أهمية سلاسل فوريه في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية هي أن الدوال الدورية $f(x)$ المعرفة على $(-\infty,\infty)$ أو الدوال المعرفة على فترة منتهية يمكن تمثيلها بسلسلة لانهائيـة مـن الجيوب وجيوب التمام ، وبهذه الطريقة يمكن تجزئة المسائل إلى أخرى مبسطة ، وعلى سبيل المثال الدالة التي تدعى بالمسننة :

$$f(x) = x \qquad -L < x < L$$

(شرط دوري)

$$f(x+2L) = f(x)$$

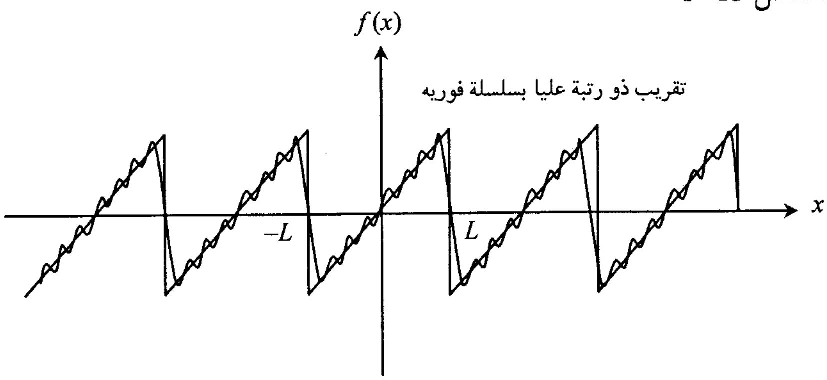
يمكن تمثيلها بسلسلة فوريه بالآتي :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)\right] \qquad (1)$$

حيث تحسب معاملات فوريه ، بموجب صيغ أويلر :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(n\pi x/L)dx = 0 \qquad && n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int f(x)\sin(n\pi x/L)dx = -(2L/n\pi)(-1)^n \qquad && n = 1,\ 2,\ \ldots \end{aligned} \qquad (2)$$

لاحظ الشكل 13-1



شكل 13-1 الدالة المسننة ممثلة بسلسلة فوريه

هذه التكاملات هي حسابات روتينية ، لإيجاد صيغ أويلر للمعادلات a_n, b_n على التوالي ، نضرب طرفي معادلة (1) بالحد $\sin(n\pi x/L)$ أو بالحد $\cos(n\pi x/L)$ ونكامل المعادلة الناتجة من $-L$ إلى L ، أن تعامد الدوال $\{(n\pi x/L)\}$ و $\{\cos(n\pi x/L)\}$ يسهل حساب قيم a_n, b_n ، لاحظ مسألة 6 ، وتمثيل فوريه للدالة المسننة هو الآتي :

$$f(x) = \frac{2L}{\pi}\left[\sin(\pi x/L) - \frac{1}{2}\sin(2\pi x/L) + \frac{1}{3}\sin(3\pi x/L) - \ldots\right] \quad (3)$$

حيث أن لكل حد فيها (يدعى توافقي) تردد أكبر من سابقة وكل هذه الترددات هي مضاعفات للتردد الأولى الذي له نفس الدورة كالدالة $f(x)$.

إن أحد مردات سلاسل فوريه هو أنه لكي يكون للدالة تمثيل بسلسلة فوريه يجب أن تكون الدالة دوريه ، وبالطبع إذا أردنا أن نمثل الدالة المعرفة على فترة منتهية (مثل $f(x) = x$ على $0 \le x \le 1$) يمكن أن نتخذ التمثيل (1) ، وحقيقة كون دوريه سلسلة فوريه خارج الفترة $[0,1]$ لا يهمنا لأننا نحصر انتباهنا في الفترة (1) فقط، وفي الحقيقة أنه يمكن تمثيل دالة داخل فترة معينة بنماذج عديدة من سلاسل فوريه باتخاذ نماذج مختلفة من توسيعات الدالة خارج الفترة (بعضها يقترب أسرع من البعض) .

وعلى القارئ ألا يدعي أنه يمكن تمثيل كل دالة دوريه بدلالة سلسلة فوريه والذي نفهمه هو أنه إذا أمكن تمثيل الدالة بسلسلة فوريه (1) فعندئذ تحسب المعاملات a_n, b_n بموجب صيغ أويلر (2) ، والأكثر من ذلك ، أنه حتى إذا أمكن تمثيل الدالة $f(x)$ بسلسلة فوريه فعندئذ لا يمكن إيجاد مشتقتها $f'(x)$ بالضرورة ، باشتقاق حدود سلسلة فوريه حداً حداً ، وفي الحقيقة يمكن الملاحظة بسهولة أنه لا يمكن إيجاد مشتقة الدالة $f(x) = x$ (الدالة المسننة) باشتقاق كل حد من السلسلة الفورية (3) ، وبالفعل فإن مشتقات حدود السلسلة لا تكون حتى متقاربة إلى أي x (ويمكن تحقيق ذلك بسهولة) .

ولمعرفة الشروط الدقيقة التي تؤمن أن مشتقة الدالة المتمثلة بسلسلة فوريه يمكن أن تحسب باشتقاق حدود السلسلة حداً حداً تراجع المصادر المقترح في نهاية هذا الدرس .

وللوصول إلى أهدافنا نعد لمعرفة النتيجة المهمة التي تدعى بمبرهنة دير أشليه التي تنص على :

13–2 مبرهنة دير أشليه

(شروط كافية لإيجاد تمثيل فوري للدالة)

إذا كانت $f(x)$ دالة مقيدة دورية ذات عدد منته من النهايات العظمى والصغرى وعدد منته من نقاط عدم الاستمرارية في كل دورة ، فعندئذ تكون سلسلة فوريه للدالة $f(x)$ متقاربة من $f(x)$ عند كل نقطة x فيها $f(x)$ مستمرة ومتقاربة من معدل النهاية من اليمين والنهاية من اليسار عند كل نقطة تكون فيها $f(x)$ غير مستمرة .

فمثلاً في شكل $(13-1)$ تكون سلسلة فوريه متقاربة من الدالة $f(x)$ لكل النقاط باستثناء $x = \pm L,\ \pm 3L,\ \ldots$ (نقاط عدم الاستمرارية) وفي هذه النقاط تقترب من صفر (معدل $-L$ و $+L$) .

نكاد نكون الآن مستعدين لأن نعرف تحويل فوريه ، إلا أنه من المفيد قبل ذلك تعريف مفهوم طيف تردد الدالة الدورية .

13–3 طيف تردد الدالة الدورية المتقطع

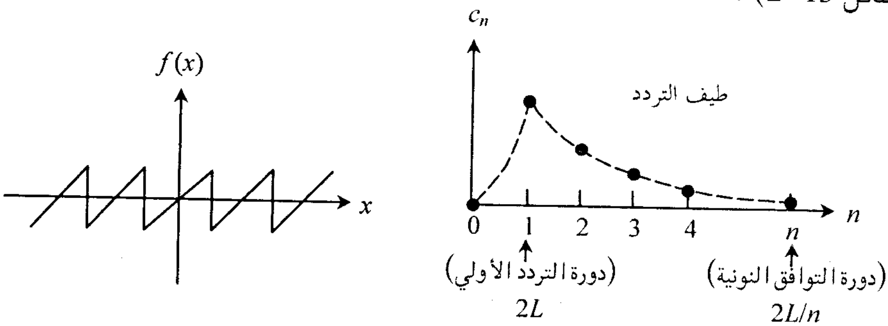
يمكن تفسير سلاسل فوريه بالنسبة للدوال الدورية كتبديل الدالة الدورية $f(x)$ بمتتابعة $\{c_n\}$ من الأعداد :

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

حيث تؤخذ c_n كمقياس لمدى إسهامات مركبات التردد المختلفة للدالة $f(x)$ وعلى سبيل المثال فإن التمثيل الفوري للدالة المسننة $f(x)$ هو :

$$f(x)=\frac{2L}{\pi}\left[\sin(\pi x/L)-\frac{1}{2}\sin(2\pi x/L)+\frac{1}{3}\sin(3\pi x/L)-\ldots\right]$$

وعليه فإن طيف التردد $\{c_n\}$ هو $c_n=2L/n\pi$ حيث $n=1,\ 2,\ \ldots$ و $c_0=|a_0|=0$ (شكل 13–2) .



شكل 13–2 طيف التردد المتقطع للدالة المسننة

إن المتتابعة $\{c_n\}$ مشابهة نوعاً ما إلى تحليل الضوء الأبيض إلى طيف تردد الألوان الحاصلة بالمطياف والآن نبدأ بدراسة تحويلات فوريه ضمن الدرس الرابع عشر .

تمارين

1- ما تمثيل دالة الجيب المربعة :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

$$f(x+2) = f(x) \qquad \text{(شرط دوري)}$$

بسلسلة فوريه ، ارسم الحدود الثانية والثالثة والرابعة الأولى من السلسلة لكي ترى كيف تقترب من $f(x)$ ، وارسم أيضاً تردد الدالة $f(x)$.

2- أثبت أن اشتقاق سلسلة فوريه (3) للدالة المسننة حداً حداً يؤدي إلى سلسلة لا نهائية لا تمثل مشتقة الدالة المسننة .

3- أرسم طيف التردد لكل من الدوال الآتية :

(a) $f(x) = \sin x$

(b) $f(x) = \sin x + \cos 2x$

(c) $f(x) = \sin x + \cos x + 0.5 \sin 3x$

الفصل الرابع عشر
تحويلات فوريه

14–1 الغرض من الدرس

تعريف سلسلة فوريه وإثبات أنه يمكن تمثيل الدوال الدورية $f(x)$ كمجموع جيوب وجيوبتمام :

إن الصعوبة العظمى بالنسبة لتمثيلات سلاسل فوريه هي عدم إمكانية تمثيل الدوال غير الدورية المعرفة على $(-\infty,\infty)$ ومع ذلك يمكن إيجاد تمثيل مشابه لبعض هذه الدوال .

وبدون الرجوع إلى تفاصيل البرهان يمكن إثبات أن تمثيل فوريه :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x/L)+b_n\sin(n\pi x/L)\right]$$

يتغير إلى تمثيل تكامل فوريه (تمثيل تردد مستمر) :

$$f(x)=\int_0^{\infty}a(\xi)\cos(\xi x)d\xi+\int_0^{\infty}b(\xi)\sin(\xi x)d\xi \qquad (1)$$

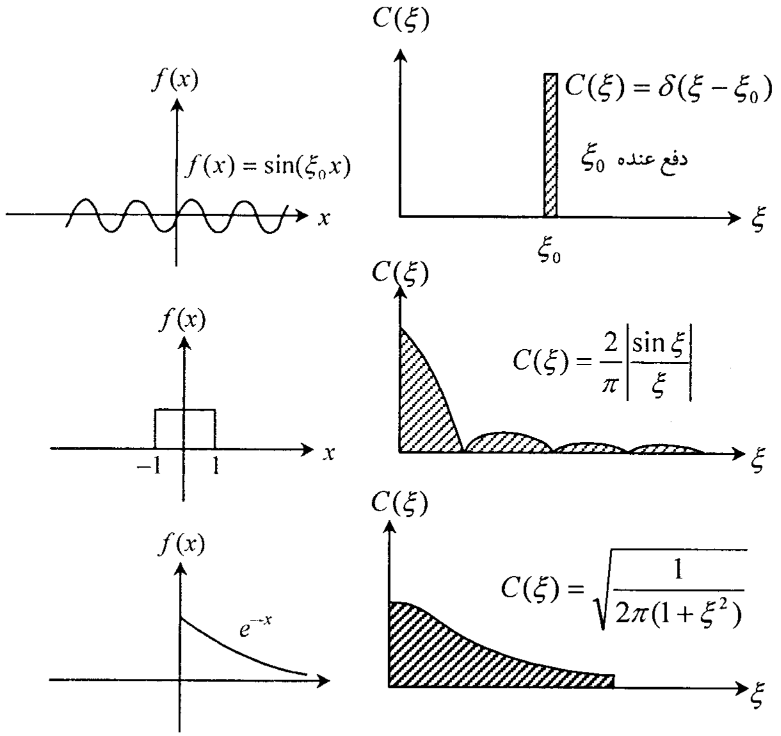
حيث :

$$a(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(\xi x)dx$$
$$b(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin(\xi x)dx \qquad (2)$$

وذلك للدوال غير الدورية المعرفة على $(-\infty,\infty)$ ، وهنا نلاحظ أن التمثيل التكاملي الفوري يصرف الدالة $f(x)$ إلى كل ترددا تها $0<\xi<\infty$ (وليس فقط مضاعفات لتردد أساس واحد ، كما الدوال الدورية) ، كما أجرينا في سلاسل فوريه نعرف طيف التردد :

$$C(\xi)=\sqrt{a^2(\xi)+b^2(\xi)}$$

الذي يعين تركيب الدالة $f(x)$ من حدود ترددا تها ، وفي الشكل 14-1 بعض الأمثلــة علــى دوال $f(x)$ وأطيافها .



شكل 14-1

$$C(\xi)=\sqrt{a^2(\xi)+b^2(\xi)}$$

لاحظ أن الدوال التي لها حافات حادة إلى أطيــاف تــردد ذوات تــرددات عاليــة لأن الحافات تتطلب مركبات ترددات عالية لتمثيلها ، ومــن ناحيــة أخــرى فإنــه يتضــح بســهولة أن الدالة الدورية البسيطة $f(x)=\sin(\xi_0 x)$ ذات طيف تردد يســاوي صفــراً عنــد كــل النقــاط

ماعدا $\xi = \xi_0$ نحن الآن في وضع لتعريف ما يسمى بتحويل فوريه الأسي (معادلتا 5 تحويلا فوريه الجيبي والجيبتمامي) ، وبموجب معادلة (أويلر) :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

يمكن إعادة صياغة (1) بعد إجراء بعض العمليات بالآتي :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \right] e^{i\xi x} d\xi \qquad (3)$$

والتي تدعى بتمثيل فوريه التكاملي ، ومن هذا يمكن استنتاج المعادلتين :

$$\mathcal{F}\,[f] \equiv F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \qquad \text{(تحويل فوريه)}$$

(4)

$$\mathcal{F}^{-1}[F] \equiv f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi \qquad \text{(تحويل فوريه العكسي)}$$

اللتين تمثلان تحويل فوريه وتحويل فوريه العكسي ، وفي الدرس القادم سندرس صفات هذين التحويلين إضافة لبعض المسائل اللواتي يستخدمان فيها .

ملاحظات

1- يمكن أن يكون تحويل فوريه $F(\xi)$ للدالة $f(x)$ دالة مركبة فمثلاً أن تحويل الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

هو :

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - i\xi}{1 + \xi^2}$$

2- القيمة المطلقة لتحويل فوريه $F(\xi)$ هو طيــف تـردد الدالـة $f(x)$ ، وعلـى سـبيل المثال في ملاحظة 1 ، أن طيف تردد الدالة $f(x)$ يساوي :

$$|F(\xi)| = \sqrt{\frac{1}{2\pi(1+\xi^2)}}$$

(ويستطيع القارئ إيجاد القيمة المطلقة للعدد المركب) .

3- ليس لكل الدوال تحويــلات فوريـه (لأن تكـامل (4) قـد لا يكـون موجـوداً) وفـي الحقيقـة أن $f(x) = c,\ \sin x,\ e^x,\ x^2$ دوال ليـس لـها تحويـلات فوريـه ، أمـــا الدوال التي لها تحويلات فوريه فهي تلك الدوال التي تقترب من الصفر بسرعة كافية عندما $|x| \to \infty$ ليس إلا ، وفي التطبيقات العملية نطبق تحويلات فوريه على دوال درجات الحرارة ودوال الموجة والظواهر الفيزياوية الأخرى التي تقترب دوالـها مـن الصفر عندما $|x| \to \infty$.

تمارين

1- ما تحويل فوريه $F(\xi)$ وما طيف التردد $C(\xi) = |F(\xi)|$ للدالة :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{في الحالات الأخرى} \end{cases}$$

2- أثبت أن القيمة المطلقة للدالة $F(\xi) = 1/(1+i\xi)$ تساوي $|F(\xi)| = \sqrt{1/(1+\xi^2)}$
تلميح : أضرب البسط والمقام بالمقدار $1 - i\xi$ للتخلص من العدد المركب من المقام .

3- تحقق من خواص تعامد الجيوب وجيوب التمام في الفترة $[-L, L]$:

$$\int_{-L}^{L} \sin(m\pi x/L)\sin(n\pi x/L)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos(m\pi x/L)\cos(n\pi x/L)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin(m\pi x/L)\cos(n\pi x/L)dx = 0 \quad \text{all} \quad m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

الدرس الخامس عشر

تحويل فوريه وتطبيقاته في المعادلات التفاضلية الجزئية

15-1 الغرض من الدرس

لإيضاح خواص مفيدة متعددة لتحويل فوريه وكيفية تطبيقها في حل المعادلات التفاضلية الجزئية ، وبصورة خاصة سنبين كيفي أن تحويل فوريه يحول التفاضل إلى ضرب ، وعليه تتحول المعادلة التفاضلية إلى معادلة جبرية ، كذلك سنقدم مفهوم الالتفاف غير المنتهي .

إن تحويل فوريه للدالة $f(x)$ حيث $-\infty < x < \infty$ يتعين بالصيغة الآتية :

$$\mathcal{F}[f] = F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \tag{1}$$

أي أنه إذا ابتدأنا بدالة $f(x)$ معرفة على محور x الحقيقي فنعوض عنها بالمعادلة (1) ونحصل على دالة جديدة $F(\xi)$ حيث $-\infty < \xi < \infty$ ، وعلى سبيل المثال ، فإن جدول (1) يبين بعض تحويلات فوريه المألوفة .

جدول 1 **بعض تحويلات فوريه المألوفة**

	الدالة $f(x)$	تحويل فوريه $F(\xi)$
1.	$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \ge 0 \\ -e^{-x} & x < 0 \end{cases}$	$F(\xi) = -i\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\xi}{1+\xi^2}$ (دالة مركبة)
2.	$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{في الحالات الأخرى} \end{cases}$	$F(\xi) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin\xi}{\xi}$ (دالة حقيقية)
3.	$f(x) = e^{-x^2}$	$F(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-(\xi/2)^2}$ (دالة حقيقية)

ولتحويلات أخرى نشير إلى الجداول في تذييل الكتاب ونلاحظ من الأمثلة أن الدالة المحولة $F(\xi)$ قد تكون دالة مركبة وقد لا تكون ، ففي المثال الأول الدالة المحولة $F(\xi)$ تتضمن العدد المركب i وعليه نسميها دالة مركبة القيم بالمتغير الحقيقي ξ (حيث ξ يتغير من $-\infty$ إلى ∞) ، وبعبارة أخرى أن قيم المتغير ξ حقيقية وقيم الدالة مركبة .

إن فائدة تحويل فوريه (كما في معظم التحويلات الأخرى) تتأتى من حقيقة تحويل عملية التفاضل إلى عملية ضرب ، أي أن المعادلة التفاضلية تتحول إلى معادلة جبرية ، كما أن هناك عدداً كبيراً من الخواص التي تجعل من تحويل فوريه أداة عملية فعالة ، ندون قليلاً منها .

15–2 خواص مفيدة لتحويل فوريه

الخاصية الأولى : (أزواج تحويل فوريه)

إن تحويل فوريه للدالة $f(x)$ حيث $-\infty < x < \infty$ يعطي دالة جديدة $F(\xi)$ معرفة بالصيغة :

$$\mathcal{F}[f] = F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

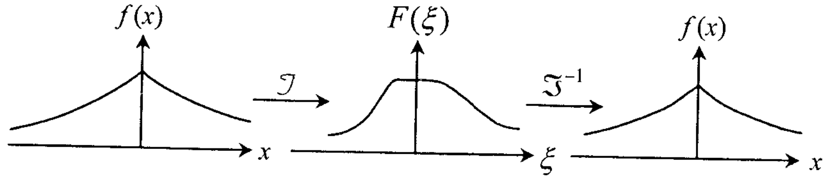
وأن تحويل فوريه العكسي $F(\xi)$ حيث $-\infty < \xi < \infty$ سيعطي الدالة الأصلية $f(x)$ طبقاً للصيغة .

$$\mathcal{F}^{-1}[F] = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

فمثلاً :

$$e^{-|x|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} e^{-|x|}$$

لاحظ شكل (15–1) :



شكل 15-1 يبين منحنى الدالة وتحويلها

الخاصية الثانية : (التحويل الخطي) أن تحويل فوريه هو تحويل خطي ، أي أن :

$$\mathcal{F}[af+bg]=a\ \mathcal{F}[f]+b\ \mathcal{F}[g]$$

ويمكن إثبات هذه الصيغة بسهولة حيث ستطبق مراراً في المستقبل ، فمثلاً تحويل فوريه للدالة :

$$\frac{1}{x^2+1}+3e^{-x^2}$$

يكون :

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]+3\ \mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right]$$

الخاصية الثالثة : (تحويل المشتقات الجزئية) عندما نناقش تحويل المشتقات ، يجب أن نميز المشتقات الجزئية بالنسبة إلى متغيراتها المختلفة فمثلاً ، إذا كان تحويل فوريه يحول المتغير x (متغير التكامل في التحويل) وإذا كانت الدالة المراد تحويلها هي المشتقة الجزئية للدالة $u(x,t)$ بالنسبة إلى x فعندئذ صيغ التحويل تكون :

$$\mathcal{F}[u_x]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_x(x,t)e^{-i\xi x}dx=i\xi\ \mathcal{F}[u]$$

$$\mathcal{F}[u_{xx}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}(x,t)e^{-i\xi x}dx=-\xi^2\ \mathcal{F}[u]$$

ومِّن ناحية أخرى إذا حولنا المشتقة الجزئية $u_t(x,t)$ (وإذا كان المتغير التكامل في التحويل x) فعندئذ يكون التحويل :

$$\mathcal{F}[u_t]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_t(x,t)e^{-i\xi x}dx=\frac{\partial}{\partial t}\ \mathcal{F}[u]$$

$$\mathcal{F}[u_{tt}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_{tt}(x,t)e^{-\xi x}dx=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ \mathcal{F}[u]$$

الخاصية الرابعة : (خاصية الالتفاف) ، لكل تحويل تكاملي هناك ما يسمى بخاصية الالتفاف ، حيث أنه لا يكون بالضرورة تحويل حاصل ضرب دالتين $f(x)g(x)$ مساوياً حاصل ضرب تحويليهما ، أي أن :

$$\mathcal{F}[f(x)g(x)]\neq\ \mathcal{F}[f]\ \mathcal{F}[g]$$

ومع ذلك ففي نظرية التحويلات هناك ما يسمى بالالتفاف $f*g$ للدالتين g و f التي تلعب بطريقة أو بأخرى دور حاصل الضرب ، والصحيح عن اللا تفاف هو أن :

$$\mathcal{F}[f*g]=\ \mathcal{F}[f]\ \mathcal{F}[g] \qquad (2)$$

فما هو هذا الالتفاف ؟ يعرف بالصيغة :

$$(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)g(\xi)d\xi \qquad (3)$$

هذا ويمكن وبدون صعوبة إثبات صحة (2) ، ونلاحظ من تعريف الالتفاف أنه إذا كانت $g(x)$ و $f(x)$ دالتين فعندئذ الالتفاف $(f*g)(x)$ دالة جديدة .

مثال على التفاف دالتين

لنفرض الدالتين :

$$f(x) = x$$

$$g(x) = e^{-x^2}$$

عندئذ التفاف هاتين الدالتين هو :

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \xi) e^{-\xi^2} d\xi$$

$$= x / \sqrt{2} \quad (\text{دالة جديدة})$$

وحصلنا على هذه القيمة بتطبيق الصيغة :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$$

إن أهمية الالتفاف (3) في التطبيقات غالباً ما تعزى إلى أن الخطوة الأخيرة من حل المعادلة التفاضلية الجزئية هي ، باختصار إيجاد التحويل العكسي لمقدار يمكن أن يفسر بأنه حاصل ضرب تحويلين $\mathcal{F}[g]$ $\mathcal{F}[f]$ ، أي إيجاد :

$$\mathcal{F}^{-1}\{ \mathcal{F}[f] \ \mathcal{F}[g]\} \qquad (4)$$

وباتخاذ التحويل العكسي لطرفي (2) نحصل على النتيجة الآتية :

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}\{ \mathcal{F}[f] \ \mathcal{F}[g]\} \qquad (5)$$

وعليه لإيجاد (4) فإن كل ما علينا هو إيجاد التحويل العكسي لكل عامل للحصول على g و f ثم حساب التفافهما .

نحن الآن في موضع يؤهلنا لحل مسألة مهمة في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية .

3-12 حل مسألة قيم حدودية ابتدائية

تأمل سريان الحرارة في ذراع غير منتهية درجة حرارتها الابتدائية $u(x,0) = \phi(x)$ ، وبعبارة أخرى نبحث عن حل مسألة قيم حدودية ابتدائية تسمى أحياناً بمسألة كوشي :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty \tag{6}$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

هناك ثلاث خطوات أساسية في حل هذه المسألة .

الخطوة الأولى (تحويل المسألة)

بما أن متغير المكان x يتغير من ∞ إلى $-\infty$ فنقوم بإجراء تحويل فوريه على المعادلة التفاضلية الجزئية وعلى الشرط الابتدائي بالنسبة للمتغير x (متغير التكامل في التحويل هو x) عندئذ نحصل على :

$$\mathcal{F}[u_t] = \alpha^2 \ \mathcal{F}[u_{xx}]$$

$$\mathcal{F}[u(x,0)] = \ \mathcal{F}[\phi(x)]$$

وبتطبيق خواص تحويل فوريه يكون :

$$\frac{dU(t)}{dt} = -\alpha^2 \xi^2 U(t) \tag{7}$$

$$U(0) = \Phi(\xi) \qquad \text{(} \Phi \text{ هي تحويل فوريه للدالة)}$$

حيث : $U(t) = \ \mathcal{F}\ [u(x,t)]$.

لابد أن يلاحظ القارئ أن الدالة U في الحقيقة تعتمد على كل من t والمتغير الجديد ξ ولكن للسهولة ، وبما أن ξ ثابت بقدر ما تتعلق المعادلة التفاضلية (7) فسنخفف الرموز بوضع :

$$U = U(t)$$

الخطوة الثانية (حل المسألة المحولة)

باعتبار أن المتغير الجديد ξ ليس سوى ثابتاً في المعادلة التفاضلية فإن حل هذه المسألة هو :

$$u(t) = \Phi(\xi)e^{-\alpha^2\xi^2 t} \tag{8}$$

الخطوة الثالثة (إيجاد التحويل العكسي)

لإيجاد الحل $u(x,t)$ علينا فقط حساب :

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left[U(\xi,t)\right]$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[\Phi(\xi)e^{-\alpha^2\xi^2 t}\right]$$

وهنا تكون الحاجة ماسة إلى نظرية اللاتفاف (5) وبتطبيقها نحصل على أن :

$$u(x,t) \ \ \mathcal{F}^{-1}\left[\Phi(\xi)e^{-\alpha^2\xi^2 t}\right]$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[\Phi(\xi)\right] * \ \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\alpha^2\xi^2 t}\right]$$

باستخدام الجداول :

$$= \Phi(x) * \left[\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}}e^{-(x^2/4\alpha^2 t)}\right] \tag{9}$$

$$= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi)e^{-(x-\xi)^2/4\alpha^2 t}\,d\xi$$

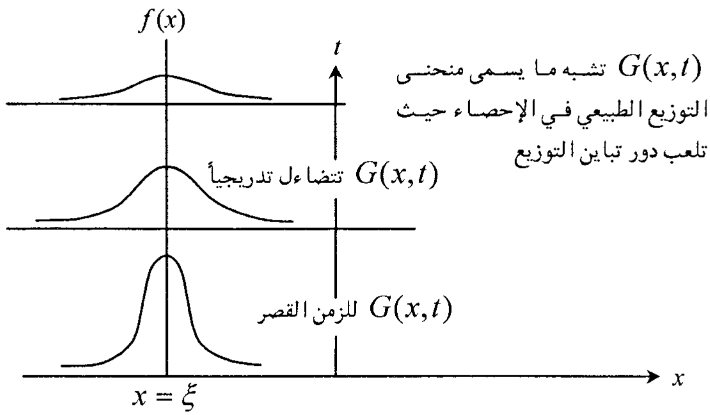
وهذا هو حل مسألتنا ، وقبل ترك هذه المسألة لنحلل هذه النتيجة ، نلاحظ أن الدالة المطلوب تكاملها تتألف من حدين :

1- درجة الحرارة الابتدائية : $\phi(x)$.

2- الدالة : $G(x,t) = \dfrac{1}{\alpha\sqrt{2t}} e^{-(x-\xi)^2/4\alpha^2 t}$.

والتي تسمى بدالة كرين أو دالة الحافز والاستجابة .

يمكن البرهنة على أن دالة الحافز والاستجابة $G(x,t)$ هذه هي درجة حرارة الاستجابة إلى درجة حرارة الحافز عندما $\xi = x$ وبعبارة أخرى $G(x,t)$ هي درجة حرارة في الذراع في زمن t الناشئة عن وحدة حافز حرارة عندما $\xi = x$ (شكل 15-2) .



شكل 15-2 دالة الحافز والاستجابة $G(x,t)$ من درجة حرارة محفزة عندما $\xi = x$

لذا فإن تفسير حل (9) هو أن درجة الحرارة الابتدائية $u(x,0) = \phi(x)$ تتجزأ إلى متصلة من الحوافز ذات قيم $\Phi(\xi)$ (عند كل نقطة $\xi = x$) وتوجد درجة الحرارة الناتجة

$\Phi(\xi)G(x,t)$ ، وثم تجمع (تكامل) درجات الحرارة هذه للحصول على حل (9) ، سنلاحظ بعدئذ أن هذا المفهوم العام يعرف بالتراكيب ومن جهة النظر العملية .

غالباً ما يمكن إيجاد التكامل في الحل (9) لدرجة حرارة ابتدائية معينة $\phi(x)$. أما إذا لم يمكن إيجاد ذلك تحليلياً فإن الحل يمكن إيجاده عند أي نقطة (x,t) بحساب التكامل بطرائق عددية .

ملاحظات

إن المرد الأعظم لتحويل فوريه هو أنه ليس كل الدوال لها تحويلات فوريه ، وعلى سبيل المثال ، حتى الدوال البسيطة مثل :

$$f(x) = c$$

$$f(x) = e^{x}$$

$$f(x) = \sin x$$

حيث c ثابت لا يوجد لها تحويلات فوريه لأن التكامل :

$$\mathcal{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

غير موجود ، أما الدوال التي يوجد لها تحويلات فوريه فهي فقط تلك الدوال التي تتضائل إلى الصفر بسرعة كافية عندما $|x| \to \infty$ كذلك لا يمكن استخدام تحويل فوريه لتحويل متغير الزمن في مسألة القيم الحدودية الابتدائية السابقة لأن $0 < t < \infty$.

تمارين

1- جد تحويل فوريه للدالة :

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ e^{-x} & 0<x\end{cases}$$

تحقق من جوابك باستخدام الجداول في التذييل .

2- برهن على أن تحويل فوريه وتحويل فوريه العكسي تحويلان خطيان .

3- حل مسألة القيم الابتدائية الآتية :

$$\begin{array}{lll}\text{PDE} & u_t=\alpha^2 u_{xx} & -\infty<x<\infty\\ \text{IC} & u(x,0)=e^{-x^2} & -\infty<x<\infty\end{array}$$

باستخدام تحويل فوريه .

4- برهن على أن :

$$\mathcal{F}[u_x]=i\xi\ \mathcal{F}[u]$$

$$\mathcal{F}[u_{xx}]=-\xi^2\ \mathcal{F}[u]$$

تلميح : استخدام التكامل بالتجزئة .

5- برهن على أنه يمكن التعبير على التفاف الدالتين g و f بأي من الصيغتين الآتيتين :

$$(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)g(\xi)d\xi$$

$$(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)g(x-\xi)d\xi$$

الدرس السادس عشر

تحويلات لابلاس

16–1 الغرض من الدرس

للتعريف بتحويل لابلاس وتحويل لابلاس العكسي :

(تحول لابلاس)

$$\mathcal{L}\,[f] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = f(t) = \frac{1}{2\pi 1}\int_{e^{i\infty}}^{e^{+i\infty}} F(s)e^{st}$$

(تحويل لابلاس العكسي)

ودراسة صفاتهما المفيدة ، حيث أن تحويل لابلاس ذو فائدة يمتاز بها على تحويل فوريه باحتوائه عامل التضاؤل e^{-st} الذي يتيح لنا تحويل صنفاً أوسع من الدوال ، ونظراً لأن هذا التحويل يعمل على الدوال المعرفة على الفترة $[0,\infty)$ فإنه غالبا ما يطبق على المتغير t ، وبعد دراسة صفات تحويل لابلاس نحل مسألة مهمة في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية .

ضمن جميع التحويلات التكاملية التي ندرسها في هذا الكتاب يحتمل أن يكون تحويل لابلاس :

$$\mathcal{L}\,[f] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \qquad (1)$$

التحويـل الفريـد الـذي مـر علـى القـارئ ، لأنـه أداة فعالـة جـداً لتحويـل مسـائل القيـم الحدودية الابتدائية في المعادلات التفاضلية الاعتيادية إلى معادلات جبرية ، وليـس تحويـل لابلاس مفيداً لتحويـل المعـادلات التفاضليـة الاعتياديـة إلـى معـادلات جبريـة فحسـب بـل تتعدى فائدته لتحويل المعادلات التفاضلية الجزئية إلـى معـادلات اعتياديـة وهـو مـا نطبقـه في هذا الكتاب ، وبصورة خاصة سـنحاول تطبيـق تحويـل لابـلاس علـى أي مـن المتغـيرات x, y, z, t التي تتغير من 0 إلى ∞ (ولو أننا سنطبق ذلك عموماً على الزمن) ، إن الاختـلاف الأكبر في تطبيق تحويل لابلاس في المعادلات التفاضلية الجزئية عما هو عليه في المعـادلات التفاضلية الاعتيادية هو أن المعادلة التفاضلية الجزئية تتحـول إلـى معادلـة ، إمـا أن تكـون تفاضلية جزئية بعدد متغيرات يقل واحداً عن الأولى وإما إلى معادلة تفاضلية اعتيادية بمتغير واحد ، ويجب أن نحـدد كيفيـة حـل المسـألة الجديـدة (بتحويـل آخـر ، أو بطريقـة فصـل المتغيرات ، أو بطريقة أخرى) ، وفي الحقيقة ، وقبل الابتداء بحل مسـألة مهمـة جـداً نذكـر بعض الخواص المهمة لهذا التحويل .

2–16 خواص تحويل لابلاس

الخاصية الأولى : (زوج التحويل)

يعرف تحويل لابلاس وتحويل لابلاس العكسي بما يأتي :

تحويل لابلاس :

$$\mathcal{L}[f] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt \qquad (2)$$

تحويل لابلاس العكسي :

$$\mathcal{L}^{-1}[F] = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{st}\, ds$$

إن تحويل لابلاس يتميز على تحويل فوريه بوجود عامل التضاؤل e^{-st} في التكامل مما يتيح تحويل صنف أوسع من الدوال (العامل $e^{i\xi t}$ في تحويل فوريه لا يسبب أي تضاؤل لأن قيمته المطلقة تساوي واحد) ، وفي الحقيقة أن الشروط اللازمة والكافية لوجود تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ تتبع من المبرهنة الآتية :

3–16 شروط لازمة وكافية لوجود تحويل لابلاس

إذا كانت f دالة بحيث أن :

1- f متقطعة الاستمرارية على الفترة $0 \le t \le A$ لكل عدد حقيقي موجب A .

2- يمكننا إيجاد ثابتين : a و M بحيث أن $|f(t)| \le Me^{at}$ لكل قيم t أكبر من عدد حقيقي T .

عندئذ فإن تحويل لابلاس للدالة :

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

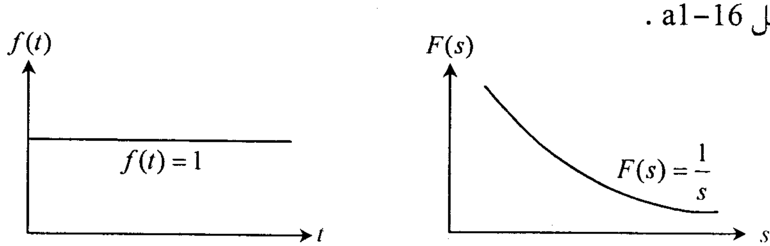
موجوداً لكل قيم $s > a$.

والآن ندون عدداً قليلاً من الدوال التي لها تحويلات لابلاسية ونوضح بياناتها على محور s .

1. $\quad f(t) = 1 \qquad 0 < t < \infty$

$(M = 1 \qquad a = 0 \qquad) \qquad F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \dfrac{1}{s}$

لاحظ شكل 16–a1 .

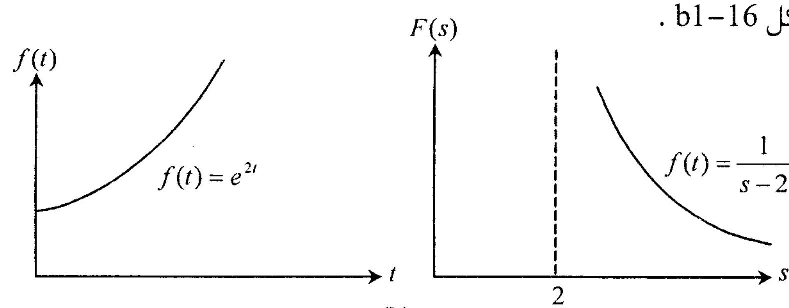


(a)

2. $f(t) = e^{2t} \qquad 0 < t < \infty$

$(M = 1 \qquad a = 2 \qquad) \qquad F(s) = \dfrac{1}{s-2} \quad s > 2$

لاحظ شكل 16−1b .

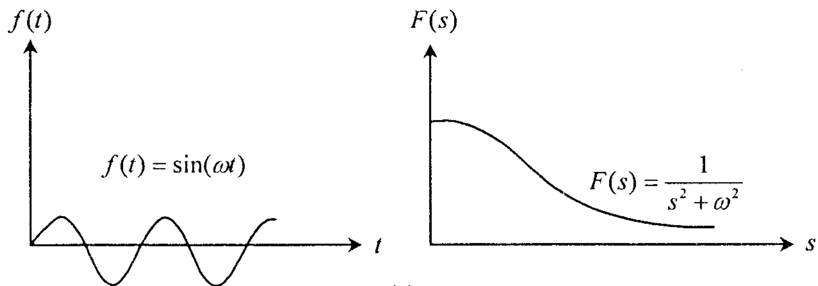


(b)

3. $f(t) = \sin(\omega t)$

$(M = 1 \qquad a = 0 \qquad) \qquad F(s) = \dfrac{1}{s^2 + \omega^2}$

لاحظ شكل 16−1c .



(c)

4. $f(t) = e^{t^2} \qquad$ (ليس لها تحويل لابلاسي)

شكل 16−1 بيانات لعدد من تحويلات لابلاس

في تعريف تحويل لابلاس تؤخذ قيم المتغير s على الفترة $[0,\infty]$ ومع ذلك فمن الممكن (وغالبا ما يرغب في ذلك) توسيع هذا التعريف إلى قيم مركبة للمتغير ولإيجاد تحويل لابلاس العكسي :

$$\mathcal{L}^{-1}[F]=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)e^{st}\,ds$$

في هذه الحالة غالباً ما نستفيد من تكامل كانتور في المستوى المركب ونظرية الرواسب ، وسوف لن ندرس هذا المبحث هنا بل نكتفي باستخدام الجداول في التذييل لإيجاد التحويلات العكسية .

الخاصية الثانية : (تحويل المشتقات الجزئية)

لنفرض أن $u(x,t)$ دالة ذات متغيرين سنعمل على إيجاد تحويلات لابلاس للمشتقات الجزئية ... $u_t, u_{tt}, u_x, u_{xx},$ بما أن تحويل لابلاس يحول المتغير t (متغير التكامل) فعندئذ يكون تحويل المشتقات الجزئية الآتي :

$$\mathcal{L}\ [u_t]=\int_0^{\infty}u_t(x,t)e^{-st}\,dt=sU(x,s)-u(x,0)$$

$$\mathcal{L}\ (u_{tt})=\int_0^{\infty}u_{tt}(x,t)e^{-st}\,dt=s^2U(x,s)-su(x,0)-u_t(x,0)$$

$$\mathcal{L}\ [u_x]=\int_0^{\infty}u_x(x,t)e^{-st}\,dt=\frac{\partial U}{\partial x}(x,s)$$

$$\mathcal{L}\ [u_{xx}]=\int_0^{\infty}u_{xx}(x,s)e^{-st}\,dt=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,s)$$

حيث أن : $U(x,s) = \mathscr{L}\ [u(x,t)]$ ، ويتبع تحويلاً u_{xx} و u_x من العلاقة الأساسية للتفاضل والتكامل الآتية :

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$$

كما يتبع تحويلا u_{tt} و u_t باستخدام التكامل الجزئي .

الخاصية الثالثة : (خاصية الالتفاف)

إن للالتفاف هنا دوراً مشابها له في تحويل فوريه إلا أن تعرف الالتفاف يختلف هنا قليلاً .

16–4 تعريف الالتفاف المنتهي

يعرف الالتفاف المنتهي للدالتين f, g بالآتي :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$
$$= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

(هذان التكاملان متساويان) ، وبعبارة أخرى ، في الالتفاف المنتهي نكامل من 0 إلى t بدلاً من $-\infty$ إلى ∞ في حالة الالتفاف غير المنتهي ، وعلى سبيل المثال فإن الالتفاف المنتهي للدالتين :

$$f(t) = t$$

$$g(t) = t$$

سيكونان :

$$(f * g)(t) = \int_0^t \tau(t-\tau)d\tau = t^3/6$$

وكما في الالتفاف غير المنتهي فإن الخاصية المهمة :

$$\mathcal{L}\ [f*g] = \mathcal{L}\ [f]\ \mathcal{L}\ [g] \qquad (3)$$

صحيحة هنا أيضاً ، وهي مكافئة إلى :

$$\mathcal{L}^{-1}\{\ \mathcal{L}\ [f]\ \mathcal{L}\ [g]\} = f*g \qquad (4)$$

وهـذه الخاصية تتيح لنا إيجاد تحـويل لابـلاس العكسي لحاصل ضرب دالتين $\mathcal{L}\ [f]\ \mathcal{L}\ [g]$ بإيجاد التحويل العكسي من $\mathcal{L}\ [f]$ و $\mathcal{L}\ [g]$ للحصول على f, g ثم على التفافهما ،

وعلى سبيل المثال :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}.\frac{1}{s^2+1}\right] = \int_0^t \sin\tau\ d\tau = 1 - \cos t$$

$$F(s) = \frac{1}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = 1 \qquad G(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} g(t) = \sin t$$

والآن نبدأ بمسألة قيم حدودية ابتدائية مهمة في الدرس السابع عشر .

تمارين

1- برهن على صحة الصيغة الآتية لتحويل المشتقة الجزئية u_t :

$$\mathcal{L}\ [u_t(x,t)] = sU(x,s) - u(x,0)$$

2- حل مسألة القيم الابتدائية الآتية بطريقة تحويل لابلاس :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \sin x \qquad -\infty < x < \infty$$

الدرس السابع عشر
التوصيل الحراري في وسط نصف لا منتهي

17–1 الغرض من الدرس

استخدام تحويل لابلاس وتحويل لابلاس العكسي لحل مسألة التوصيل الحراري في وسط نصف لا منتهي .

نفرض وجود وعاء كبير (عميق) معزول الجوانب فيه سائل ، ولنفرض أيضاً أن درجة حرارة السائل الابتدائية تساوي u_0 ودرجة حرارة الهواء فوق السائل تساوي صفراً (درجة مصدر ما) ، هدفنا إيجاد درجة الحرارة عند ارتفاعات مختلفة من الوعاء ولقيم مختلفة منا لزمن ، ولذلك علينا حل المسألة الآتية :

المعادلة التفاضلية :

$$u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

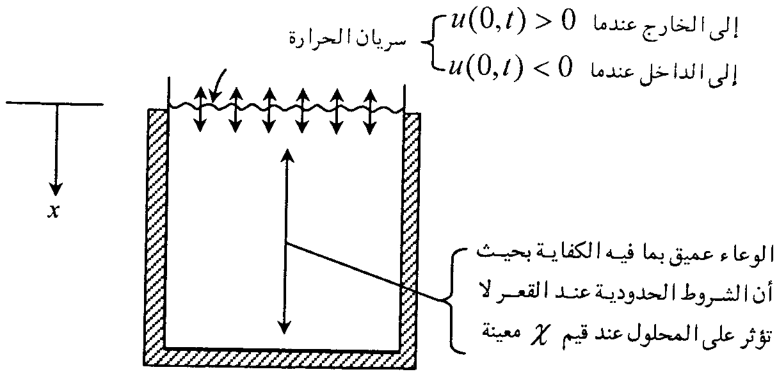
(1) الشرط الحدودي :

$$u_x(0,t) - u(0,t) = 0 \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = u_0 \qquad 0 < x < \infty$$

لاحظ شكل 17–1 .



شكل 17-1 مخطط يبين مسألة سريان الحرارة

لحل هذه المسألة نحول متغير الزمن بتحويل لابلاس (كذلك من الممكن تحويل المتغير x بتحويل لابلاس لأن x أيضاً يتغير من 0 إلى ∞) ، وبإجراء هذا التحويل نحصل على معادلة تفاضلية اعتيادية بدلالة x :

المعادلة التفاضلية الاعتيادية :

$$sU(x) - u_0 = \frac{d^2U}{dx^2}(x) \qquad 0 < x < \infty$$

(2) الشرط الحدودي :

$$\frac{dU}{dx}(0) = U(0)$$

(نحول المعادلة التفاضلية الجزئية والشرط الحدودي – وليس الشرط الابتدائي) ، هذه المعادلة التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الثانية ذات شرط حدودي عندما $x = 0$ (وللأغراض الفيزيائية نطبق شرطاً حدودياً آخر ينص على أن $U(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$ ، لاحظ أننا أغفلنا الرمز بدلالة s في $U(x,s)$ للحصول على رمز أسهل $U(x)$ لأن المعادلة التفاضلية (7) تعتمد على x فقط .

لحل (2) نجد أولاً الحل العام (المتجانس + حل خاص) ، الذي هو :

$$U(x) = c_1 e^{\sqrt{s}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s}\,x} + \frac{u_0}{s}$$

وبتعويض هـذا المقدار في الشـروط الحدوديـة في (2) نحصل على قيمتي الثابتين c_2 و c_1 (لاحظ أولاً أن $c_1 = 0$ أو أن درجة الحرارة تؤول إلى اللانهاية عندما x تؤول إلى اللانهايـة) ، وبإيجاد c_2 من الشرط الحدودي عندما $x = 0$ نحصل على الجواب للدالة $U(x)$ الآتي :

$$U(x) = -u_0 \left\{ \frac{e^{-\sqrt{s}\,x}}{s\left(\sqrt{s+1}\right)} \right\} + \frac{1}{s} \qquad (3)$$

والخطوة الأخيرة الآن هي إيجاد درجة الحرارة $u(x,t)$ وذلك بحساب :

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[U(x,s)\right]$$

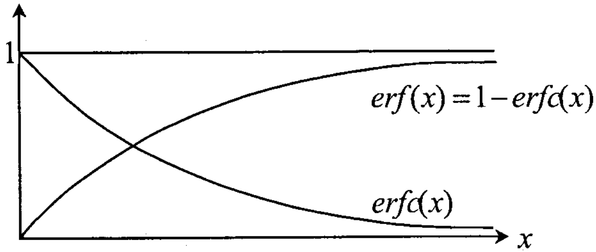
(ونرجع الآن إلى ذكر s في $[U(x,s)]$) ، ولإيجـاد التحويـل العكسـي نرجـع إلـى جـداول تحويل لابلاس العكسي في تذييل الكتاب فنحصل على :

$$u(x,t) = u_0 - u_0 \left[erfc\left(x/2\sqrt{t}\right) - erfc\left(\sqrt{t} + x/2\sqrt{t}\right) e^{(x+t)} \right] \qquad (4)$$

حيث :

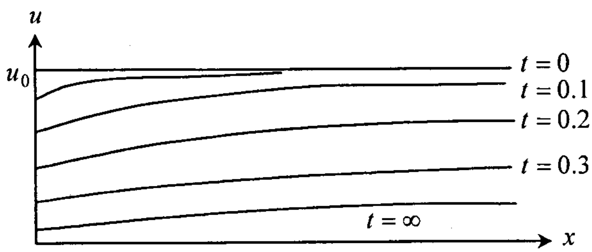
$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

دالة الخطأ المتمم التي يتضح بيانها في (شكل 17-2) .



شكل 17–2 بيانا دالة الخطأ ودالة الخطأ المتمم

وإذا استغرقنا وقتاً قليلاً لتحليل هذه المعادلة ورسم بيانها باستخدام الحاسبة الإلكترونية المزودة بأداة الرسم البياني فنلاحظ أن ذلك يكون كما في شكل 17–3 .



شكل 17–3 درجات الحرارة داخل وسط غير منته لقيم مختلفة للزمن

ملاحظات

1- يمكن أيضاً تطبيق تحويل لابلاس للمسائل التي معادلتها التفاضلية الجزئية غير متجانسة (بطريقة فصل المتغيرات يجب أن تكون المعادلة متجانسة) ، ولكن طريقة تحويل لابلاس عموماً تطبق على المعادلات ذات المعاملات الثابتة (إلا أنه طريقة فصل المتغيرات تطبق أيضاً على المعادلات ذات المعادلات المتغيرة) ، والجدول الآتي يبين نماذج من المسائل التي يمكن حلها بأي الطريقتين .

جدول 1 مقارنة بين طريقتي تحويل لابلاس وفصل المتغيرات

	الطريقة	
	تحويل لابلاس	فصل المتغيرات
المعادلات التفاضلية الجزئية غير المتجانسة	نعم	لا
الشروط الحدودية غير المتجانسة	نعم	لا
المعاملات المتغيرة	لا	نعم
المعادلات غير الخطية	لا	لا

2- يمكن استخدام تحويلي هانكل وميلن أيضاً ، لحل مسائل القيم الحدودية الابتدائية ومسائل القيم الحدودية إلا أنهما يختلفان عن تحويل لابلاس في اعتبار واحد ، حيث أن تحويل لابلاس يحول المشتقات إلى عمليات ضرب بتطبيق صيغة مثل :

$$\mathcal{L}\ [y'] = s\ \mathcal{L}\ [y] - y(0)$$

بينما يحول تحويلا هانكل وميلن مؤثرات التفاضل إلى ضرب فمثلاً تحويل هانكل :

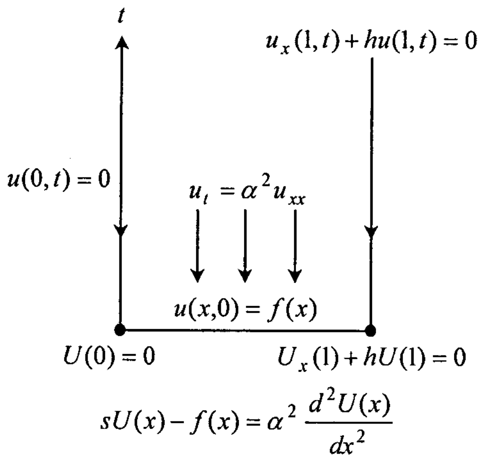
$$H[y] = \int_0^\infty rJ_0(\xi r)y(r)dr$$

يحول المؤثر التفاضلي :

$$H\left[y''(r) + \frac{1}{r}y'(r)\right] = -\xi^2 H[y]$$

وبالطريقة هذه تحل معادلات تفاضلية معينة (معادلات بيسل) .

3- يمكن تفسير تحويل لابلاس (الذي يحول t) بأنه إسقاط مستوى xt على محور x ، وأن الشروط الحدودية والمعادلات التفاضلية الجزئية والشرط الابتدائي تتحول إلى معادلة اعتيادية بشروط حدودية ، كما في الشكل 17-4 .


t
$u_x(1,t)+hu(1,t)=0$
$u(0,t)=0$
$u_t=\alpha^2 u_{xx}$
$u(x,0)=f(x)$
$U(0)=0$
$U_x(1)+hU(1)=0$
$sU(x)-f(x)=\alpha^2 \frac{d^2U(x)}{dx^2}$

شكل 4-17

تمارين

1- حل المسألة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الحدودي :

$$u(0,t) = \sin t \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = 0 \qquad 0 \le x < \infty$$

بطريقة تحويل لالبلاس (تحويل t) ، ما التفسير الفيزيائي لهذه المسألة ؟

2- حل مسألة القيم الحدودية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\frac{d^2U}{dx^2} - sU = A \qquad 0 < x < 1$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dx}(0) = 0 \\ U(1) = 0 \end{cases}$$

الدرس الثامن عشر
قاعدة دوهاميل

18–1 الغرض من الدرس

لتبيان أهمية تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية وبصورة خاصة بالمعالجة الجبرية لتحويل لابلاس ، بحل المعادلة التفاضلية الجزئية نكتشف مفهوما يعرف بقاعدة دوهاميل ، ولهذه القاعدة تفسيرات في المعادلات التفاضلية الاعتيادية ، إلا أننا سنوضح كيفية عمل هذه القاعدة بما يحيط بمسائل قيم حدودية ابتدائية معينة .

إضافة لكون تحويل لابلاس كأداة فعالة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية فإنه يبين تصوراً عن طبيعة الحلول للمسائل الفيزيائية ، بتطبيق تحويل لابلاس نوضح في هذا الدرس مفهوماً مهماً جداً يعرف بقاعدة دوهاميل ، وقبل الحصول على هذه القاعدة نناقش مسألة غالباً ما تحدث في الهندسة .

18–2 سريان الحرارة في ذراع درجتا حرارة نهايتاه ثابتتان

غالباً ما يكون مهماً إيجاد درجة الحرارة في وسط تتغير درجة حرارة حدوده تبعاً للزمن ، فمثلاً إذا فرضنا أن ذراعاً معزولاً بحيث تكون درجة حرارتها $f(t)$ عند النهاية اليمنى وتساوي صفراً عند النهاية اليسرى ودرجة حرارتها الابتدائية تساوي صفراً فنحصل على المسألة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

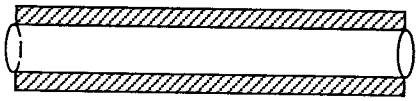
الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = f(t) \end{cases} \qquad 0 < t < \infty \qquad (1)$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = 0 \qquad 0 \le x \le 1$$

لاحظ شكل (18-1) .



شكل 18-1 شروط حدودية تتغير تبع الزمن

من الممكن إيجاد حل مسألة (1) بسهولة حال معرفة حل المسألة المبسطة (درجة الحرارة ثابتة عند النهايتين) الآتية :

$$\text{PDE} \quad w_t = w_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

$$\text{BCs} \quad \begin{cases} w(0,t) = 0 \\ w(1,t) = 1 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty \qquad (2)$$

$$\text{IC} \quad w(x,0) = 0 \qquad 0 \le x \le 1$$

وفي الحقيقة إذا وجدنا حلي مسألتي (2) ، (1) جنباً إلى جنب بطريقة تحويل لابلاس نلاحظ نتيجة ملفتة للنظر (قاعدة دوهاميل) تعطينا حل مسألة 1 بدلالة حل 2 ، وعليه بحل مسألتي (2) ، (1) معاً نحصل على :

مسألة غير مبسطة (1)

(شروط حدودية تتغير تبع الزمن)

تحويل مسألة (1) باستخدام تحول لابلاس

$$\frac{d^2U}{dx^2} - sU(x) = 0$$

$$U(0) = 0$$

$$U(1) = F(s)$$

إيجاد حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية

$$U(x,s) = F(S)\left[\frac{\sinh\left(x\sqrt{s}\right)}{\sinh\left(\sqrt{s}\right)}\right]$$

الضرب والقسمة على s – قبل إيجاد التحويل العكسي

$$U(x,s) = F(s)\left\{s\left[\frac{\sinh\left(x\sqrt{s}\right)}{s\sinh\left(\sqrt{s}\right)}\right]\right\}$$

باستخدام العلاقة

$$\mathscr{L}\left[w_t\right] = sW - w(x,0)$$

نحصل على :

$$U(x,s) = F(s)\ \mathscr{L}\ \left[w_t\right]$$

وعليه :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\ \mathscr{L}\left[w_t\right]\right\} \\ &= f(t).w_t(t) \\ &= \int_0^t f(\tau)w_\tau(x,t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t w(x,t-\tau)f'(\tau)d\tau + \\ &\quad f(0)w(x,t) \end{aligned}$$

(حل مسألة الشروط الحدودية المتغيرة تبع الزمن)

مسألة مبسطة (2)

(شروط حدودية ثابتة)

تحويل مسألة (2) باستخدام تحويل لابلاس

$$\frac{d^2W}{dx^2} - sW(x) = 0$$

$$W(0) = 0$$

$$W(1) = 1/s$$

إيجاد حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية

$$W(x,s) = \frac{1}{s}\left[\frac{\sinh\left(x\sqrt{s}\right)}{\sinh\left(\sqrt{s}\right)}\right]$$

إيجاد تحويل لابلاس العكسي

$$w(x,t) = x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)}{n}e^{-(n\pi)^2 t}\sin(n\pi x)$$

(حل مسألة الشروط الحدودية الثابتة)

بعبارة أخرى ، نكون قد حصلنا على الحل $u(x,t)$ للمسألة التي تتغير درجة الحرارة فيها تبع الزمن بدلالة حل مسألة مبسطة (شروط حدودية ثابتة) أي أن :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t w_t(x,t-\tau)f(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t w(x,t-\tau)f'(\tau)d\tau + f(0)w(x,t) \end{aligned} \qquad (3)$$

تسمى معادلتنا (3) بقاعدة دوهاميل ، والآن يمكن تعويض الحل $w(x,t)$ للمسألة ذات الشروط الحدودية الثابتة الآتي :

$$w(x,t) = x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-(n\pi)^2 t}\sin(n\pi x)$$

في المعادلة الثانية من (3) للحصول على حل مسألة الشروط الحدودية المتغيرة تبع الزمن (لا تطبق هنا المعادلة الأولى من (3) لأنه عند اشتقاق السلسلة التي تمثل $w(x,t)$ ، حداً حداً بالنسبة إلى t نحصل على سلسلة متباعدة) .

هناك صيغ أخرى لقاعدة دوهاميل مفيدة جداً .

3-18 أهمية قاعدة دوهاميل

في المسألة أعلاه وجدنا حل المسألة المبسطة بالشروط الحدودية الثابتة وطبقنا قاعدة دوهاميل (3) للحصول على حل مسألة الشروط الحدودية التي تتغير تبع الزمن ، وغالبا ما يحدث أنه حتى المسألة المبسطة (بالشروط الحدودية الثابتة) لا يمكن حلها بصورة تحليلية ، ومع ذلك فالذي يمكن فعله هو ملاحظة الحل تجريبياً ، وبعبارة أخرى ، ننشئ جهازاً يؤمن شروطاً حدودية ثابتة ونعمل على قياس التغير بصورة تجريبية ، وعندئذ نطبق قاعدة دوهاميل لإيجاد الحل لأي شرط يتغير تبع الزمن ، وفي الحقيقة يمكن فقط ملاحظة تغير $w(x,t)$ بالنسبة إلى مسألة الشروط الحدودية ، وعند الحصول على قراءات

التغير يمكن حل المسألة بشروط حدودية متغيرة $f(t)$ وذلك بالتعويض في قاعدة دوهاميل (3) .

ملاحظات

هناك صيغة مهمة أخرى لقاعدة دوهاميل والتي تعطي جواب المسألة الآتية :
المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = f(t) \end{cases} \qquad 0 < t < \infty \qquad (4)$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = 0 \qquad 0 \le x \le 1$$

وذلك بدلالة الحل $w(x,t)$ للمسألة المبسطة البديلة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$w_t = w_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} w(0,t) = 0 \\ w(1,t) = \delta(t) \end{cases} \qquad (5)$$

(درجة الحرارة الابتدائية عند $t = 0$)

الشرط الابتدائي :

$$w(x,0) = 0 \qquad 0 \le x \le 1$$

وبمعرفة الصيغة :

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t-\tau) f(\tau) d\tau \qquad (6)$$

يمكن الحصول على $u(x,t)$ لكل درجة حرارة حدودية $f(t)$ حال إجراء التجربة لحساب $w(x,t)$ من درجة الحرارة الابتدائية .

تمارين

1- أثبت قاعدة دوهاميل (6) بتحويل مسألتي (5) ، (4) واتباع طريقة مشابهة كما في (3) .

تلميح : تحويل لابلاس للدالة $\delta(t)$ هو $\mathscr{L}[\delta(t)]=1$.

2- برهن على أن المشتقة الجزئية w_t للدالة :

$$w(x,t)=x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-(n\pi)^2 t}\sin(n\pi x)$$

متباعدة لكل قيم x بإجراء الاشتقاق حداً حداً .

3- لنفرض أن لدينا ذراعاً معدنية (معزولة الجوانب) مزودة بدفع حراري ابتدائي عند النهاية اليمنى (مع بقاء النهاية اليسرى بدرجة حرارة ثابتة مساوية صفراً) ، ولنفرض أن درجة الحرارة الابتدائية للذراع تساوي صفراً ، وقد قيست درجة الحرارة عند منتصف الذراع $x = 0.5$ لقيم مختلف من الزمن ، كما في الجدول الآتي :

درجة حرارة المنتصف	الزمن
w_1	t_1
w_2	$t_2 = 2t_1$
w_3	$t_3 = 3t_1$
$\vdots$	$\vdots$
w_n	$t_n = nt_1$

استخدم القراءات أعلاه لتقريب درجة الحرارة عند النقطة $u(0.5,t_n)$ تبعاً للشروط الحدودية :

(a) $u(1,t)=\sin t$

(b) $u(1,t)=f(t)$

حيث $f(t)$ دالة اختيارية .

4- طبق صيغة دوهاميل لإيجاد حل مسألة القيم الحدودية الابتدائية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t=\alpha^2 u_{xx} \qquad 0<x<1 \qquad 0<t<\infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=\sin t \end{cases} \qquad 0<t<\infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0)=0 \qquad 0\le x\le 1$$

الدرس التاسع عشر
مقدار الحمل الحراري u_x في مسائل الانتشار

19–1 الغرض من الدرس

لتبيان كيفية أن مقدار u_x في معادلة الانتشار :

$$u_t = Du_{xx} - Vu_x$$

عامل الحمل الحراري عامل الانتشار

يمثل ظاهرة الحمل الحراري ، والظاهرة الموصوفة بمعادلة الحمل الحراري والانتشار أعلاه تبين أن الانتشار والحمل الحراري كليهما مشتركان في مواضع متعددة ، كما أن مقدار الانتشار ومقدار الحمل الحراري يعتمدان على قيمتي D,V .

وبما أن الحمل الحراري للمادة يمثل مادة متحركة مع الوسط فيمكن اختيار نظام محاور تتحرك مع الوسط ، وبهذه الطريقة يمكن حذف عامل الحمل الحراري وعندئذ يمكن حل المعادلة بدلالة الإحداثيات المتحركة ثم تحويلها عكسياً إلى المتغير الأصلي x .

كان اهتمامنا ولحد الآن منصباً على سريان الحرارة (أو نوع ما من الانتشار) في منطقة ذات بعد واحد . لنتأمل الآن مسألة إيجاد تركيز مادة تنبعث من سطح الأرض بحيث أن المادة تنتشر خلال الهواء وتحمل أيضاً إلى الأعلى بتيار الهواء (الذي يتحرك بسرعة V) ، ويتضح أنه من الممكن أن يساهم الحمل الحراري للمادة بأكثر من حركة الانتشار نفسها ، (وهذا يعتمد على معامل الانتشار وعلى سرعة الهواء) . فالانتشار هو مزج المادة خلال الهواء بينما يكون الحمل حركة المادة بواسطة الهواء (الوسط المتحرك) وعلى أية حال فإن غرضنا الآن هو حل معادلة الانتشار والحمل الحراري :

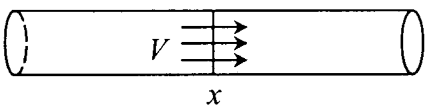
$$u_t = Du_{xx} - Vu_x$$

وكيفية استنتاجها .

ولتحقيق ذلك بالنسبة للتركيز $u(x,t)$ للمادة نستخدم حقيقتين أساسيتين :

1- الفيض المسبب الحمل الحراري

إن فيض المادة (من اليسار إلى اليمين) بسبب الحمل الحراري عبر نقطة x يساوي $Vu(x,t)$ ، حيث V هي سرعة الوسط (سم/ث) و $u(x,t)$ هو التركيز الخطي (جم/سم) لاحظ شكل (19-1) .



شكل 19-1 كمية الحرارة المحمولة عبر x (بالثانية) هي $Vu(x,t)$

2- الفيض المسبب بالانتشار

إن فيض المادة (من اليسار إلى اليمين) بسبب الانتشار عبر نقطة x يساوي $-Du_x(x,t)$ حيث D معامل الانتشار إذا عوضنا عن هذين المقدارين بمعادلة حفظ الحرارة في الدرس الثالث ، نحصل على المعادلة التفاضلية الجزئية الأساسية :

$$u_t = Du_{xx} - Vu_x$$

ولمعرفة مخططات الحلول أو سلوكها مع مقدار الحمل الحراري نبدأ بحل مسألة حمل حراري فقط (حيث الانتشار يساوي صفراً) .

هناك مسألة معينة من هذا النوع وهي إلقاء مادة بنهر خال من التلوث (سرعة تياره V) وملاحظة تركيز المادة في مجراه .

وعلى سبيل المثال إذا كانت x المسافة التي تقطعها المادة في المجرى بحيث أن المادة لا تنتشر أثناء سريان الماء عندئذ يمكن إيجاد تركيز المادة $u(x,t)$ بحل النموذج الرياضي الآتي :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = -Vu_x \qquad 0 < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

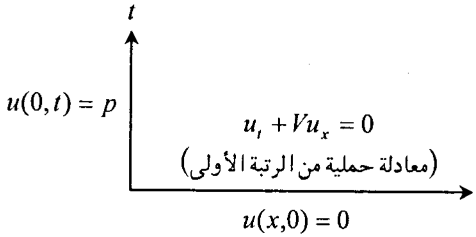
الشرط الحدودي :

(1) إلقاء ثابت من المادة $\longleftarrow$ $u(0,t) = P$

الشرط الابتدائي :

النهر خال من التلوث $\longleftarrow$ $u(x,0) = 0$

ويمكن توضيح هذه المسألة بالشكل 19-2 .



شكل 19-2 مسألة حملية بدون انتشار

وقبل البدء بالحل سنفكر قليلاً بشكل الحل ، فيتضح أن التلوث (الحاصل من إلقاء المادة في النهر) ، الابتدائي يساوي صفراً وحالما تلقى المادة بمعدل ثابت عند $x = 0$ فإن التلوث يجري في النهر بسرعة V ، ولملاحظة ذلك رياضياً نحل (1) ، وبما أن المعادلة التفاضلية الجزئية خطية وشروطها الحدودية خطية أيضاً فعلينا أن نفكر بطريقة فصل المتغيرات أو التحويلات التكاملية ومع ذلك ، ولأن المتغير x غير مقيد فلا تطبق طريقة فصل المتغيرات وعليه نطبق تحويل لابلاس على المتغير t .

2–19 حل المسألة الحملية بطريقة تحويل لابلاس

بتطبيق تحويل لابلاس :

$$U(x)=\int_0^{\infty}u(x,t)e^{-st}\,dt$$

على مسألة (1) نحصل على :

$$sU(x)=-V\frac{dU}{dx}\qquad 0<x<\infty$$

$$U(0)=\frac{P}{s}$$

وبحل هذه المسألة الحدودية الابتدائية البسيطة جداً نحصل على :

$$U(x)=\frac{P}{s}e^{-(sx/V)}$$

وبملاحظة تحويل لابلاس العكسي من الجداول يكون :

$$u(x,t)=\mathscr{L}^{-1}[U]=PH(t-x/V)$$

حيث $H(\xi)$ هي دالة هافيسايد :

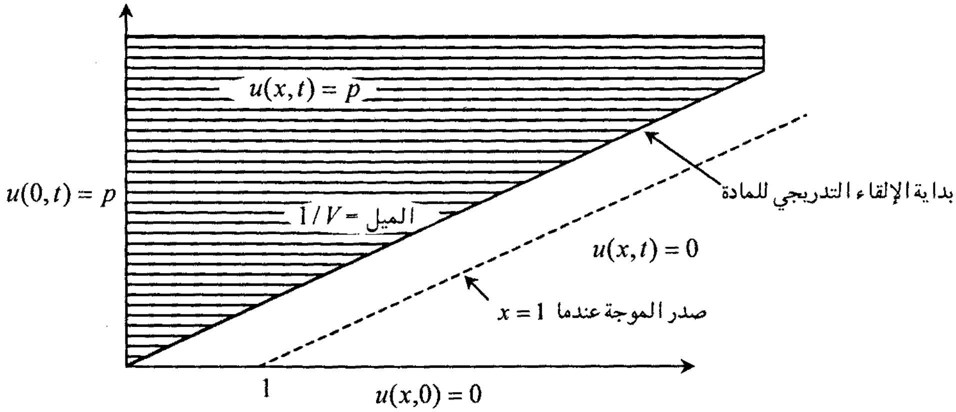
$$H(\xi)=\begin{cases}0 & \xi<0\\ 1 & \xi\geq 0\end{cases}$$

وعليه يكون حل مسألتنا هو :

$$u(x,t)=\begin{cases}0 & t<x/V\\ P & t\geq x/V\end{cases}$$

هذه المسألة بسيطة نسبياً فهي ليست أصعب من مسألة إلقاء شيء ما على حزام متحرك ومراقبة حركته .

ولكنها على الرغم من ذلك تصبح ذات أهمية أكبر عند انتشار المادة خلال الوسط .



شكل 19–3 موجة حملية بدون انتشار

لملاحظة ما يحدث عند انتشار الموجة نحل المسألة الآتية :

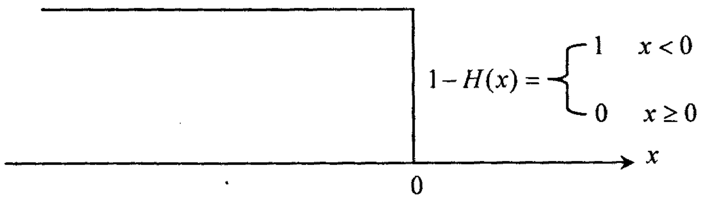
المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = Du_{xx} - Vu_x \qquad -\infty < x < \infty \qquad (2)$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = 1 - H(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

حيث وكالمعتاد أن $H(x)$ دالة هافيسايد ، وفي الشكل 19–4 يتبين التركيز الابتدائي :



شكل 19–4 الشرط الابتدائي لمعادلة الحمل والانتشار

لاحظ أننا في مسألة (2) حركنا الحد إلى $-\infty$ (لدينا الآن مسألة قيم ابتدائية) وعليه فإن ذلك لا يلبس المسألة الحقيقية لقياس التأثيرات النسبية للعامل D تبعاً للعامل V ، لحل مسألة (2) يمكننا تطبيق تحويل لابلاس على المتغير t أو تحويل فوريه على المتغير x وعلى الرغم من ذلك فهناك بديل آخر مهم جداً ، وذلك بدلاً من قياس التركيز $u(x,t)$ كدالة بدلالة x نعرف محوراً جديداً ξ يتحرك بسرعة V على محور x ، وبعبارة أخرى ، بدلاً من وضع محاورنا على ضفة الشاطئ إن صح التعبير ، فإننا نضع الآن نظام المحاور بحيث يتحرك مع صدر الموجة (وبالطبع الآن لما لدينا من الانتشار إضافة للحمل الحراري سوف لن يكون لدينا صدر موجه حاد ، وهذا يعني رياضياً أننا غيرنا الإحداثي المكاني من x إلى $\xi = x - Vt$ ، ويتضح الآن أن :

$\xi = 0$ نحن على صدر الموجة

$\xi = 1$ نحن أمام صدر الموجة بوحدة واحدة

$\xi = -1$ نحن خلف صدر الموجة بوحدة واحدة

ولذا علينا الآن تحويل مسألة القيم الابتدائية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية : $-\infty < x < \infty \qquad u_t = Du_{xx} - Vu_x$

الشرط الابتدائي : $-\infty < x < \infty \qquad u(x,0) = 1 - H(x)$

إلى مسألة أخرى في نظام المحاور المتحرك ثم حل المسألة الأخيرة وإجراء التحويل العكسي لهذا الحل لإيجاد حل المسألة الأصلية بدلالة الإحداثيات الأصلية (x,t) ، وللبداية نبدل المتغيرات (المتغيرات المستقلة) ، فبدلاً من الإحداثيات الأصلية (x,t) نستحدث إحداثيات جديدة (ξ,τ) بالآتي :

$$\xi = x - Vt$$

$$\tau = t$$

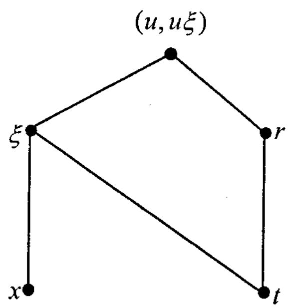
سيلاحظ القارئ أن المتغير τ هو نفسه t ، إلا أن إعطاءه اسماً جديداً يقلل الالتباس ، ولصياغة المعادلة التفاضلية الجزئية بدلالة (ξ,τ) ، نطبق قاعدة السلسلة :

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\tau \tau_t = -Vu_\xi + u_\tau$$

$$u_x = u_\xi \xi_x = u_\xi$$

$$u_{xx} = (u_\xi)_x = u_{\xi\xi}\xi_x = u_{\xi\xi}$$

وباستخدام المخططات الدالية ، كما في شكل 19-5 ، تتضح أكثر المعادلات أعلاه :



شكل 19-5 مخطط يبين الاعتماد الدالي للمتغيرات

المخطط في شكل 19-5 ذو فائدة لحساب المشتقات الجزئية للدوال u,u_ξ بالنسبة إلى x,t نظراً لأنه يبين بدقة كيفية اعتماد u,u_ξ ، بصورة عامة على τ و ξ وكيفية اعتماد ξ على كلا المتغيرين x,t ، بينما يعتمد المتغير τ على المتغير t فقط .

والآن نعوض عن u_t, u_x, u_{xx} في المعادلة التفاضلية الجزئية لنحصل على :

$$-Vu_\xi + u_\tau = Du_{\xi\xi} - Vu_\xi$$

$$u_\tau = Du_{\xi\xi}$$

وعليه تكون مسألة القيم الحدودية الابتدائية الجديدة بدلالة τ و ξ على النحو التالي :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_\tau = Du_{\xi\xi} \qquad -\infty < \xi < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(\xi,0) = 1 - H(\xi) \qquad -\infty < \xi < \infty$$

(لاحظ أن $\xi = x$ عندما $t = 0$ وعليه فإن الشرط الابتدائي الأول هو نفسه الشرط الابتدائي الثاني) ، وقد حلت هذه المسألة بالدرس الرابع عشر بتطبيق تحويل فوريه وحلها هو :

$$u(\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{D\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\beta) e^{-(\xi-\beta)^2/4D\tau} d\beta$$

حيث $\Phi(\beta)$ هو الشرط الابتدائي ، وعليه في هذه الحالة نحصل على أن :

$$u(\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{D\pi\tau}} \int_{-\infty}^{0} e^{-(\xi-\beta)^2/4D\tau} d\beta$$

وبفرض أن :

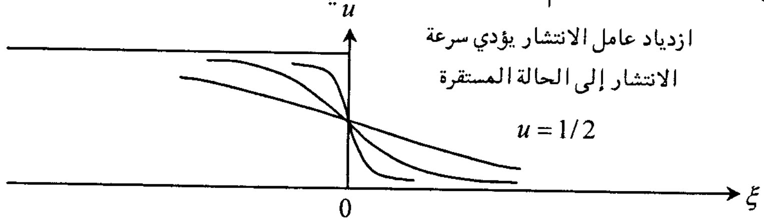
$$\bar{\beta} = \frac{\xi-\beta}{2\sqrt{D\tau}} d\bar{\beta} = \frac{-1}{2\sqrt{D\tau}} d\beta$$

نحصل على النتيجة المهمة الآتية :

$$u(\xi,\tau) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\xi}{2\sqrt{D\tau}}}^{\infty} e^{-\bar{\beta}^2} d\bar{\beta}\right]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{-\xi}{2\sqrt{D\tau}}\right)\right] & \xi < 0 \\ \frac{1}{2} erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{D\tau}}\right) & \xi \geq 0 \end{cases} \qquad (3)$$

ونلاحظ بيان الدالة أعلاه لقيم مختلفة للمتغير t في شكل 19-6 .



شكل 19-6 انتشار بسيط من تركيز عال إلى تركيز منخفض

وأخيراً للحصول على حل المسألة الأصلية بدلالة الإحداثيين x,t نعوض :

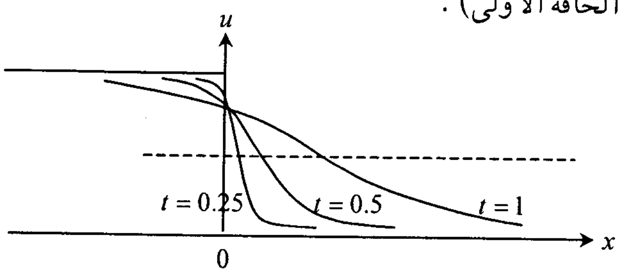
$$\xi = x - Vt$$
$$\tau = t$$

في معادلتين (3) فنحصل على :

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{Vt - x}{2\sqrt{D\tau}}\right)\right] & Vt > x \\ erfc\left(\frac{x - Vt}{2\sqrt{D\tau}}\right) & Vt \le x \end{cases} \tag{4}$$

وهذا هو حل مسألة الانتشار والحمل الحراري (2) وهو حقاً ذو تفسير سهل جداً فهو ليس إلا إمالة للشكل (19-6) .

وبعبارة أخرى ، اعتماداً على معامل الانتشار D وسرعة التيار V فإن الحل ينتقل إلى اليسار بسرعة V بينما ، وفي نفس الوقت تنتشر الحافة الأولى بسرعة تتعين بالمعامل D (شكل 19-7 يبين تفرق الحافة الأولى) .



شكل 19-7 حل الانتشار والحمل الحراري ينتقل وينتشر بنفس الوقت

ملاحظات

إن تبديل الإحداثيات مهم جداً في معالجة المعادلات التفاضلية الجزئية ، وبملاحظة المنظومات الفيزيائية بإحداثيات مختلفة يتم تبسيط المعادلات .

تمارين

1- حل المسألة الحدودية الابتدائية الآتية :

$$u_t = u_{xx} - 2u_x \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

$$u(x,0) = \sin x \qquad -\infty < x < \infty$$

2- حل مسألة الانتشار والحمل الحراري الآتية بتطبيق التحويل الوارد في الدرس الثامن :

$$u_t = u_{xx} - 2u_x \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

$$u(x,0) = e^x \sin x \qquad -\infty < x < \infty$$

3- ما حل مسألة الحمل الحراري الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = -2u_x \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = e^{-x^2}$$

تحقق من الإجابة .

4- حل المسألة :

$$u_t = Du_{xx} - Vu_x \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

$$u(x,0) = e^{-x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

هل أن الحل يتوقف ؟ كيف يتغير الحل باختلاف الزمن ؟

تلميح : لاحظ أن تحويلنا لتحريك المحاور يتيح لنا أساساً إهمال الحد Vu_x في المعادلة التفاضلية الجزئية ، وبعد حل المسألة الجديدة .

$$\text{PDE} \quad u_\tau = Du_{\xi\xi} \qquad -\infty < \xi < \infty \qquad 0 < \tau < \infty$$

$$\text{IC} \quad u(\xi,0) = e^{-\xi^2} \quad -\infty < \xi < \infty$$

نضع $\tau = t.\xi = x - Vt$ وفي هذه المسألة بالذات يمكن إيجاد قيمة التكامل :

$$u(\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{D\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2} e^{-(\xi-\beta)^2/4D\tau} d\beta$$

وهذا تحويل فوريه الوارد في الدرس الرابع عشر ، ويمكن أن يكون من الملائم أكثر للقارئ لكتابة التكامل وملاحظة قيمته من جداول التكامل .

الدرس العشرون
معادلة الموجة ذات البعد الواحد
(المعادلات الزائدية)

20–1 الغرض من الدرس

للتعريف بمعادلة الموجة ذات البعد الواحد :

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$$

وبيان كيفية تفسيرها لحركة الوتر المهتز ، وتبيان كيفية استنتاجها من معادلات نيوتن للحركة . إضافة لذلك ستتم مناقشة عدد قليل من الصيغ المختلفة لمعادلة الموجة مثل :

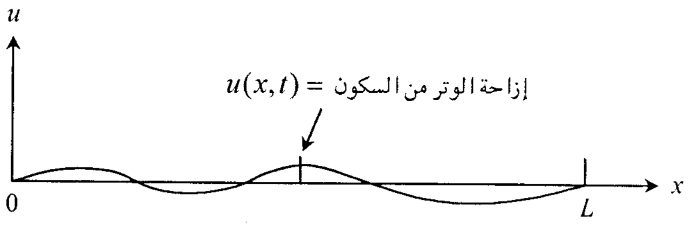
$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} + F(x,t)$$

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} - \beta u_t - \lambda u + F(x,t)$$

كان اهتمامنا ولحد الآن يتعلق بالظواهر الفيزيائية المتمثلة بمعادلة من نمط القطوع المكافئة (مسائل الانتشار) ، وسنبدأ الآن بدراسة النمط الثاني الواسع من المعادلات التفاضلية الجزئية ، ألا وهو نمط معادلات القطع الزائد . نبدأ أولاً بدراسة معادلة الموجة ذات البعد الواحد والتي تصف (ضمن أشياء أخرى) الحركة المستعرضة للوتر المهتز .

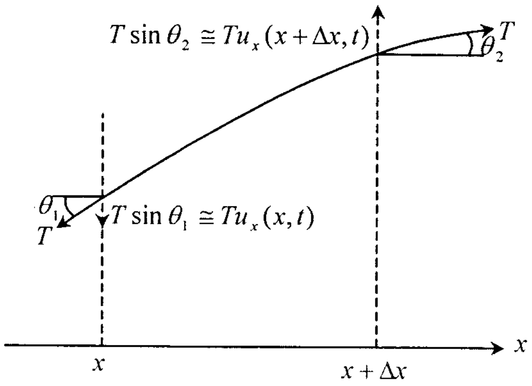
20–2 مسألة الوتر المهتز

لنتأمل الاهتزازات الصغيرة لوتر مربوط من نهايتيه ومشدود إليهما بثبات ، ولنفرض أن مادة الوتر متجانسة وأنه لا يتأثر بالجاذبية الأرضية كما أن اهتزازاته تتم بمستو واحد (شكل 20–1) .



شكل 20-1 الاهتزازات المستعرضة للوتر

ولوصف هذه الاهتزازات رياضيا نلاحظ القوى المؤثرة على قطعة صغيرة من الوتر (شكل 20-2) .



شكل 20-2 قطعة صغيرة $(x, x+\Delta x)$ من الوتر المهتز

وفي الأساس أن معادلة الموجة ليس أكثر من تطبيق معادلة نيوتن للحركة (تغير الزخم في القطعة الصغيرة من الوتر يساوي محصلة القوى المؤثرة) ، وبملاحظة شكل 20-1 يمكن أن نرى عدداً من القوى المؤثرة على الوتر بالاتجاه العمودي على محور x .

3-20 أهم هذه القوى هي

1- محصلة قوة الشد في الوتر $(\alpha^2 u_{xx})$

محصلة المركبة الأفقية للشد على القطعة هي :

$$= T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1$$

$$= T[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)]$$

2- القوة الخارجية $F(x,t)$

يمكن تسليط قوة خارجية على الوتر عند كل قيمة للمتغيرين x,t وعلى سبيل المثال :

a. الجاذبية الأرضية $F(x,t) = -mg$.

b. الدفع على الوتر لمختلف قيم t .

c. في معادلة الموجة ذات البعدين (والتي سندرسها مستقبلاً) والتي تصف حركة غطاء الطبل ، يمكن تسليط قوة بموجات صوتية ترتطم بسطح الغطاء .

3- قوة الاحتكاك ضد الوتر $(-\beta u_t)$

عندما يهتز الوتر في وسط ما ذي مقاومة لسرعة الوتر u_t فعندئذ قوة هذه المقاومة هي $-\beta u_t$.

4- القوة المعيدة $(-\gamma u)$

وهي قوة بعكس اتجاه إزاحة الوتر ، فإذا كانت الإزاحة موجبة (فوق محور x -) فعندئذ تكون هذه القوة سالبة (إلى الأسفل) .

وإذا طبقنا معادلة نيوتن للحركة :

القوة المسلطة على القطعة :

$$mu_{tt} = (x, x+\Delta x)$$

على القطعة الصغيرة من الوتر ، فنحصل على أن :

$$\Delta x \rho u_{tt} = T[u_x(x+\Delta x,t) = u_x(x,t)] + \Delta x F(x,t) - \Delta x \beta u_t(x,t)$$
$$- \Delta x \gamma u(x,t)$$

حيث ρ كثافة الوتر ، وبقسمة طرفي المعادلة على Δx واتخاذ $\Delta x \to 0$ نحصل على المعادلة المعروفة بمعادلة الهاتف :

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} - \beta u_t - \gamma u + F(x,t) \qquad (1)$$

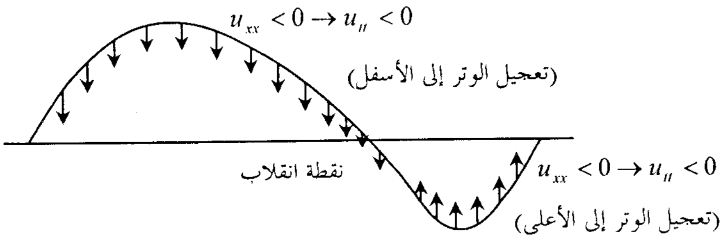
وهي المعادلة التي أردنا اشتقاقها (لاحظ أن $\beta, \gamma, F(x,t)$ في المعادلة أعلاه يجب أن تقسم على 1 ، إلا أننا أعدنا تسميتها β, γ, F للسهولة) ، والآن نوضح التفسير الهندسي للصيغة المبسطة لمعادلة الموجة الآتية :

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} \qquad (2)$$

4-20 التفسير الهندسي لمعادلة الموجة

يمكن أن نتساءل كيف أن معادلة مثل (2) تصف شيئاً مثل اهتزاز وتر الكمان .

وللإجابة على ذلك يجب أن نفهم أن المقدار u_{tt} يمثل التعجيل الشاقولي للوتر عند النقطة x ، وعليه فإن المعادلة (2) يمكن أن تفسر بالقول بأن تعجيل كل نقطة من نقاط الوتر يحصل بسبب شد الوتر وأنه كلما ازداد التقعر كلما تزداد القوة (ثابت التناسب $\alpha^2 = T/\rho$) لاحظ شكل 20-3 .



شكل 20-3 تفسير معادلة الموجة $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$

ملاحظات

1- أن معادلة الموجة $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$ تصف أيضاً الاهتزازات الطولية والالتوائية لذراع ، وفي هذه الاهتزازات تكون الإزاحة موازية إلى الذراع (مثل ضرب نهاية الذراع بمطرقة) ، حيث $u(x,t)$ تمثل الإزاحة الطولية لنقطة على الذراع عن موضعها الأصلي ، واستنتاج المعادلة التفاضلية الجزئية يتم بالطريقة نفسها تقريبا لحالة الاهتزازات المستعرضة ، وهي :

$$u_{tt} = k u_{xx}$$

حيث k وسيط فيزيائي يسمى بمعامل يونك (وهو قياس لمرونة الذراع) ، المواد التي لها معامل يونك كبير تهتز بسرعة ، الموجات الصوتية أيضاً تكون موجات طويلة .

2- إذا كان الوتر المهتز ذا كثافة متغيرة $\rho(x)$ فعندئذ ستكون معادلة الموجة الآتي :

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha^2(x) u_x\right]$$

وبعبارة أخرى ستكون المعادلة التفاضلية الجزئية ذات معاملات متغيرة .

3- بما أن معادلة الموجة $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$ تتضمن مشتقة u_{tt} من المرتبة الثانية بالنسبة للزمن فإنها تتطلب شرطين ابتدائيين :

(الوضع الابتدائي للوتر) $u(x,0) = f(x)$

(السرعة الابتدائية للوتر) $u_t(x,0) = g(x)$

وذلك ليتعرف الحل بصورة فريدة لكل $t > 0$ ، وهذا خلاف لمعادلة التوصيل الحراري التي تتطلب شرطاً ابتدائياً واحداً فقط .

4- أن معادلة الموجة ذات البعد الواحد تمثل أيضاً سريان تيار كهربائي في سلك فبموجب قوانين كرشوف نحصل على المعادلتين الآتيتين التفاضليتين الجزئيتين من المرتبة الأولى :

$$
\begin{aligned}
& i_x + Cv_t + Gv = 0 \\
& v_x + Li_1 + Ri = 0
\end{aligned} \tag{3}
$$

حيث :

x = الموضع على السلك

t = الزمن

i = التيار في السلك

$v(x,t)$ = الجهد في السلك

C = سعة وحدة الطول للسلك

G = المقاومة التسربية في وحدة الطول

R = مقاومة وحدة الطول في السلك

L = الحث الذاتي في وحدة الطول

المعادلتان (3) تعرفان بمعادلتي خط النقل وصيغتاهما ليستا بالصيغتين النهائيتين ، فباشتقاق المعادلة الأولى بالنسبة إلى x والمعادلة الثانية بالنسبة إلى t والضرب بالعدد C ثم الطرح نحصل على أن :

$$i_{xx} + Gv_x - CLi_{tt} - CRi_t = 0$$

وبموجب المعادلة الثانية من (3) :

$$v_x = -Li_t - Ri$$

نحصل على :

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)i_t + GRi \tag{4}$$

وهذه تسمى بمعادلة خط النقل للتيار i وهي معادلة من نمط القطع الزائد من الرتبة الثانية (ما لم يكن C أو L صفراً وعندها تصبح معادلة من نمط القطع المكافئ) .

كما أن الفولتية أيضاً لها معادلتها الخاصة هي :

$$v_{xx} = CLv_{tt} + (CR + GL)v_t + GRv \tag{5}$$

لاحظ أيضاً أنه إذا كان $G = R = 0$ فنحصل على المعادلتين :

$$\begin{aligned} v_{tt} &= \alpha^2 v_{xx} \\ i_{tt} &= \alpha^2 i_{xx} \end{aligned} \qquad \alpha^2 = 1/CL \tag{6}$$

تمارين

1- استنتج معادلة خط النقل (5) للفولتية v من معادلتي (3) .

2- من معرفتك لمختلف مقادير معادلة الموجة ، ماذا تتوقع شكل حل المسألة الآتية لمختلف قيم t ؟

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = u_{xx} - u_t \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin(\pi x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1$$

4- ما شكل حل المسألة الآتية لمختلف قيم t ؟

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad 0 < x < 1$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = \sin t \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1$$

ما التفسير الفيزيائي للمسألة ؟

4- كم حلاً للمعادلة $u_{tt} = u_{xx}$ من الصيغة :

$$u(x,t) = e^{ax+bt}$$

وهل مجموع حلين يكون حلاً للمعادلة ؟

الدرس الحادي والعشرون
حل دالمبرت لمعادلة الموجة

1−21 الغرض من الدرس

لإيجاد حل مسألة القيم الابتدائية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad -\infty < x < \infty$$

هذه المسألة (بدون شروط حدودية) تصف حركة الوتر بالشروط الابتدائية وقد حلت حوالي عام 1750 من قبل الرياضي الفرنسي دالمبرت ، هذا الحل يسمى حل دالمبرت وهو :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi$$

يمكن حسابه بسهولة إذا علم شرطاه الابتدائيين ، وإضافة لذلك فإن هذا ذو تفسير مهم بدلالة انتقال حركة الموجة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad -\infty < x < \infty \qquad (1)$$

نستطيع حل هذه المعادلة بطريقة تحويل فوريه (على x) أو بطريقة تحويل لابلاس (على t) ، ولكننا مع ذلك سنقدم هنا أسلوباً آخر (الإحداثيات القانونية) الذي يعرف القارئ بعدد من المفاهيم الجديدة المثيرة ونحل الآن مسألة (1) . هذا الأسلوب أساساً كما في الدرس الخامس عشر بطريقة تحريك المحاور .

21–2 حل دالمبرت لمعادلة الموجة ذات البعد الواحد

نحل مسألة (1) بتجزأتها إلى عدد من الخطوات :

الخطوة الأولى

[تحويل المتغيرين (x,t) إلى متغيرين جديدين (ξ,η)] نحول x,t إلى ξ,η بالآتي :

$$\xi = x + ct$$

$$\eta = x - ct$$

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

تتحول إلى :

$$u_{\xi\eta} = 0$$

لأنه بموجب قاعدة السلسلة يكون :

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi + u_\eta \\ u_t &= c(u_\xi - u_\eta) \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{tt} &= c^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) \end{aligned} \qquad (2)$$

وبالتعويض عن u_{xx} و u_{tt} في معادلة الموجة يتبع أن :

$$u_{\xi\eta} = 0$$

وهذا يكمل الخطوة الأولى .

الخطوة الثانية : (حل المعادلة المحولة) :

والآن يمكن حل المعادلة الجديدة بالتكامل بصورة مباشرة (أولاً بالنسبة إلى ξ ثم بالنسبة إلى η) . فبالنسبة إلى ξ يتبع أن :

$$u_\eta(\xi,\eta)=\phi(\eta)$$

حيث ϕ دالة اختيارية بدلالة η ، وثم بالتكامل بالنسبة إلى η يتبع أن :

$$u(\xi,\eta)=\Phi(\eta)+\psi(\xi)$$

حيث $\Phi(\eta)$ هي تكامل الدالة $\phi(\eta)$ وأن $\psi(\xi)$ دالة اختيارية بدلالة ξ ، وبعبارة أخرى نستطيع القول بأن الحل العام (كل حلول) للمعادلة :

$$u_{\xi\eta}=0$$

هي :

$$u(\xi,\eta)=\phi(\eta)+\psi(\xi) \qquad (3)$$

حيث $\phi(\eta),\psi(\xi)$ دالتان اختياريتان بدلالة η,ξ على التوالي ، وعلى سبيل المثال فإن القارئ يستطيع أن يتحقق من أن الدوال :

$$u(\xi,\eta)=\sin\eta+\xi^2$$
$$u(\xi,\eta)=1/\eta+\tan\xi$$
$$u(\xi,\eta)=\eta^2+e^\xi$$

كلها حلول للمعادلة $u_{\xi\eta}$ ، وهذا يكمل الخطوة الثانية .

الخطوة الثالثة : (الرجوع إلى الإحداثيات t و x) :

لإيجاد الحل العام (كل حلول) المعادلة $u_{tt}=c^2u_{xx}$ نعوض :

$$\xi=x+ct$$
$$\eta=x-ct$$

بالمعادلة :

$$u(\xi,\eta)=\phi(\eta)+\psi(\xi)$$

للحصول على :

$$u(x,t)=\phi(x-ct)+\psi(x+ct) \qquad (4)$$

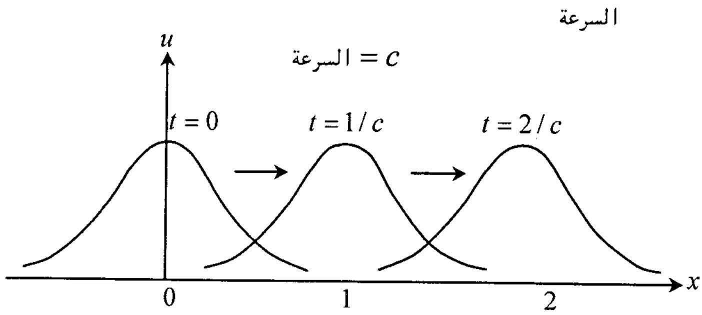
هذا هو الحل العام لمعادلة الموجة وأهميته تكمن بأنه يمثل فيزيائياً مجموع موجتين متحركتين باتجاهين متعاكسين وبسرعة c لكل منهما ، وعلى سبيل المثال أن :

$u(x,t)=\sin(x-ct)$ (موجة متحركة إلى اليمين)

$u(x,t)=(x+ct)^2$ (موجة متحركة إلى اليسار)

$u(x,t)=\sin(x-ct)+(x+ct)^2$ (موجتان متعاكستان)

ثلاثة حلول نموذجية . (شكل 21–1) يبين موجة بسيطة تتحرك إلى اليمين .



شكل 21–1 $u(x,t)=e^{-(x-ct)^2}$ **موجة متحركة إلى اليمين**

الخطوة الرابعة : (تعويض الشروط الابتدائية بالحل العام) :

يتذكر القارئ في نظرية المعادلات التفاضلية الاعتيادية أن المناورة العامة في حل معادلات الشروط الابتدائية كانت بإيجاد الحل العام ثم تعويض الشروط الابتدائية فيه

لحساب الثوابت الاختيارية ، وفي مسألتنا هذه لنا وضع مشابه ، ولحل مسألة القيم الابتدائيـة نجد أولا الحل العام :

$$u(x,t) = \phi(x-ct) + \psi(x+ct)$$

للمعادلـة التفاضليـة الجزئيـة (الـذي يتضمـن دالتيـن اختيـاريتين) ونعـوض فـي الشـرطين الابتدائيين :

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x)$$

في الحل العام لإيجاد الدالتين ϕ, ψ فنحصل على :

$$\begin{aligned} &\phi(x) + \psi(x) = f(x) \\ &-c\phi'(x) + c\psi'(x) + g(x) \end{aligned} \qquad (5)$$

والآن نكامل المعادلة الثانية أعلاه للحصول على معادلة تربط بين $\psi(x)$ [وبعد ذلك نحل هذه المعادلة آنياً مـع الأولى فنحصـل على $\phi(x)$] ، فمـن تكامل المعادلة الثانية مـن x_0 إلى x نحصل على :

$$-c\phi(x) + c\psi(x) = \int_{x_0}^{x} g(\xi)d\xi + K \qquad (6)$$

وبحل المعادلة الأولى من (5) مع (6) آنياً نحصل على :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(\xi)d\xi - K/2c \\ \psi(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(\xi)d\xi + K/2c \end{aligned} \qquad (7)$$

وعليه يكون حل مسألة (1) هو :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi \qquad (8)$$

ويسمى هذا الحل بحل دالمبرت ، ويلاحظ القارئ أن حدود التكامل $x+ct$ و $x-ct$ تتبع من الخواص البسيطة للتكامل ، بهذا نكون قد أنهينا حل المسألة .

وقبل أن نكمل الدرس نقدم بعض الأمثلة لتوضيح تطبيق حل دالمبرت في مسائل معينة :

3-21 أمثلة على حل دالمبرت

1- حركة الموجة الجيبية (sine wave) الابتدائية

تأمل الشروط الابتدائية :

$$u(x,0) = \sin x$$

$$u_t(x,0) = 0$$

يكون حل الموجة الجيبية الابتدائية الآتي :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sin(x-ct) + \sin(x+ct)\right]$$

وهذا يفسر بتجزئة الشكل الابتدائي $u(x,0) = \sin x$ إلى جزءين متساويين :

$$\frac{\sin x}{2} \qquad \text{و} \qquad \frac{\sin x}{2}$$

ثم جمع الموجتين الحاصلتين اللتين تتحرك إحداهما إلى اليسار والأخرى إلى اليمين (وسرعة كل منهما تساوي c) ، ويمكن للقارئ أن يتخيل شكل الموجة الحاصل .

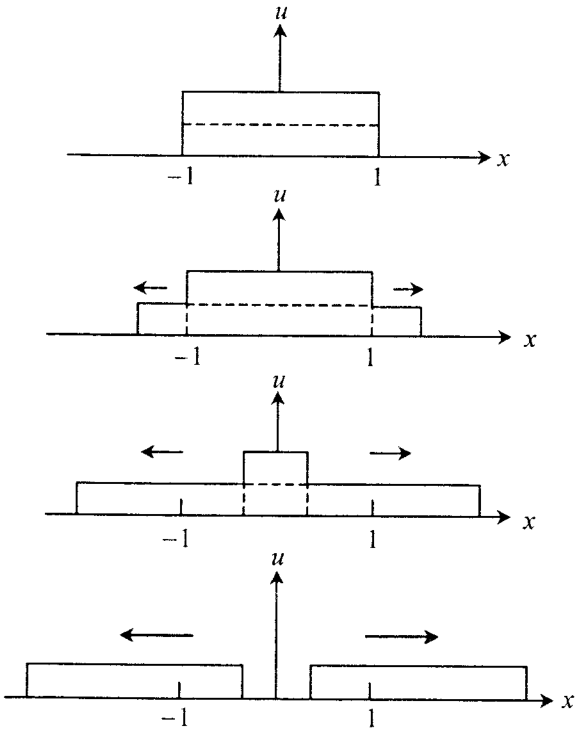
2- حركة موجة مربعة بسيطة

في هذه الحالة نبدأ بشروط ابتدائية :

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = 0$$

ثم نشطر الموجة الابتدائية إلى موجتين متساويتين متحركتيـن باتجـاهين متعاكسـين فتحصل الحركة الموجية المبينة في (شكل 21-2) .



شكل 21-2 تجزئة الموجة الابتدائية إلى موجتين متحركتين

3- السرعة الابتدائية معلومة

لنفرض الآن أن الوضع الابتدائي للوتر في حالة التوازن ونحرك الوتر بسرعة ابتدائية (كما في وتر البيانو) تساوي $\sin x$:

$$u(x,0) = 0$$

$$u_t(x,0) = \sin x$$

وهنا يكون الحل هو :

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \sin\xi \; d\xi$$

$$= \frac{1}{2c}\left[\cos(x+ct) - \cos(x-ct)\right]$$

الذي يمثل مجموع موجتين جيبتماميتين متحركتين ، وللقارئ أن يسأل نفسه فيما إذا كان هذا الحل مقبولاً .

وهذا يكمل هذا الدرس وفي الدرس القادم سنبين إذا كان حل دالمبرت يؤدي إلى تفسيرات نافعة في المستوى xt .

ملاحظات

1- لاحظ أن المعادلة التفاضلية الجزئية ذات المرتبة الثانية لها دالتان اختياريتان في الحل العام ، في الوقت الذي يكون في الحل العام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية ذات المرتبة الثانية ثابتان اختياريان ، بعبارة أخرى أن المعادلة التفاضلية الجزئية لها حلول أكثر من المعادلة التفاضلية الاعتيادية .

2- أن الأسلوب العام المتبع في تبديل أنظمة المحاور في المعادلة التفاضلية الجزئية لإيجاد معادلة مبسطة هو أسلوب مألوف في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية ، والإحداثيان (ξ,η) في هذه المسألة يعرفان بالإحداثيين القانونيين ، وسنبحثهما أكثر لاحقاً ، وبخاصة عند دراستنا لمسائل القطع الزائد .

3- أن مناورة إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية ثم تعويض الشروط الحدودية والشروط الابتدائية فيه ليس أسلوباً مألوفاً في حل المعادلات التفاضلية

الجزئية ، وأن الحل الوارد في هـذا الـدرس هـو الوحيـد الـذي يسـتخدم فـي هـذه المناورة ، وعادة لا يمكن إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضليـة الجزئيـة وحتـى إن وجد فهو عموماً معقد لتعويض الشروط فيه .

تمارين

1- تحقق من أن حل دالمبرت (8) يحقق مسألة القيم الابتدائية (1) .

2- عوض (7) في الحل العام :

$$u(x,t) = \phi(x-ct) + \psi(x+ct)$$

لإيجاد حل دالمبرت .

3- ما حل مسألة القيم الابتدائية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = e^{-x^2} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad -\infty < x < \infty$$

ما شكل الحل للقيم المختلفة من الزمن ؟

4- ما حل مسألة القيم الابتدائية الآتية ؟

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = e^{-x^2} \end{cases} \qquad -\infty < x < \infty$$

ارسم بيان الحل لقيم مختلفة من الزمن .

5- بصورة جبرية جد $\psi(x)$ ، $\phi(x)$ من (5) و (6) للحصول على (7) .

الدرس الثاني والعشرون
استخدامات أخرى لحل دالمبرت

22–2 الغرض من الدرس

لتوضيح كيفية استخدام حل دالمبرت لإيجاد حركة الموجة لمسألة الوتر نصف اللامنتهي :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad 0 < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الحدودي :

$$u(0,t) = 0 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad 0 \le x < \infty$$

وإضافة لذلك سيتم تفسير حل دالمبرت في المستوى xt .

وجدنا بالفصل السابق أن المقدار :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi \qquad (1)$$

يصف الإزاحة u للوتر غير المنتهي بدلالة الإزاحة الابتدائية $u(x,0) = f(x)$ والسرعة الابتدائية $u_t(x,0) = g(x)$ ، وفي هذا الدرس سنلاحظ تفسيرات مهمة للمعادل أعلاه في

المستوى $- xt$ (مستوى الزمان والمكان) وتعديلات للمعادلة لتكون حل مسألة الوتر نصف اللامنتهي ، وسنبدأ بتفسيرنا للمعادلة في المستوى $- xt$.

2–22 التفسير الزماني المكاني لحل دالمبرت

برهنا في الفصل السابق على أن حل مسألة القيمة الابتدائية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad -\infty < x < \infty \qquad (2)$$

هو :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi$$

والآن نقدم تفسيراً لهذا الحل في المستوى $- xt$ في حالتين معينتين .

الحالة الأولى : (الوضع الابتدائي معلوم ، السرعة الابتدائية صفر) :

نفرض أن للوتر شروط ابتدائية ، هي :

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = 0$$

وهنا يكون حل دالمبرت :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right]$$

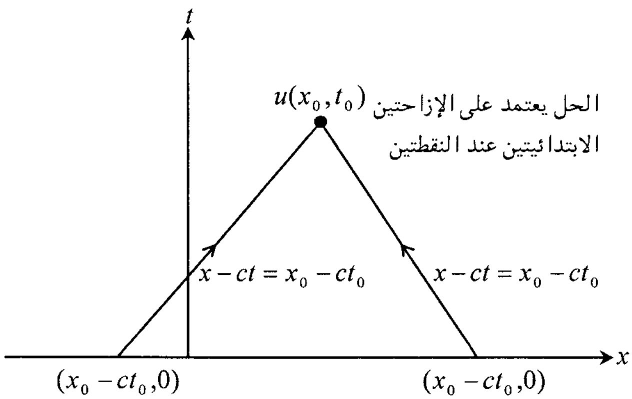
ويكون تفسير هذا الحل عند النقطة (x_0,t_0) ممثلاً بالشكل 22-1 بأنه معدل الإزاحة الابتدائية $f(x)$ عند النقطتين (x_0-ct_0) و $(x_0+ct_0,0)$ ويتم إيجاده بالرجوع من حيث أتينا على المستقيمين :

$$\begin{aligned} x-ct &= x_0-ct_0 \\ x+ct &= x_0+ct_0 \end{aligned} \qquad \text{(المنحنيات المميزان)}$$

وعلى سبيل المثال ، باستخدام هذا التفسير ، فإن مسألة القيم الابتدائية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

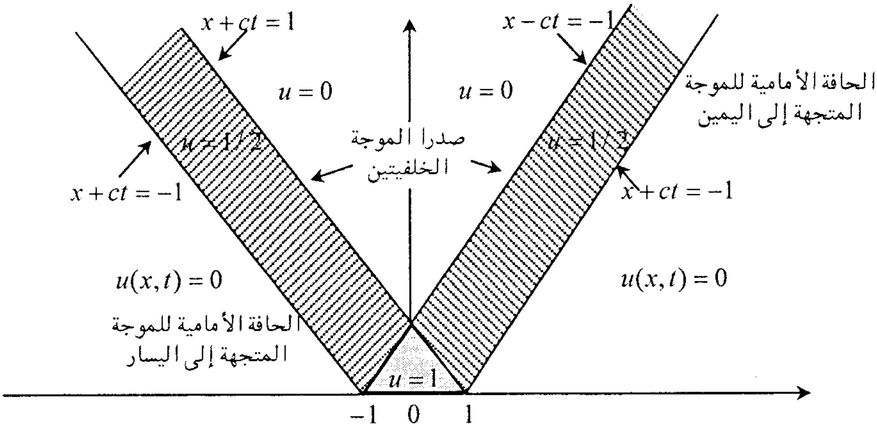
$$u_{tt}=c^2u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \qquad 0<t<\infty$$



شكل 22-1 تفسير الحل $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-ct)+f(x+ct)\right]$ في المستوى - xt

$$\begin{cases} u(x,0)=\begin{cases}1 & -1<x<1 \\ 0 & \text{لقيم } \chi \text{ الأخرى}\end{cases} \\ u_t(x,0)=0 \end{cases} \qquad (3)$$

تعطينا الحل في المستوى - xt المبين في شكل 22-2 .



شكل 22–2 حل مسألة القيم الابتدائية (1) في المستوى xt

يمثل (شكل 22–2) صورة أخرى لبيان الحل في شكل 21–2 في الدرس السابق .

نفسر الآن حل دالمبرت عندما تكون الإزاحة الابتدائية صفراً والسرعة الابتدائية اختيارية .

الحالة الثانية : (الإزاحة الابتدائية اختيارية) :

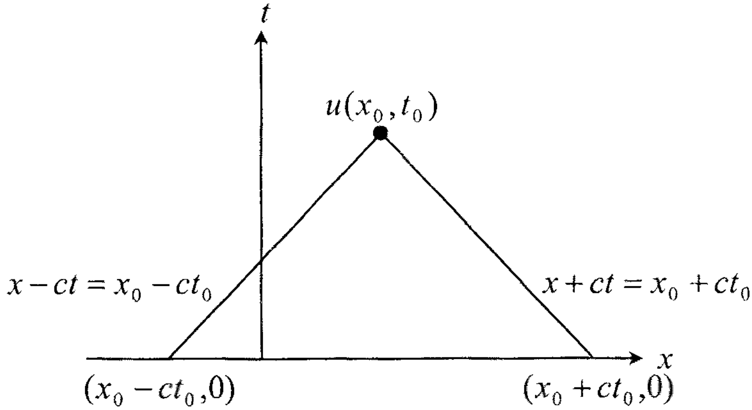
لاحظ الآن الشروط الابتدائية :

$$u(x,0)=0$$
$$u_t(x,0)=g(x)$$

الحل هنا هو :

$$u(x,t)=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi$$

وعليه يكون u عند النقطة (x_0,t_0) مساوياً تكامل السرعة الابتدائية بين النقطتين x_0-ct_0 و x_0+ct_0 على الخط الابتدائي $t=0$ (شكل 22–3) .



شكل 22–3 تفسير السرعة الابتدائية في المستوى – xt

ومرة أخرى ، باستخدام هذا التفسير فإن للمسألة الابتدائية :

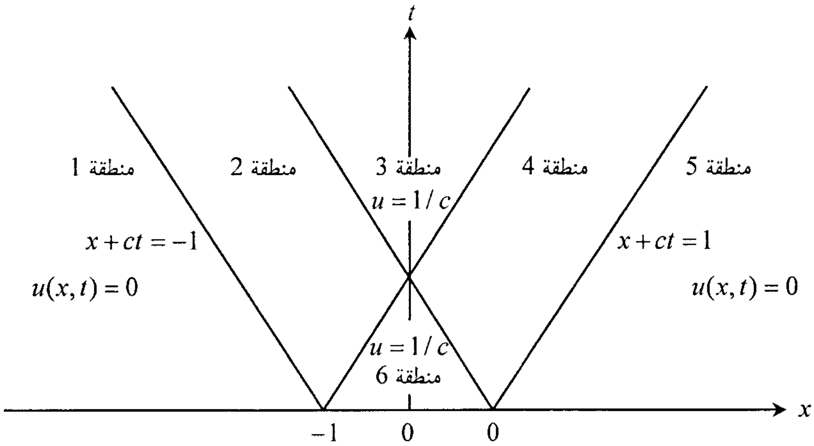
المعادلة التفاضلية :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{لقيم } \chi \text{ الأخرى} \end{cases} \end{cases} \qquad (4)$$

حلاً في المستوى – xt مبيناً في شكل (22–4) ، وهذه المسألة تتمثل بتسليط دفع ابتدائي (السرعة = 1) على الوتر للقيم $-1 < x < 1$ ومراقبة حركة الموجة الناتجة (كما في وتر البيانو) ولإيجاد الإزاحة ، نحسب حل دالمبرت .



شكل 22–4 حل مسألة (4) في المستوى – xt

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} 0\ d\xi \qquad (x,t) \text{ في منطقة } 1$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{-1}^{x+ct} d\xi \qquad (x,t) \text{ في منطقة } 2$$

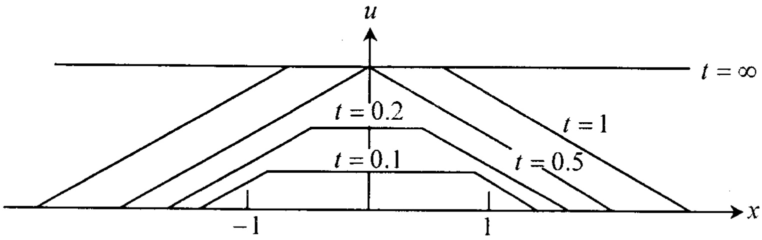
$$= \frac{1}{2c}\int_{-1}^{1} d\xi \qquad (x,t) \text{ في منطقة } 3$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{1} d\xi \qquad (x,t) \text{ في منطقة } 4 \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} 0 d\xi \qquad (x,t) \text{ في منطقة } 5$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} d\xi \qquad (x,t) \text{ في منطقة } 6$$

وفي شكل (22–5) بيان لهذا الحل لقيم مختلفة من الزمن .



شكل 22–5 حل مسألة (4) لقيم مختلفة من الزمن

وهذا يكمل تفسيرنا لحل دالمبرت في المستوى xt – وفي باقي هذا الدرس سنحل مسألة القيم الحدودية الابتدائية للوتر نصف اللامنتهي الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad 0 < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(0,t) = 0 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad 0 < x < \infty \qquad (6)$$

وذلك بتعديل صيغة دالمبرت .

22–3 حل مسألة الوتر نصف اللامنتهي باستخدام صيغة دالمبرت

هدفنا الآن هو إيجاد موجة الوتر المثبت الطرف عند الصفر والذي يحقق شروطاً ابتدائية معلومة ، لإيجاد حل (6) نتبع طريقة مشابهة لحالة الوتر اللامنتهي والتي هي إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u(x,t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

وإذا عوضنا الشرط الابتدائية في الحل العام كما فعلنا في الدرس السابع فنحصل على (نفس المعادلتين) :

$$\begin{aligned}\phi(x-ct) &= \frac{1}{2}f(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} g(\xi)\,d\xi + K \\ \psi(x+ct) &= \frac{1}{2}f(x+ct) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi - K\end{aligned} \qquad (7)$$

والآن لدينا قضية لم تصادفنا في حالة الوتر المنتهي ، فبما أننا نبحث الآن عن الحل $u(x,t)$ عند كل نقطة في الربع الأول $(x>0, t>0)$ من المستوى $-xt$ فمن الواضح ، أن علينا إيجاد :

$\phi(x-ct)$ لكل القيم $-\infty < x-ct < \infty$

$\psi(x+ct)$ لكل القيم $0 < x+ct < \infty$

ولسوء الحظ ، أن المعادلة الأولى من (7) تعطي $\phi(x-ct)$ فقط عندما $x-ct \geq 0$ لأن $g(x)$ و $f(x)$ معلومتان فقط عندما $x \geq 0$ ، وطالما أن $x-ct \geq 0$ فليس هناك قضية ما ، لأنه عند تعويض (7) في الحل العام :

$$u(x,t) = \phi(x-ct) + \psi(x+ct)$$

نحصل على أن :

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \phi(x-ct) + \psi(x+ct) \\ &= \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi\end{aligned}$$

والسؤال الآن ما العمل عندما $x < ct$ ؟ وهنا يأتي دور تطبيق الشرط الحدودي $u(0,t) = 0$ فعندما $x < ct$ نطبق الشرط الحدودي في المسألة لإيجاد $\phi(x-ct)$ ، وبتعويض الشرط الحدودي $u(0,t) = 0$ في الحل العام :

$$u(x,t) = \phi(x-ct) + \psi(x+ct)$$

نحصل على :

$$\phi(-ct) = -\psi$$

وعليه يكون :

$$\phi(x-ct) = -\frac{1}{2} f(ct-x) - \frac{1}{2c}\int_{x0}^{ct-x} g(\xi)\ d\xi + K$$

وبتعويض قيمة ϕ هذه في الحل العام :

$$u(x,t) = \phi(x-ct) + \psi(x+ct)$$

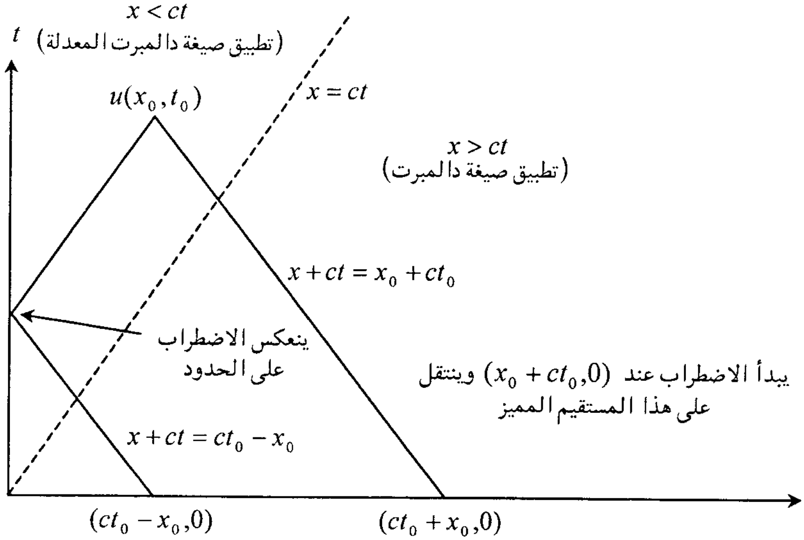
نحصل على :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) - f(ct-x)\right] + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} g(\xi)\ d\xi \quad 0 < x < ct$$

عندما $0 < x < ct$ وعليه بتجميع الحلين عندما $x < ct$ وعندما $x > ct$ نحصل على الحل المطلوب .

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\ d\xi & x \ge ct \\ \frac{1}{2}\left[f(x+ct) - f(ct-x)\right] + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} g(\xi)\ d\xi & x < ct \end{cases} \tag{8}$$

لاحظ (شكل 6-22) .



شكل 22–6 تفسير حل مسألة الوتر نصف اللامنتهي من خلال المستوى xt

وبهذا يكتمل درسنا ، وسنناقش تفسير معادلة 8 من خلال الملاحظات .

ملاحظات

1- إن المعادلة 8 هي ما نتوقعه من الوتر نصف اللامنتهي بالشرط الحدودي $u(0,t) = 0$ فعندما $x \geq ct$ يكون الحل كحل دالمبرت لموجة الوتر اللامنتهي ، ولكن عندما $x < ct$ يعدل الحل $u(x,t)$ تبعاً لانعكاس الموجة على الحدود ، (تتبدل إشارة الموجة بعد الانعكاس) .

2- إن الحل 8 سوف يتغير عند تغير الشرط الحدودي $u(0,t) = 0$ ويمكن إيجاد حلول وفق شروط حدودية أخرى :

$$u(0,t) = f(t)$$

أو :

$$u_x(0,t) = 0$$

ويستطيع القارئ ملاحظة المربع لاستزادة المعلومات .

3- يعرف المستقيمان :

$$x + ct = \text{constant}$$

$$x - ct = \text{constant}$$

حيث k_1, k_2 ثابتان ، بالمستقيمين المميزين واللذين علهما يتـم بـث الاضطـراب ، والمستقيمات المميزة تقترن عادة مع معادلات نمط القطع الزائد .

تمارين

1- حل مسألة الوتر نصف اللامنتهي :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad 0 < x < \infty \qquad 0 < x < \infty$$

الشرط الحدودي :

$$u(0,t) = 0 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = xe^{-x^2} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad 0 < x < \infty$$

وارسم الحل لقيم مختلفة للزمن .

2- إن حل مسألة الوتر نصف اللامنتهي في مسألة 1 يمكن إيجاده كما يأتي :

(a) توسيع الشرط الابتدائي على كل المحور الحقيقي $-\infty < x < \infty$ على الوجه الآتي :

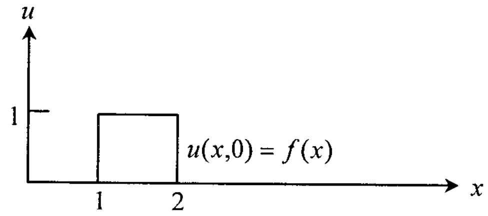
$$u(x,0) = -xe^{-x^2} \qquad -\infty < x < 0$$

$$u_t(x,0) = 0 \qquad -\infty < x < 0$$

(b) اتخاذ معدل الموجتين المتجهتين يميناً ويساراً كما فعلنا في الدرس السابق .

(c) البحث عن الحل عندما $x \geq 0$.

طبق هذا المفهوم لرسم بيان الحل (لمختلف قيم t) للشرط الابتدائي المبين في الشكل الآتي :



3- حل مسألة الوتر نصف اللامنتهي الآتية :

المعادلة التفاضلية الابتدائية :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad 0 < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الحدودي :

$$u_x(0,t) = 0 \qquad 0 < t < \infty$$

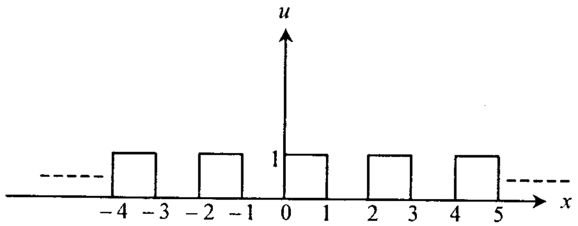
الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \le x < \infty$$

بطريقة مشابهة لمسألة الوتر نصف اللامنتهي المحلولة في هذا الدرس ، مما تفسير هذه المسألة ؟

4- افرض أن وتراً يهتز وفق المعادلة $u_{tt} = u_{xx}$ والإزاحة الابتدائية المعطاة بالشكل الآتي :

افرض أن السرعة الابتدائية هي $u_t(x,0) = 0$ ، صف حل المسألة في المستوى xt لاحظ في هذه المسألة أن الشرط الابتدائي $u(x,0)$ دالة غير مستمرة .



الدرس الثالث والعشرون
شروط حدودية مقترنة بمعادلة الموجة

23–1 الغرض من الدرس

توضيح كيفية اقتران معادلة الموجة (عندما x مقيد) :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad 0 < x < L \qquad 0 < t < \infty$$

بأحد أنماط الشروط الحدودية الثلاثة الآتية :

1– شروط النهايتين المتحكمتين :

$$u(0,t) = g_1(t)$$
$$u(L,t) = g_2(t)$$

2– شروط القوى المعينة على الحدود :

$$u_x(0,t) = g_1(t)$$
$$u_x(L,t) = g_2(t)$$

3– شروط الربط المرن :

$$u_x(0,t) - \gamma_1 u(0,t) = g_1(t)$$
$$u_x(L,t) - \gamma_2 u(L,t) = g_2(t)$$

(أو تركيب من هذه الشروط) وتوضيح طبيعة الحلول المقترنة بهذه المسائل .

لحد الآن نكون قد درسنا واحداً فقط من الحركة الموجية ذات البعد الواحد ذات الاهتزازات المستعرضة للوتر ، وسيدرك القارئ أن هذه ليس إلا قمة الجبل الجليدي العائم قدر ما يتعلق بحركة الموجة ، وهناك أنماط أخرى قليلة من الاهتزازات المهمة هي :

1- الموجات الصوتية (الموجات الطولية) .
2- الموجات الكهرومغناطيسية للضوء والكهربائية .
3- اهتزازات المواد الصلبة (طولية ، مستعرضة ، دورانية) .
4- الموجات الاحتمالية في الميكانيك الكمي .
5- الموجات المائية (موجات مستعرضة) .
6- الوتر المهتز (موجات مستعرضة) .

إن الغرض من هذا الدرس هو دراسة بعض الأنماط المختلفة من الشروط الحدودية المقترنة بالمسائل الفيزيائية من هذا النمط ، وهنا سنبقى مع مسائل ذوات البعد الواحد وفق شروط حدودية (خطية) يمكن وضعها ضمن أحد الأنماط الثلاثة الآتية :

1- شروط النهايتين المتحكمتين (النمط الأول) :

$$u(0,t) = g_1(t)$$
$$u(L,t) = g_2(t)$$

2- شروط القوى المعلومة على الحدود (النمط الثاني) :

$$u_x(0,t) = g_1(t)$$
$$u_x(L,t) = g_2(t)$$

3- شروط الربط المرن على الحدود (النمط الثالث) :

$$u_x(0,t) - \gamma_1 u(0,t) = g_1(t)$$
$$u_x(L,t) - \gamma_2 u(L,t) = g_2(t)$$

نبدأ بدراسة الشروط الحدودية من النمط الأول :

1- شروط النهايتين المتحكمتين

نتعامل الآن مع مسألة مثل :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

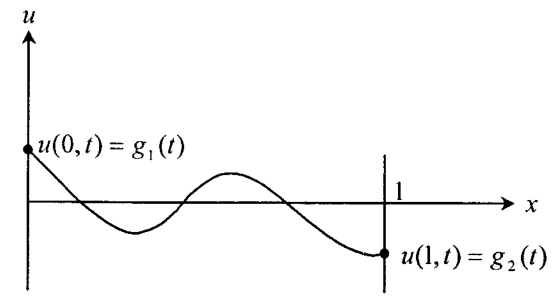
الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = g_1(t) \\ u(1,t) = g_2(t) \end{cases} \qquad 0 < t < \infty \qquad (1)$$

الشروط الابتدائية :

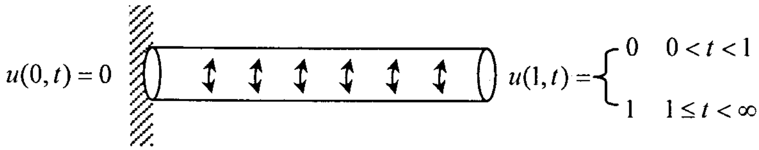
$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1$$

حيث نتحكم بنقطتي النهاية بحيث تتحركان بطريقة معلومة (لاحظ شكل 23−1) .



شكل 23−1 التحكم في نهايتي الوتر

هناك مسألة نموذجية من هذا النمط تقتضي ضمنا لي النهاية اليمنى (عندما $t = 1$) لذراع مربوطة ، عدداً من الدرجات الاهتزازات الالتوائية (شكل 23−2) .



شكل 23−2 الاهتزازات الالتوائية لذراع

في مجال نظرية السيطرة الرياضية هناك مسألة مهمة تتضمن تعيين الدالة الحدودية $g_2(t)$ ، بحيث أن اهتزازات الوتر تقترب من الصفر بأقل زمن ممكن .

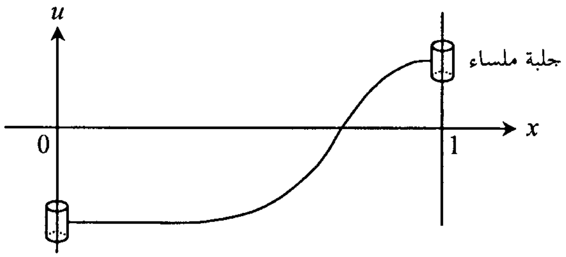
2– شروط القوى المعلومة على الحدود

بالنظر لأن القوتين الشاقوليتين عند النهاية اليسرى والنهاية اليمنى هما $Tu_x(0,t)$ و $Tu_x(L,t)$ على التوالي ، وبجعل نهايتي الوتر تنزلقان تشاقولياً على جلبة (جزء من أنبوب معدني يكتنف ذراعاً) ملساء (خالية من الاحتكاك) وأن الشروط الحدودية تصبح :

$$u_x(0,t) = 0$$

$$u_x(L,t) = 0$$

لاحظ (شكل 23–3) .

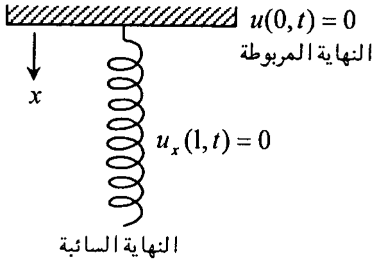


شكل 23–3 شروط حدودية حرة على الوتر

في المثالين الآتيين شروط مشابهة للشروط الحدودية أعلاه .

(a) نهاية سائبة لنابض حلزوني يهتز طولياً

تأمل نابضاً حلزونياً نهايته السفلى غير مربوطة (شكل 23–4) :



شكل 23–4 نهاية سائبة لوتر مهتز

تمارين

1- ارسم مخططاً تقريبياً لحل المسألة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = \sin t \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1$$

لمختلف قيم t .

2- ارسم مخططاً تقريبياً لحل المسألة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u_x(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin(\pi x/2) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1$$

لمختلف قيم t ، هل تتمكن من تخمين الحل ؟

الدرس الرابع والعشرون

قوة مفروضة بنهاية النابض الحلزوني المهتز

24–1 الغرض من الدرس

توضيح كيفية حل المعادلة التفاضلية باستخدام قوة مفروضة بنهاية نـابض فمثـلا إذا استخدمنا قوة مقدارها $v(t)$ داين عنـد النهاية $x = 1$ (القـوة الموجبـة تقـاس إلى الأسفل) فعندئذ الشرط الحدودي يصبح :

$$u_x(1,t) = \frac{1}{k}v(t)$$

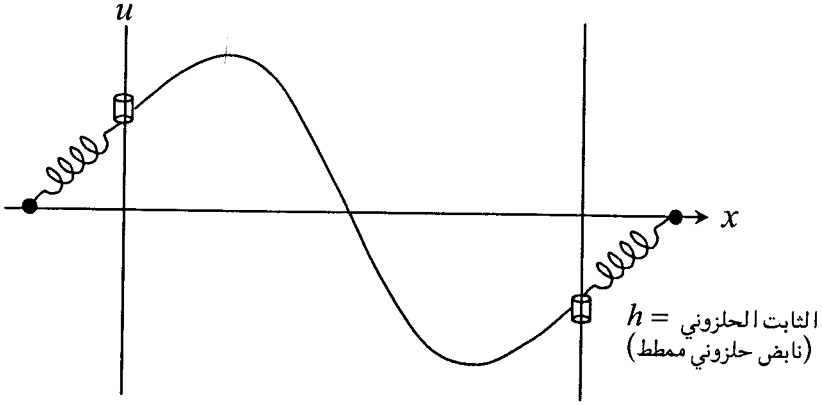
حيث k معامل يونك .

فـي حالـة القـوة المفروضـة لا يتطلـب أن تحـافظ نهايتـها الوتـر (أو النـابض الحلزوني) على موضع معين ، إلا أن القوة المستخدمة تميل إلـى أن تحـرك الحـدود باتجـاه معلوم .

المسائل الفيزيائية المشابهة لهذه تحدث في الفيزياء عند استخدام مجـال كـهربائي (قوة) على الإلكترونات المهتزة .

24–2 الربط المرن على الحدود

تأمل وتر الكمان المربوطة نهايتيه بمنظم مرن كما في (شكل 24–1) .



شكل 24–1 مخطط يوضح الربط المرن

الربط الحلزوني ، هنا عند كل من النهايتين يسبب قوة شاقولية تتناسب طردياً مع الإزاحتين الآتيتين .

$u(0,t) =$ الإزاحة عند النهاية اليسرى

$u(L,t) =$ الإزاحة عند النهاية اليمنى

وباحتساب الشد الشاقولي عند كل من النهايتين يكون :

$Tu_x(0,t) =$ الشد إلى الأعلى عند النهاية اليسرى

$-Tu_x(L,t) =$ الشد إلى الأعلى عند النهاية اليمنى

حيث T هو الشد في الوتر ، وبمساواة هذين الشدين مع الإزاحتين بعد الضرب بالثابت الحلزوني h تتبع الشروط الحدودية الآتية :

$$u_x(0,t) = \frac{h}{T}u(0,t)$$
$$u_x(L,t) = -\frac{h}{T}u(L,t) \qquad (1)$$

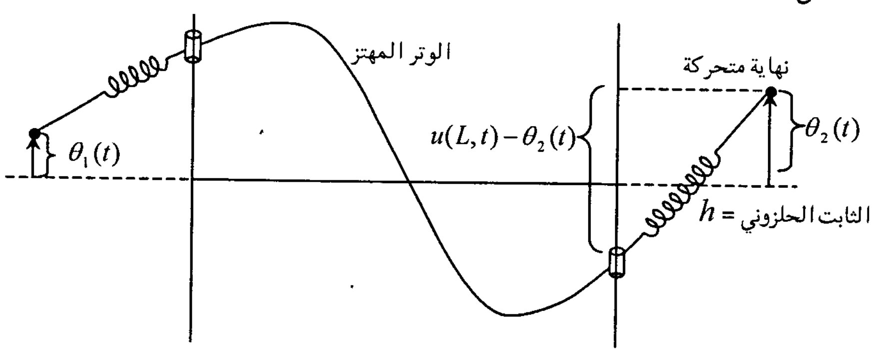
لاحظ أنه إذا كان $u(0,t)$ موجباً فإن $u_x(0,t)$ موجب بينما إذا كان $u(L,t)$ موجباً فإن $u_x(L,t)$ سالب ، وبإعادة صياغة الشروط الحدودية المتجانسة هذه يتبع أن :

$$u_x(0,t) - \frac{h}{T}u(0,t) = 0$$
$$u_x(L,t) + \frac{h}{T}u(L,t) = 0 \qquad (2)$$

وإذا أزيح الربطان الحلزونيان بالدالتين $\theta_2(t), \theta_1(t)$ فعندئذ نحصل على الشروط الحدودية غير المتجانسة الآتية :

$$u_x(0,t) = \frac{h}{T}\left[u(0,t) - \theta_1(t)\right]$$
$$u_x(L,t) = -\frac{h}{T}\left[u(L,t) - \theta_2(t)\right] \qquad (3)$$

لاحظ شكل 24-2 .



شكل 24-2 مخطط يوضح الشروط الحدودية المرنة

هذه يكمل دراستنا لمعظم الأنماط المختلفة المألوفة المقترنة بمسائل نمط القطع الزائد ، وفي الدروس القليلة القادمة سوف نحل مسائل ذات شروط حدودية مشابهة .

ملاحظات

1- هناك شرط حدودي لم نناقشه في هذا الدرس يحدث عندما يؤثر الوتر المهتز بقوة على النهايتين تتناسب مع سرعة الوتر (بعكس الاتجاه) ، وفيما يأتي مثل هذا الشرط (المؤثر على النهاية اليسرى) :

$$Tu_x(0,t) = -\beta u_t(0,t)$$

2- هناك أيضاً ربط مرن غير خطي عند النهاية اليسرى من الوتر هو :

$$Tu_x(0,t) = \phi[u(0,t)]$$

حيث $\phi(u)$ دالة اختيارية بدلالة u مثل :

$$Tu_x(0,t) = -hu^3(0,t)$$

الذي ينص على أن القوة المعيدة عند النهاية اليسرى تتناسب طردياً تبع مكعب الإزاحة وليس تبع u (كما الحال في قانون هوك) .

3- وإذا ربطت كتلة m إلى النهاية السفلى لوتر يهتز طولياً فعندئذ يكون الشرط الحدودي الآتي :

$$mu_{tt}(L,t) = -ku_x(L,t) + mg$$

تمارين

1- ما طبيعة الشرط الحدودي :

$$u_x(0,t)=\frac{h}{T}\left[u(0,t)-\theta_1(t)\right]$$

عندما :

(a) $h\to\infty$

(b) $h\to 0$

هل يتفق مع تصورك ؟

2- ارسم مخططاً تقريبياً لحل المسألة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt}=u_{xx}\qquad 0<x<1\qquad 0<t<\infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases}u(0,t)=0\\ u_x(1,t)=-u(1,t)\end{cases}\qquad 0<t<\infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases}u(x,0)=x\\ u_t(x,0)=0\end{cases}\qquad 0\le x\le 1$$

الدرس الخامس والعشرون

الوتر المنتهي المهتز (الموجات الصامدة)

25–1 الغرض من الدرس

معرفة كيفية إيجاد الاهتزازات المستعرضة لوتر منتــه موصـوف بالمســألة الحدوديـة الابتدائية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < L \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad 0 \le x \le L$$

وذلك بالأسلوب المعتاد لطريقة فصل المتغيرات وتبيان كيفية تفسير الحل $u(x,t)$ كمجموع غير منته :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$$

للاهتزازات البسيطة التي أشكالها $X_n(x)$ هـي حلول (الدوال الذاتية) لمسائل قيم حدودية معينة من مسائل ستورم – ليوفيل .

حتى الآن كانت دارستنا لمعادلة الموجة $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ لمنطقل غير مقيد $-\infty < x < \infty$ وقد وجدنا (حل دالمبرت) حلولاً للموجـات المتحركـة (باتجـاهين متعاكسـين) ، وعندمـا نـدرس معادلـة الموجـة لمنطلق مقيد $0 < x < L$ نجـد أن الموجـات لا تبقـى متحـركة نظـراً لمفاعلتها المتكررة مع الحدود وفي الحقيقة أنها غالباً تبدو بما يعـرف بالموجـات المسـتقرة وعلى سبيل المثال إذا لاحظنا مـا يحدث لوتـر القيثارة (المثبتة كلتا نهايتيه $x = 0, L$) عند تحريكه الموصوف بالمسألة البسيطة الحدودية الابتدائية من نمط القطع الزائد الآتية :

المعادلات التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < L \qquad 0 < t < \infty$$

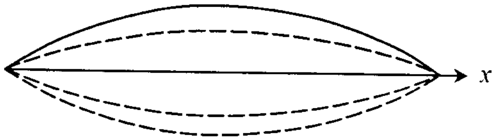
الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

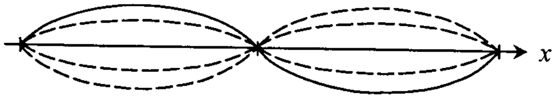
الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad 0 \le x \le L$$

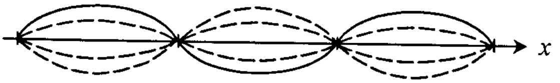
والذي يحدث هنا أن حل الموجة المتحركة للمعادلة التفاضلية الجزئيـة والشـرط الابتدائـي يحافظ علـى الانعكـاس مـن الحـدود بطريقـة لا تبـدو فيـها الموجـة متحركـة ولكنـها تظـهر أنها تهتز بموضع واحـد وعلـى سـبيل المثـال نلاحـظ فـي شـكل (25–1) عـدداً قليـلاً مـن الموجات الصامدة .



$X_1(x)T_1(t) =$ الموجة المستقرة الأولية



$X_2(x)T_2(t) =$ الموجة المستقرة الثانية



$X_3(x)T_3(t) =$ الموجة المستقرة الثالثة

شكل 25–1 ثلاثة نماذج من الموجات المستقرة $X(x)T(t)$

إذا عرفنا الأشكال $X_n(x)$ لهذه الموجات وكيفية اهتزازاتها $T_n(t)$ ، فعندئذ كل ما يحب عمله لإيجاد حل وتر القيثارة هو جمع الاهتزازات البسيطة $X_n(x)T_n(t)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) T_n(t)$$

بحيث يتفق المجموع (بإيجاد c_n) مع الشروط الابتدائية $u_t(x,0) = g(x)$ ، $u(x,0) = f(x)$ عندما $t = 0$ ، والآن محل مسألة وتر القيثارة بطريقة فصل المتغيرات .

25–2 حل مسألة الوتر المنتهي بطريقة فصل المتغيرات

لحل المسألة الحدودية الابتدائية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < L \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases} \qquad 0<t<\infty \qquad (1)$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases} \qquad 0\le x\le L$$

نبدأ بالبحث عن حلول الموجات المستقرة للمعادلة التفاضلية الجزئية ، أي حلول من الصيغة :

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

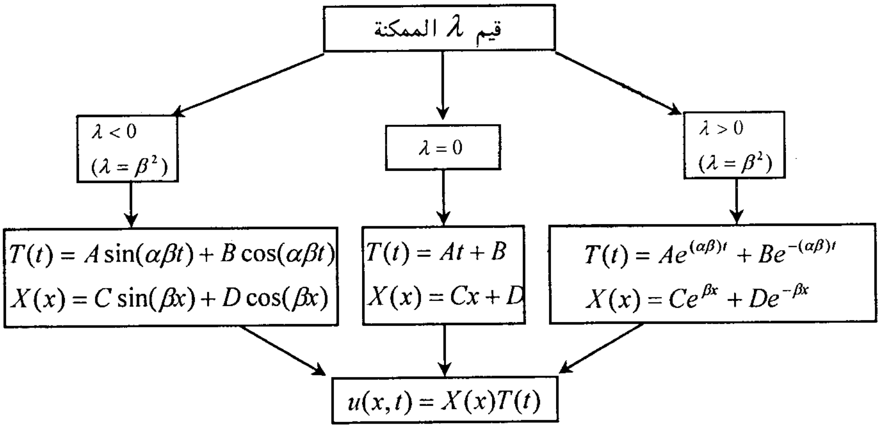
وبتعويض هذا في معادلة الموجة وفصل المتغيرات نحصل على معادلتين تفاضليتين اعتياديتين :

$$T''-\alpha^2\lambda T=0$$

$$X''-\lambda X=0$$

حيث λ ثابت ويمكن أن يكون $-\infty<\lambda<\infty$

وبمناقشة حل هاتين المعادلتين التفاضليتين لكل قيم λ نحصل على المخطط الوارد في شكل (25-2) .



شكل 25-2

والآن يجب تهذيب الحل من تلك الموجات المستقرة التي إما أن تكون غير مقيدة عندما $t \to \infty$ وإما أن يتبع منها حل صفري عند تعويض الشروط الحدودية $u(0,t) = u(L,t) = 0$ ويترك كتمرين إلى القارئ إثبات أن قيم λ السالبة تعطي حلولاً عملية (مقيدة غير صفرية)، وعليه يجب إيجاد الثوابت A, B, C, D والقيم السالبة للثابت λ بحيث يكون المقدار :

$$u(x,t) = [C\sin(\beta x) + D\cos(\beta x)][A\sin(\alpha\beta t) + B\cos(\alpha\beta t)] \qquad (2)$$

محققاً الشروط الحدودية ، وهذا يعطينا مجموعة من الاهتزازات الأولية للوتر ، والهدف الأخير هو إيجاد مجموعها بحيث يحقق المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية والشروط الابتدائية عندما $t = 0$.

وبتعويض الشروط الابتدائية $u(0,t) = u(L,t) = 0$ بالمقدار (2) نحصل على :

$$\begin{aligned} u(0,t) &= X(0)T(t) = D[A\sin(\alpha\beta t) + \beta\cos(\alpha\beta t)] = 0 \Rightarrow D = 0 \\ u(L,t) &= X(L)T(t) \\ &= C\sin(\beta L)[A\sin(\alpha\beta t) \\ &+ B\cos(\alpha\beta t)] = 0 \Rightarrow \sin(\beta L) = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

وبعبارة أخرى ، إيجاد الثابت β (وصرف النظر عن λ) بحيث تتحقق المعادلة $\sin(\beta L) = 0$ أو :

$$\beta_n = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

لاحظ أننا إذا أخذنا $C = 0$ في المعادلة الثانية من (3) نحصل على $X(x)T(t)$ ، وعليه نكون قد حصلنا على متتابعة من الاهتزازات البسيطة (والتي ندونها بالعدد n) هي :

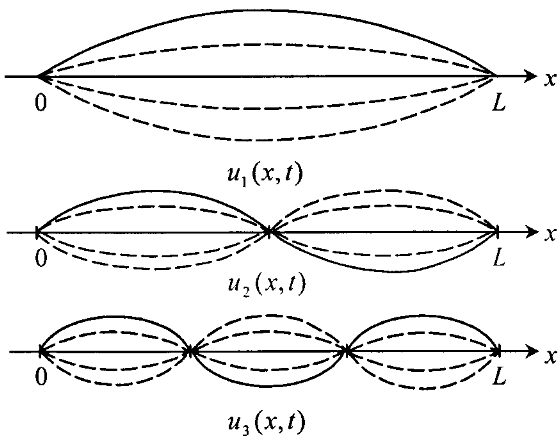
$$\begin{aligned} u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \sin(n\pi x / L)[a_n \sin(n\pi\alpha t / L) \\ + b_n \cos(n\pi\alpha t / L)] \end{aligned} \qquad (4)$$

$$n = 1 , 2 , 3 , \ldots$$

أو :

$$u_n(x,t) = R_n \sin(n\pi x / L) \cos[n\pi\alpha(t - \delta_n) / L]$$

(حيث a_n, b_n, R_n, δ_n ثوابت اختيارية) وكلها تحقق معادلة الموجة والشروط الحدودية ، ويستطيع القارئ أن يلاحظ أن هذه المتتابعة من الدوال تؤلف عائلة من الموجات المستقرة (التي تهتز كل نقاطها بنفس التردد) والتي مخططاتها كما في (شكل 25-3) .



شكل 25-3 الموجات المستقرة $u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t)$

بما أن كل مجموع من هذه الاهتزازات يكون أيضاً حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية (لأن المعادلة والشروط خطية ومتجانسة) فنجمعها معاً بحيث تتحقق الشروط الابتدائية أيضاً ، وهذا عندئذ سيكون حلاً لمسألتنا ، وبتعويض الشروط الابتدائية :

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x)$$

في المجموع :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi x/L)\left[a_n\sin(n\pi\alpha t/L)+b_n\cos(n\pi\alpha t/L)\right]$$

نحصل على المعادلتين :

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\pi x/L)=f(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(n\pi\alpha/L)\sin(n\pi x/L)=g(x)$$

وباستخدام شرط التعامد :

$$\int_0^L\sin(m\pi x/L)\sin(n\pi x/L)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ L/2 & m=n\end{cases}$$

نستطيع إيجاد المعاملات a_n, b_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{n\pi\alpha}\int_0^L g(x)\sin(n\pi x/L)dx \\ b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)dx \end{aligned} \qquad (5)$$

وعليه نكون قد وجدنا الحل :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi x/L)\left[a_n\sin(n\pi\alpha t/L)+b_n\cos(n\pi\alpha/L)\right] \qquad (6)$$

حيث تحسب a_n, b_n مـن معادلتي (5) ، هذا يكمل المسألة ولكن قبل أن ننتهي سنذكر بعض الملاحظات النافعة القليلة .

ملاحظات

1- إذا كانت السرعة الابتدائية للوتر صفراً ، فعندئذ يصبح الحل (6) كما يأتي :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L)\cos(n\pi\alpha t/L)$$

ويفسر بما يأتي ، لنفرض أننا جزأنا الوضع الابتدائي للوتر :

$$u(x,0)=f(x)$$

إلى مركبات جيبية بسيطة :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L)$$

ولنجعل كل حد جيبي يهتز على شاكلته تبعاً للصيغة :

$$u_n(x,t)=b_n \sin(n\pi x/L)\cos(n\pi\alpha t/L)$$

(وهذا اهتزاز أولي) ، وإذا جمعنا كل هذه الاهتزازات الفردية من هذا النمط فإننا سنحصل على الحل لمسألتنا .

وعلى سبيل المثال ، لنفرض أن الوضع الابتدائي $f(x)$ للوتر هو :

$$f(x)=\sin(\pi x/L)+0.5\sin(3\pi x/L)+0.25\sin(5\pi x/L)$$

والاستجابة الكلية لهذا الشرط الابتدائي ستكون مجموع الاستجابات لكافة الحدود ، أي أن :

$$u(x,t)=\sin(\pi x/L)\cos(\pi\alpha t/L)+0.5\sin(3\pi x/L)\cos(3\pi\alpha t/L)$$
$$+0.25\sin(5\pi x/L)\cos(5\pi\alpha t/L)$$

2- إن الحد النوني للحل (6) :

$$\sin(n\pi x/L)\left[a_n \sin(n\pi\alpha t/L)+b_n \cos(n\pi\alpha t/L)\right]$$

يسمى بـالمنوال النونـي للاهـتزازات أو التوافقـي النونـي ، وباسـتخدام المتطابقـة المثلثية يمكن صياغة هذا التوافقي بالآتي :

$$R_n \sin(n\pi x / L) \cos[n\pi\alpha(t-\delta_n)/L]$$

حيث : R_n , δ_n الثابتان الاختياريان الجديدان (الزاوية والطور) هذه الصيغة الجديدة للمنوال النوني ذات فائدة أكثر في تحليل الاهتزازات ، لاحظ أن التردد ω_n (زاوية نصف قطرية / ثانية) للمنوال النوني هو :

$$\omega_n = \frac{n\pi\alpha}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

حيث ρ, T هما الشد والكثافة للوتر على التوالي .

لاحظ أيضاً أن هذا التردد هو n من المرات بقدر التردد الأولي $(n=1)$ ، إن خاصيـة أن كل الترددات الصوتية هي مضاعفات لتردد واحد أساس لا تتصف بها جميع الاهـتزازات ، إذ أن ذلك صحيح للموجات الصوتية المنبعثة من وتر الكمان أو وتر القيثارة على النقيض من الطبل حيث الترددات ذات الرتب العليا ليست مضاعفات لتردد أولي .

تمارين

1- جد حل مسألة الوتر المهتز (1) إذا كانت الشروط الابتدائية هي :

$$u(x,0) = \sin(\pi x / L) + 0.5\sin(3\pi x / L)$$

$$u_t(x,0) = 0$$

ارسم هذا الحل لمختلف قيم t ، هل أن الحل دوري ؟ وما الدورة ؟

2- ما حل مسألة الوتر المهتز (1) إذا كانت الشروط الابتدائية هي :

$$u(x,0) = 0$$

$$u_t(x,0) = \sin(3\pi x / L)$$

كيف يكون مخطط الحل لمختلف قيم t ؟

3- أثبت أن لقيم $\lambda \geq 0$ في شكل (2) يكون الحل $X(x)T(t)$ غير مقيد أو صفراً .

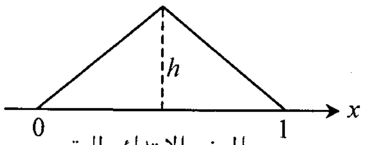
4- ما حل مسألة الوتر المهتز إذا كانت الشروط الابتدائية هي :

$$u(x,0) = \sin(3\pi x / L)$$

$$u_t(x,0) = (3\pi\alpha / L)\sin(3\pi x / L)$$

5- وتر قيثارة طوله $L = 1$ سحب إلى الأعلى من منتصفه إلى ارتفاع h ، بفرض أن الوضع الابتدائي للوتر كان :

$$u(x,0) = \begin{cases} 2hx & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 2h(1-x) & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



الوضع الابتدائي للوتر

ما الحركة التالية للوتر إذا تحرر فجأة ؟

6- حل مسألة الوتر المهتز المتضائل :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} - \beta u_t \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1$$

هل يبدو الحل مقبولاً ؟ هل يحقق المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية والشروط الابتدائية ؟

7- كيف يمكن حل المعادلة التفاضلية غير المتجانسة الآتية وفق الشروط الحدودية والشروط الابتدائية المعطاة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} + Kx \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

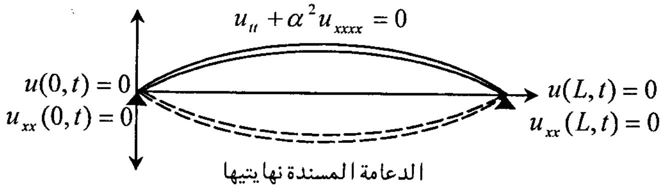
$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1$$

الدرس السادس والعشرون

الدعامة المهتزة (المعادلات التفاضلية الجزئية ذات المرتبة الرابعة)

26–1 الغرض من الدرس

تبيان كيفية استخدام المعادلات التفاضلية الجزئية من المراتب العليا في دراسة مسائل الدعامة المهتزة وحل مسألة الدعامة المهتزة المسندة نهايتيها نسبياً بطريقة فصل المتغيرات ، كما سيشار إلى مقارنة اهتزازات الدعامة مع اهتزازات وتر الكمان :



إن الاختلاف الأكبر بين الاهتزازات المستعرضة لوتر الكمان والاهتزازات المستعرضة للدعامة الرقيقة هو أن الدعامة تبدي مقاومة للانحناء ، وبدون التعرض لآلية الدعائم الرقيقة يمكن أن نبرهن على أن هذه المقاومة هي المسؤولة عن تغيير معادلة الموجة إلى معادلة الدعامة من المرتبة الرابعة الآتية :

$$u_{tt} = -\alpha^2 u_{xxxx} \qquad (1)$$

حيث :

$$\alpha^2 = K / \rho$$

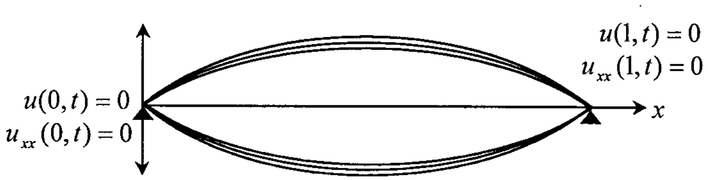
K = معامل الصلابة (كلما كانت K كبيرة كلما كانت الدعامة أكثر صلابة وأسرع اهتزازاً

ρ = الكثافة الخطية للدعامة (كتلة / وحدة الطول)

يمكن إيجاد استنتاج هذه المعادلة في مرجع 1 المذكور في نهاية هذا الدرس ، وبما أن هذه هي المرة الأولى للقارئ يرى فيها تطبيق معادلات تفاضلية جزئية من مرتبة أعلى من الثانية في كتابنا هذا ، فمن المفيد حل مسألة نموذجية لدعامة مهتزة ، وبعدئذ سنتكلم عن أنماط أخرى لمسائل الدعائم .

26–2 الدعامة المسندة نسبياً من النهايتين

تأمل الاهتزازات الصغيرة لدعامة رقيقة نهايتاها مربوطتان نسبياً إلى أساسين ، المقصود بالتعبير (مربوطتان نسبياً هو أن النهايتين مستقرتان إلا أن الميل عند النهايتين يمكن أن يتغير) (يمكن ربط النهايتين بأوتاد أو مسامير ، لاحظ شكل 26–1) .



شكل 26–1 دعامة مسندة نسبياً

إن الشروط الحدودية عند نهايتي الدعامة الآتية :

$$u(0,t)=0$$

$$u(1,t)=0$$

واضحة تماماً إلا أن الشروط الحدودية الآتية غير واضحة :

$$u_{xx}(0,t)=0$$

$$u_{xx}(1,t)=0$$

وهي عند النهايتين أيضاً ، وباستخدام نظرية الدعائم الرقيقة (لاحظ مرجع 1 في نهاية الدرس) يمكن أن نبرهن على أن عزم الانحناء للدعامة يساوي u_{xx} وإن الدعامة المسندة نسبياً يكون عزمها عند النهايتين مساوياً صفراً ، وعليه فإن الدعامة المهتزة في شكل 1 يمكن أن توصف بمسألة القيم الحدودية الابتدائية الآتية (تؤخذ α مساوية واحداً للسهولة) :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = -u_{xxxx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u_{xx}(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \\ u_{xx}(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty \qquad (2)$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1$$

لحل هذه المسألة نتبع طريقة فصل المتغيرات ونبحث عن حلول دورية اختيارية ، أي اهتزازات من الصيغة :

$$u(x,t) = X(x)[A\sin(\omega t) + \beta\cos(\omega t)] \qquad (3)$$

لاحظ أنه عند اختيار حل من الصيغة (3) سبق أن ذكرنا أن ثابت الفصل في طريقة فصل المتغيرات يكون في الأساس سالباً .

نعوض المعادلة (3) في معادلة الدعامة للحصول على المعادلة التفاضلية الاعتيادية بالمتغير $X(x)$:

$$X^{iv} - \omega^2 X = 0$$

والتي لها حل عام :

$$X(x) = C\cos\sqrt{\omega x} + D\sin\sqrt{\omega x} + E\cosh\sqrt{\omega x} + F\sinh\sqrt{\omega x}$$

ولإيجاد الثوابت C, D, E, F نعوض الشروط الحدودية في هذا الحل فنحصل على :

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \qquad &\Rightarrow C + E = 0 \\ u_{xx}(0,t) = 0 \Rightarrow X''(0)T(t) = 0 \Rightarrow X''(0) = 0 \quad &\Rightarrow -C + E = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = E = 0$$

$$u(1,t) = 0 \Rightarrow D\sin\sqrt{\omega} + F\sinh\sqrt{\omega} = 0$$

$$u_{xx}(1,t) = 0 \Rightarrow -D\sin\sqrt{\omega} + F\sinh\sqrt{\omega} = 0$$

ومن المعادلتين السابقتين يمكن الحصول على :

$$F\sinh\sqrt{\omega} = 0$$

$$D\sin\sqrt{\omega} = 0$$

ومنهما يتبع أن :

$$F = 0$$

$$\sin\sqrt{\omega} = 0 \Rightarrow \omega = (n\pi)^2 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

وبعبارة أخرى ، أ، الترددات الطبيعية للدعامة المسندة نسبياً هي :

$$\omega_n = (n\pi)^2$$

والحلول الأولية (حلول المعادلة التفاضلية الجزئية وفق الشروط الحدودية) هي :

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left[a_n \sin(n\pi)^2 t + b_n \cos(n\pi)^2 t\right]\sin(n\pi x)$$

والآن بما أن المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية خطية ومتجانسة يتبع أن المجموع :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \sin(n\pi)^2 t+b_n \cos(n\pi)^2 t\right]\sin(n\pi x) \qquad (4)$$

يحقق أيضاً المعادلة التفاضلي الجزئية والشروط الحدودية ، وعليه فلم يبق سوى إيجاد b_n, a_n بحيث تتحقق الشروط الابتدائية ، وبتعويض هذه الشروط الابتدائية في (4) يتبع أن :

$$\begin{aligned} u(x,0)&=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) \\ u_t(x,0)&=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)^2 a_n \sin(n\pi x) \end{aligned} \qquad (5)$$

وبما أن العائلة $\{\sin(n\pi x)\}$ متعامدة على الفترة $[0,1]$ فعندئذ :

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{2}{(n\pi)^2}\int_0^1 g(x)\sin(n\pi x)dx \\ b_n&=2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx \end{aligned} \qquad (6)$$

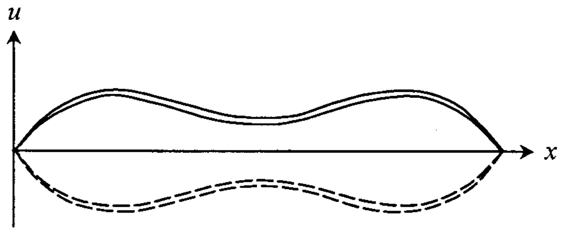
لذا فإن الحل هو كما في (4) حيث تحسب b_n, a_n بموجب (6) ، ولكي يتفهم القارئ هذه المسألة أكثر نقدم المثال البسيط الآتي :

3–26 دعامة ذات اهتزازات بسيطة

تأمل الدعامة المسندة نسبياً كما في شكل $(2-26)$ بالشروط الابتدائية :

$$u(x,0)=\sin(\pi x)+0.5\sin(3\pi x)$$

$$u_t(x,0)=0$$



شكل 26–2 الاهتزازات البسيطة للدعامة المسندة جزئياً

نستطيع إيجاد الحل بالتعويض عن قيمتي $g(x), f(x)$ في معادلة (6) ولكن يبدو أسهل ملاحظة القيم الآتية من معادلتي (5) :

$$a_n = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = 0$$

$$b_3 = 0.5$$

$$b_n = 0 \qquad n = 4, 5, \ldots$$

عندئذ الحل يكون :

$$u(x,t) = \cos(\pi^2 t)\sin(\pi x) + 0.5\cos(9\pi^2 t)\sin(3\pi x)$$

ومن المهم ملاحظة كيفية مقارنة هذا الحل مع الوتر المهتز بنفس الشروط الابتدائية ، فإذا أعدنا النظر إلى الدرس العشرين نجد أن حل مسألة الوتر المهتز هو :

$$u(x,t) = \cos(\pi t)\sin(\pi x) + 0.5\cos(3\pi t)\sin(3\pi x)$$

وبعبارة أخرى ، فإن الدعامة المهتزة تهتز بترددات أعلى من الوتر المهتز ، ومن المهم للقارئ أن يتصور أشكال هذه الاهتزازات ، ومع ذلك نلاحظ أن كل الترددات العالية هي مضاعفات صحيحة للترددات الأولية .

ملاحظات

1- أن الدعائم عموماً تصنف إلى ثلاثة أنواع تبعاً لربطها :

(a) حرة (غير مربوطة)

(b) مربوطة نسبياً

(c) مربوطة تماماً

وتلاحظ مخططات بعضها في شكل (3) مع شروطها الحدودية .

2- هناك مسألة دعامة مهتزة أخرى مهمة هي مسألة الكابول (دعامة مثبتة من طرف واحد) المبينة في شكل (3) ، إن حل هذه الدعامة المهتزة ليس المجموع المعتاد لجداءات جيوب وجيوب تمام ، إلا أنه بسبب الشروط الحدودية غير القياسية :

$$u(0,t) = 0$$

$$u_x(0,t) = 0$$

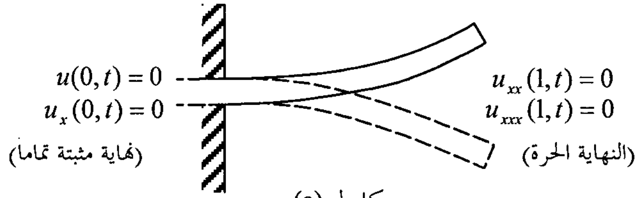
$$u_{xx}(1,t) = 0$$

$$u_{xxx}(1,t) = 0$$

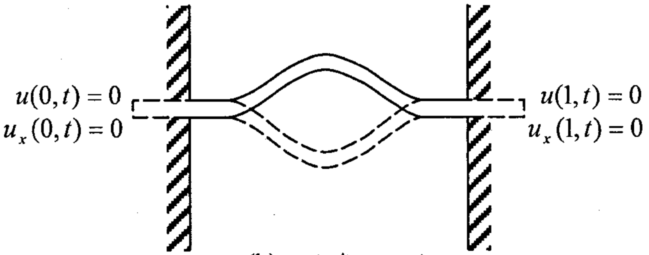
نصل إلى حل أكثر تعقيداً :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\left[a_n \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t)\right]$$

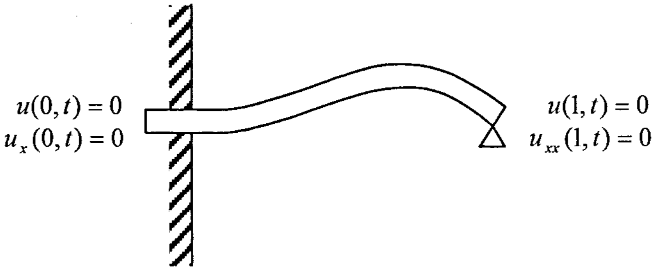
حيث أن الدوال الذاتية (الأشكال الأساس للهتزازات) معطاة بدلالة تركيبات خطية لجيوب وجيوب تمام وجيوب زائدية وجيوب تمام زائدية .



كابول (a)



دعامة مثبتة النهايتين (b)



دعامة مثبتة تماما من نهاية ومثبتة نسبياً من النهاية الأخرى

شكل 26 – 3a – 3c مسائل دعائم ن موذجية

تمارين

1- حل مسألة الكابول :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0 \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u_x(0,t) = 0 \\ u_{xx}(1,t) = 0 \\ u_{xxx}(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1$$

تلميح : على الرغم من أن الدوال الذاتية $X_n(x)$ في هذه المسألة ليست الدوال الجيبية المعتادة ، فإننا لإنزال نستطيع استخدام نظرية ستورم – ليوفيل لاستنتاج أن الدوال الذاتية متعامدة على الفترة $[0.1]$.

2- ما الحل للدعامة المسندة نسبياً (من نهايتيها الاثنتين) وفق الشروط الابتدائية :

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sin(\pi x) \\ u_t(x,0) &= \sin(\pi x) \end{aligned} \qquad 0 \le x \le 1$$

3- ما الحل للدعامة المسندة نسبياً وفق الشروط الابتدائية :

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 1 - x^2 \\ u_t(x,0) &= 0 \end{aligned} \qquad 0 \le x \le 1$$

4- لتكن النهاية اليسرى $(x = 0)$ لدعامة مثبتة تماماً في جدار ولتكن النهاية اليمنى $(x = 1)$ مسندة نسبياً وفق الشروط الحدودية المبينة في شكل (26-3) ، حل مسألة هذه الدعامة بالشروط المذكورة وبين كيفية إيجاد الترددات الطبيعية للاهتزاز للدعامة ، إن معرفة الترددات الطبيعية للدعامة شيء مهم لأن مختلف أنواع الإدخالات لنفس التردد يكون باعثاً على الرنين .

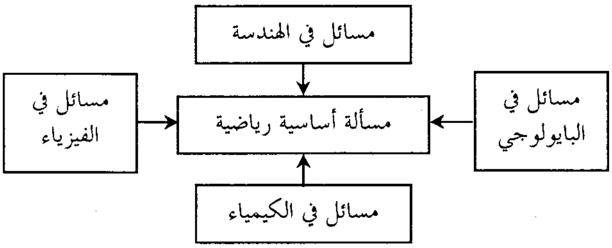
الدرس السابع والعشرون
المسائل غير البعدية

27–1 الغرض من الدرس

تبيان كيفية صياغة مسائل القيم الحدودية ، ومسائل القيم الابتدائية وأنماط أخرى من النماذج الفيزيائية بصيغة غير بعدية ، وبهذه الصيغة نعوض عن المتغيرات الأصلية بمتغيرات جديدة غير بعدية (خالية من الوحدات) .

وعند كتابة المسألة بصيغة غير بعدية ، فإن بعض المعادلات المعينة في الفيزياء والكيمياء والبايولوجي والاقتصاد التي تبدو في الأصل مختلفة تصبح كلها متشابهة ، ولهذا السبب فإن الدراسة الرياضية للمعادلات التفاضلية الجزئية عموماً لا تلزم نفسها باستخدام الفيزيائية في المعادلات ، وللكيميائي أو الفيزيائي أو المشتغل في البايولوجي تحويل معادلته إلى المعادلات التي ندرسها في هذا الكتاب .

إن الفكرة الأساسية وراء التحليل البعدي هي تقديم متغيرات جديدة (غير بعدية) في المسألة ، عندئذ تصبح المسألة رياضية بحتة غير حاوية على الثوابت الفيزيائية التي تميزها ، وبالطريقة هذه تتحول مسائل عديدة مختلفة في الفيزياء والبايولوجي والهندسة والكيمياء التي تتضمن بعض الفروقات الدقيقة في الوسائط الفيزيائية تتحول إلى صيغ بسيطة (شكل 27–1) .



شكل 27–1 مسائل عديدة تتحول إلى صيغ غير بعدية أساسية

لتوضيح فعل هذه الطريقة نلاحظ المثال البسيط الآتي :

2–27 تحويل مسألة الانتشار إلى صيغة غير بعدية

لنفرض أننا بدأنا بمسألة قيم حدودية ابتدائية فيها درجة الحرارة الابتدائية $u(x,0) = \sin(\pi x / L)$ إلا أن درجة الحرارة عند النهايتين ترتفع آنياً إلى T_1, T_2 وبعبارة أخرى ، يكون :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

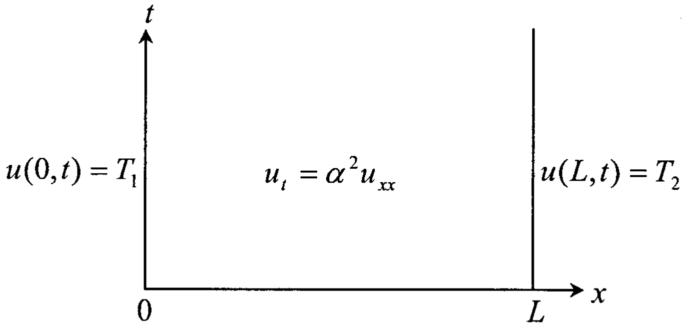
$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < L \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = T_1 \\ u(L,t) = T_2 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty \qquad (1)$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \sin(\pi x / L) \qquad 0 \le x \le L$$



شكل 2–27 منطلق مسألة سريان الحرارة

هدفنا الآن هو تحويل مسألة (1) إلى صيغة مكافئة أخرى لها الصفات الآتية :

1– لا تتضمن المعادلة الجديدة على وسائط فيزيائية (مثل α) .

2- شروطها الحدودية وشروطها الابتدائية أبسط وللأجل ذلك نقدم ثلاثة متغيرات غير بعدية U, ξ, τ لتحل محل u, x, t على التوالي :

$u \longrightarrow U$ (درجة حرارة غير بعدية)

$x \longrightarrow \xi$ (طول غير بعدي)

$t \longrightarrow \tau$ (زمن غير بعدي)

نجري التحويلات الثلاثة الآتية كل على حدة للسهولة :

27-3 تحويل المتغير المعتمد $u \rightarrow U$

نعرف $U(x,t)$ بالآتية :

$$U(x,t) = \frac{u(x,t) - T_1}{T_2 - T_1}$$

يتضح أن درجة الحرارة الجديدة $U(x,t)$ ليس لها وحدات لأننا قسمنا درجة حرارة مئوية على درجة حرارة مئوية ، ويتضح أيضاً لماذا تم اختيار $U(x,t)$ نلاحظ أن الشروط الحدودية الجديدة لدرجة الحرارة $U(x,t)$ عندما $x = 0$ و $X = L$ هي $U(0,t)$ و $U(L,t)$ على التوالي ، لنختبر المسألة الجديدة بدلالة $U(x,t)$ ، بعد قليل من الجهد نلاحظ أن المسألة الأصلية (1) تتحول إلى :

المعادلة التفاضلية الابتدائية :

$$U_t = \alpha^2 U_{xx} \qquad 0 < x < L \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} U(0,t) = 0 \\ U(L,t) = 1 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty \qquad (2)$$

الشرط الابتدائي :

$$U(x,0)=\frac{\sin(\pi x/L)-T_1}{T_2-T_1} \qquad\qquad 0\le x\le L$$

إذا أردنا التوقف هنا لحل المسألة هذه لإيجاد $U(x,t)$ ثم إيجاد $u(x,t)$ من الصيغة :

$$u(x,t)=T_1+(T_2-T_1)U(x,t)$$

ولكن لنستمر فنحول المتغيرين المستقلين $x\ t$ ونبدأ بتحويل x .

تحويل متغير المكان $x\to\xi$:

يبدو واضحاً كيفية اختيار متغير المكان غير البعدي ξ ، فبما أن $0\le x\le L$ فإننا نجعل :

$$\xi=x/L$$

وباحتساب المشتقات :

$$U_x=U_\xi\xi_x=\frac{1}{L}U_\xi$$

$$U_{xx}=\frac{1}{L^2}U_{\xi\xi}$$

يتضح أن المسألة الجديدة (بدلالة $U,\ \xi,\ t$) هي :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$U_t=(\alpha/L)^2U_{\xi\xi} \qquad 0<\xi<1 \qquad 0<t<\infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases}U(0,t)=0\\ U(1,t)=1\end{cases} \qquad 0<t<\infty \qquad (3)$$

الشرط الابتدائي :

$$U(\xi,0) = \frac{\sin(\pi\xi) - T_1}{T_2 - T_1} \qquad 0 \le \xi \le 1$$

نحن الآن في الثلث الأخير من الوصول إلى الهدف ، فالخطوة الأخيرة هي تقديم متغير الزمن غير البعدي τ بحيث يختفي الثابت $[\alpha / L]^2$ من المعادلة التفاضلية .

27–4 تحويل متغير الزمن $t \to \tau$

إن اختيار متغير الزمن غير البعدي ليس بالوضوح الذي تم به اختيار المتغيرين السابقين ، وعلى الرغم من ذلك ، وبما أن الغرض هو حذف الثابت $[\alpha / L]^2$ من المعادلة التفاضلية الجزئية فنتبع ما يأتي :

1- نستخدم تحويلاً من الصيغة $\tau = ct$ حيث c ثابت مجهول .

2- نجري الاشتقاق :

$$u_t = u_\tau \tau_t = cu_\tau$$

3- نعوض هذه المشتقة في المعادلة التفاضلية فنحصل على :

$$cu_\tau = [\alpha / L]^2 u_{\xi\xi}$$

وعندئذ ، باختيار $c = [\alpha / L]^2$ نحصل على المتغير الجديد :

$$\tau = [\alpha / L]^2 t$$

وبتطبيق هذا التحويل على المسألة السابقة (3) نحصل على الصيغة النهائية للمسألة غير البعدية (بدلالة U, ξ, τ) :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$U_\tau = U_{\xi\xi} \qquad 0 < \xi < 1 \qquad 0 < \tau < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} U(0,\tau)=0 \\ U(1,\tau)=1 \end{cases} \qquad 0<\tau<\infty \qquad (4)$$

الشرط الابتدائي :

$$U(\xi,0)=\phi(\xi) \qquad 0\le\xi\le1$$

حيث :

$$\phi(\xi)=\frac{\sin(\pi\xi)-T_1}{T_2-T_1}$$

هذه المسألة الجديدة لها الصفات الآتية :

1- لا تتضمن المعادلة التفاضلية الجزئية وسائط فيزيائية .

2- شروط حدودية بسيطة .

3- لم يتغير الشرط الابتدائي ، أساسا مازال دالة معروفة .

4- المسألة أبسط وأفضل إحكاماً من المسألة الأصلية .

يمكن إيجاد حل هذه المسألة جملة واحدة ، وعليه إذا حول الباحث المسألة الأصلية (1) إلى مسألة غير بعدية (4) ووجد $U(\xi,\tau)$ فيمكنه إيجاد $u(x,t)$ حل المسألة الأصلية (1) بموجب المعادلة :

$$u(x,t)=T_1+(T_2-T_1)U(x/L,\alpha^2t/L^2)$$

هذا يكمل مناقشتنا لتحويل المسائل إلى صيغ غير بعدية ، ولا توجد قواعد عامة لاختيار المتغيرات الجديدة إلا أن اتباع التصور الفيزيائي والتجربة يساعدان على ذلك .

تمارين

1- أوجد الصيغة غير البعدية للمسألة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < L$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = T_1 \\ u(L,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = T_2 \qquad 0 \le x \le L$$

2- حول المسألة (1) إلى (2) بتبديل المتغير :

$$U(x,t) = \frac{u(x,t) - T_1}{T_2 - T_1}$$

3- ما السبب الفيزيائي الذي يحذف الوسيط α^2 باستخدام متغير الزمن الجديد $\tau = \alpha t$ من معادلة الموجة :

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$$

4- وما علاقة α بسرعة الموجة ؟ تذكر أن التصور الهندسي يلعب دوراً كبيراً في إيجاد معظم المحاور الجديدة .

الدرس الثامن والعشرون

مثال على تحويل مسألة من نمط القطع الزائد إلى صيغة غير بعدية

28–1 الغرض من الدرس

حل مثال بسيط على التحويل إلى الصيغة غير البعدية وحل المسألة الجديدة ثم الرجوع إلى الإحداثيات الأصلية .

تأمل مسألة الوتر المهتز الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < L \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty \qquad (1)$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin(\pi x / L) + 0.5\sin(3\pi x / L) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \le x \le L$$

بتحويل المتغيرات المستقلة (لا حاجة لتحويل u) إلى متغيرات جديدة :

$$\tau = [\alpha / L]\, t \quad \text{و} \quad \xi = x / L$$

نحصل على المسألة الجديدة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{\tau\tau} = u_{\xi\xi} \qquad 0 < \xi < 1 \qquad 0 < \tau < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,\tau)=0 \\ u(1,\tau)=0 \end{cases} \qquad 0<\tau<\infty \qquad (2)$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(\xi,0)=\sin(\pi\xi)+0.5\sin(3\pi\xi) \\ u_\tau(\xi,0)=0 \end{cases} \qquad 0\le\xi\le1$$

حل هذه المسألة هو :

$$u(\xi,\tau)=\cos(\pi\tau)\sin(\pi\xi)+0.5\cos(3\pi\tau)\sin(3\pi\xi)$$

وإذا رجعنا إلى إحداثياتنا الأصلية x,t نحصل على حل مسألتنا الأصلية (1) :

$$u(x,t)=\cos(\pi\alpha t/L)\sin(\pi x/L) \\ +0.5\cos(3\pi\alpha t/L)\sin(3\pi x/L)$$

ملاحظات

1- إن التحليل البعدي مهم بشكل خاص في التحليل العددي لأن معظم برامج الحاسبة الإلكترونية مكتوبة بصيغة عامة ولا تحل المسائل الفيزيائية التي تتضمن عدداً كبيراً من الوسائط الفيزيائية ، وإن كل من يتبع هذه البرامج عليه تحويل المسألة إلى صيغة موافقة للبرنامج وحل المسألة المحولة ثم تحويل النتائج العددية إلى الإحداثيات الأصلية .

2- التحليل البعدي يتيح المجال للرياضيين إ ى التعامل مع المعادلات التفاضلية الجزئية دون مضايقة أنفسهم بالوسائط والثوابت الكثيرة غير الوثيقة الصلة بالتحليل الرياضي .

3- ليس من الضروري دائما تحويل كل المتغيرات إلى صيغة غير بعدية ، فأحياناً يحول واحد أو اثنان .

تمارين

1- حول مسألة الوتر المهتز (1) إلى الصيغة غير البعدية (2) بالتحويلين :

$$\xi = x / L \qquad \tau = [\alpha / L]\, t$$

2- كيف تختار متغير المكان الجديد ξ لكي تحذف v من المعادلة :

$$u_t + v u_x = 0$$

الدرس التاسع والعشرون

تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية

(الصيغة القياسية لمعادلة نمط القطع الزائد)

29–1 الغرض من الدرس

تبيان كيفية تصنيف المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية :

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

حيث A, B, C, D, E, F, G دوال بدلالة x, y أو ثوابت إلى أحد الأنماط الثلاثة :

1- القطع الزائد (عندما $B^2 - 4AC > 0$) .

2- القطع المكافئ (عندما $B^2 - 4AC = 0$) .

3- القطع الناقص (عندما $B^2 - 4AC < 0$) .

وتبيان كيفية اختيار المتغيرين الجديدين $\xi = \xi(x,y)\eta = \eta(x,y)$ (بدلا عن y, x) لتبسيط المعادلة .

وعند صياغة المعادلة التفاضلية الجزئية بدلالة المتغيرين الجديدين ξ, η كيف تتحول إلى إحدى الصيغ القياسية الثلاثة (بالاعتماد على قيمة $B^2 - 4AC$ إذا كانت موجبة أو صفر أو سالبة على التوالي) :

1- صيغتان قياسيتان لنمط القطع الزائد :

$$1. \qquad \begin{cases} u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = \Psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \\ u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \end{cases}$$

2- الصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ :

$$u_\eta = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

3- الصيغة القياسية لمعادلة القطع الناقص :

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

حيث Φ, Ψ دالتـأن بدلالـة المشتقتين الأوليتين u_η, u_ξ والمتغير المعتمـد u والمتغـيرين المستقلين الجديدين ξ, η والدالتـان المضبوطتان Φ, Ψ ، طبعـاً تعتمـدان علـى المعادلة الأصلية .

قد يتبادر إلى ذهن القارئ وضع فصل في بداية الكتاب حـول تصنيـف المعـادلات التفاضليـة الجزئية وقد يحتمل أن يكون هذا صحيحاً كما في كتب عديدة وعلـى الرغـم مـن ذلـك فإنـه صحيح أيضاً أن معظم الطلبة لا يثارون كثيراً عند دراستهم بعضاً من شيء لا يعرفون عنه شـيئاً ، ولهذا السبب انتظرنا لحد الآن لتقديم هـذا المبحـث عـن المعـادلات التفاضليـة الجزئيـة ، والغرض هنا هو تصنيف المعادلة :

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \qquad (1)$$

حيث G و A, B, C, D, E, F بصورة عامة هي دوال بدلالة x, y ، إلى :

1- قطع زائد عند النقطة (x_0, y_0) إذا كان $B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0) > 0$

2- قطع زائد عند النقطة (x_0, y_0) إذا كان $B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0)$

3- قطع ناقص عند النقطة (x_0, y_0) إذا كان $B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0) < 0$

وبالاعتماد على ذلك تحول المعادلة إلى الصيغة القياسية (البسيطة) المنـاظرة لـها ، ولأجـل أن يفهم القارئ مخطط هذا التصنيف سنبدأ أولاً بإعطـاء أربعـة أمثلـة عـن معـادلات القطـع الزائد والقطع المكافئ والقطع الناقص .

2-29 أمثلة على معادلات القطع الزائد والقطع الناقص والقطع المكافئ

1- معادلة التوصيل الحراري $u_t = u_{xx}$ هي معادلة خطية من المرتبة الثانية مـن الصيغـة (1) معاملاتها :

$$A = 1 \qquad B = 0 \qquad C = 0 \qquad D = 0$$

$$E = -1 \qquad F = 0 \qquad G = 0$$

وعليه فإن $B^2 - 4AC = 0$ لكل قيم x,t ، المعادلة من نمط القطع المكافئ لكل قيم x,t ، لاحظ أننا رمزنا للزمن بالمتغير y في المعادلة العامة ، وفـي الحقيقة نكون قـد حصلنا على نفـس النتائج لـو أننا سميْنا المتـغير x فـي معـادلة التـوصيـل الحـراري بالمتغير y في المعادلة العامة وسميْنا متغير الزمن t بالمتغير x في المعادلة العامة .

2- إن معادلة الموجة $u_{tt} = u_{xx}$ هي كذلك من الصيغة (1) معاملاتها :

$$A = 1 \qquad B = 0 \qquad C = -1 \qquad D = E = F = G = 0$$

وعليه فإن $B^2 - 4AC = 4$ لكل x,t والمعادلة من نمط القطع الزائد لكل x,t .

3- معادلة لابلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ هي من نمط القطع الناقص لكل x,y لأن :

$$B^2 - 4AC = -4 < 0$$

4- المعادلة الخطية $xu_{xx} + u_{yy} = \sin x$ ذات المعاملات المتغيرة هي أيضاً من الصيغ (1) إلا أنه في هذه الحالة $B^2 - 4AC = -4x$ وعليه تكون المعادلة :

قطع ناقص عندما $x > 0$

قطع مكافئ عندما $x = 0$

قطع زائد عندما $x < 0$

هذا المثال يبين المعادلات ذات المعاملات المتغيرة تتغير من نمط إلى آخر باختلاف مناطق منطلقاتها .

ويلاحظ القارئ أيضاً أن كون المعادلة (1) قطع زائد أو قطع مكافئ أو قطع ناقص يعتمد فقط على معاملات المشتقات الثانية ولا علاقة لذلك بحدود المشتقات الأولى أو الحد u أو الحد غير المتجانس .

والآن نأتي إلى الجزء الأكبر من هذا الدرس ، وهو صياغة معادلات القطع الزائد بصيغها القياسية ، وهذا يؤدي إلى أنه إذا كانت المعادلة من نمط القطع الزائد (في منطقة معلومة من الفضاء) فعندئذ يمكن إيجاد متغيرين ξ,η (الإحداثيان المميزان) بدلاً من المتغيرين الأصليين x,y بحيث تتحول المعادلة إلى الصيغة البسيطة .

$$u_{\xi\eta}=\Phi(\xi,\eta,u,u_{\xi},u_{\eta}) \qquad (2)$$

هذه المعادلة تتضمن مشتقة واحدة فقط من المرتبة الثانية هي $u_{\xi\eta}$ بينما تعتمد الدالة $\Phi(\xi,\eta,u,u_{\xi},u_{\eta})$ على المتغيرات الجديدة المستقلة ξ,η وعلى المتغير المعتمد u وعلى المشتقتين الأوليتين u_{ξ},u_{η} ، والصيغة الدقيقة للدالة Φ تعتمد طبعاً على المعادلات الأصلية وإيجادها والمتغيرات الجديدة ξ,η هو الغرض من هذا الدرس .

29–3 الصيغة القياسية لمعادلة القطع الزائد

نبدأ بالمعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_{x}+Eu_{y}+Fu=G \qquad (3)$$

حيث $B^2-4AC>0$ في منطلق معين ، والغرض الآن هو اختيار المتغيرات الجديدة :

$$\xi=\xi(x,y)$$
$$\eta=\eta(x,y)$$

بحيث تتضمن المعادلة التفاضلية الجزئية العامة على مشتقة واحد فقط من المرتبة الثانية $u_{\xi\eta}$ (وهذا يؤدي إلى أننا إذا أردنا تحويل معادلة القطع الزائد إلى الصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ أو القطع الناقص فإن الأسلوب لا يؤدي إلى نتيجة) .

وقبل كل شيء نحسب المشتقات الجزئية الآتية :

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \tag{4}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}$$

وبتعويض هذه القيم في المعادلة الأصلية (3) نحصل على :

$$\overline{A}u_{\xi\xi} + \overline{B}u_{\xi\eta} + \overline{C}u_{\eta\eta} + \overline{D}u_\xi + \overline{E}u_\eta + \overline{F}u = \overline{G} \tag{5}$$

حيث :

$$\overline{A} = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2$$

$$\overline{B} = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y$$

$$\overline{C} = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2$$

$$\overline{D} = A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y \tag{6}$$

$$\overline{E} = A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y$$

$$\overline{F} = F$$

$$\overline{G} = G$$

هذا الحسابات على الرغم من أنها واضحة رياضياً إلا أنها مطولة ، وسنترك إثباتها إلى المسائل .

والخطوة الآتية في طريقتنا هذه هي جعل المعاملين $\overline{C}$ و $\overline{A}$ في المعادلة (5) مساويتين إلى الصفر وإيجاد التحويل $\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y)$ وهذا سيعطينا الإحداثيات التي تحول المعادلة التفاضلية الأصلية إلى الصيغة القياسية ، وعليه بوضع :

$$\overline{A} = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0$$

$$\overline{C} = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0$$

نحصل على :

$$A[\xi_x / \xi_y]^2 + B[\xi_x / \xi_y] + C = 0$$

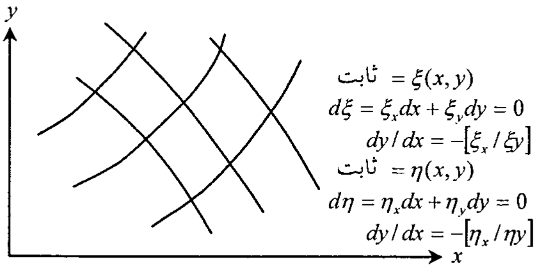
$$A[\eta_x / \eta_y]^2 + B[\eta_x / \eta_y] + C = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على أن :

$$\begin{aligned} [\xi_x / \xi_y] &= \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ [\eta_x / \eta_y] &= \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \end{aligned} \qquad (7)$$

وتسمى هاتان المعادلتان بالمعادلتين المميزتين ، لاحظ أن لكل من $[\xi_x / \xi_y]$ ، $[\eta_x / \eta_y]$ حلين يحققان (7) إلا أننا نجد واحداً فقط لكل منهما لكي يصبح كل من $\overline{C}$ و $\overline{A}$ صفراً ، والتحديد والوحيد هو أننا لا نأخذ نفس الجذرين لأنه عندئذ نحصل على أن المحورين متساويان .

الآن حولنا المسألة إلى إيجاد دالتين $\xi(x,y)$ و $\eta(x,y)$ بحيث أن النسبتين $[\xi_x / \xi_y]$ و $[\eta_x / \eta_y]$ تحققان المعادلة (7) ، ونلاحظ أن إيجاد هاتين الدالتين سهل تماماً إذا دققنا النظر في شكل 29-1 .



شكل 29–1 المنحنيات المميزة $\eta(x,y) = C \qquad \xi(x,y) = C$

ولكي نفهم كيفية إيجاد η و ξ من هذا الشكل نلاحظ المعادلة البسيطة الآتية :

$$u_{xx} - 4u_{yy} + u_x = 0$$

حيث :

$$B^2 - 4AC = 16 > 0$$

التي معادلتاها المميزتان هما :

$$\frac{dy}{dx} = -[\xi_x / \xi_y] = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = -2$$

$$\frac{dy}{dx} = -[\eta_x / \eta_y] = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = 2$$

ولإيجاد ξ, η نكامل أولاً بالنسبة إلى y فنحصل على أن :

$$y = -2x + c_1$$

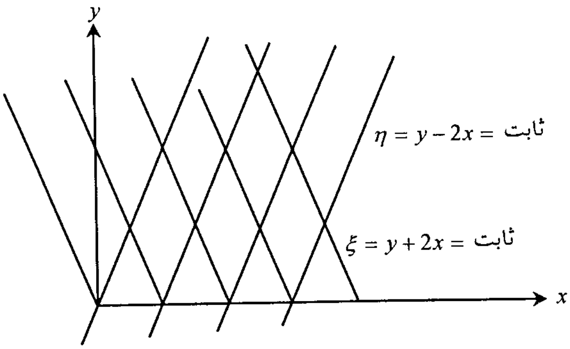
$$y = 2x + c_2$$

ثم نجد قيمتي c_2 و c_1 ونتركهما في الطرف الأيمن وننقل كل الحدود إلى الطرف الأيسر ، وعندئذ تكون دالتا الطرف الأيسر بدلالة y و x هما η و ξ ، أي أن :

$$\xi = y + 2x = c_1$$

$$\eta = y - 2x = c_2$$

يتضح أن الدالتين ξ و η تحققان المعادلتين المميزتين أعلاه ، هذان المحوران الجديدان مرسومان في شكل $(2-29)$ وهذا يكمل مناقشتنا عن كيفية إيجاد الإحداثيين الجديدين ، الخطوة الأخيرة الآن هي إيجاد المعادلة .



شكل 29-2 الإحداثيان الجديدان للمعادلة $u_{xx} - 4u_{yy} + u_x = 0$

الجزء الأخير سهل جداً ، فكل ما نحتاج لإيجاد الصيغة القياسية للإحداثيين الجديدين $\xi(x,y)$ و $\eta(x,y)$ هو تعويضهما بالمعادلة :

$$\overline{A}u_{\xi\xi} + \overline{B}u_{\xi\eta} + \overline{C}u_{\eta\eta} + \overline{D}u_{\xi} + \overline{E}u_{\eta} + \overline{F}u = \overline{G}$$

حيث : $\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D},\overline{E},\overline{F},\overline{G}$ معطاة في (6) .

وقبل أن نكمل هذا الدرس سنطبق الطريقة العامة لنرى كيفية عملها من خلال مثال معين .

3–29 صياغة معادلة القطع الزائد : $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0$ بالصيغة القياسية

لنفرض أننا بدأنا بالمعادلة :

$$y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0 \qquad x > 0 \qquad y > 0$$

التي هي من نمط القطع الزائد في الربع الأول ، نتأمل مسألة إيجاد الإحداثيين الجديدين الذين يحولان المعادلة الأصلية إلى الصيغة القياسية للمتغيرين بالربع الأول .

الخطوة الأولى : حل المعادلتين المميزتين :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{x}{y}$$

(تذكر أن هذه الخطوة مكافئة إلى $\overline{A} = \overline{C} = 0$)

بتكامل هاتين المعادلتين باتباع أسلوب المعادلات التفاضلية الاعتيادية لفصل المتغيرات يتبع العلاقتان الضمنيتان (لا نستطيع هنا إيجاد قيمة y كدالة صريحة بدلالة x فقط) :

$$y^2 - x^2 = \text{ثابت}$$

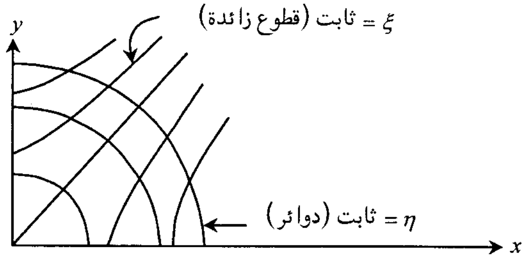
$$y^2 + x^2 = \text{ثابت}$$

وعليه فإن الإحداثيين الجديدين ξ و η هما :

$$\xi = y^2 - x^2$$

$$\eta = y^2 + x^2$$

ويتبين مخططاهما في شكل 29–3 .



شكل 29–3 الإحداثيان الجديدان المميزان

وهذا يعطي الإحداثيين الجديدين ، ولإيجاد المعادلة الجديدة نحسب :

$\overline{A} = 0$ $\quad t \quad$ (وهذا بالاختيار لإيجاد ξ و η)

$$\overline{B} = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_v\eta_v = -16x^2y^2$$

$\overline{C} = 0$ (نفس السبب لحالة A)

$$\overline{D} = A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y = -2(x^2 + y^2)$$

$$\overline{E} = A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y = 2(y^2 - x^2)$$

$$\overline{F} = F = 0$$

$$\overline{G} = G = 0$$

نعوض هذه القيم فيالمعادلة :

$$\overline{A}u_{\xi\xi} + \overline{B}u_{\xi\eta} + \overline{C}u_{\eta\eta} + \overline{D}u_{\xi} + \overline{E}u_{\eta} + \overline{F}u = \overline{G}$$

فيتبع أن :

$$u_{\xi\eta} = \frac{-(x^2 + y^2)u_{\xi} + (y^2 - x^2)u_{\xi}}{8x^2y^2}$$

الخطوة الثانية : بإيجاد قيم x,y بدلالة η,ξ نحصل على أن :

$$u_{\xi\eta}=\frac{\eta u_{\xi}-\xi u_{\eta}}{2(\xi^{2}-\eta^{2})} \qquad (8)$$

وبهذا نكون قد حصلنا على الإحداثيين الجديدين والمعادلة الجديدة .

ملاحظات

1- إن لمعادلة نمط القطع الزائد صيغتين قياسيتين توجد الأخرى بالتحويل الآخر الآتي :

$$\alpha=\alpha(\xi,\eta)=\xi+\eta$$

$$\beta=\beta(\xi,\eta)=\xi-\eta$$

وكتابة الصيغة القياسية الأولى بدلالة α,β وبإجراء ذلك على المعادلة (8) يتبع أن :

$$u_{\xi}=u_{\alpha}\alpha_{\xi}+u_{\beta}\beta_{\xi}=u_{\alpha}+u_{\beta}$$

$$u_{\eta}=u_{\alpha}\alpha_{\eta}+u_{\beta}\beta_{\eta}=u_{\alpha}-u_{\beta}$$

$$u_{\xi\eta}=u_{\alpha\alpha}\alpha_{\eta}+u_{\alpha\beta}\beta_{\eta}+u_{\beta\alpha}\alpha_{\eta}+u_{\beta\beta}\beta_{\eta}=u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}$$

وعليه يكون :

$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=\frac{-\beta u_{\alpha}-\alpha u_{\beta}}{2\alpha\beta} \qquad (9)$$

وإذا أردنا أن نجد β و α بدلالة المتغيرين الأصليين $x;y$ فنحصل على أن :

$$\alpha=\xi+\eta=(y^{2}-x^{2})+(y^{2}+x^{2})=2y^{2}$$

$$\beta=\xi-\eta=(y^{2}-x^{2})-(y^{2}+x^{2})=-2x^{2}$$

2- قد يسأل القارئ عن أهمية تصنيف وتحويل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى صيغتها القياسية .

(a) إن التصنيفات الكبرى الثلاثة للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية ، القطع الزائد والقطع المكافئ والقطع الناقص ، تقسم أساساً المسائل الفيزيائية إلى ثلاثة أنماط أساس هي نقل الموجة والانتشار ومسائل الحالة المستقرة ، والحلول الرياضية لهذه الأنماط الثالثة مختلفة تماماً .

(b) إن معظم الإجراءات النظرية على صفات الحلول لمعادلات القطع الزائد تتطلب التعبير عن المعادلة بالصيغة القياسية ، وبعبارة أخرى أنها تتطلب دراسة الصيغة الآتية :

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = \Psi(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta})$$

أي أننا إذا أردنا ندرس صفات حلول معادلة ما فعلينا تحويلها إلى الصيغة القياسية وتطبيق النتائج الحاصلة .

(c) هناك برامج عددية كثيرة موضوعة لحل معادلات القطع الزائد القياسية ، حيث تغذي الدالة $\Phi(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta})$ إلى الحاسبة الإلكترونية بصيغة الروتين الجزئي بحيث تتحول المعادلة التفاضلية الجزئية إلى صيغة قياسية في البدائية ، وبعد إيجاد الحل بدلالة الإحداثيات الجديدة ، من الممكن دائماً الرجوع إلى الإحداثيات الأصلية .

تمارين

1- بين فيما إذا كانت المعادلات التفاضلية الجزئية الآتية من أنماط القطع الزائد أو القطع المكافئ أو القطع الناقص :

(a) $u_{xx} - u_{xy} = 0$

(b) $u_{tt} = u_{xx} + u_x + hu$

(c) $u_{xx} + 3u_{yy} = \sin x$

(d) $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$

(e) $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f(r, \theta)$

2- برهن على صحة المعادلات (4) و (5) و (6) .

3- برهن على أن المعادلة :

$$3u_{xx} + 7u_{xy} + 2u_{yy} = 0$$

من نمط القطع الزائد وأوجد إحداثييها الجديدين المميزين .

4- أوجد المعادلة القياسية الجديدة :

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

للمعادلة التفاضلية الجزئية في السؤال السابق .

5- أوجد المعادلة القياسية الأخرى :

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Psi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

للمعادلة التفاضلية الجزئية في السؤال الثالث .

6- أوجد الإحداثيين الجديدين المميزين للمعادلة :

$$u_{xx} + 4u_{xy} = 0$$

حل المعادلة المحولة بالإحداثيين الجديدين ثم أوجد حل المعادلة الأصلية بالرجوع إلى الإحداثيين الأصليين .

الدرس الثلاثون

معادلة الموجة ذات الثلاثة أبعاد (الفضاء الحر)

30–1 الغرض من الدرس

حل مسألة القيم الابتدائية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = c^2\left[u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right] \qquad \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x, y, z, 0) = \phi(x, y, z) \\ u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z) \end{cases}$$

ذات الأبعاد الثلاثة وإثبات أن هذا الحل يحقق قاعدة هويجن ، واستخدام الطريقة لحل المسألة المناظرة ذات البعدين الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = c^2\left[u_{xx} + u_{yy}\right] \qquad \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{cases}$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = \phi(x, y) \\ u_t(x, y, 0) = \psi(x, y) \end{cases}$$

ثم إثبات أن حل هذه المسألة ذات البعدين لا يحقق قاعدة هويجن وأخيراً نطبق الطريقة مرة أخرى لاستنتاج حل دالمبرت لمعادلة الموجة ذات البعد الواحد (الذي لاحظناه سابقاً) .

سبق أن درسنا مسألة الوتر المهتز المنتهي وفق شروط ابتدائية وبرهنا على أن ذلك يؤدي إلى حل دالمبرت ، وسيدرك القارئ أن هناك تطبيقاً آخر لمعادلة الموجة ذات البعد الواحد سيكون بوصف معادلة الموجات المستوية في الأبعاد الثلاثة ، فمثلاً أن الموجات الصوتية والموجات الكهرومغناطيسية تكون بعيدة نسبياً عن مصدرها وهي أساساً موجات طولية مستوية وعليه يمكن وصفها بهذه المعادلة ، ويكون الحل العام .

1- معادلات ذوات البعد الواحد وتسمى موجات مستوية
2- معادلات ذوات بعدين وتسمى اسطوانية
3- معادلات ذوات ثلاثة أبعاد وتسمى كروية

وبعبارة أخرى ، إن الموجة ذات البعد الواحد يمكن أن توصف إما موجة مستوية في أبعاد أعلى وإما وتر مهتز ذا بعد واحد ، وفي هذا الدرس نناقش مسألة تعميم حل دالمبرت إلى حالة البعدين أو الأبعاد الثلاثة .

30-2 الموجات ذوات الأبعاد الثلاثة

نبدأ بدراسة الموجات الكروية ذات الأبعاد الثلاثة المعلومة الشروط الابتدائية ، أي أننا سنجد حل مسألة القيم الابتدائية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \qquad \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,y,z,0)=\phi(x,y,z) \\ u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z) \end{cases} \qquad (1)$$

لحل هذه المسألة نحل أولاً حالة خاصة منها عندما $\phi=0$ أي المسألة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt}=c^2\nabla^2 u$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,y,z,0)=0 \\ u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z) \end{cases} \qquad (2)$$

حيث : ∇^2 المؤثر التفاضلي :

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

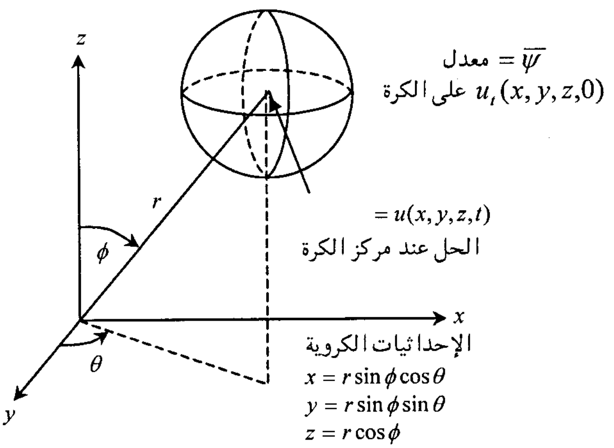
تحل هذه المسألة بتحويل فوريه ولها الحل الآتي :

$$u(x,y,z,t)=t\overline{\psi} \qquad (3)$$

حيث : $\overline{\psi}$ هي معدل الاضطراب الابتدائي ψ على الكرة التي مركزها (x,y,z) ونصف قطرها ct ، أي أن :

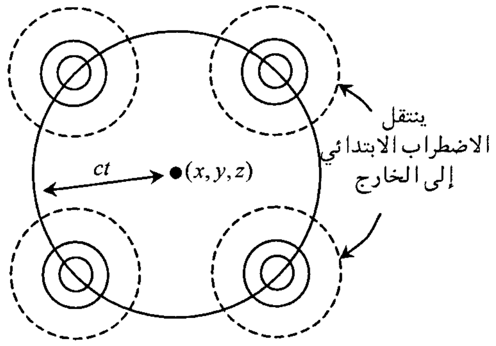
$$\overline{\psi}=\frac{1}{4\pi c^2t^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x+ct\sin\phi\cos\theta,\, y+ct\sin\phi\sin\theta$$
$$z+ct\cos\phi)(ct)^2\sin\phi d\theta d\phi$$

حيث زاويتا الدالة ψ هما θ,ϕ تتغيران على سطح الكرة وقيمهما تنتميان إلى $[0,\pi]$ $[0,2\pi]$ على التوالي (شكل 30-1) .



شكل 30–1 الحل كمعدل للاضطرابات الابتدائية على الكرة

إن تفسير هذا الحل هو أن الاضطراب الابتدائي ψ ينبعث إلى الخارج بصورة كروية (بسرعة ct) عند كل نقطة ، وعليه بعد عدد كاف من الثواني تتأثر النقطة (x,y,z) بتلك الاضطرابات على كرة (نصف قطرها ct) حول النقطة (شكل 30–2) .



شكل 30–2 الاضطراب الابتدائي ψ منتقل إلى الخارج من كل نقطة

والقيمة الفعلية للحل (3) تحسب على الأغلب عددياً بالحاسبة الإلكترونيـة لمعظـم الاضطرابات ، وقد يكون من المهم بالنسبة للقارئ أن يحاول إيجاد هذا الحل لعدد قليل مـن الدوال البسيطة ψ .

والآن لإكمال المسألة نتناول نصفها الآخر :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u \qquad (x, y, z) \varepsilon R^3$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u = \phi \\ u_t = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

والحالة هنا بسيطة ، هناك نظرية مشهورة طورت من قبل ستوك ، تقول أن كل ما علينا فعله لحل هـذه المسألة هـو تبديل الشروط الابتدائية إلـى $u = 0, u_t = \phi$ ثـم نشتق هـذا الحل بالنسبة للزمن ، وبعبارة أخرى نحل المسألة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u = 0 \\ u_t = \phi \end{cases} \qquad (5)$$

وذلك لإيجاد $u = t\overline{\phi}$ ثم نشتق بالنسبة للزمن ، وهذا يعطينا الحل لمسألة (4) الآتي :

$$u = \frac{\partial}{\partial t}\left[t\overline{\phi}\right]$$

ويمكن أن نلاحظ كيفية تطبيق ذلك لمعادلة الموجة ذات البعد الواحد حيث الحـل (حل دالمبرت) للمسألة (5) هو :

$$u(x,t)=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\phi(s)\,ds$$

وعليه إذا أجرينا اشتقاق هذه المعادلة (قاعدة ليبتز مسألة 7) ، نحصل على :

$$u_t(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+ct)+\phi(x-ct)]$$

الذي هو حل مسألة (4) .

وبمعرفة ذلك ، نكون قد حصلنا على مسألتنا ذات الأبعاد الثلاثة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt}=c^2\nabla^2 u \qquad (x,y,z)\varepsilon R^3$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u=\phi \\ u_t=\psi \end{cases}$$

والذي هو :

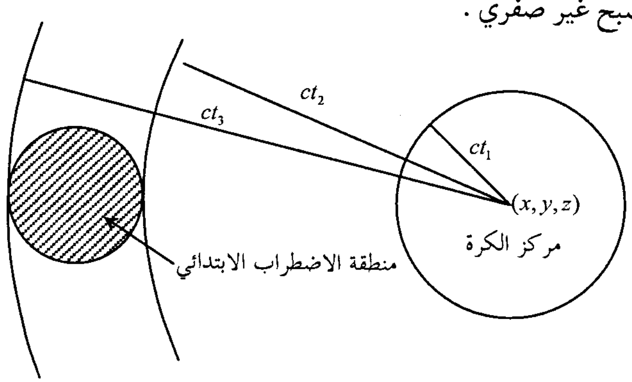
$$u(x,y,z,t)=t\overline{\psi}+\frac{\partial}{\partial t}\left[t\overline{\phi}\right]$$

حيث : $\overline{\phi},\overline{\psi}$ هما معـدلا الدالتين ϕ,ψ على الكرة التي مركزها (x,y,z) ونصف قطرها ct .

تعرف هذه الصيغة بصيغة بواسون لمعادلة الموجة الحرة ذات الأبعاد الثلاثـة ، وهـي تعميم لصيغة دالمبرت إلى الأبعاد الثلاثة ، إن أهم مظهر لصيغة بواسون هي حقيقة أن تكاملي $\overline{\phi},\overline{\psi}$ يكونان على سطح كرة ، التي تمكننا من وضع التفسير المهم الآتي للحل : عندما يكون

الزمن $t = t_1$ فإن الحل u عند النقطة (x, y, z) يعتمد فقط على الاضطرابات الابتدائية ψ و ϕ على كرة مركزها (x, y, z) ونصف قطرها ct .

لنفرض الآن أن الاضطرابات الابتدائية ψ و ϕ هي o ما عدا على كرة صغيرة (لاحظ شكل 30-3) عند ازدياد الزمن يزداد نصف قطر الكرة التي مركزها (x, y, z) بسرعة c وعليه بعد t_2 من الثواني فإن نصف القطر سيقطع منطقة الاضطراب الابتدائي وعندئذ $u(x, y, z, t)$ يصبح غير صفري .



شكل 30-3 مخطط يبين كيفية تأثير الاضطرابات الابتدائية على نقطة (x, y, z)

وعندما $t_2 < t < t_3$ يكون الحل عند النقطة (x, y, z) مختلفاً عن الصفر لأن الكرة تقطع منطقة الاضطراب ، ولكن عندما $t = t_3$ فإن الحل عند (x, y, z) يصبح فجأة صفراً مرة أخرى ، وبعبارة أخرى ، فإن اضطراب الموجة الناشئ عن منطقة الاضطراب الابتدائي يكون ذا حافة خلفية حادة .

هذه القاعدة العامة تعرف بقاعدة هويجن للأبعاد الثلاثة ، وهي السبب الذي يجعل الموجات الصوتية ذات الأبعاد الثلاثة أن تنبه إذ أننا ثم تتلاشى حال مرور الموجة ، وهذا يؤدي إلى أن للموجات دائماً حافات أمامية حادة إلا أن الحافات الخلفية تكون حادة فقط في الأبعاد ... ,7 ,5 ,3 وقد علمنا من حل دالمبرت أن الاضطراب الابتدائي :

$$u(x,0) = \phi(x)$$

$$u_t(x,0) = \psi(x)$$

في البعد الواحد ليس له حافة خلفية حادة (لأن حل دالمبرت يتضمن تكامل ψ من $(x-ct)$ إلى $(x+ct)$ وسنبين الآن إن قاعدة هويجن لا تطبق على الموجات الإسطوانية ، هذا الوضع يحدث عندما تنشأ موجة مائية من نقطة حيث أن الحافة الخلفية ليست حادة ولكنها تتضاءل تدريجياً إلى الصفر .

تمارين

1- برهن على أن في البعد الواحد يمكن إيجاد حل المسألة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = \phi(x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

وذلك باشتقاق حل المسألة الآتية بالنسبة إلى t :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = \phi(x) \end{cases}$$

2- طبق نتائج المسألة السابقة لإيجاد حل المسألة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = x \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

3- اذكر تفسير حل المسألة الآتية مع الرسم :

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u \qquad (x, y, z) \varepsilon R^3$$

$$\begin{cases} u = 0 \\ u_t = \begin{cases} 1 & x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \\ 0 & \text{للقيم الأخرى} \end{cases} \end{cases}$$

4- اعتماداً على المسألة الثالثة ما هو الحل ذو البعد الواحد للمسألة المماثلة الآتية للموجة المستوية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = \begin{cases} 1 & |x| \le 1 \\ 0 & \text{للقيم الأخرى} \end{cases} \end{cases}$$

الدرس الحادي والثلاثون

معادلة الموجة ذات البعدين (الفضاء الحر)

1–31 الغرض من الدرس

حل معادلة الموجة ذات البعدين .

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) \qquad \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{cases}$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,y,0) = \phi(x,y) \\ u_t(x,y,0) = \psi(x,y) \end{cases} \qquad (1)$$

نحتاج فقط أن نجعل الاضطرابين الابتدائيين ϕ,ψ في مسألة الأبعاد الثلاثة ، يعتمدان على متغيرين اثنين فقط x,y ، وبإجراء ذلك فإن الصيغة ذات الأبعاد الثالثة :

$$u = t\overline{\psi} + \frac{\partial}{\partial t}\left[t\overline{\phi}\right]$$

للدالة u ستصف موجات اسطوانية وعليه تعطي حلاً لمسألة البعدين ، هـذا الأسلوب يسمى طريقة التحديد ، وبإجراء العمليات (التي تكون بسيطة على أية حال) نحصل على :

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi c}\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{ct} \frac{\psi(x^1,y^1)}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} r\,dr\,d\theta + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi c}\int_0^{2\pi}\int_0^{ct} \frac{\phi(x^1,y^1)}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} r\,dr\,d\theta\right]\right\}$$

هذا هو الحل لمعادلة الموجة الحرة في البعدين ، وعلى الرغم من أننا سنحصل على حل عددي على أكثر احتمال ، فإن ذلك ذو تفسير مهم بدلالة قاعدة هويجن ، لاحظ أن في هذا الحل يكون تكاملاً ψ و ϕ على داخل الدائرة التي مركزها (x, y, z) ونصف قطرها ct ، وبعبارة أخرى إذا حللنا معنى ذلك بطريقة مشابهة لحالة الأبعاد الثلاثة ، فسنلاحظ أن الاضطرابات الابتدائية تؤدي إلى موجة أمامية حادة وليس إلى موجة خلفية حادة ، وهكذا فإن قاعدة هويجن لا تصح في حالة البعدين .

وأخيراً إذا فرضنا أن الشرطين الابتدائيين ψ و ϕ يعتمدان على متغير واحد فقط ، فإن ذلك سيؤدي إلى موجات مستوية ، وعليه فإن المعادلة السابقة ستتحدد ببعد أقل آخر وتصبح المعادلة المعروفة بحل دالمبرت .

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\, ds$$

ومرة أخرى فإن إجراء الحسابات الفعلية بطريقة التحديد هذه ليس بسيطاً ، لاحظ في حل دالمبرت أن الوضع الابتدائي ϕ يؤدي إلى حافات خلفية حادة ، إلا أن السرعة الابتدائية لا تؤدي إلى ذلك ، وبعبارة أخرى ، إن بعداً واحداً يبدو استثنائياً بعض الشيء بأن الوضع الابتدائي يحقق قاعدة هويجن ، ولكن السرعة الابتدائية لا تحقق ذلك ، وعموماً نقول أن قاعدة هويجن لا تتحقق في البعد الواحد .

ملاحظات

إن طريقة التحديد لم توضح مفصلاً في هذا الدرس ، وذلك لأننا لم نبين كيفية إيجاد التكامل في الأبعاد الأقل من الأبعاد الأكثر ، والمفهوم العام هو أنه يمكن استخدام حلول مسائل الفضاءات ذات الأبعاد الأعلى لإيجاد حلول مسائل الفضاءات ذات الأبعاد الأقل وذلك بفرض أن بعض الشروط الحدودية والشروط الابتدائية غير معتمدة على متغيرات معينة ، وسيدرك القارئ أن هذه ليست المسألة الوحيدة التي تطبق فيها طريقة التحديد .

تمارين

1- اعتمد على المسألة (3) في الدرس الثلاثين ، ما هو الحل ذو البعدين للمسألة المماثلة الآتية للموجة الاسطوانية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u_{xx} \qquad (x, y)\varepsilon R^2$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = \begin{cases} 1 & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 \end{cases} \end{cases}$$

2- أعط تفسيراً فيزيائياً يوضح سبب عدم تطبيق قاعدة هويجن في حالة البعدين .

3- طبق قاعدة ليبنتز الآتية :

$$\frac{d}{dt}\int_{f(t)}^{g(t)} F(\xi,t)\, d\xi = \int_{f(t)}^{g(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(\xi,t)\, d\xi + g'(t)F[g(t),t] - f'(t)F[f(t),t]$$

لإيجاد مشتقة التكامل الآتي بالنسبة إلى t :

$$\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \phi(s)\, ds$$

الدرس الثاني والثلاثون
تحويلات فوريه المنتهية
(التحويل الجيبي والتحويل الجيبتمامي)

32–1 الغرض من الدرس

لتقديم تحويلي فوريه التكامليين (التحويل الجيبي المنتهي والتحويل الجيبتمامي المنتهي) :

$$S_n = S[f] = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)\ dx$$ (التحويل الجيبي المنتهي)

$$C_n = C[f] = \frac{2}{L}\int f(x)\cos(n\pi x/L)\ dx$$ (التحويل الجيبتمامي المنتهي)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin(n\pi x/L)$$ (التحويل العكسي الجيبي)

$$f(x) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\pi x/L)$$ (التحويل العكسي الجيبتمامي)

وتبيان كيفية حل مسائل القيم الحدودية (وبصورة خاصة ، غير المتجانسة) باستخدام هذه التحويلات .

وقد تعلمنا سابقاً عن تحويلات فوريه ولابلاس المنتظمة وكيفية حل المسائل بتحويل المعادلات التفاضلية الجزئية إلى معادلة تفاضلية اعتيادية ، فتحويل فوريه المعتاد يتطلب تحويل المتغير إلى المدى من $-\infty$ إلى ∞ ، وعليه فإنه يستخدم لحل المسائل في الفضاء الحر (بدون حدود) .

وفي هذا الدرس ، نبين كيفية حل مسائل القيم الحدودية (بالحدود) بتحويل المتغيرات المحددة (أو المقيدة) والذي نقوم بإجراءه للمرة الأولى .

لنؤجل أولا النضر في سبب استخدام هذه التحويلات ونبدأ فقط بتعاريفها هي ومعكوساتها ، واستخدامها .

باختصار ، يمكن اعتبار طريقة التحويل هذه كتجزئة لدوال المسألة إلى ترددا تها المختلفة – حل طيف كلي للمسائل لكي تردد ثم جمع هذه النتائج .

نبدأ أولا بدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[0,L]$ ، التحويلان الجيبي والجيبتمامي المنتهيان لهذه الدالة يعرفان بالآتي :

التحويل الجيبي المنتهي

$$S[f]=S_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)\ dx$$

التحويل الجيبتمامي المنتهي

$$C[f]=C_n\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\pi x/L)\ dx$$

$$n=0,\,1,\,\ldots$$

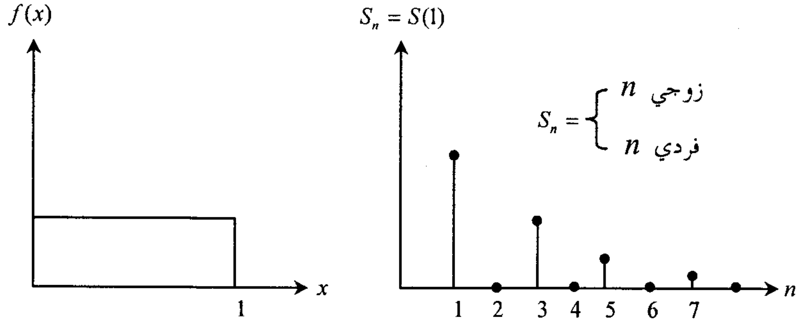
لاحظ أن المجموع يبدأ من $n=1$ في التحويل العكسي الجيبي ويبدأ من $n=0$ في التحويل العكسي الجيبتمامي .

أمثلة على التحويل الجيبي

$$f(x)=1 \qquad 0\le x\le 1$$

$$S_n=S[1]=2\int_0^1\sin(n\pi x)\ dx=\begin{cases}0 & \text{زوجي}\ n\\ 4/n\pi & \text{فردي}\ n\end{cases}$$

لاحظ بيان الدالة $f(x)$ وتحويلها في شكل 32–1 .



شكل 32-1 بيان الدالة $f(x)=1$ وتحويلها

التحويل العكسي يكون :

$$f(x)=1=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n-1}\right]\sin(n\pi x)$$

هل تعلم ما هو بيان الدالة خارج الفترة $[0,1]$ ؟ إذا تأملت ذلك ستلاحظ أيضاً أن التحويل الجيبي للدالة $f(x)$ هو دالة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة فقط (أي أنها متتابعة من الأعداد الصحيحة الموجبة) ، وبعبارة أخرى أن كلاً من التحويل الجيبي والتحويل الجيبتمامي يحول الدوال إلى متتابعات .

خواص التحويلات

قبل البدء بحل المسائل علينا استنتاج بعض الخواص المفيدة لهذه التحويلات ، فإذا كانت $u(x,t)$ دالة ذات متغيرين فعندئذ :

$$S[u]=S_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin(n\pi x/L)\,dx$$

$$C[u]=C_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\cos(n\pi x/L)\,dx$$

(لاحظ أننا حولنا المتغير x فقط وحصلنا على متتابعة من الدوال المعتمدة على الزمن فقط) .

ماذا عن المشتقات ؟ هنا عدد قليل من القوانين المفيدة .

$$S[u_t] = \frac{dS[u]}{dt} \quad S[u_{tt}] = \frac{d^2 S[u]}{dt^2}$$

$$S[u_{xx}] = -[n\pi / L]^2 S[u] + \frac{2n\pi}{L^2}\left[u(0,t) + (-1)^{n+1} u(L,t)\right]$$

$$C[u_{xx}] = -[n\pi / L]^2 C[u] - \frac{2}{L}\left[u_x(0,t) + (-1)^{n+1} u_x(L,t)\right]$$

32–2 حل المسائل بطريقة التحويل المنتهي

حل مسائل القيم الحدودية غير المتجانسة باستخدام التحويل الجيبي المنتهي ، تأمل معادلة الموجة غير المتجانسة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = u_{xx} + \sin(\pi x) \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = 1 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1$$

لحل هذه المسألة نجري الخطوات الآتية :

الخطوة الأولى : (تعيين التحويل)

بما أن المتغير x يتغير من 0 إلى 1 فنتبع التحويل المنتهي ، كذلك ستلاحظ لماذا نختار ، في هذه الحالة ، التحويل الجيبي ، نستطيع حل هذه المسألة باستخدام تحويل لابلاس بتحويل t (وسيتضمن نفس الصعوبة تقريباً كما في التحويل الجيبي المنتهي) .

الخطوة الثانية : (إجراء التحويل)

بتحويل المعادلة التفاضلية الجزئية هنا نحصل على :

$$S[u_{tt}] = S[u_{xx}] + S[\sin(\pi x)]$$

(حيث نكتب $S_n(t) = S\ [u]$ ، وباستخدام متطابقات التحويل الجيبي نحصل على :

$$\frac{d^2 S_n(t)}{dt^2} = -(n\pi)^2 S_n(t) + 2n\pi\left[u(0,t) + (-1)^{n+1} u(1,t)\right] + D_n(t)$$

$$= -(n\pi)^2 S_n(t) + D_n(t)$$

حيث :

$$D_n(t) = S[\sin(\pi x)] = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n = 2,\ 3,\ \ldots \end{cases}$$

(هذه هي معاملات سلسلة فوريه الجيبية) .

والآن إذا حولنا الشروط الابتدائية للمسألة فنحصل على الشروط الابتدائية الآتية للمعادلة التفضلية الاعتيادية :

$$S\ [u(x,0)]\ S_n(0) = \begin{cases} 4/n\pi & n = 1,\ 3,\ \ldots \\ 0 & n = 2,\ 4,\ \ldots \end{cases}$$

$$S[u_t(x,0)] = \frac{dS_n(0)}{dt} = 0$$

وعليه بحل مسألة (أو مسائل) القيم الابتدائية الآتية :

$$\frac{d^2 S_n}{dt^2} + (n\pi)^2 S_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & 0 = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} S_n(0) = \begin{cases} 4/n\pi & n = 1, 3, \ldots \\ 0 & n = 2, 4, \ldots \end{cases} \\ \dfrac{dS_n(0)}{dt} = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

يتبع أن :

$$S_1(t) = A\cos(\pi t) + (1/\pi)^2$$

حيث :

$$A = \frac{4}{\pi} - \frac{1}{\pi^2} = 1.17$$

$$S_n(t) = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, \ldots \\ \dfrac{4}{n\pi} \quad \cos(n\pi t) & n = 3, 5, 7, \ldots \end{cases}$$

وعليه فإن الحل $u(x,t)$ للمسألة هو :

$$u(x,t) = \left[A\cos(\pi t) + (1/\pi)^2\right]\sin(\pi x) + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1} \cos[(2n+1)\pi t]\sin[(2n+1)\pi x]$$

ملاحظات

1- لغرض استخدام التحويل الجيبي المنتهي أو التحويل الجيبتمامي المنتهي يجب أن تكون الشروط الحدودية عند $x = 0, L$ في إحدى الصيغتين :

$u(0,t) = f(t)$ (يستخدم التحويل الجيبي)

$u(L,t) = g(t)$

$u_x(0,t) = f(t)$

$u_x(L,t) = g(t)$ (يستخدم التحويل الجيبتمامي)

وبعبارة أخرى ، فإن التحويلين لا يطبقان على الشروط الحدودية $u(0,t) = f(t)$ و $u_x(L,t) = g(t)$ أو على الشروط الحدودية مثل $u_x(0,t) + hu(0,t) = 0$ ، هناك تحويلات أخرى تطبق على هذه الحالات مثل التحويل الجيبي العام أو التحويل الجيبتمامي العام .

2- لغرض استخدام التحويل المنتهي أو التحويل الجيبتمامي المنتهي يجب أن لا تتضمن المعادلة مشتقات بالنسبة إلى x من المرتبة الأولى (لأن التحويل الجيبي للمشتقة الأولى يتضمن الجيبتمام والعكس بالعكس) .

3- إن التحويل الجيبي المنتهي والتحويل الجيبتمامي يعبران أساساً عن كل دوال المسألة الأصلية مثل (u_{tt} ، u_{xx} ، الشروط الحدودية ، الشروط الابتدائية) بشكل سلاسل فوريه جيبية أو جيبتمامية ، ويعملان على حل مسائل المعادلات التفاضلية الاعتيادية لإيجاد معاملات فوريه ثم جمع النتائج .

تمارين

1- حل مسألة الانتشار المعزولة الحدود ، أي أن :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u_x(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = 1 + \cos(\pi x) + 0.5\cos(3\pi x) \qquad 0 \le x \le 1$$

2- حل المسألة العامة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + bu + f(x,t) \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = 0 \qquad 0 \le x \le 1$$

3- استنتج القوانين الأساسية لكل من $S[u_{xx}]$ و $C[u_{xx}]$ المعطاة في الملاحظات ، هل تعرف سبب صعوبة حل المعادلات التفاضلية التي تتضمن المشتقات الأولى u_x ؟

4- جد التحويل الجيبي المنتهي للدالة :

$$f(x) = \sin(\pi x) + 0.5\sin(3\pi x)$$

ارسم بيان التحويل الجيبي ، خذ $L = 1$ عند التحويل .

5- جد التحويل الجيبتمامي للدالة $f(x) = x$ حيث $0 \le x \le 1$ كيف يكون شكل بيان التحويل العكسي لكل قيم x (أنت تعلم أنه يعيد إلى الدالة $f(x) = x$ عندما $0 \le x \le 1$ ولكن ماذا عن خارج الفترة المغلقة ؟

6- حل المسألة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} + \sin(3\pi x) \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 1 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \sin(\pi x) \qquad 0 \le x \le 1$$

الدرس الثالث والثلاثون
(المبدأ الأساس في المنظومات الخطية)

33–1 الغرض من الدرس

تعريف مبدأ التراكب وتبيان كيف أن هذا المبدأ يعمل على تبسيط المسائل بتجزئتها إلى مسائل جزئية ، مما يمكننا من أجل حل المسائل الجزئية كل على حدة ثم نجمع النتائج لإيجاد حل المسألة الأصلية ، كما سنبين أن مبدأ التراكب يستخدم في الطريقتين الأساس لحل المعادلة الخطية ، طريقة فصل المتغيرات وطريقة التحويلات التكاملية .

بالنسبة للمهندس الذي يرغب في إيجاد الحل u لمنظومات الخطية من الإدخال f هناك طريقة مألوفة هي :

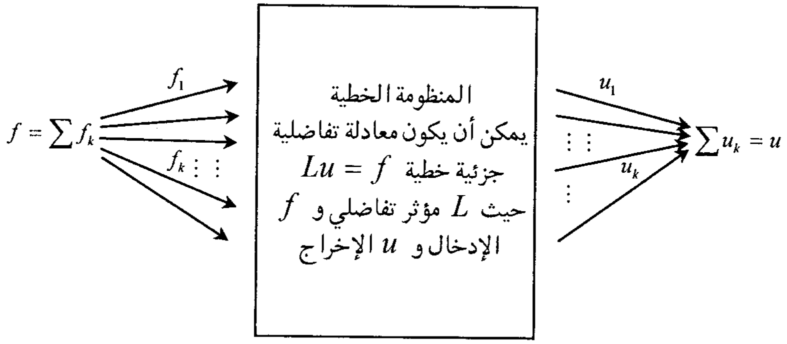
1– تجزئة f إلى أجزاء أولية $f = \sum f_k$.

2– إيجاد منظومة إخراجات u_k للأجزاء f_k .

3– جمع الإخراجات البسيطة u_k لإيجاد $u = \sum u_k$.

هذا يؤدي إلى أنه إذا كانت المنظومة خطية فعندئذ يكون المجموع u هو الإخراج الحاصل للدالة f والمسبب بها بصورة مباشرة ، هذا هو مبدأ التراكب (شكل 33–1) .

يمكن استخدام هذا المفهوم الأساس لحل مسائل القيم الحدودية الابتدائية بتجزئة المسألة الواحدة إلى عدد من المسائل الجزئية ، وحل كل من هذه المسائل الجزئية على حدة ثم جمع نتائج كل الأجزاء (وبالطبع ، يجب أن تكون المعادلة التفاضلية والشروط الحدودية كلها خطية) .



شكل 33–1 المفهوم الأساس لمبدأ التراكب

33–2 استخدام مبدأ التراكب لتجزئة مسألة القيم الحدودية الابتدائية إلى اثنتين أبسط

لنفرض أن لدينا مسألة خطية (ندعوها P) :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} + \sin(\pi x) \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty \qquad (P)$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \sin(2\pi x) \qquad 0 \le x \le 1$$

لدينا هنا معادلة توصيل حراري غير متجانسة وعليه فإنه لا يمكن تطبيق طريقة فصل المتغيرات ، ولذلك يمكن استخدام التحويل الجيبي على المتغير x أو تحويل لابلاس على المتغير t ، إلا أنه ما يزال هناك مفهوماً آخر لملاحظة المسألتين الجزئيتين الآتيتين :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} + \sin(\pi x)$$

الشروط الحدودية :

$$(P_1) \qquad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases}$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0)=0$$

و :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xy}$$

الشروط الحدودية :

$$(P_2) \qquad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases}$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0)=\sin(2\pi x)$$

يمكن حل هاتين المسألتين بعد جهد قليل ويبدو واضحاً هنا أن مجموع حلي P_1, P_2 هو حل المسألة الأصلية ، أي أن :

$$u(x,t)=\underbrace{\frac{1}{\pi^2}(1-e^{-\pi^2 t})\sin(\pi x)}_{\text{حل } P_1}+\underbrace{e^{-(2\pi)^2 t}\sin(2\pi x)}_{\text{حل } P_2}$$

وبصورة عامة يمكننا إثبات أن حل المسألة :

$$u_t = u_{xx} + f(x,t)$$

$$u(0,t)=0$$

$$u(1,t)=0$$

$$u(x,0) = \phi(x)$$

هو حلي المسألتين :

$$u_t = u_{xx} + f(x,t)$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(1,t) = 0$$

$$u(x,0) = 0$$

$$u_t = u_{xx}$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(1,t) = 0$$

$$u(x,0) = \phi(x)$$

33-3 فصل المتغيرات والتحويلات التكاملية كتراكبات

نحن لا نفكر في مبدأ التراكب عند تطبيق طريقة فصل المتغيرات أو طريقة التحويلات التكاملية ولكننا في الحقيقة نعمل على إجراء تراكبات غير منتهية ، ففي فصل المتغيرات نجزئ عادة الشروط الابتدائية إلى عدد غير منته من الأجزاء البسيطة ثم نحسب إخراج كل جزء ، وبعد ذلك نجمع الإخراجات الفردية هذه فنحصل على حل المسألة .

ومن ناحية أخرى ، ففي التحويلات التكاملية أيضاً يجري تراكب ، وعلى سبيل المثال دعنا نبين كيفية إجراء ذلك في التحويل الجيبي المنتهي ، لنلاحظ معادلة التوصيل الحراري غير المتجانسة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} + f(x,t) \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = 0 \qquad 0 \le x \le 1$$

لنلاحظ أيضاً حل هذه المسألة باستخدام التحويل الجيبي المنتهي ، أن الذي نقوم بعمله هو تجزئة الإدخال $f(x,t)$ إلى مركبات وإيجاد الإخراجات U_n لهذه المركبات ثم جمع هذه الإخراجات وقد لا يبدو ذلك واضحاً بصورة رياضية ولكن لنرى ذلك بعناية ، نبدأ بتجزئة المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} + f(x,t)$$

إلى سلسلة فوريه :

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\pi x) \qquad (1)$$

حيث :

$$A_n(t) = 2\int_0^1 u_t(x,t)\sin(n\pi x)\, dx$$

$$B_n(t) = 2\int_0^1 u_{xx}(x,t)\sin(n\pi x)\, dx$$

$$F_n(t) = 2\int_0^1 f(x,t)\sin(n\pi x)\, dx$$

لاحظ أن المعاملات A_n, B_n, F_n هي في الحقيقة ، دوال بدلالة t لأننا بدأنا بدوال ذوات متغيرين t و x ، لاحظ أيضاً أننا جزأنا الإدخال $f(x,t)$ إلى مركبات بسيطة $F_n(t)$ ، والذي نروم إيجاده هو الإخراج $U_n(t)$ لكل $F_n(t)$ ، ثم نجمع كل هذه الإخراجات لإيجاد الحل $u(x,t)$.

ولإيجاد الإخراجات البسيطة $U_n(t)$ نأخذ السلسلة الفورية $(1-23)$ ونجري بعض حسابات التكامل على المعاملات $A_n(t), B_n(t)$ ، بحيث تصبح المقادير المطلوبة تكاملاتها متضمنة u بدلاً من u_{xx} و u_t وعند إجراء التكامل بالتجزئة نحصل على أن :

$$A_n(t) = 2\int_0^1 u_t \sin(n\pi x)\, dx = \frac{d}{dt}\left[2\int_0^1 u(x,t)\sin(n\pi x)\, dx\right] = \frac{dU_n(t)}{dt}$$

$$B_n(t) = 2\int_0^1 u_{xx} \sin(n\pi x)\, dx = -(n\pi)^2 U_n(t) + 2n\pi$$
$$\left[u(0,t) + (-1)^{n+1} u(1,t)\right]$$

حيث أن $U_n(t)$ هو التحويل الجيبي للدالة $u(x,t)$ ، وبتعويض الشروط الحدودية :

$$u(0,t) = 0$$

$$u(1,t) = 0$$

بالمعادلة الأخيرة نحصل على أن :

$$B_n(t) = -(n\pi)^2 U_n(t)$$

وعليه تصبح سلسلة فوريه $(1-23)$ الآتي :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[U_n' + (n\pi)^2 U_n - F_n(t)\right]\sin(n\pi x) = 0$$

وبما أن هذه متطابقة بالمتغير x فإن جميع المعاملات تكون مساوية إلى الصفر ، أي أن :

$$U_n' + (n\pi)^2 U_n = F_n(t)$$

وعليه نحصل على علاقة الإدخال – والإخراج بين U_n و F_n ومع ذلك ، قبل أن نجد $U_n(t)$ علينا أن نذهب إلى الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = 0$$

فإذا وجدنا سلسلة فوريه الجيبية للدالة $u(x,0)$ نحصل على :

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(0)\sin(n\pi x) = 0$$

وعليه فإن شروطنا الابتدائية هي :

$$U_n(0) = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

والآن نكون قد جزأنا مسألة القيم الحدودية الابتدائية الأصلية إلى مسائل إدخال ، إخراج بسيطة هي :

المعادلة التفاضلية الاعتيادية :

$$U_n(t) + (n\pi)^2 U_n(t) = F_n(t)$$

الشروط الابتدائية :

$$U_n(0) = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

وبعد حل كل من هذه المسائل باستخدام عامل تكامل (تحويل لابلاس) نحصل على أن :

$$U_n(t) = e^{-(n\pi)^2 t}\int_0^t e^{(n\pi)^2 t} F_n(\tau)\, d\tau$$

والآن وجدنا الإخراجات $U_n(t)$ للإدخالات البسيطة $F_n(t)$ والخطوة الأخيرة ، كما يعرف القارئ ، هي جمع الإخراجات البسيطة هذه للحصول على الحل العام للمسألة الأصلية ، أي أن :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t)\sin(n\pi x)$$

يلاحظ القارئ أن كل $U_n(t)$ مضروب بالمقدار $\sin(n\pi x)$ ، وهـذه المقادير طبعاً هـي نفس المقادير المستخدمة عند تجزئة $f(x,t)$ إلى $F_n(t)$:

ملاحظات

في حالة التحويل الجيبي المنتهي كانت التجزئة سلسلة لا نهائية ، إلا أنه فـي معظـم التحويلات التكاملية تكون التجزئة تكاملات (تجزئة مستمرة) ، ومن المـهم للقـارئ إجـراء تراكباً مماثلاً لتفسير المسألة :

$$\text{PDE} \quad u_t = u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\text{IC} \quad u(x,0) = \phi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

لتحويل فوريه الأسي (على x) .

تمارين

1- برهن على أنه إذا كان u_2 و u_1 حلين للمسألتين P_2 و P_1 في الدرس فإن $u_1 + u_2$ يحقق المسألة P .

2- حل مسألة القيم الحدودية الابتدائية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = u_{xx} + \sin(3\pi x) \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin(\pi x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1$$

باستخدام مبدأ التراكب (وحل المسائل الجزئية بالطرق التي تراها مناسبة) .

3- افرض أن كلاً من u_2 و u_1 حلاً للمعادلة في كل مما يأتي ، بين أي من هذه المعادلات يكون لها $u_1 + u_2$ حلاً :

(a) $u_t = u_{xx}$

(b) $u_t = u_{xx} + e^t$

(c) $u_t = e^{-t} u_{xx}$

(d) $u_t = u_{xx} + u^2$

ماذا تستنتج من إجاباتك ؟

4- جد أربع مسائل قيم حدودية ابتدائية مجموع حلولها تؤلف حلاً للمسألة الآتية :

$$u_t = u_{xx} + f(x,t) \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

$$\begin{aligned} u(0,t) &= g_1(t) \\ u(1,t) &= g_2(t) \end{aligned} \qquad 0 < t < \infty$$

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad 0 \le x \le 1$$

5- حل مسألة القيم الابتدائية الآتية :

المعادلة التفاضلية الاعتيادية :

$$U_n'(t) + (n\pi)^2 U_n(t) = F_n(t)$$

الشرط الابتدائي :

$$U_n(0) = 0$$

هل تتمكن من تحقيق الحل ؟

6- إذا كان u_2 و u_1 يحققان الشروط الحدودية المتجانسة الآتية :

$$u_x(0,t) + h_1 u(0,t) = 0$$

$$u_x(1,t) + h_2 u(1,t) = 0$$

فهل أن $u_1 + u_2$ يحققها ؟

الدرس الرابع والثلاثون
معادلات المرتبة الأولى
(طريقة المميزات)

34–1 الغرض من الدرس

تعريف مفهوم المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى (حيث أننا لحد الآن درسنا فقط المرتبة الثانية) ، والتعريف بأسلوب مهم لحل مسائل القيم الابتدائية (طريقة المميزات) ، المسألة التي نحلها هي مسألة القيم الابتدائية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$a(x,t)u_x + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

لاحظ أننا لأول مرة نحل مسائل ذات معاملات متغيرة ، وذلك بتبديل المتغيرين (x,t) إلى متغيرين جديدين مناسبين (s,τ) (الإحداثيين المميزين) حيث تتحول المعادلة التفاضلية أعلاه إلى معادلة تفاضلية اعتيادية ، وعليه نجد الحل $u(s,\tau)$ لهذه المعادلة وعندئذ تكون الخطوة الأخيرة بالرجوع إلى المتغيرين الأصليين x,t لإيجاد الحل $u(x,t)$ للمسألة الأصلية .

يتذكر القارئ عندما وجدنا حل معادلة الانتشار :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - v u_x \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

إن α^2 هي كمية الانتشار وأن v هي سرعة الوسط ، وعليه عندما $\alpha = 0$ حالة عدم الانتشــار ، يتضح أن الحل حركة على طول محور x بسرعة v وذلك لوجود (حمل حراري فقط) ، وبعبــارة أخرى إذا كان الحل الابتدائي $u(x,0) = \phi(x)$ فإن حل المعادلة :

$$u_t = -vu_x$$

سيكون :

$$u(x,t) = \phi(x - vt)$$

وعليه فإن أحد تفسيرات معادلة المرتبة الأولى :

$$a(x,t)u_x + b(x,t)u_t = 0$$

إنها تمثل تركيزاً لسريان سرعته :

$$v = -a(x,t)/b(x,t)$$

وبالطبع إذا كان كل من $a(x,t)$ و $b(x,t)$ ثابتاً فسيكون لدينا حلاً ذا موجة متحركة ، ومن ناحية أخرى إذا كان $a(x,t)$ ، $b(x,t)$ يتغيران بتغير x,t فسيكون لدينــا سـرياناً ذا سـرعة تزداد بازدياد x وبازدياد t (يلاحظ القارئ أن المنحنى الابتدائي يمكن أن يشوه كثيراً) .

وللتشابه الكبير مع حالة الحمل الحراري لنعود إلى مسألتنا الأساس الآتية :

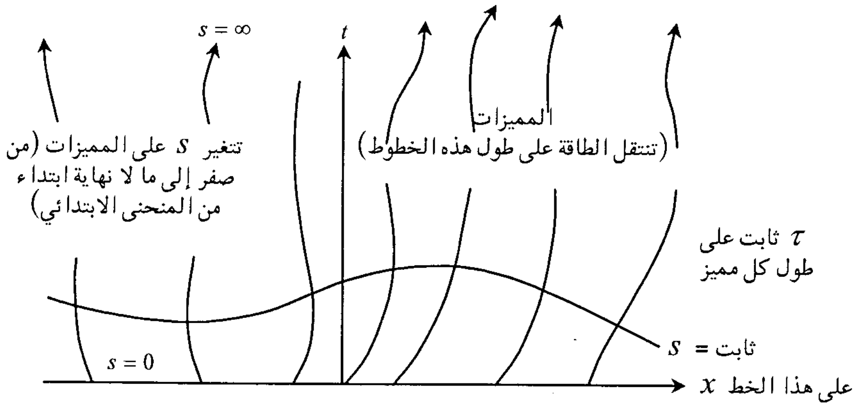
المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$a(x,t)u_x + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0 \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

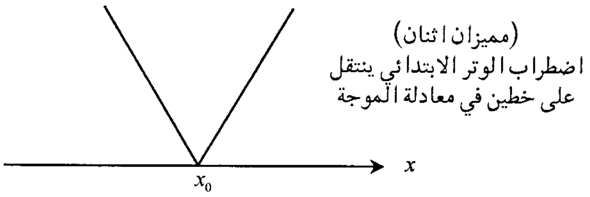
إن حل هذه المسألة (الخطية المتجانسة من المرتبة الأولى) يعتمد أساساً على حقيقة فيزيائية ، هي أن الاضطراب الابتدائي في نقطة ما x ينتقل على طول الخط (أو المنحنى) في مستوى $tx -$ (يسمى المميز) ، لاحظ شكل 34-1 .



شكل 34–1 الحل الابتدائي عند x يؤثر على الحل فقط على خط في المستوى xt –

هذه الظاهرة تخالف عدداً من المعادلات الأخرى (مثل معادلة التوصيل الحراري $u_t = u_{xx}$) حيث أن الاضطراب الابتدائي هناك يؤثر على الحل في كل نقطة بعد زمن قليل ، وكذلك إذا تذكر القارئ فإن اضطراب الوضع الابتدائي لوتر القيثارة عند النقطة x كان قد أثر على الحل على خطين في المستوى xt – (يناظران موجتين متحركتين) ، لاحظ شكل 34–2 .

وبحل مسألة القيم الابتدائية هذه ، نحصل على :



شكل 34–2 اضطراب ابتدائي $u(x,0)$ في نقطة ما يؤدي إلى موجتين

ولذلك فإن علينا أن نحول إلى متغيرين جديدين x,t (عوضاً عن x,t) لهما هاتين الصفتين :

s يتغير على المنحنيات المميزة

τ يتغير عل المنحنى الابتدائي (المستقيم $t=0$ على أكثر احتمال)

نبدأ أولاً باختيار المتغير الجديد s بحيث يحقق الصفة أعلاه ، تتحول المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$a(x,t)u_x + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0$$

إلى المعادلة التفاضلية الاعتيادية :

$$\frac{du}{ds} + c(x,t)u = 0$$

والآن كيف نجد هذه المميزات ؟ الجواب بسيط نختار المنحنيات المميزة :

$$\{[x(s),t(s)]: 0 < s < \infty\}$$

بحيث أن :

$$\frac{dx}{ds} = a(x,t)$$

$$\frac{dt}{ds} = b(x,t)$$

وبإجراء ذلك يتضح أن :

$$\frac{du}{ds} = u_x\frac{dx}{ds} + u_t\frac{dt}{ds} = a(x,t)u_x + b(x,t)u_t$$

وبعبارة أخرى فإن المعادلة التفاضلية الجزئية على المنحنيين $[x(s),t(s)]: 0 < s < \infty$ معادلة تفاضلية اعتيادية ، وسنوضح هذه المفاهيم بالأمثلة :

مثال

لنفرض إننا أردنا حل مسألة القيم الحدودية الابتدائية ذات المعاملات الثابتة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_x + u_t + 2u = 0 \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \sin x \qquad -\infty < x < \infty$$

الخطوة الأولى : جد المميزات (التي ينتقل عليها الوضع الابتدائي) :

$$\frac{dx}{ds} = 1 \qquad \frac{dt}{ds} = 1 \qquad 0 < s < \infty$$

وبحل المعادلتين أعلاه (علماً بأن s هو المتغير المستقل) نحصل على :

$$x(s) = s + c_1 \qquad t(s) = s + c_2$$

ولإيجاد الثابتين c_1, c_2 نفرض أن $s = 0$ وبالإشارة إلى شكل 24-1 نفرض أن :

$$x(0) = \tau$$

$$t(0) = 0$$

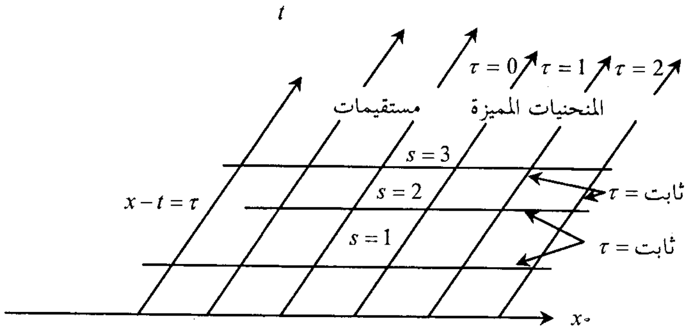
وبإجراء ذلك نحصل على أن $c_1 = \tau$ و $c_2 = 0$ وعليه يكون المنحنيان المميزان كالآتي :

$$x = s + \tau \qquad t = s$$

ولملاحظة بياني هذين المنحنيين في مستوى $tx -$ نتمكن من حذف s من هاتين المعادلتين فنحصل على :

$$x - t = \tau \qquad -\infty < \tau < \infty$$

(لكل قيمة للمتغير τ نحصل على خط مستقيم ، فمثلاً عندما $\tau = 0$ نحصل على المستقيم $(t = x)$ لاحظ شكل 34–3 .



شكل 34–3 نظام الإحداثيات الجديد

الخطوة الثانية : باستخدام نظام المحاور الجديد نحول المعادلة التفاضلية الجزئية إلى معادلة تفاضلية اعتيادية :

المعادلة التفاضلية الاعتيادية :

$$\frac{du}{ds} + 2u = 0 \qquad 0 < s < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(0) = \sin\tau$$

وبحل مسألة القيم الابتدائية هذه نحصل على :

$$u(s,\tau) = \sin\tau\ e^{-2s}$$

(لاحظ أننا كتبنا u بدلالة s,τ) .

وعليه فإن هذا هو الحل ، إلا أنه بالإحداثيات الجديدة ، ولذا فإن المطلوب كتابة u بدلالة t و x وهذا يتم بالخطوة الثالثة .

الخطوة الثالثة : والآن نجد قيمتي s,τ بدلالة x,t من التحويل :

$$x = s + \tau \qquad t = s$$

فنحصل على :

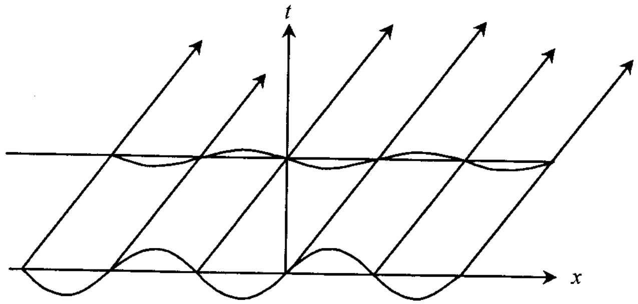
$$s = t \qquad \tau = x - t$$

وعليه يكون الجواب :

$$u(x,t) = \sin(x-t)e^{-2t}$$

تحقق منه .

ويلاحظ هنا أن ذلك يعني أن الموجة الابتدائية $u(x,0) = \sin x$ تتحرك إلى اليمين (دون أن تتشوه في هذه الحالة) وتتضاءل إلى الصفر (شكل 34–4) .



شكل 34–4 الحل هو موجة تتحرك إلى اليمين بسرعة ثابتة ، وتتضاءل إلى الصفر

والآن نلخص ما نقوله .

34–2 الأسلوب العام لحل معادلة المرتبة الأولى

نفرض أن لدينا مسألة القيم الابتدائية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$a(x,t)u_x + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = f(x)$$

الخطوة الأولى : نحل المعادلتين التفاضليتين الاعتيادتين (المعادلتين المميزتين) :

$$\frac{dx}{ds} = a(x,t) \qquad \frac{dt}{ds} = b(x,t)$$

ونجد ثابتي التكامل بوضع $x(0) = \tau$ و $r(0) = 0$ والآن علينا أن نحول من (x,t) إلى (s,τ)

$$x = x(s,\tau)$$

$$t = t(s,\tau)$$

الخطوة الثانية : نحل المعادلة التفاضلية الاعتيادية :

المعادلة التفاضلية الاعتيادية :

$$\frac{du}{ds} + c[x(s,\tau),\ t(s,\tau)]\,u = 0 \qquad\qquad 0 < s < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(0) = f(\tau)$$

لاحظ أننا عوضنا عن قيم τ و x بدلالة s,t في المعامل $c(x,t)$

الخطوة الثالثة : بعد حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية (بالشروط الابتدائية) نحصل على $u(s,\tau)$ ونجد الآن قيم s,t بدلالة x,τ (من التحويل الذي وجدناه في الخطوة الأولى) وتعويض هذه القيم في $u(s,\tau)$ ، والآن نطبق هذه الخطوات بالمثال الآتي (لاحظ المعاملات المتغيرة) .

مثال آخر

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$xu_x + u_t + tu = 0 \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$u(x,0) =$ (حيث $F(x)$ موجة اختيارية)

الخطو الأولى

المعادلة $\dfrac{dx}{ds} = x$ حلها $x(s) = c_1 e^s$

والمعادلة $\dfrac{dt}{ds} = 1$ حلها $t(s) = s + c_2$

وبوضع $x(0) = \tau$ و $t(0) = 0$ نحصل على أن $c_1 = \tau$, $c_2 = 0$ ، وعليه فإن التحويل بالإحداثيات الجديدة هو :

$$x = \tau e^s$$

$$t = s$$

الخطوة الثانية : نحل :

$$\frac{du}{ds} + su = 0 \qquad 0 < s < \infty$$

$$u(0) = F(\tau)$$

فنحصل على :

$$u(s,\tau) = F(\tau)e^{-s^2/2}$$

الخطوة الثالثة : نجد قيمتي s,τ بدلالة x,t فنحصل على أن :

$$s = t, \tau = xe^{-1}$$

وعليه فإن الحل هو :

$$u(x,t) = F(xe^{-1})e^{-t^2/2}$$

وبعبارة أخرى ، إذا كان الشرط الابتدائي $u(x,0) = \sin x$.

فإن الحل سيكون :

$$u(x,t) = \sin(xe^{-t})e^{-t^2/2}$$

ملاحظات

لابد وأن يتبادر إلى ذهن القارئ السؤال عن سبب دراستنا للمعادلات التفاضلية الجزئية ذوات المرتبة الثانية قبل ذوات المرتبة الأولى ، من وجهة النظر الرياضية كان من السهل السير بهذا الاتجاه ، وعلى الرغم من ذلك ، ولكون أساليب حلول معادلات المرتبة الثانية لا تعتمد كثيراً على مفاهيم معادلات الجزئية الأولى ، ولأهمية معادلات المرتبة الثانية ، أيضاً فقد ارتأينا المنحى المذكور بدراستها أولاً .

ويختلف الوضع في حالة المعادلات التفاضلية الاعتيادية ، حيث أن طريقة الحل هناك والنظرية العامة ...الخ ، تبدأ بصورة طبيعية معادلات المرتبة الأولى إلى معادلات المرتبة الثانية ، ولذلك فإن المصادر تغطي المرتبة الأولى أولاً .

تمارين

1- حل مسألة التركيز البسيطة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_x + u_t = 0 \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \cos x \qquad -\infty < x < \infty$$

ما هو شكل الحل ؟ هل يحقق المعادلة التفاضلية الجزئية ، والشرط الابتدائي ؟

2- حل المسألة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$xu_x + tu_t + 2u = 0 \qquad -\infty < x < \infty \qquad 1 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,1) = \sin x \qquad -\infty < x < \infty$$

(لاحظ أن الزمن يبدأ من $t = 1$ هنا) ، ما شكل المميزات ؟ ارسم الحل لقيم مختلفة من الزمن ، وتحقق طبعاً من الجواب .

3- حل المسألة الآتية في أبعاد أعلى (موجات سطحية) :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$au_x + bu_y + cu_t + du = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

$$-\infty < y < \infty$$

$$0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,y,0)=e^{-(x^2+y^2)} \qquad -\infty<x<\infty$$

$$-\infty<y<\infty$$

حيث a, b, c, d ثوابت معلومة (تحقق من الجواب) .

4- حل المعادلة :

$$u_x+u_t+tu=0 \qquad -\infty<x<\infty \qquad 0<t<\infty$$

$$u(x,0)=F(x) \qquad -\infty<x<\infty$$

تحقق من الجواب .

5- من الممكن تعيين الحل u على منحنى بدلاً من المستقيم الابتدائي $t=0$ ، وفي الحقيقة أن المعادلة التفاضلية قد لا تتضمن المتغير t نهائيا (حيث قد يعتمد u على x فقط) ، حاول إيجاد حل المسألة الأكثر عموماً ، الآتية :
المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_x+2u_y+2u=0 \qquad -\infty<x<\infty \qquad -\infty<y<\infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,y)=F(x,y) \quad \text{على المنحنى} \quad C: y=x$$

حيث أن الدالة $F(x,y)$ معلومة .

الدرس الخامس والثلاثون

المعادلات غير الخطية ذوات المرتبة الأولى

(معادلة الحفظ)

35-1 الغرض من الدرس

تعريف مفهوم المعادلات الخطية ذوات المرتبة الأولى وتبيان كيفية تفسير بعضها (المسماة بمعادلات الحفظ) للظواهر الفيزيائية ، إحدى معادلات الحفظ هذه في المعادلة :

$$u_t + g(u)u_x = 0$$

بالشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \phi(x)$$

وهذه المعادلة تصف سريان المركبات في طريق سريع هذا المثال يشير إلى أن المعادلات التفاضلية الجزئية يمكن أن تستخدم لوصف الظواهر الفيزيائية إضافة للمعادلات المعتادة في الفيزياء والبيولوجيا والهندسة ، وهذا يؤدي إلى أن هذه المعادلة غير الخطية المعينة يمكن أن تعطي حلولاً غير مستمرة (موجات الصدمة) تنتقل على طول الطريق .

إن إحدى أكثر المعادلات التفاضلية الجزئية فائدة في الرياضيات هي معادلة الحفظ :

$$u_t + f_x = 0$$

تنص هذه المعادلة على أن زيادة أي كمية فيزيائية u_t يكون مساوياً لتغير الفيض $-f_x$ عبر الحدود (الفيض يقاس من اليسار إلى اليمين) .

في حركة الموائع يمكن أن يمثل $u(x,t)$ كثافة المائع عند النقطة x بينما تمثل $f(x,t)$ الفيض (كمية السائل التي تعبر نقطة معينة x في زمن t) ، ولأجل عدم اللجوء إلى الدخول في التفاصيل العديدة لحركة الموائع (مثل فرض عدم اللزوجة عدم الانضغاط ...الخ) ، فإننا سنتناول في هذا الدرس كيفية استخدام معادلة الحفظ لتخمين سريان المرور (سريان المركبات بدلاً من سريان جزيئات الماء) ، نبدأ باستنتاج معادلة الحفظ .

35–2 استنتاج معادلة الحفظ

لنفرض أن لدينا جنباً من طريق سريع تسير عليه مركبات من اليسار إلى اليمين ونفرض أيضاً عدم وجود مداخل إلى الطريق أو مخارج منها في هذا الجانب ، نفرض أيضاً $u(x,t) =$ كثافة المركبات عند النقطة x (عدد المركبات في وحدة الطول عند النقطة x) $f(x,t) =$ فيض المركبات (عدد المركبات المارة من النقطة x في الدقيقة الواحدة) .

عندئذ يبدو بوضوح أن لكل مقاطع الطريق $[a,b]$ يتعين تغير عدد المركبات (بالنسبة للزمن) بالمقدارين الآتيين :

تغير عدد المركبات في :

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\ dx = [a,b]$$

وتغير عدد المركبات في $[a,b]$ مساوياً :

$$f(a,t) - f(b,t) = -\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dx$$

(المعادلة الأخيرة هي نتيجة للنظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل) ، وبمساواة هذين التكاملين نحصل على أن :

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\ dx = -\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dx$$

وأخيراً ، وبما أن الفترة $[a,b]$ اختيارية فإن المقدارين المطلوب تكامليهما يجب أن يكون متساويين ، وبمساواتها تتبع معادلة الحفظ :

$$u_t + f_x = 0$$

وإذا أجرينا تحليلاً مماثلاً في حالة البعدين أو الأبعاد الثلاثة فنحصل على معادلة الحفظ في البعدين :

$$u_t + f_x + f_y = 0$$

معادلة الحفظ في الأبعاد الثلاثة :

$$u_t + f_x + f_y + f_z = 0$$

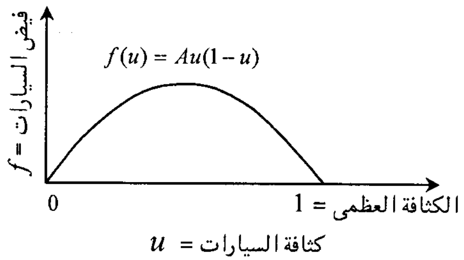
35–3 تطبيق معادلة الحفظ في مسألة المرور

لا يوجد صعوبة بمعنى الكلمة فيما يتعلق بالمعادلة $u_t + f_x = 0$ فهي ليست سوى معادلة ذات مجهولين وعليه فالسؤال الآن هو كيف نستخدم المعادلة وعم نبحث ؟

في السيطرة على المرور ثبت تجريبياً أن عدد المركبات المارة من نقطة معلومة (الفيض) عموماً هو دالة بدلالة الكثافة u ، وبعبارة أخرى تجري التجارب لإيجاد $f(u)$ ، ويبدو واضحاً أنه عندما تزداد الكثافة u فإن الفيض f يزداد (إلى نقطة ما على أية حال) ، والمعادلة الآتية تمثل نموذجاً نوعياً لسريان المرور :

$$f(u) = Au(1-u)$$

لاحظ شكل 35–1 .



شكل 35–1 الفيض النوعي إزاء منحنى الكثافة

وهناك معادلات سريان أخرى هي :

(معادلة سريان خطية) $f(u) = ku$

(معادلة سريان من الدرجة الثانية) $f(u) = u^2$

ولإكمال وصف معادلات السريان في السيطرة على المرور .

نحن الآن على استعداد لبيان كيفية تطبيق معادلة الحفظ $u_t + f_x = 0$ في مسائل المرور ، ولإجراء ذلك نعبر عن الفيض f_x بالآتي :

(قاعدة السلسلة) $f_x = (df / du)u_x$

ونعوض عن ذلك في معادلة الحفظ فنحصل على أن :

$$u_t + \frac{df}{du}u_x = u_t + g(u)u_x = 0$$

وعلى سبيل المثال ، إذا وجدنا أن الفيض يعتمد على الكثافة باستخدام المعادلة $f(u) = u^2$ فعندئذ تكون معادلة الحفظ الآتي :

$$u_t + 2uu_x = 0$$

وعليه فإنه إذا كانت كثافة المركبات هي $u(x,0) = \phi(x)$ فعندئذ لإيجاد الكثافة لأي زمن t ، علينا حل مسألة القيم الابتدائية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t + 2uu_x = 0 \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

وباتباع ذلك نحل الآن مسألة القيم الابتدائية غير الخطية .

4-35 مسألة القيم الابتدائية غير الخطية

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t + g(u)u_x = 0 \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

لاحظ القارئ أننا درسنا في الدرس السابق معادلة الحمل الحراري :

$$u_t + vu_x = 0$$

حيث أن الدالة $u(x,t)$ كانت تركيز سريان يتحرك بسرعة تساوي v ، يمكن ملاحظة مثيل لذلك في المعادلة غير الخطية :

$$u_t + g(u)u_x = 0$$

حيث يمكن أن نتصور أن جسيما من الماء يبدأ من النقطة x_0 ويتحرك إلى الأعلى وإلى الأسفل بسرعة $g(u)$ ، وعليه وبعد t من الثواني يكون الموضوع x للجسيم كالآتي :

$$x = x_0 + g(u)t \qquad \text{(المعادلة المميزة)}$$

ولما كان التركيز $u(x,t)$ لا يتغير على طول المميز ، وبفرض التركيز الابتدائي مساوياً $u(x_0,0)$ فعندئذ يمكن صياغة المعادلة المميزة بالآتي :

$$x = x_0 + g[u(x_0,0)]t$$

(المنحنى المميز المبتدئ من النقطة $(x_0,0)$.

وعلى سبيل المثال ، إذا أردنا حل مسألة القيم الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t + 3uu_x = 0$$

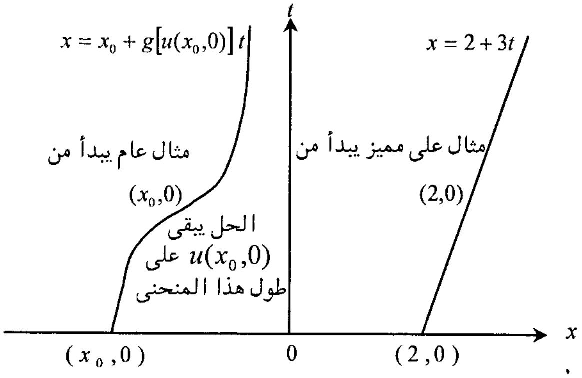
الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

فعندئذ ليجاد المميز الذي يبدأ من النقطة الابتدائية (2.0) مثلاً نضع :

$$x = 2 + g\,[u(2,0)]\,t$$
$$= 2 + g\,[1]\,t$$
$$= 2 + 3t$$

وهنا يمكننا أن ندعي بأن الحل $u(x,t)$ لمسألة القيم الابتدائية هذه ذو قيمة واحدة على المستقيم $x = 2 + 3t$ أي أن $u(2+3t,t) = 1$ لكل قيم $t > 0$ ، يمكن ملاحظة كل من المميزات العامة ومميز المثال أعلاه في شكل 35-2 .



شكل 35-2 المنحنيات المميزة للمعادلة $u_t + g(u)u_x = 0$

يتضح الآن أنه بمعرفة هذه المنحنيات المميزة التي تبدأ من كل نقطة (وبمعرفة أن الحل لا يتغير على هذه المنحنيات) يمكن ضم الحل $u(x,t)$ لكل t نحن لا نريد أن نعبر عن $u(x,t)$ بدلالة x,t كدالة صريحة بل نرغب بأن نستخدم ما نعرف عن مميزات المعادلة لحل بعض المسائل المهمة .

5-35 مسألة سريان المرور

والآن نعمل على حل مسالة سريان – المرور بحيث أن الفيض $f(u) = u^2$ وإن الكثافة الابتدائية للمركبات معلومة ، وبعبارة أخرى ، لدينا :

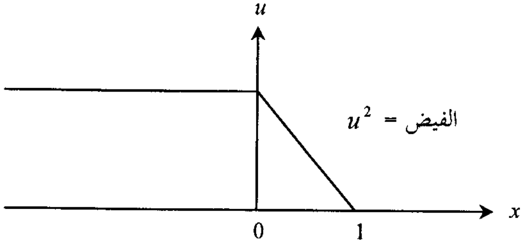
المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t + 2uu_x = 0 \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ 1-x & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 \le x \end{cases} \qquad -\infty < x < \infty$$

لاحظ شكل 35-3 .



شكل 35-3 الكثافة الابتدائية للمركبات المتحركة من اليسار إلى اليمين

نبدأ بإيجاد المميزات ابتداء مـن كل نقطة ابتدائية $(x_0,0)$ فعندما $x_0 < 0$ تكون المميزات :

$$x = x_0 + g\,[\,u(x_0,0)]\,t$$

$$= x_0 + g\,[1]\,t$$

$$= x_0 + 2t$$

وبإيجاد t بدلالة x نحصل على المستقيمات :

$$t = \frac{1}{2}(x - x_0)$$

يمكن ملاحظة هذه المستقيمات في شكل 35-4 .

والآن لنتأمل النقاط الابتدائية $0 < x_0 < 1$ ، هنا تكون المنحنيات المميزة كالآتي :

$$x = x_0 + g\,[u(x_0,0)]\,t$$

$$= x_0 + g[(1 - x_0)]\,t$$

$$= x_0 + 2(1 - x_0)\,t$$

وبإيجاد t بدلالة x نحصل على أن :

$$t = \frac{x - x_0}{2(1 - x_0)}$$

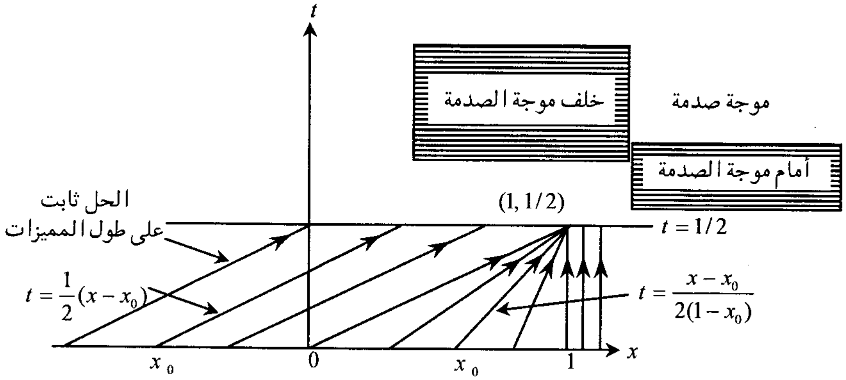
وأخيراً ، عندما يكون $1 \le x_0 < \infty$ نحصل على المميزات :

$$x = x_0 + g[u(x_0,0)]\,t$$

$$= x_0 + g[0]\,t$$

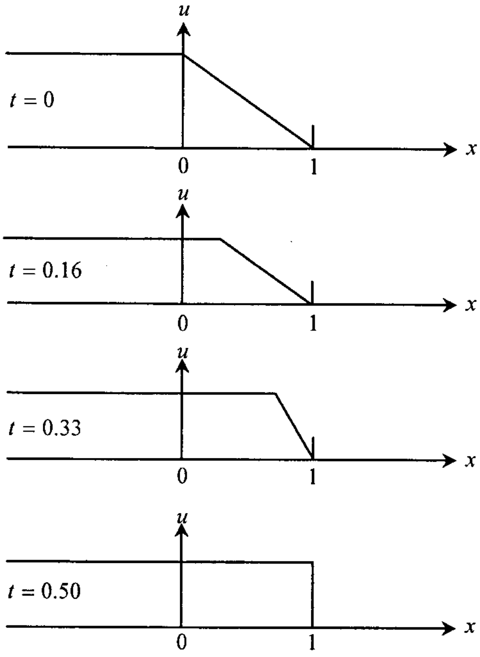
$$= x_0$$

وهي مستقيمات شاقولية تبدأ من النقطة x_0 ، ويمكن ملاحظة مميزات هذه المسألة في شكل 35-4 .



شكل 35-4 مميزات المعادلة $u_t + 2uu_x = 0$

يتضح الآن كيف يسير المرور عندما $0 < t < 1/2$ فبالنظر إلى شكل 35-5 ، نستطيع أن نرسم عدداً من الحلول لقيم مختلفة من الزمن ، لاحظ أن المميزات كلها تبدأ عندما $t = 1/2$ ، وعليه لإيجاد الحل قبل $t = 1/2$ يجب أن نطبق نموذجاً آخر من التحليل ، فعندما تبدأ المميزات سوية نحصل على ظاهرة موجات الصدمة (حلول غير مستمرة) وعلينا أن نسأل ما هي سرعة انتقال الحافة الأمامية لموجة الصدمة على الطريق ؟



شكل 5-35 كثافة المرور لقيم مختلفة من الزمن

ومع ذلك فإنه من غير الواضح أن انطلاق عدم الاستمرارية يكون :

$$S = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L}$$

حيث : u_R, u_L قيمتا الحل عند اليمين واليسار لصدر الموجة وأن $f(u_R)$ و $f(u_L)$ قيمتا الفيض عند تلك النقطتين ، وعليه ففي مثالنا يكون انطلاق الموجة [علما أن $f(u) = u^2$] هو :

$$S = \frac{0-1}{0-1} = 1$$

هذا يعني أنه عندما $t > 1/2$ يتحرك صدر الموجة من اليسار إلى اليمين بسرعة 1 ، ولإكمال صورة حل المسألة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t + 2uu_x = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ 1-x & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}$$

يمكن ملاحظة توضيح ذلك في شكل (5-35) .

ملاحظات

1- أن حدوث موجة الصدمة في مثالنا يعزى إلى نمو الفيض بصورة كبيرة جداً كدالة بدلالة الكثافة ، ومن ناحية أخرى إذا كان الفيض معلوماً بالصيغة $f(u) = u$ ، فعندئذ المعادلة التفاضلية الجزئية التي تصف السريان ستكون $u_t + u_x = 0$ ، ويكون الحل موجة غير مشوهة متحركة (حركة الموجة الابتدائية إلى اليمين) ، وإذا تأملنا لوهلة ما ، في معنى $f(u) = u$ فعندئذ سيكون من الواضح أن الحل سيتحرك بهذه الطريقة .

2- يمكن أن نتحقق بالتعويض المباشر من أن الدالة :

$$u = \phi[x - g(u)\, t]$$

تمثل حلاً ضمنياً للمسألة غير الخطية :

$$u_t + g(u)\, u_x = 0 \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

وعلى سبيل المثال أن الحل الضمني لمسألة القيم الابتدائية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t + uu_x = 0$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = x$$

هو :

$$u = \phi\,[x - g(u)\ t]$$

$$= x - g(u)\ t$$

$$= x - ut$$

في هذا المثال بالذات (وعلى الرغم من أننا لا نتمكن من إجراء ذلك في أمثلة عديدة) نستطيع إيجاد الحل $u(x,t)$ كدالة صريحة بدلالة x,t وبإجراء ذلك نحصل على :

$$u(x,t) = \frac{x}{1+t}$$

تحقق من ذلك .

تمارين

1- حل مسألة القيم الابتدائية الآتية :
المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t + uu_x = 0 \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \le x \end{cases}$$

ارسم الحل لقيم مختلفة من الزمن ، ما تفسيرك للحل ؟
ما العلاقة بين الفيض والكثافة في هذه المسألة ؟

2- حل المسألة الآتية :
المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t + u^2u_x = 0 \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \le x \end{cases}$$

ما العلاقة بين الفيض والكثافة ؟ هل تتوقع أن يكون الحل كذلك ؟ قارن بين حلي مسألتي 1 ، 2 .

3- لنفرض أن سائلاً غير لزج يسري داخل أنبوب وأن السائل يتسرب من خلال جدار الأنبوب تبعاً للقانون $(g/cm\sec)F(u) = ku$ وعندئذ تصبح معادلة الحفظ (وهي ليست معادلة حفظ الآن) كالآتي :

$$u_t + f_x = -F(u)$$

ما حل هذه المعادلة إذا كان $u(x,0) = \phi(x)$ و $f(u) = u$ (الكثافة الابتدائية العامة) ؟ ما تفسيرك للحل ؟

4- ما حل معادلة عدم الحفظ الآتية إذا كان التسرب إلى الخارج يتغير إلى $F(x,t) = 1/x$ ؟ هل أن حلك يحقق ذلك ؟ هل له معنى فيزيائي ؟

5- تحقق من أن $u = \phi[x - g(u)\ t]$ حل ضمني للمسألة غير الخطية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t + g(u)u_x = 0$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \phi(x)$$

الدرس السادس والثلاثون
الصفات العامة لمسائل القيم الحدودية

36–1 الغرض من الدرس

إيضاح كيفية نشوء المعادلات التفاضلية الجزئية التي لا تتضمن مشتقات بالنسبة للزمن في الطبيعة ، هذه لمعادلات التفاضلية ليس لها شروط ابتدائية ، مثل معادلة الموجة من نمط القطع الزائد ومعادلة التوصيل الحراري من نمط القطع الناقص ، بل لها شروط حدودية فقط ، ولهذا السبب فإن هذه المسائل تسمى بمسائل القيم الحدودية .

إن أكثر أنماط الشروط الحدودية شيوعاً هي الثلاثة الآتية :

1- شروط حدودية من النط الأول (شروط ديراشلية) .
2- شروط حدودية من النمط الثاني (شروط نيومان) .
3- شروط حدودية من النمط الثالث (شروط روبن) .

يتم تفسير هذه المفاهيم مع إعطاء أمثلة لتوضيحها .

لقد ناقشنا ولحد الآن المسائل المتضمنة ظواهر تتغير تبع الإزاحة والزمن ومع ذلك ، فهناك مسائل مهمة عديدة تكون مخرجاتها غير معتمدة على الزمن ، بل على الإزاحة فقط يمكن وصف أكثر هذه المسائل بمسائل قيم حدودية من نمط القطع الناقص ، والغرض من هذا الدرس هو وصف هذا النمط من المسائل .

هناك حالتان مألوفتان في المسائل الفيزيائية التي تؤدي على معادلات تفاضلية جزئية لا تتضمن الزمن وهما :

1- مسائل الحالة المستقرة .

-2 مسائل ذات حلول فيها تؤلف مركبة الزمن عاملاً منفصلاً ، لنلاحظ أولاً مسائل الحالة المستقرة .

36–2 مسائل الحالة المستقرة

لنتأمل حل الحالة المستقرة (الحل عندما $t \to \infty$) لمعادلة التوصيل الحراري :

$$u_t = \alpha^2 \nabla^2 u$$

يتضح أنه إذا كان الحل لا يعتمد على الزمن فإن $u_t = 0$ وعندئذ تؤول معادلة التوصيل الحراري إلى معادلة لابلاس .

$$\Delta^2 u = 0$$

ولتوضيح مفهوم الحالة المستقرة بالتفصيل نلاحظ المسألة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} + \sin(\pi x) \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty \qquad (1)$$

الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \sin(3\pi x) \qquad 0 \le x \le 1$$

ولإيجاد حل الحالة المستقرة $u(x,\infty)$ (إن وجد) ، نفرض أن $u_t = 0$ ثم نحل مسألة القيم الحدودية :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(\pi x) \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0$$

$$u(1) = 0$$

وفي هذه الحالة نحصل على الحل :

$$u(x,\infty) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)$$

وإذا وجدنا حـل مسألة (1) فنحصل على حـل يبدأ بالدالة $(3\pi x)$ إلا أنه تدريجياً يصبح مثل :

$$\frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)$$

ولبعض المسائل ، قد لا يوجد حل صفري للحالة المستقرة ولمسائل أخرى قد تكون الحالة المستقرة دالة جيبية ، وعليه فإن من غير الصحيح أن نجعل دائما u_t, u_{tt} مساوية إلى الصفر ، سنعرف حقاً بعض الشيء عن فيزياء المسألة .

3–36 إخراج عامل مركبة الزمن في مسائل القطع الزائد والقطع المكافئ

سبق وأن بحثنا في مسألة الطبل الدائري الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = \nabla^2 u \qquad 0 \le r < 1$$

الشرط الابتدائي :

$u = 0$ على الدائرة

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(r,\theta,0) = f(r,\theta) \\ u_t(r,\theta,0) = g(r,\theta) \end{cases}$$

عن حل من الصيغة :

$$u(r,\theta,t) = U(r,\theta)T(t)$$

الذي تتبع منه مسألة القيم الحدودية لهيلمولتز الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 U + \lambda^2 U = 0$$

الشرط الحدودي :

$$U(1,\theta) = 0$$

وفي هذه الحالة يمثل الحل عاملين ، الأول $U(r,\theta)$ عامل الشكل مضروباً في العامل الثاني $T(t)$ وهو عامل الزمن ، وهذه الحالة مألوفة في المعادلة التفاضلية الجزئية ، وكذلك أيضاً يمكن الوصول إلى معادلة هيلمولتز بإخراج عامل الزمن من معادلة الحرارة :

$$u_t = \nabla^2 u$$

من الأنماط الأكثر شيوعاً في دراسة مسائل القيم الحدودية ، ثلاثة نبدأ في بحثها الآن .

36–4 الأنماط الثلاثة الأساس للشروط الحدودية في مسائل القيم الحدودية

مسائل القيم الحدودية من النمط الأول (سائل ديراشليه)

المعادلة التفاضلية الجزئية لهذا النمط من المسائل تكون معرفة على منطقة معينة من الفضاء ، ويكون الحل معيناً على محيط المنطقة ، ومثالاً على ذلك إيجاد الحالة المستقرة لدرجة الحرارة داخل المنطقة عندما تكون درجة الحرارة معلومة على محيطها ، وفيما يأتي أمثلة أخرى .

36–5 أمثلة على مسائل ديراشليه

تأمل معادلة لابلاس الآتية داخل دائرة والمعلومة الحل على محيطها :

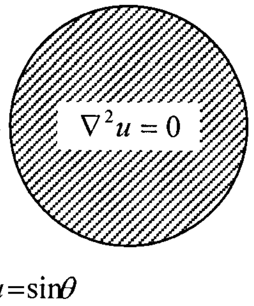
المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \qquad 0 < r < 1$$

الشرط الحدودي :

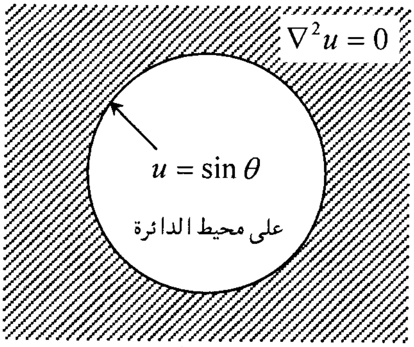
$$u(1,\theta) = \sin\theta \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

لاحظ شكل (36-1) .



شكل 36–1 مسألة ديراشليه داخلية

وهناك مثال آخر هو مسألة ديراشليه الخارجية التي نبحث فيها عن حل معادلة لابلاس خارج دائرة نصف قطرها يساوي واحد إذا علم الحل على الدائرة (شكل 36–2) .



شكل 36–2 مسألة ديراشليه خارجية

إن مسائل دير إشليه مألوفة في الكهربائية المستقرة حيث يراد إيجاد الجهد في منطقة ما إذا علم الجهد على محيطها .

6–36 مسائل القيم الحدودية من النمط الثاني (مسائل نيومان)

في هذه المسائل تكون المعادلة التفاضلية معرفة على منطقة معينة من الفضاء والعمود المتجه على الخارج $\partial u / \partial n$ (الذي يتناسب تبع الفيض الداخل) معلوم على محيط المنطقة ، وهذه المسائل مألوفة في الحالة المستقرة لسريان الحرارة ، والكهربائية المستقرة حيث يكون الفيض (في الطاقة الحرارية ، الإلكترونات ، وما شابه) معلوماً على المحيط .

وعلى سبيل المثال نفرض أن سريان الحرارة إلى الداخل يتغير حول الدائرة تبعاً للعلاقة :

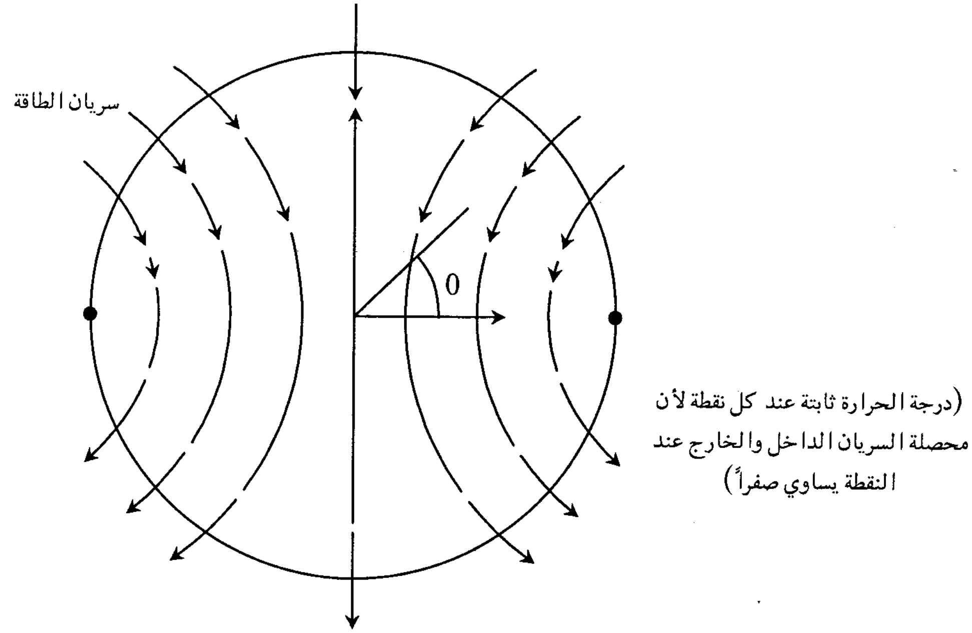
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sin\theta$$

وعندئذ تعطى الحالة المستقرة داخل الدائرة بحل مسألة القيم الحدودية الآتية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 0 < r < 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sin\theta \qquad r = 1 \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

وهنا نلاحظ (شكل 36–3) أن فيض الحرارة (سعرة / سم ثا) عبر المحيط يكون إلى الداخل عندما $0 \le \theta < \pi$ ويكون إلى الخارج عندما $\pi \le \theta < 2\pi$.



شكل 36–3 سريان الحرارة لمسألة نيومان

وعلى الرغم من ذلك ، وبما أن الفيض الكلي :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\theta = \int_0^{2\pi} \sin\theta \; d\theta = 0$$

(شرط يجب أن يتحقق في كل مسائل نويمان) ، فإننا نستطيع القول بأن درجة الحرارة عند كل نقطة داخل الدائرة لا تتغير بتغير الزمن .

وبعبارة أخرى ، فإن مسائل نويمان تكون ذات معنى فقط عندما تكون محصلة سريان الحرارة (أو أي شيء آخر) عبر المحيط مساوية صفراً ، أي أن العلاقة :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

تتحقق دائماً حول المحيط وإلا فلا يكون للمسألة حلاً ، وعلى سبيل المثال فإن مسألة نويمان الداخلية الآتية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 0 < r < 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1,\theta) = 1 \qquad r = 1 \qquad 0 \le 0 < 2\pi$$

ليس ذات معنى فيزيائياً لأن الفيض الداخل الثابت الذي يساوي واحداً لا يؤدي إلى حل حالة مستقرة . إن مسألة نويمان تختلف بعض الشيء عن الشروط الحدودية الأخرى في أن الحلول غير وحيدة . وبعبارة أخرى أن لمسألة نويمان الآتية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 0 < r < 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1,\theta) = \cos(2\theta) \qquad r = 1 \qquad 0 \le 0 < 2\pi$$

عددا لا ينتهي من الحلول $u(r,\theta)$ (لاحظ أن الفيض الكلي عبر المحيط يساوي صفراً) ومع ذلك فإذا حصلنا على أحد الحلول فيمكننا الحصول على الحلول الأخرى بإضافة ثوابت ، فمثلاً أن أحد حلول مسألة نويمان أعلاه هو :

$$u(r,\theta) = r^2 \cos(2\theta)$$

ويتضح أنه عند إضافة ثابت إلى هذا الحل نحصل على حل آخر ، ولهذا السبب ، إذا أردنا أن نجد حلاً واحداً لمسألة نويمان فيجب أن يكون هناك معلوما إضافياً (مثل معرفة الحل عند نقطة معينة) .

7-36 مسائل القيم الحدودية من النمط الثالث

هذه المسائل تؤدي على معادلات تفاضلية جزئية معرفة على منطقة ما من الفضاء إلا أن الشرط هنا على الحدود خليط من النمطين الأولين .

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(u-g) = 0$$

حيث h ثابت (مدخل في المسألة) و g دالة معطاة يمكن أن تتغير على الحدود والشرط أعلاه يكتب عادة بالصيغة :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -h(u-g)$$

الذي ينص على أن الفيض الداخل عبر الحدود يتناسب طردياً تبع الفرق بين درجة الحرارة u ودرجة حرارة ما معينة g ، وهذا ذو التفسير الآتي :

1- إذا كانت درجة الحرارة u أكبر من درجة حرارة الحدود g ، فعندئذ يكون سريان الحرارة إلى الخارج .

2- إذا كانت u أقل من درجة حرارة الحدود g فعندئذ يكون سريان الحرارة إلى الداخل .

مثال

لنفرض أن درجة الحرارة خارج دائرة الوحدة معطاة بالعلاقة $g(\theta) = \sin\theta$ في هذه الحالة يكون سريان الحرارة عبر الحدود بموجب العلاقة الآتية :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -h(u - \sin\theta) \qquad r = 1 \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

وعليه فلإيجاد الحالة المستقرة للحرارة داخل الدائرة يجب حل مسالة القيم الحدودية الآتية :

المعادلة التفاضلية الاعتيادية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 0 < r < 1$$

الشرط الحدودي :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + h(u - \sin\theta) = 0 \qquad 0 \le \theta < 2\pi \qquad (2)$$

إن الثابت h هو وسيط فيزيائي يقيس الفيض على الحدود عند اختلاف u و $\sin\theta$ درجة حرارة واحدة (ومن الصعب قياسه لأنه يعتمد على السطح البيني عبر الحدود) ، إذا كانت h كبيرة فيكون سريان الحرارة كبير جداً لكل فرق درجة حرارة واحدة ، وعندئذ يكون الحل مشابه إلى حد كبير لحل مسألة دير إشليه بالشرط الحدودي $g = \sin\theta$ ومن ناحية أخرى إذا كان $h = 0$ فعندئذ يؤول الشرط الحدودي على الشرط الحدودي العازل :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

ويستطيع القارئ أن يتصور كيف يمكن أن تتغير حلول مسألة (2) عندما تتغير h من 0 إلى ∞ فعندما $h = 0$ تكون الحدود معزولة تماماً ، وعليه فإن الحل $u(r,\theta)$ يكون ثابتاً (وعندئذ هناك أكثر من حل حيث أن كل ثابت يمكن أن يكون حلاً) ، وكلما ازدادت h أكثر كلما أصبح مشابهاً أكثر فأكثر لمسألة دير إشليه بالشرط الدويد $u = \sin\theta$ وعندما $h > 0$ وقريب من الصفر يوشك أن يكون الحل صفرياً (الذي هو معدل $\sin\theta$ على الحدود) .

تمارين

1- اعتماداً على التصور الهنسي ، هل تستطيع إيجاد حل مسألة دير إشليه الآتية ؟
المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 0 < r < 1$$

الشرط الحدودي :

$$u(1,\theta) = \sin\theta \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

2- هل أن لمسألة نويمان الآتية حل داخل الدائرة ؟
المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 0 < r < 1$$

الشرط الحدودي :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sin^2\theta$$

3- باختلاف قيم h ، كيف يكون شكل الحل $u(r,\theta)$ للمسألة الآتية ؟
المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 0 < r < 1$$

الشرط الحدودي :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + h(u - \sin\theta) = 0$$

4- ما مسألة القيم الحدودية التي يؤول حلها إلى الحالة المستقرة لحل المسألة الآتية ؟

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt} = u_{xx} - u_t + u \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية :

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin(3\pi x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1$$

5- باستخدام التفسير الفيزيائي للأبلاسية بين طبيعة حلول مسألة القيمة الحدودية لهيلمولتز الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = -\lambda^2 u \qquad 0 < r < 1$$

الشرط الحدودي :

$$u(1,\theta) = 0 \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

6- ما التفسير الفيزيائي لمسألة القيم الابتدائي داخل المربع الآتي ؟

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < y < 1$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u_y(x,0) - h\,[u(x,0) - 2\,] & 0 < x < 1 \\ u(x,1) = 1 & \\ u_x(0,y) = 0 & 0 < y < 1 \\ u_x(1,y) = 0 & \end{cases}$$

الدرس السابع والثلاثون

مسألة ديرإشليه الداخلية للدائرة

37–1 الغرض من الدرس

تبيان كيفية حل مسألة دير إشليه الداخلية للدائرة :

المعادلة التفاضلية الجزئية

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \qquad 0 < r < 1$$

الشرط الحدودي :

$$u(1,\theta) = g(\theta) \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

وذلك بطريقة فصل المتغيرات ، يمكن تفسير الحل بالتعبير عن الدالة الحدودية بالآتي :

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \right]$$

ثم إيجاد حل كل من المسألتين الآتيتين :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad \nabla^2 = 0$$

$$u(1,\theta) = \sin(n\theta) \qquad u(1,\theta) = \cos(n\theta)$$

وبما أن حلي هاتين المسألتين هما :

$$u(r,\theta) = r^n \sin(n\theta) \qquad u(r,\theta) = r^n \cos(n\theta)$$

فعندئذ يكون حل مسألة ديرإشليه الداخلية هو :

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n\left[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\right]$$

وبعد الحصول على هذه السلسلة سنقوم بإجراء بعض العمليات الجبرية للوصول إلى صيغة تكاملية بديلة للحل ، هذه الصيغة الجديدة ، حل بواسون التكاملي تظهر بعض المفاهيم المهمة .

يعرض هذا الدرس عدداً من المفاهيم الجديدة من خلال حل مسألة ديرإشليه الآتية :

المعادلة التفاضلية الاعتيادية :

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \qquad 0<r<1 \qquad (1)$$

الشرط الحدودي :

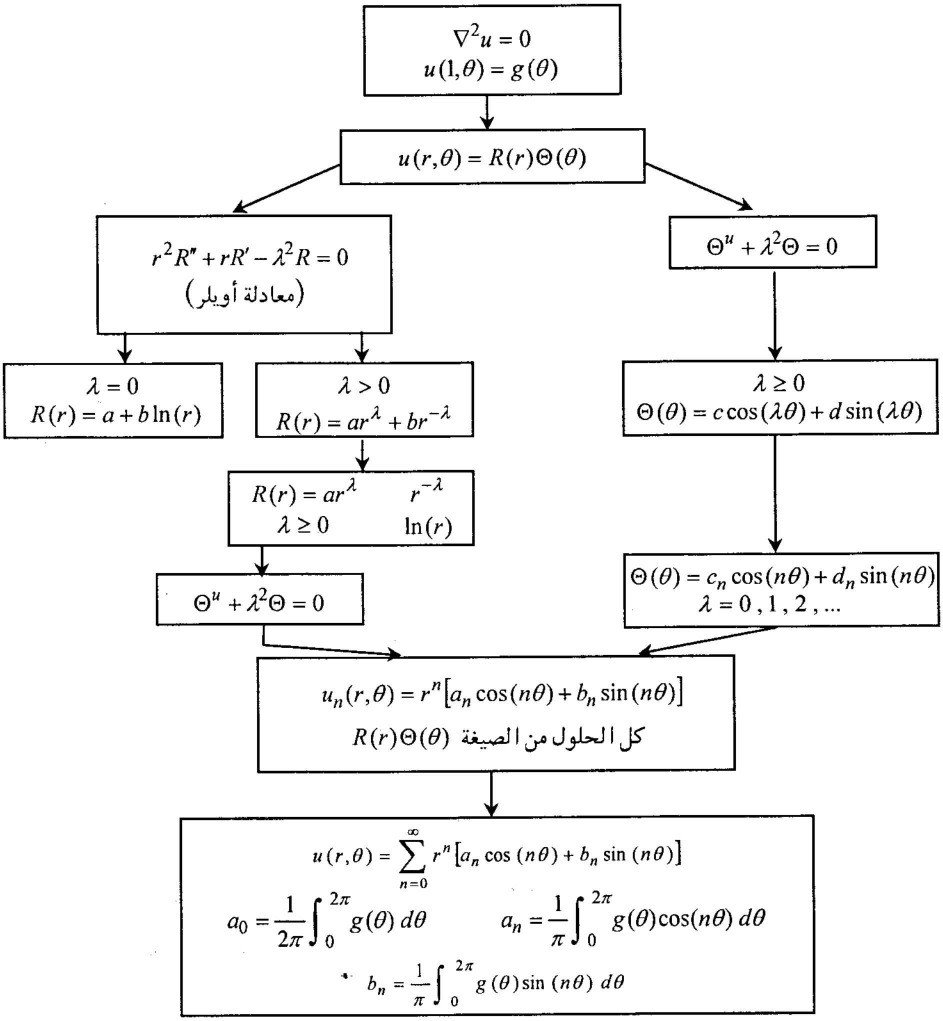
$$u(1,\theta)=g(\theta) \qquad 0\le\theta<2\pi$$

إن طريقة فصل المتغيرات هي إجراء معتاد ، إلا أنه بعد إيجاد هذا الحل المسلسل سنجري بعض العمليات للحصول على صيغة بديلة (صيغة بواسون التكاملية) .

إن المسألة (1) مهمة جداً في التطبيقات الفيزيائية ، ويمكن تفسيرها كإيجاد جهد الكهربائية المستقرة داخل دائرة عندما يكون الجهد معلوماً على محيطها ، كما أنها تفسر كنموذج لغشاء بوني .

فإذا بدأنا بطوق سلكي وجعدناه بحيث يقاس هذا التجعد بالدالة $g(\theta)$ ثم غمرناه في محلول صابوني فسيتكون غشاء صابوني حول الطوق ، ويكون ارتفاع الغشاء ممثلاً بحل مسألة (1) إذا علم أن الإزاحة $g(\theta)$ صغيرة .

ويجب أن يكون القارئ مطلع جداً على أسلوب طريقة فصل المتغيرات الموجـز في شكل (37–1) الذي سوف يمكن ممارسته بالتفصيل (مسألة 1) ، ويمكن ملاحظة عد قليل من التوضيحات لهذا الموجز في شكل (37–1) .



شكل 37–1 موجز حل مسألة ديرإشليه الداخلية

-1 يجب أن يتحقق القارئ من أن ثـابت الفصـل يجـب أن يكـون غـير سـالب (ولذلك اعتبر λ^2) ، فـإذا كان هـذا الثابت سالباً فسـوف لا تكون الدالة $\Theta(\theta)$ دورية ، ومـن الناحية الأخرى إذا كـان الثابت صفـراً سنترك الحد $\ln r$ في الحل :

$$R(r) = a + b \ln r$$

-2 وليعلم القارئ كيفية إيجـاد الثوابت b_n و a_n ، ويمكن إيجـاز حل مسألة ديرإشليه الداخلية (1) بالآتي :

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right] \tag{2}$$

وقبل أن نعيد كتابة الحل بصيغة أخرى ننشيء بعض الملاحظات .

37–2 ملاحظات حول حل مسألة ديرإشليه

-1 يفسر الحل (2) بالتعبير عن الدالة الحدودية $g(\theta)$ كسلسلة فوريه :

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right]$$

ثم حل المسألة لكل من السلسلة الجيبية والسلسلة الجيبتمامية ، ذلك لأن كـلاً مـن هـذين الحـدين يـؤدي إلى حلـول $r^n \sin(n\theta)$ و $r^n \cos(n\theta)$ ثـم يكـون الحـل (بموجب مبدأ التراكب) كالآتي :

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right]$$

2- إن حل المسالة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 0 < r < 1$$

الشرط الحدودي :

$$u(1,\theta) = 1 + \sin\theta + \frac{1}{2}\sin(3\theta) + \cos(4\theta)$$

هو :

$$u(r,\theta) = 1 + r\sin\theta + \frac{r^3}{2}\sin(3\theta) + r^4\cos(4\theta)$$

ولأن سلسلة فوريه للدالة $g(\theta)$ هنا معلومة بحيث أن :

$$a_0 = 1 \qquad b_1 = 1$$

$$a_4 = 1 \qquad b_3 = 0.5$$

$b_n = 0$ عندما $n \neq 1,3$ $a_n = 0$ عندما $n \neq 0,4$ فسوف لا نحتاج لتطبيق صيغ a_n و b_n .

3- إذا كان نصف قطر الدائرة اختيارياً (R مثلاً) فعندئذ يكون الحل كالآتي :

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (r/R)^n \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \right]$$

4- لاحظ أن الحد الثابت a_0 في الحل (2) يمثل معدل $g(\theta)$:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta$$

هذا يكمل مناقشتنا للحل بطريقة فصل المتغيرات ، والآن نحصل على صيغة بواسون التكاملية المهمة .

3–37 صيغة بواسون التكاملية

نبدأ بالحل الحصل بطريقة فصل المتغيرات :

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(r/R)^n\left[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\right]$$

(نفرض الآن نصف القطر اختياري) ثم نعوض عن المعاملات b_n و a_n وبعد إجراء بعض العمليات من الجبر ، والتفاضل والتكامل ، والمثلثات نحصل على :

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(r/R)^n\int_0^{2\pi} g(\alpha)$$

$$\left[\cos(n\alpha)\cos(n\theta)+\sin(n\alpha)\sin(n\theta)\right]d\alpha$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(r/R)^n\cos\left[n(\theta-\alpha)\right]\right\}g(\alpha)\,d\alpha$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(r/R)^n\left[e^{in(\theta-\alpha)}+e^{-in(\theta-\alpha)}\right]\right\}g(\alpha)\,d\alpha$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{1+\frac{re^{i(\theta-\alpha)}}{\left[R-re^{i(\theta-\alpha)}\right]}+\frac{re^{-i(\theta-\alpha)}}{\left[R-re^{-i(\theta-\alpha)}\right]}\right\}g(\alpha)\,d\alpha$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\alpha)+r^2}\right]g(\alpha)\,d\alpha$$

وهذه المعادلة الأخيرة هي ما نبحث عنه وتسمى بصيغة بواسون التكاملية .
وعليه نكون قد حصلنا على صيغة بديلة لحل مسألة ديرإشليه الداخلية :

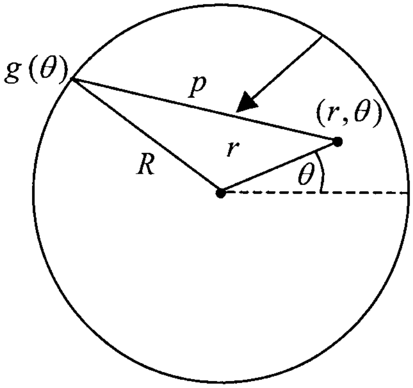
$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\alpha)+r^2}\right]g(\alpha)\,d\alpha \qquad (3)$$

37–4 ملاحظات حول حل بواسون التكاملي

-1 يمكن أن نفسر حل بواسون التكاملي (3) بإيجاد الجهد u عند القطة (r,θ) كمعدل مرجح للجهد $g(\theta)$ على الحدود مرجحة بنواة بواسون :

$$\text{نواة بواسون} = \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\alpha)+r^2}$$

هذا يلقي بعض الضوء على النظم الفيزيائية ، وبالتحديد أن الجهد عند نقطة ما هو المعدل المرجح للجهود المجاورة وتبين نواة بواسون مقدار الأرجحية المقرنة لكل نقطة (شكل 37–2) .



شكل 37–2 $U(r,\theta)$ كمجموع مرجع لجهود الحدود

بالنسبة للقيم الحدودية $g(\alpha)$ القريبة من (r,θ) تكون نواة بواسون كبيرة لأن مقام هذه النواة يساوي مربع المسافة بين النقطتين (r,θ) و (R,α) ، (شكل 37-2) . ولهذا السبب فإن التكامل يجعل ترجيحاً أكثر على قيم $g(\alpha)$ الأقرب إلى (r,θ) ولسوء الحظ إذا كانت (r,θ) قريبة للغاية إلى الحدود $r=R$ فإن نواة بواسون تكون كبيرة جداً لقيم α الأقرب إلى (r,θ) .

ولهذا السبب عندما تكون (r,θ) قريبة من الحدود فإن الحل المسلسل أجدى فعالية لإيجاد القيم العددية للحل .

-2 إذا وجدنا قيمة الجهد في مركز الدائرة بتكامل بواسون ، نجد أن :

$$u(0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\alpha)\,d\alpha$$

وبعبارة أخرى ، إن الجهد في المركز يساوي معدل الجهود الحدودية وبهذا تكتمل مناقشتنا ، ولأول وهلة يمكن أن يتبادر إلى ذهن القارئ أن هذه المسألة ليست مهمة جداً ، لأن منطلق المسألة من السهولة بمكان ، والصحيح أن معادلة لابلاس هي الأسهل عندما تكون منطقة المسألة دائرة ، أو مربع نصف مستوي ربع مستوي وما شابه ، إلا أن هناك إشارتين :

-1 في حالات عديدة يصمم الباحث الجهاز لفيزيائي وله الخيار في تعيين شكل الحدود التي يرغب .

-2 وبعدئذ سندرس التحويلات المعروفة باسم التحويلات الحافظة الزوايا التي تعمل على تحويل المناطق المعقدة إلى أخرى بسيطة (مثل الدوائر) ، وعليه لحل مسألة ديرإشليه في منطقة اختيارية فإن كل ما علينا هو تحويل هذه المنطقة

إلـى دائـرة ، وباسـتخدام الحـل الـذي وجدنـاه فـي هـذا الـدرس نرجـع إلـى الإحداثات الأصلية .

ملاحظات

1- نستطيع دوماً حل مسألة القيم الحدودية (معادلة تفاضلية جزئية غير متجانسة) الآتية :

داخل D $\nabla^2 u = f$ المعادلة التفاضلية الجزئية .

على حدود D $u = 0$ الشرط الحدودي .

كما يأتي :

(i) بإيجاد أي حل V للمعادلة $\nabla^2 V = f$ (حل خاص)

(ii) حل مسألة القيم الحدودية الجديدة الآتية :

داخل D $\nabla^2 W = 0$

على محيط D $W = V$

(iii) ملاحظة : إن $u = V - W$ هو الحل المطلوب ، بعبارة أخرى ، نستطيع تحويل عدم التجانس مـن المعادلـة التفاضليـة الجزئيـة علـى الشـرط الحدودي .

2- نستطيع حل مسألة القيم الحدودية (شرط حدودي غير متجانس) الآتية :

داخل D $\nabla^2 u = 0$ المعادلة التفاضلية الجزئية

على حدود D $u = f$ الشرط الحدودي

كما يأتي :

(a) إيجاد أي دالة V تحقق الشرط الحدودي $V = f$ على حدود D .

(b) حل مسألة القيم الحدودية الجديدة الآتية :

$$\nabla^2 W = \nabla^2 V \qquad \text{داخل } D$$

$$W = 0 \qquad \text{على محيط } D$$

ملاحظة : إن $u = V - W$ الحل المطلوب للمسألة ، بعبارة أخرى ، نستطيع تحويل عدم التجانس من الشرط الحدودي إلى المعادلة التفاضلية الجزئية .

تمارين

1- بين تفاصيل حل مسألة ديرإشليه الداخلية (1) الحاصل بطريقة فصل المتغيرات ، حيث أن من المهم جداً معرفة هذه التفاصيل لأن هناك فروقاً مهمة جداً في حل مسائل ديرإشليه أخرى في الدرس القادم ، ويجب هنا معرفة السبب في أن ثابت الفصل λ لا يمكن أن يكون سالباً ، كذلك عندما $\lambda = 0$ فإن هناك إغفالاً لحل مهم ما هو ؟ لاحظ الملخص في شكل (30-1) .

2- ما حل مسألة ديرإشليه الداخلية الآتية :

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \qquad 0 < r < 1$$

بكل من الشروط الحدودية الآتية :

a) $u(1,\theta) = 1 + \sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta$

b) $u(1,\theta) = 2$

c) $u(1,\theta) = \sin\theta$

d) $u(1,\theta) = \sin 3\theta$

كيف تكون أشكال الحلول ؟ هل إنها تحقق معادلة لابلاس ؟

3- ما حل مسألة ديرإشليه الداخلية الآتية حيث نصف القطر $R = 2$:

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & \nabla^2 u = 0 & 0 < r < 2 \\ \text{BC} & u(2,\theta) = \sin\theta & 0 \le \theta < 2\pi \end{array}$$

ما شكل بيان الحل ؟

4- ما حل مسألة 3 إذا تغير الشرط الحدودي إلى $u(2,\theta) = \sin(2\theta)$ ؟ ما شكل بيان الحل ؟

5- حل المسألة الآتية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 0 < r < 1$$

$$u(1,\theta) = \begin{cases} \sin\theta & 0 \le \theta < \pi \\ 0 & \pi \le \theta < 2\pi \end{cases}$$

ما شكل بيان الحل بصورة تقريبية ؟

6- ما شكل نواة بواسون كدالة بدلالة $0 \le \alpha < 2\pi$ حيث $r = 3R/4$ و $\theta = /2$ ؟ وبعبارة أخرى ارسم بيان نواة بواسون .

7- تحقق من ملاحظة 1 في هذا الدرس .

8- تحقق من ملاحظة 2 في هذا الدرس .

الدرس الثامن والثلاثون
مسألة ديرإشليه على الشكل الحلقي

38–1 الغرض من الدرس

حل مسألة ديرإشليه بين دائرتين متمركزتين (شكل حلقي) :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \qquad R_1 < r < R_2$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{aligned} u(R_1, \theta) &= g_1(\theta) \\ u(R_2, \theta) &= g_2(\theta) \end{aligned} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

الأسلوب المتبع هنا هو فصل المتغيرات ، وهو مشابه لمسألة ديرإشليه الداخلية ما عدا عدم إهمال الحلول .

$$\frac{1}{r^n}\sin(n\theta) \qquad \frac{1}{r^n}\cos(n\theta) \qquad \ln r$$

كما فعلنا ذلك سابقاً ، وعليه يكون الحل هنا هو :

$$u(r,\theta) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n r^n + b_n r^{-n})\cos(n\theta) + (c_n r^n + d_n r^{-n})\sin(n\theta)\right]$$

وسنناقش أيضاً حل مسألة ديرإشليه الخارجية ، وفي هذه الحالة سنهمل الحدود غير المقيدة (عندما $r = \infty$) وعليه فإن حل مسألة ديرإشليه الخارجية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 1 < r < \infty$$

الشرط الحدودي :

$$u(1,\theta) = g_1(\theta) \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

هو :

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \right]$$

هناك كثير من المناطق التي يمكن حل مسألة ديرإشليه عليها ، وبمجرد تسمية عدد قليل من هذه المناطق نحصل على مسألة ديرإشليه :

(a) داخل الدائرة (في الدرس السابق) .
(b) الشكل الحلقي (هذا الدرس) .
(c) خارج الدائرة (هذا الدرس) .
(d) داخل الكرة (بعدئذ) .
(e) بين كرتين (بعدئذ) .
(f) بين مستقيمين (في بعدين) .
(g) بين مستويين (في أبعاد ثلاثة) .

وهلم جرا ، ونحن نرغب بحل عينة تمثل مسائل ديرإشليه بحيث يتعلم القارئ منها القواعد العامة ويكون قادراً على حل مسائل جديدة .

والهدف في هذا الدرس هو إيجاد شكل غشاء صابوني بين طوقين مغلقين ، ومن المحتمل هنا أن لا يكون التفسير الهندسي جيداً كما كان عليه في مسألة ديرإشليه الداخلية ، ونمط هذه المسألة هو :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \qquad R_1<r<R_2$$

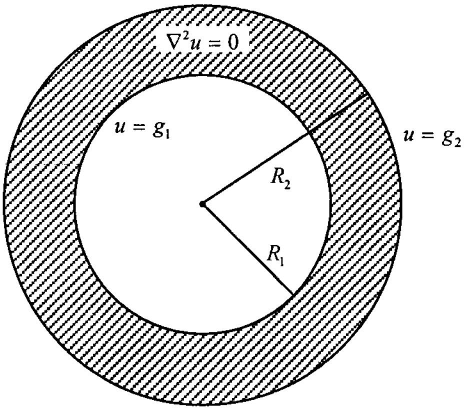
الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(R_1,\theta)=g_1(\theta) \\ u(R_2,\theta)=g_2(\theta) \end{cases} \qquad 0\le\theta\le 2\pi \qquad (1)$$

ويمكن ملاحظة الصورة العامة لهذه المسالة في شكل $(1-38)$.

المسألة هنا هي إيجاد الحل $u(r,\theta)$ بين الدائرتين $r=R_1$ و $r=R_2$ والذي يعطى بالدالتين $g_1(\theta)$ و $g_2(\theta)$ على الدائرتين ، نبدأ بالبحث عن حلول من الصيغة :

$$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$$



شكل 38–1 معادلة لابلاس في الشكل الحلقي

وبتعويض هذه في معادلة لابلاس نحصل على المعادلتين التفاضليتين الاعتيادتين الآتيتين بالمتغيرين $R(r)$ و $\Theta(\theta)$.

(معادلة أويلر)

$$r^2 R'' + r R' - \lambda^2 R = 0$$

$$\Theta'' + \lambda^2 \Theta = 0$$

لاحظ أننا أردنا في هاتين المعادلتين أن يكون ثابت الفصل أكبر من أو مساوياً صفراً (ندعوه λ^2) وإلا كأن الحل غير دوري ، الخطوة التالية هي حل المعادلتين المذكورتين وضرب حليهما ، وهذا يعطي حلولاً للمعادلات التفاضلية الجزئية والتي تكون من الصيغة $R(r)\Theta(\theta)$.

وأهم هاتين المعادلتين هي معادلة أويلر ، ولحسن الحظ أنها إحدى المعادلات التفاضلية القليلة ذات المعاملات المتغيرة التي يمكن حلها بسهولة ملحوظة ، وسنتطرق بالتفصيل إلى معادلة أويلر وحلها في الدرس المقبل .

تمارين

1- حل مسألة ديرإشليه الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 1 < r < 2$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(1,\theta) = \cos\theta \\ u(2,\theta) = \sin\theta \end{cases}$$

2- ما حل مسألة ديرإشليه الخارجية الآتية ؟

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 1 < r < \infty$$

وفق كل من الشروط الحدودية الآتية :

(a) $u(1,\theta) = 1$

(b) $u(1,\theta) = 1 + \cos(3\theta)$

(c) $u(1,\theta) = \sin(\theta) + \cos(3\theta)$

(d) $u(1,\theta) = \begin{cases} 1 & 0 \le \theta < \pi \\ 0 & \pi \le \theta < 2\pi \end{cases}$

الدرس التاسع والثلاثون

حل معادلة أويلر

39–1 الغرض من الدرس

هو حل معادلة أويلر والتي يمكن كتابة صيغتها العامة كالآتي :

$$(r^2 R'' + r R' - \lambda^2 R = 0)$$

وللحصول على الحل من الأفضل اعتبار حالتي :

الحالة الأولى $(\lambda = 0)$: هنا تصبح معادلة أويلر الآتي :

$$r^2 R'' + r R' = 0$$

ويمكن الملاحظة بسهولة أن حلها العام هو :

$$R(R) = A + B \ln r$$

ويمكن إيجاد ذلك بفرض $V(r) = R'(r)$ وحل المسألة الجديدة الآتية :

$$r V'(r) + V(r) = 0$$

للدالة $V(r)$ ، وبعد إيجاد أن $V(r) = c_1 / r$ (باتباع أسلوب فصل المتغيرات للمعادلات التفاضلية الاعتيادية) ، نعوض مرة أخرى للحصول على :

$$R(r) = c_1 \ln r + c_2$$

39–2 الحالة الثانية $(\lambda < 0)$: معادلة أويلر هنا هي :

$$r^2 R'' + r R' - \lambda^2 R = 0$$

ولحلها نبحث عن حلول من الصيغة $R(r) = r^{\alpha}$ ، والهدف هو إيجاد قيمتين للمتغير α (ولتكونا α_1 و α_2) بحيث يكون الحل العام :

$$R(r) = ar^{\alpha 1} + br^{\alpha 2}$$

وبوضع $R(r) = r^{\alpha}$ في معادلة أويلر نحصل على أن $\alpha = \lambda \;\; , \; -\lambda$ وعليه يكون الحل :

$$R(r) = ar^{\lambda} + br^{-\lambda}$$

وباستخدام هذا الحل لمعادلة أويلر نحصل على :

$$\lambda = 0 \quad \begin{cases} R(r) = a + b\ln r \\ \Theta(\theta) = c + d\theta \end{cases}$$

$$\lambda > 0 \quad \begin{cases} R(r) = ar^{\lambda} + br^{-\lambda} \\ \Theta(\theta) = c\cos(\lambda\theta) + d\sin(\lambda\theta) \end{cases}$$

وباستخدام فرض أن $\Theta(\theta)$ دورية بطور 2π يجب أن تكون قيم λ هي $1, 2, 3, \ldots$ ، وعليه نصل إلى الحلول الآتية لمعادلة لابلاس .

3-39 حلول جدائية لمعادلة لابلاس

بما أن كلاً مما يأتي حل لمعادل لابلاس :

$$c$$

$$c\ln r$$

$$cr^{n}\cos(n\theta)$$

$$cr^{n}\sin(n\theta)$$

$$cr^{-n}\cos(n\theta)$$

$$cr^{-n}\sin(n\theta)$$

فعندئذ كل مجموع لهذه الحلول يكون حلاً لها ، وعليه يكون :

$$u(r,\theta) = a_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[(a_n r^n + b_n r^{-n})\cos(n\theta) + (c_n r^n + d_n r^{-n})\sin(n\theta)\Big] \qquad (1)$$

حلاً عاماً لمعادلة لابلاس .

والمطلوب الآن فقط هو إيجاد الثوابت في الحل أعلاه بحيث تتحقق الشروط الحدودية .

$$u(R_1,\theta) = g_1(\theta)$$

$$u(R_2,\theta) = g_2(\theta)$$

وبتعويض ذلك في الحل أعلاه نحصل على :

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln R_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_1(s)\, ds \\ a_0 + b_0 \ln R_2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_2(s)\, ds \end{cases}$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على قيمتي a_0 , b_0 ، ونحصل من التعويض المذكور أيضاً ، على :

$$\begin{cases} a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_1(s)\cos(ns)\, ds \\ a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_2(s)\cos(ns)\, ds \end{cases} \qquad (2)$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على قيم a_n , b_n كذلك :

$$\begin{cases} c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} g_1(s) \sin(ns)\, ds \\ c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} g_2(s) \sin(ns)\, ds \end{cases}$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على قيم d_n , c_n .

وعليه نكون قد حصلنا من المعادلات أعلاه على قيم الثوابت a_0 , b_0 , a_n , b_n , c_n , d_n ، ونكون قد أكملنا حل معادلة (1) في الدرس السابق وهذا الحل هو كما في (1) حيث يتم إيجاد الثوابت من المعادلات (2) في هذا الدرس .

وسنقوم بحل بعض المسائل البسيطة لنلقي بعض الضوء للقارئ على هذا الحل .

39–4 بعض الأمثلة على مسألة ديرإشليه على الشكل الحلقي

مثال 1

لنفرض أن الجهد داخل دائرة يساوي صفراً ، وخارجها يساوي $\sin\theta$ أي أن :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad\qquad 1 < r < 2$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(1,\theta) = 0 \\ u(2,\theta) = \sin\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

إن أول خطوة لإيجاد الحل هو حساب التكاملات الواردة في (3) ، وبإجراء الحسابات البسيطة وحل المعادلات اللازمة لإيجاد قيم d_n , c_n , b_n , a_n , b_0 , a_0 نحصل على :

$$a_0 = 0$$
$$b_0 = 0$$

$$a_n = 0$$
$$b_n = 0 \qquad n = 1\,,\,2\,,\,\ldots$$

$$c_n = \begin{cases} 2/3 & n = 1 \\ 0 & \text{لقيم } n \text{ الأخرى} \end{cases}$$

$$d_n = \begin{cases} -2/3 & n = 1 \\ 0 & \text{لقيم } n \text{ الأخرى} \end{cases}$$

وهذه القيم تجعل الحل مساوياً :

$$u(r,\theta) = \frac{2}{3}\left(r - \frac{1}{r}\right)\ \sin\theta$$

ويمكن التأكد بسهولة من أن $u(r,\theta)$ تحقق الشروط الحدودية ، ويتضح أنها تحقق معادلة لابلاس لأنها ذات صيغة الحل العام (1) .

مثال 2

نلاحظ مسألة الجهود الثابتة على الحدود :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 1 < r < 2$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(1,\theta) = 0 \\ u(2,\theta) = 5 \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

في هذه الحالة ، يمكن إيجاد الحل بصورة أسرع لأن الحل هنا غير معتمد على θ كما هو واضح (لأن الشروط الحدودية غير معتمدة على θ) وبعبارة أخرى ، نعلم أن حلنا يجب أن يكون ذات صيغة $a_0 + b_n \ln r$ وباستخدام المعادلتين المتضمنتين a_0 , b_0 نحصل على أن :

$$a_0 + b_0 \ln 1 = 3$$

$$a_0 + b_0 \ln 2 = 5$$

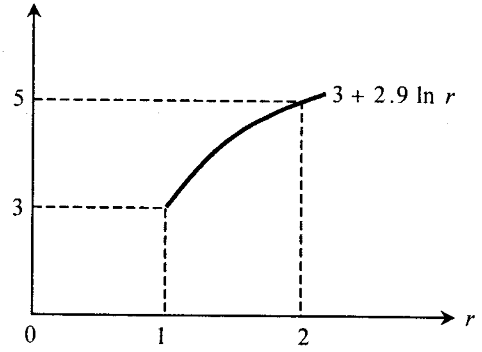
أي أن :

$$a_0 = 3 \qquad b_0 = 2/\ln 2 = 2.9$$

وعليه يكون الحل :

$$u(r,\theta) = 3 + 2.9 \ln r$$

وعليه يكون بيان الحل كما في شكل (39-1) .



شكل 39-1 شريحة قطرية للجهد داخل الشكل الحلقي $(1 < r < 2)$

مثال 3

في المسألة المهمة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 1 < r < 2$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(1,\theta) = \sin\theta \\ u(2,\theta) = \sin\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

بملاحظة سريعة للمعاملات a_0 , b_0 , a_n , b_n , c_n , d_n يتبين أن كلاً منها يساوي صفراً ما عدا d_1 و c_1 ، حيث أن d_1 و c_1 يحققان :

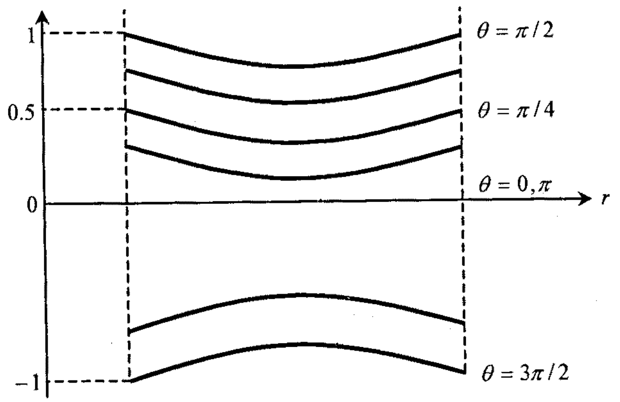
$$c_1 + d_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 s \; ds = 1$$

$$2c_1 + d_1/2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 s \; ds = 1$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن $c_1 = 1/3$ و $d_1 = 2/3$ ، وعندئذ يكون الحل :

$$u(r,\theta) = \left(\frac{1}{3}r + \frac{2}{3r}\right) \sin\theta$$

وفي شكل (39−2) نلاحظ أوضاعاً لهذا المنحنى لقيم مختلفة للمتغير .



شكل 39−2 غشاء صابوني بين $u(1,\theta) = \sin\theta$ $u(2,\theta) = \sin\theta$

ننهي هذا الدرس بدراسة سريعة لمسألة ديرإشليه خارج الدائرة .

5–39 مسألة ديرإشليه الخارجية

إن مسألة ديرإشليه الخارجية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \qquad 1 < r < \infty$$

الشرط الحدودي :

$$u(1,\theta) = g(\theta) \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

تحل بالضبط كمسألة ديرإشليه الداخلية في الدرس 30 باستثناء إغفال الحلول غير المقيدة عندما r تقترب من مالانهاية ، في هذه الحالة :

$$r^n \cos(n\theta) \qquad r^n \sin(n\theta) \qquad \ln r$$

وعليه يكون الحل :

$$u(r,\theta) = \sum r^{-n} \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \right] \qquad (3)$$

حيث a_n , b_n كما في الحالة السابقة :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos(n\theta)\, d\theta \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin(n\theta)\, d\theta$$

وبعبارة أخرى ، نعبر فقط عن $u(1,\theta) = g(\theta)$ بدلالة سلسلة فوريه :

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \right]$$

ثم ندخل r^{-n} في كل حد للحصول على الحل .

ولمعرفة أولية بهذا الحل نعطي المثالين الآتيين :

6–39 مثالان على مسألة ديرإشليه الخارجية

مثال 1

إن حل المسألة الخارجية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 1 < r < \infty$$

الشرط الحدودي :

$$u(1,\theta) = 1 + \sin\theta + \cos(3\theta) \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

هو :

$$u(r,\theta) = 1 + \frac{1}{r}\sin\theta + \frac{1}{r^3}\sin(3\theta)$$

مثال 2

إن حل المسألة الخارجية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 1 < r < \infty$$

الشرط الحدودي :

$$u(1,\theta) = \cos(4\theta) \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

هو :

$$u(r,\theta)=\frac{1}{r^4}\cos(4\theta)$$

وللقارئ أن يتصور شكل الحل .

ملاحظات

1- إن حل مسألة ديرإشليه الخارجية لنصف قطر اختياري R ، الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u=0 \qquad R<r<\infty$$

الشرط الحدودي :

$$u(R,\theta)=g(\theta) \qquad 0\le\theta\le 2\pi$$

هو :

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(r/R)^{-n}\left[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\right]$$

2- إن الحلول الفريدة لمعادلة لابلاس في البعدين التي تعتمد فقط على r هي الثوابت و $\ln r$ الجهد $\ln r$ مهم جداً ويسمى بالجهد اللوغاريتمي ، وسندرس ذلك بالتفصيل فيما بعد .

تمارين

1- إن مسألة نويمان الخارجية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 1 < r < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1,\theta) = g(\theta) \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

لها حل من نفس صيغة حل ديرإشليه الآتي :

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \right]$$

إلا أن المعاملات b_n و a_n يجب أن تحقق الشرط الحدودي الجديد ، نعوض هذا الحل بالشرط الحدودي :

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1,\theta) = \sin\theta$$

للحصول على حل المسألة :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 1 < r < \infty$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1,\theta) = \sin\theta$$

هل أن هذا الحل يحقق الشرط الحدودي الجديد ؟ ، بالطبع أن مجموع أي ثابت إلى هذا الحل يكون حلاً أيضاً .

2- عوض عن الشروط الحدودية :

$$u(R_1,\theta) = g_1(\theta)$$

$$u(R_2,\theta) = g_2(\theta)$$

في الحل العام (1) للحصول على معادلات (2) .

الدرس الأربعون

معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية (التوفيقات الكروية)

40–1 الغرض من الدرس

إيجاد الحلول الخاصة لمعادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية ، بحيث يمكن تنسيقها معاً بطرق متعددة لحل مسائل متعددة (ديرإشليه ، ونويمان ، على سبيل المثال) سنحل أيضاً مسألة ديرإشليه الداخلية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$(r^2 u_r)_r + \frac{1}{\sin\phi}\left[\sin\phi \; u_\phi\right]_\phi + \frac{1}{\sin^2\phi} u_{\theta\theta} = 0$$

الشرط الحدودي :

$$u(1,\theta,\phi) = g(\phi) \qquad 0 \le \phi \le \pi$$

للحالة الخاصة التي يعتمد فيها الجهد الحدودي $g(\phi)$ فقط على ϕ (الزاوية من القطب الشمالي) ، وهنا نعبر عن الجهد الحدودي $g(\phi)$ كسلسلة لا نهائية من التوافقيات السطحية :

$$g(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(\cos\phi)$$

حيث أن التوافقيات السطحية $p_n(\cos\phi)$ (تسمى بمتعددات حدود لاجندرا هي كل الحلول الخاصة لمعادلة لابلاس وهي متعددات حدود بالمتغير $\cos\phi$ ذوات درجات n ، بعد إيجاد هذا التعبير يكون الحل تماماً ما يأتي :

$$u(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n p_n(\cos\phi)$$

وإن لمسألة ديرإشليه الخارجية المشابهة الحل الآتي :

$$u(r,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a}{r^{n+1}}p_n(\cos\phi)$$

من المسائل المهمة في الفيزياء إيجاد الجهد داخل وخارج كرة إذا علم الجهد على المحيط وللمسألة الداخلية يجب أن نجد دالة $u(r,\theta,\phi)$ تحقق المسألة الآتية :

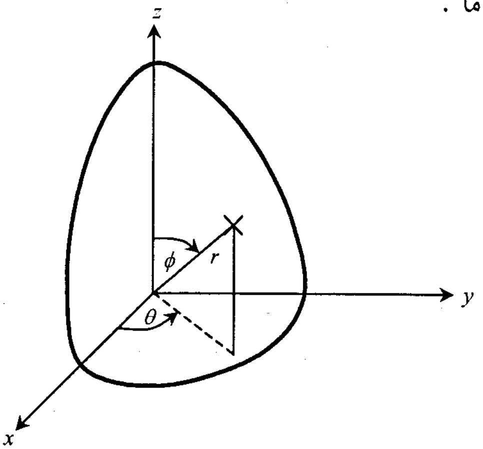
المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$(r^2u_r)_r+\frac{1}{\sin\phi}\left[\sin\phi\ u_\phi\right]_\phi+\frac{1}{\sin^2\phi}u_{\theta\theta}=0 \tag{1}$$

الشرط الحدودي :

$$u(1,\theta,\phi)=g(\theta,\phi)\qquad -\pi\le\theta\le\pi\qquad\qquad 0\le\phi\le\pi$$

لاحظ أن اللابلاسية الكروية تصاغ بصورة مختلفة عن سابقاتها ، وهذه الصيغة أكثر تراص نسبياً وأسهل استخداماً .



شكل 40–1 مسألة دير إشليه الداخلية للكرة

إن أحد التطبيقات النوعية لهذا النمط هو إيجاد درجة الحرارة داخل كرة عندما تكون درجة الحرارة على المحيط معلومة ، وغالباً ما تكون $g(\theta,\phi)$ ذات صيغة معينة ، وعليه ليس من الضروري حل المسألة في أكثر صيغها عمومية .

وسنتأمل في هذا الدرس حالتين خاصتين مهمتين ، إحداهما عندما تكون $g(\theta,\phi)$ ثابتة والأخرى عندما تعتمد فقط على ϕ (الزاوية من القطب الشمالي) .

حالتان خاصتان لمسألة ديرإشليه

الحالة الخاصة الأولى ثابت = $g(\theta,\phi)$

في هذه الحالة يتضح أن الحل لا يعتمد على θ ولا على ϕ وعليه تصبح معادلة لابلاس معادلة تفاضلية اعتيادية :

$$(r^2 u_r)_r = 0$$

هذه معادلة تفاضلية اعتيادية بسيطة يمكن حلها بسهولة ، حلها العام هو :

$$u(r) = \frac{a}{r} + b \qquad (2)$$

وبعبارة أخرى الثوابت و c/r هي الجهود الوحيدة التي تعتمد فقط على المسافة القطرية من نقطة الأصل ، أن الجهد $1/r$ مهم جداً في الفيزياء ويسمى بالجهد النيوتني ، والآن نناقش مسألتين يعتمد فيهما الجهد على r فقط .

المسألة 1 : (الجهد داخل كرة)

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 0 < r < 1$$

الشرط الحدودي :

$$u(1,\theta,\phi) = 3$$

الحل (2) هنا يجب أن يكون $3 = (r,\theta,\phi)$ لكي يكون مقيداً .

المسألة 2 : (الجهد بين كرتين كل منهما ذات جهد ثابت) .

لنفرض أننا نريد إيجاد الحالة المستقرة لدرجة الحرارة بين كرتين كل منهما تبقى ذات درجة حرارة ثابتة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad R_1 < r < R_2$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} u(R_1,\theta,\phi) = A \\ u(R_2,\theta,\phi) = B \end{cases}$$

لقد علمنا أن الصيغة العامة للجهد في هذه الحالة هي :

$$u(r) = \frac{a}{r} + b$$

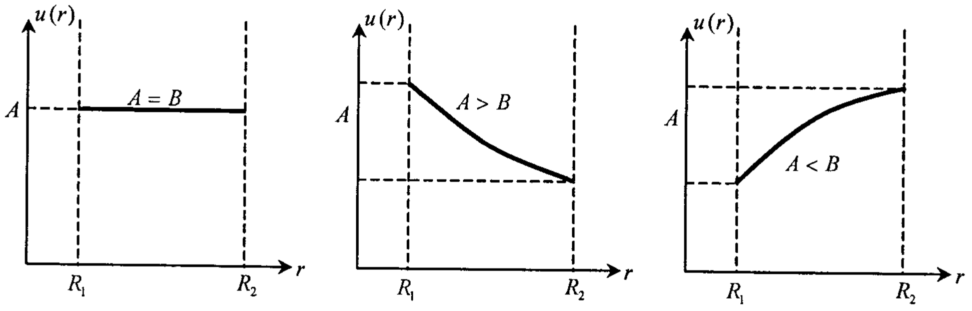
نحسب b و a بحيث تتحقق الشروط الحدودية فنحصل على أن :

$$a = (A-B)\frac{R_1 R_2}{(R_2 - R_1)} \quad b = \frac{R_2 B - R_1 A}{(R_2 - R_1)}$$

وعليه فإن :

$$u(r) = \frac{(A-B)\ R_1 R_2}{(R_2 - R_1)_r} + \frac{R_2 B - R_1 A}{(R_2 - R_1)}$$

بيان هذا الجهد لمختلف قيم الجهدين الحدوديين B و A يتضح في شكل $(2\text{–}40)$.



شكل 40–2 الجهد بين كرتين متمركزتين جهداهما A و B ثابتان

الحالة الخاصة الثانية $g(\theta,\phi)$ [يعتمد فقط على ϕ] في هذه الحالة تتخذ مسألة ديرإشليه الصيغة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$(r^2 u_r)_r + \frac{1}{\sin\phi}\left[\sin\phi\; u_\phi\right]_\phi = 0 \qquad 0 < r < 1$$

الشرط الحدودي :

$$u(1,\theta,\phi) = g(\phi) \qquad 0 \le \phi \le \pi$$

باتباع طريقة فصل المتغيرات للبحث عن حل من الصيغة :

$$u(r,\phi) = R(r)\;\Phi(\phi)$$

نحصل على المعادلتين التفاضليتين الآتيتين :

(معادلة أويلر)

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0$$

(معادلة لاجندرا)

$$\left[\sin\phi\;\Phi'\right]' + n(n+1)\sin\phi\;\Phi = 0$$

ويؤخذ ثابت الفصل $n(n+1)$ لملاءمته لشروط المسألة وسيلاحظ القارئ قريباً سبب هذا الاختيار .

نحل الآن معادلة أويلر بالتعويض $R(r)=r^{\alpha}$ في المعادلة وإيجاد قيمة α ، وبإجراء ذلك نحصل على قيمتين :

$$\alpha=\begin{cases} n \\ -(n+1) \end{cases}$$

وعليه يكون الحل العام لمعادلة أويلر هو :

$$R(r)=ar^{n}+br^{-(n+1)}$$

أما معادلة لاجندرا فهي ليست بهذه السهولة ، والأسلوب المتبع لحل هـذه المعادلـة يتم باستخدام التحويل الآتي :

$$x=\cos\phi$$

لتتحول المعادلة هذه إلى معادلة لاجندرا الجديدة الآتية :

$$(1-x^{2})\frac{d^{2}\Phi}{dx^{2}}2x\frac{d\Phi}{dx}+n(n+1)\Phi=0 \qquad -1\le x\le 1$$

ثم إيجـاد قيمـة $\Phi(x)$ والتعويـض $x=\cos\phi$ فـي الحـل . فمعادلة لاجنـدرا هـي معادلة تفاضلية اعتيادية مـن المرتبـة الثانيـة ذات معـاملات متغـيرة ، إحـدى صعوبـات هـذه المعادلة هي أن $(1-x^{2})$ معامل $d^{2}\Phi/dx^{2}$ يكون صفراً عند نهايتي المنطلـق $-1\le x\le 1$. معادلات مثل هذا النمط تسمى بالمعادلات التفاضلية المنفردة وهـي غالبـاً مـا تحـل بطريقـة فروبنييوس .

وبدون الرجوع إلى تفاصيل هذه الطريقة نستطيع الوصول إلى نتيجة مهمة جداً ، أن الحلول الفريدة غير المقيدة لمعادلة لاجندرا هي عندما $n=0\,,1\,,2\,,\ldots$ وهذه الحلول هي متعددات الحدود $p_{n}(x)$ (متعددات حدود لاجندرا) :

$$n=0 \quad p_0(x)=1$$

$$n=1 \quad p_1(x)=x$$

$$n=2 \quad p_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

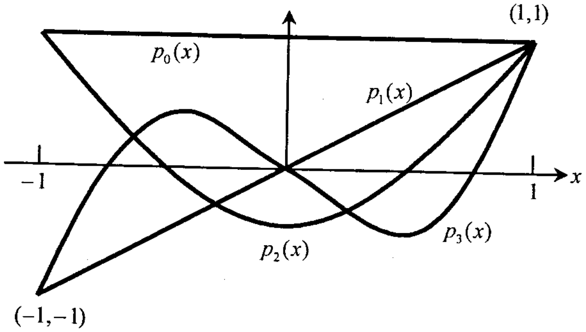
$$n=3 \qquad p_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x) \qquad -1\le x\le 1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$n \qquad p_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

(صيغة رودريكس)

يمكن ملاحظة بيانات عدد قليل من متعددات حدود لاجندرا في شكل (3-40) .



شكل 40-3 متعددات حدود لاجندرا $p_n(x)$

عندئذ تكون الحلول المقيدة للمعادلتين :

$$r^2R''+2rR'-n(n+1)R=0 \qquad 0<r<1$$

$$[\sin\phi\ \Phi']' + n(n+1)\sin\phi\ \Phi = 0 \qquad 0 \le \phi \le \pi$$

كالآتي :

$$R(r) = ar^n$$

$$\Phi(\phi) = a\ p_n(\cos\phi)$$

إن الدالة $p_n(\cos\phi)$ هي ليس إلا متعددة حدود لاجندرا النونية بتعويض $\cos\phi$ عن x الخطوة الأخيرة هي إيجاد المجموع :

$$u(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n p_n(\cos\phi) \qquad (3)$$

بحيث يتحقق الشرط الحدودي $u(1,\phi) = g(\phi)$

وبتعويض ذلك في (3) نحصل على أن :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(\cos\phi) = g(\phi)$$

وإذا ضربنا طرفي المعادلة بالمقدار $p_m(\cos\phi)\sin\phi$ وكاملنا بالنسبة إلى ϕ من 0 إلى π نحصل على :

$$\int_0^{\pi} g(\phi) p_m(\cos\phi)\sin\phi\ d\phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} p_n(\cos\phi)\, p_m(\cos\phi)\sin\phi\ d\phi$$

$$= \sum a_n \int_{-1}^{1} p_n(x)\, p_m(x)\ dx$$

$$= \begin{cases} 0 & n \ne m \\ \dfrac{2a}{2m+1} & n = m \end{cases}$$

يمكن التحقق من أن متعددات حدود لاجندرا متعامدة على الفترة (1 ، 1−) ، وعليه فإن :

$$a_m = \frac{2m+1}{2}\int_0^{\pi} g(\phi)p_m(\cos\phi)\sin\phi \, d\phi \qquad (4)$$

وعليه يكون حل مسألة ديرإشليه (1) الآتي :

$$u(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n p_n(\cos\phi) \qquad (5)$$

حيث أن المعاملات a_n تحسب بموجب الصيغة (4) والآن نعطي مثالاً على جهد متماثل اسطوانياً .

تمارين

1- استخدام التعويض $R(r) = r^{\alpha}$ في معادلة أولير :

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0$$

لإثبات أن :

$$\alpha = n \;,\; -(n+1)$$

2- استخدام تبديل المتغير $x = \cos\phi$ لتحويل معادلة لاجندرا الأصلية بالمتغير ϕ الآتية :

$$\left[\sin\phi \; \Phi'\right]' + n(n+1)\sin\phi \; \Phi = 0 \qquad\qquad 0 \le \phi \le \pi$$

إلى معادلة لاجندرا الجديدة بالمتغير x :

$$(1-x^2)\frac{d^2\Phi}{dx^2} - 2x\frac{d\Phi}{dx} + n(n+1)\Phi = 0 \qquad\qquad -1 \le x \le 1$$

3- تحقق من صيغة رودريكس :

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

بالنسبة لمتعددات حدود لاجندرا p_3 و p_2 , p_1 , p_0 .

الدرس الحادي والأربعون

الجهد المتماثل اسطوانياً (غير المعتمد على θ)

1–41 الغرض من الدرس

حل المعادلات التفاضلية الجزئية بطرق لا تعتمد على θ .

لنفرض أن درجة الحرارة على سطح الكرة تحقق :

$$g(\phi) = 1 - \cos(2\phi) \qquad 0 \le \phi \le \pi$$

ولنفرض أيضاً أننا نرغب في إيجاد درجة الحرارة داخل الكرة ، في هذه المسألة تكون درجة الحرارة ثابتة على الدوائر التي تكون خطوط عرضها ثابتة (وعلى سبيل المثال الدوائر التي فيها طول خط الاستواء يساوي 2) ، لإيجاد u يجب أن نحل المسألة :

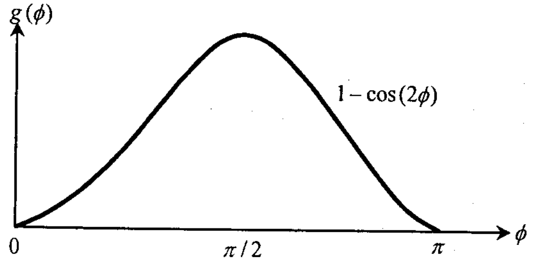
المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 0 < r < 1$$

الشرط الحدودي :

$$u(1, \theta, \phi) = 1 - \cos(2\phi) \qquad 0 \le \phi \le \pi$$

لاحظ شكل (1–41) لبيان درجة الحرارة الحدودية .



شكل **1–41** درجة الحرارة على الدوائر التي خطوط عرضها تبعد بمقدار ϕ زاوية نصف قطرية عن القطب الشمالي

هدفنا الآن هو إيجاد المعاملات a_n ولحسابها نتبع أحد الأمرين الآتيين :

(a) استخدام البرامج المتوفرة للحاسبات لإيجاد المعاملات في تعبيرات لاجندرا (راجع مركز الحاسبات) .

(b) استخدام قليل من الأساليب الحدسية المألوفة .

وهنا سنتبع الأخير ، نلاحظ المتطابقة المثلثية :

$$\cos(2\phi) = 2\cos^2(\phi) - 1$$

التي بموجبها نستطيع صياغة درجة الحرارة الحدودية $g(\phi)$ كما يأتي :

$$1-\cos(2\phi) = 1 - \left[2\cos^2(\phi) - 1\right]$$

$$= 1 - \frac{2}{3}\left[3\cos^2(\phi) - 1\right] + \frac{1}{3}$$

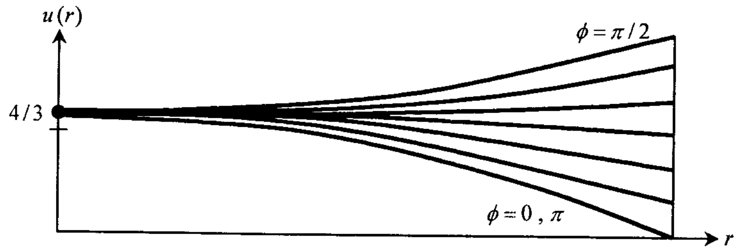
$$= \frac{4}{3}p_0(\cos\phi) - \frac{4}{3}p_2(\cos\phi)$$

وهذا يعطينا التعبير عن $g(\phi)$ كسلسلة بمتعددات حدود لاجندرا ، وعليه فإن حل المسألة هو :

$$u(r,\phi) = \frac{4}{3}p_0(\cos\phi) - \frac{4r^2}{3}p_2(\cos\phi)$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{2r^2}{3}(3\cos^2\phi - 1)$$

وأن بيانات هذا الحل كما في شكل (2-41) لقيم مختلفة من خطوط العرض .



شكل 41–2 درجة الحرارة من مركز الكرة إلى محيطها

ملاحظات على الدرسين 40 و 41

1- نلاحظ أنه بعد التعبير عن الجهد الحدودي $g(\phi)$ كسلسلة :

$$g(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(\cos\phi)$$

نحتاج فقط إلى الضرب الحد النوني r^n للحصول على الحل :

$$u(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n p_n(\cos\phi)$$

2- إن حل مسألة ديراشليه الخارجية الآتية :

المعادلات التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad\qquad 1 < r < \infty$$

الشرط الحدودي :

$$u(1,\theta,\phi) = g(\phi)$$

هو :

$$u(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} p_n(\cos\phi)$$

حيث أن :

$$b_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} g(\phi)p_n(\cos\phi)\sin\phi \; d\phi$$

وعلى سبيل المثال إن الشرط الحدودي $g(\phi) = 3$ يؤدي إلى أن الحل هو $u(r,\phi) = 3/r$ لاحظ أنه في هذه المسألة ، يقترب من الصفر ، بينما في حالة البعدين فإن الحل الخارجي بالشرط الحدودي الثابت كان نفسه ثابتاً .

تمارين

1- حل مسألة ديرإشليه الداخلية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 0 < r < 1$$

الشرط الحدودي :

$$u(1\,,\,\phi) = \cos(3\phi)$$

عبر عن $\cos(3\phi)$ بدلالة $\cos\phi\,,\,\cos^2\phi\,,\,\cos^3\phi\,,\,\ldots$

واستخدمها للحصول على التعبير :

$$\cos(3\phi) = a_0 p_0(\cos\phi) + a_1 p_1(\cos\phi) + \ldots$$

2- حل المسألة :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 0 < r < 1$$

$$u(1,\phi) = \begin{cases} 1 & 0 \le \phi \le \pi/2 \\ -1 & \pi/2 < \phi \le \pi \end{cases}$$

الدرس الثاني والأربعون

حسبان التغييرات

(معادلات إويلر – لاكرانج)

42–1 الغرض من الدرس

التعريف بمفهوم الدالي (دالة لدالة) وتوضيح كيفية نشوء الداليات في الفيزياء ، ومن الداليات المألوفة جداً التكامل الآتي :

$$J[y] = \int_0^1 F(x, y, y')\ dx$$

حيث يعتبر J كدالة بدلالة y (حيث y دالة) والدالة $F(x, y, y')$ تفرض أنها معلومة ، والدالي الآتي مثال على ذلك :

$$J[y] = \int_0^1 \left[y^2(x) + y'^2(x) \right] dx$$

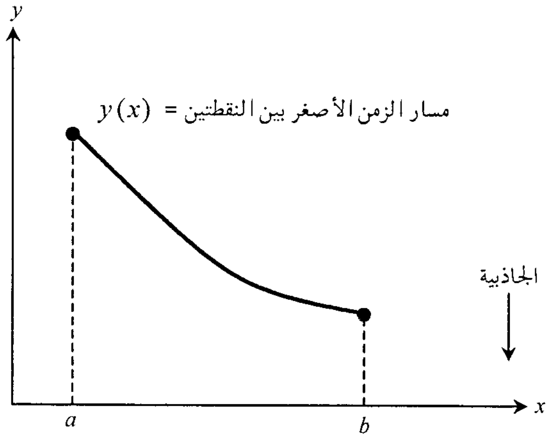
سنبين أيضاً كيفية إيجاد الدالة $\bar{y}(x)$ التي تجعل $J[y]$ في نهايته الصغرى بإيجاد معادلة (معادلة أويلر – لاكرانج) بدلالة $\bar{y}$ التي تتحقق دائما عندما تكون $\bar{y}$ دالة جاعلة J في نهايتها الصغرى ، هذه المعادلة مشابهة للشرط اللازم في حساب التفاضل والتكامل الذي ينصل على أن :

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

عند النقاط x التي تجعل $f(x)$ في نهايتها الصغرى .

إن موضوع حساب التغاير وثيق الصلة بالمعادلات التفاضلية إلا أنه للأسف لا يدرس من قبل طلبة كثيرين ، وفي هذا الدرس سنتعرف على هذا الموضوع ونبين كيف أن المعادلات التفاضلية الجزئية يمكن حلها باتباع قواعد التغاير .

لقد نشأت دراسة حساب التغاير بنفس الزمن الذي نشأ فيه حساب التفاضل والتكامل تقريباً وهو يتعامل مع إيجاد النهايات العظمى والنهايات الصغرى لدوال الدوال (والتي تدعى بالداليات) ، إن إحدى المسائل الأوليات في حساب التفاضل والتكامل كانت مسألة براشستكرون المرفوعة من قبل جون برنولي عام 1696 ، المطلوب فيها إيجاد المسار $y(x)$ الذي يجعل زمن انزلاق جسيم على مسار أملس بين نقطتين في نهايته الصغرى (شكل 42–1) .



شكل 42–1 مسألة براشستكرون (مسألة أصيلة في حساب التغاير)

لقد أثبت برنولي أن زمن الانزلاق T يحقق :

$$T = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{dt}{ds} ds = \int_0^L \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2mg}} \int_0^L \frac{ds}{\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2mg}} \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\, dx$$

وعليه فإنه يمكن اعتبار الزمن الكلي $T[y]$ دالة لدالة ، وبما أن كثيراً من الداليات هي بطبيعتها من هذا النمط فيكفي أن ندرس صيغتها العامة :

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx \qquad (1)$$

وبأخذ هذا المسعى بنظر الاعتبار نذكر الآن الهدف من الدراسة ألا وهو إيجاد $y(x)$ التي تجعل الدالي (1) في نهايته الصغرى (أو نهايته العظمى) ، والأسلوب المتبع لهذا الغرض مشابه بعض الشيء لأسلوب إيجاد النهايات الصغرى للدوال $f(x)$ في حساب التفاضل والتكامل ، حيث توجد النقاط الحرجة بوضع $f'(x) = 0$ واحتساب قيم x ، أما في حالة حساب التغيرات فإن ذلك يتطلب مهارة أكثر لأن المتغيرات ليس عدداً بل دالة ، ومع ذلك فإن الفلسفة هي ذاتها في كلا الحالتين ، فهنا نأخذ مشتقة الدالي (إن جاز التعبير) بالنسبة إلى الدالة $y(x)$ وجعلها مساوية للصفر للحصول على معادل مشابهة للمعادلة :

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

في حساب التفاضل والتكامل إلا أنها الآن معادلة تفاضلية اعتيادية تسمى بمعادلة أويلر – لاكرانج ، فيما تبقى من هذا الدرس سنعمل على إيجاد هذه المعادلة وحلها لمسائل معينة .

2–42 إيجاد النهاية الصغرى للدالي العام $J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$

نتأمل الآن مسألة إيجاد دالة ملساء $y(x)$ تجعل الدالي :

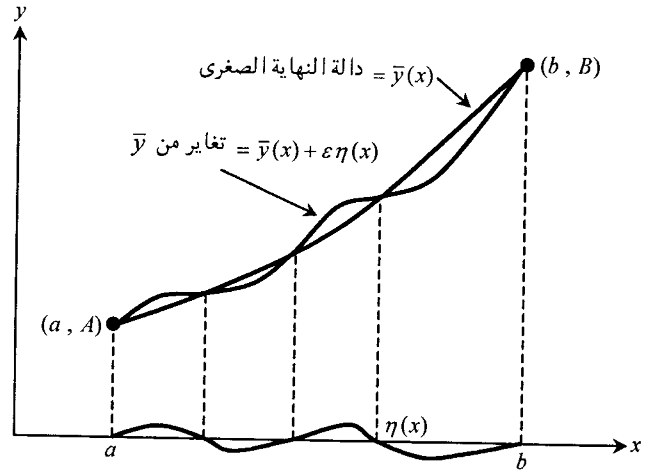
$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

في نهايته الصغرى ، بحيث تحقق الشرطين الحدوديين :

$$y(a) = A$$

$$y(b) = B$$

لاحظ الشكل (42–2) .



شكل 42–2 تغاير الدالة

لإيجاد دالة النهاية الصغرى للدالي لتكن هي $\bar{y}$ ، نكوِّن تغايراً صغيراً منها :

$$\bar{y}(x) + \varepsilon\eta(x)$$

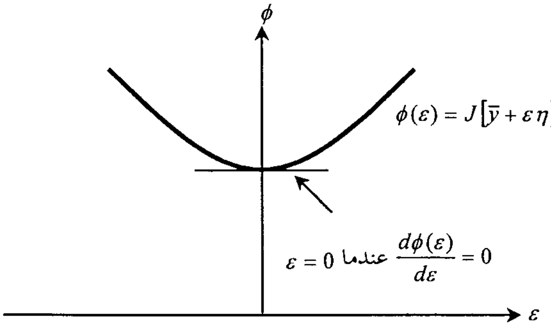
حيث ε عدد صغير $\eta(x)$ منحني أملس يحقق الشرط الحدودي $\eta(a) = \eta(b) = 0$ لاحظ شكل 42–2 ، يتضح أنه عند إيجاد قيمة التكامل J في جوار الدالة $\bar{y} + \varepsilon\eta$ فعندئذ سيزداد الدالي J ، أي أن :

$$J[\bar{y}] \leq J[\bar{y} + \varepsilon\eta]$$

لكل ε ، وبعبارة أخرى إذا رسمنا بيان الدالة :

$$\phi(\varepsilon) = J[\overline{y} + \varepsilon\eta]$$

كدالة بدلالة ε فنحصل على بيان مشابه لما في شكل (42–3) .



شكل **42–3** بيان $J[\overline{y} + \varepsilon\eta]$ في جوار $\varepsilon = 0$

وبأخذ شكل (42–3) بنظر الاعتبار فإن أسلوبنا الآن لإيجاد $\overline{y}$ يتم باتخاذ مشتقة :

$$\phi(\varepsilon) = J[\overline{y} + \varepsilon\eta]$$

بالنسبة إلى ε وجعل $\varepsilon = 0$ أي أن :

$$\frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} J[\overline{y} + \varepsilon\eta]\bigg|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \overline{y}}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial \overline{y}'}\eta'(x)\right] dx$$

(وعلى القارئ إجراء هذه الخطوة) ، ومن التكامل بالتجزئة سنحصل على أن :

$$= \int_a^b \left\{\frac{\partial F}{\partial \overline{y}} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial \overline{y}'}\right]\right\} \eta(x)\ dx = 0$$

والآن وبما أن المقدار المطلوب تكامله أعلاه يساوي صفراً لكل دالة $\eta(x)$ تحقق $\eta(a)=\eta(b)=0$ فيتضح أن :

(معادلة أويلر – لاكرانج) :

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{y}}-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial \overline{y}'}\right]=0 \qquad (2)$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة أويلر – لاكرنج ، ومع أن المعادلة هذه تبدو أكثر تعقيداً في صيغتها العامة إلا أنه حال التعويض فيها بالدوال المعينة $F(x,y,y')$ نلاحظ أنها ليست غير معادلة تفاضلية اعتيادية من المرتبة الثانية بالمتغير المستقل $\overline{y}$ ، وبعبارة أخرى ، يمكن حل هذه المعادلة لإيجاد الدالة $\overline{y}$ التي تجعل الدالي في نهايته الصغرى .

وعليه فإن ما أثبتناه الآن هو (بوضع y عن $\overline{y}$) .

إذا كانت y تجعل $J[y]=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$ في نهايته الصغرى فعندئذ يجب أن تحقق المعادلة :

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\right]=0$$

ولإيضاح هذه المفاهيم نلاحظ المثال الآتي :

42–3 إيجاد النهاية الصغرى للدالي $J[y]=\int_0^1 \left[y^2+y'^2\right]dx$

هنا نعمل على إيجاد المنحنى $y(x)$ المار بالنقطتين (0 ، 0) و (1 ، 1) الذي يجعل الدالي :

$$J[y]=\int_0^1 \left[y^2+y'^2\right]dx$$

في نهايته الصغرى ، ويتضح من محتوى المسالة أن الدالة المطلوب إيجادها يجب أن تكون قابلية للاشتقاق نظراً لأن المقدار المطلوب تكامله يعتمد على $\bar{y}$ ، ولإيجاد y' نبدأ بصياغة معادلة أويلر – لاكرانج [بالشرطين الحدوديين $y(0)=0$ $y(1)=1$] :

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 1$$

وبما أن :

$$F(x,y,y') = y^2 + y'^2$$

فإن :

$$F_y = 2y$$

$$F_{y'} = 2y'$$

(وذلك بالاشتقاق بالنسبة إلى y و y') وعليه فإن معادلة أويلر لاكرانج تصبح :

$$2y - \frac{d}{dx}(2y') = 0$$

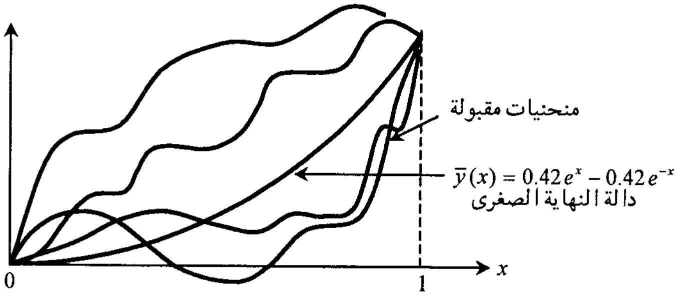
أي أن :

$$y'' - y = 0$$

وبحل هذه المعادلة البسيطة بالشرطين الحدوديين $y(0)=0$ و $y(1)=1$ نحصل على أن :

$$\bar{y}(x) = 0.42e^{x} - 0.42e^{-x}$$

المبينة في شكل (4–42) ، ومن هذا يتبع أن كل منحني أملس $y(x)$ مار من النقطتين الحدوديتين سؤدي إلى $J[y]$ أكبر .



شكل 42–4 منحنيات ملساء تحقق $y(1) = 1$ و $y(0) = 0$

1– إن معادلة أويلر – لاكرانج هنا تناظر جعل المشتقة مساوية للصفر في حساب التفاضل والتكامل ، وإن يتذكر القارئ أن إيجاد النهاية الصغرى (أو النهاية العظمى) لا يتم بهذه العملية حسب ، وعلى سبيل المثال أن الدالة $f(x) = x^3$ ذات مشتقة صفرية عندما $x = 0$ إلا أن هذه النقطة لا هي بالنهاية العظمى المحلية ولا بالنهاية الصغرى المحلية ، وكذلك بالنسبة لمعادلة أويلر – لاكرانج ، فهي تعد شرطاً لازماً تحققه دالة النهاية الصغرى وليس كافياً ، ومع ذلك فغالبا ما يكون حل معادلة أويلر – لاكرانج نهاية صغرى محلية (أو صغرى) وذلك يعتمد على الطبيعة الخاصة بالمسألة ، وغالبا ما يمكن تبيان هذه الحالات .

2– أن $y(x)$ التي تجعل الدالي :

$$J[y] = \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

في نهايته الصغرى هو المنحني $y(x)$ الذي يجعل السطح الدوراني حول محور x في نهايته الصغرى (شكل 42–5) .

إن حل معادلة أويلر – لاكرانج بالشرطين الحدوديين $y(a) = A$ و $y(b) = B$ هو جزء من منحنى جيب تمام القطع الزائد (منحنى السلسلة) :

$$\bar{y}(x) = \alpha \cosh[(x-\beta)/\alpha]$$

حيث تحسب قيم β , α بحيث يمر المنحنى من النقطتين الحدوديتين ، وهذه معادلة ليست سهلة الحل إلا أن القارئ يستطيع أن يتحقق من أن جيب تمام القطع الزائد يحقق هذه المعادلة .

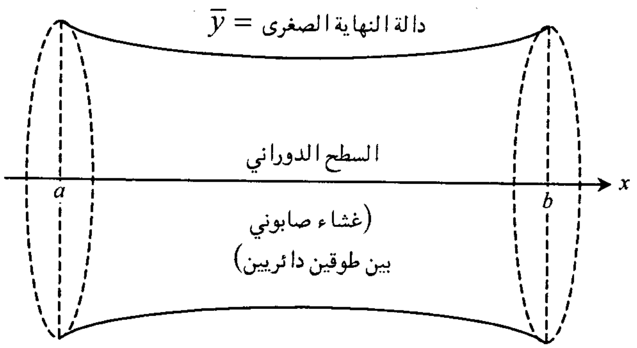
3- يمكن حساب الدالي :

$$J[y] = \int_0^1 \left[y^2 + y'^2\right]dx$$

في نهايته الصغرى عند الدالة :

$$\bar{y}(x) = 0.42e^{x} - 0.42e^{-x}$$

فيكون $J[\bar{y}] = 0.46$ ، وإذا عوضنا بأي دالة ملساء $y(x)$ أخرى تمر بالنقطتين (0 ، 0) و (1 ، 1) فسنحصل على قيمة أكبر للدالي $J[y]$.



شكل 42-5 السطح الدوراني

4- إن القواعد الأساس في الفيزياء غالباً ما يعبر عنها بدلالة قواعد النهايات الصغرى بدلاً من المعادلات التفاضلية ، فقاعدة فيرمات (مسار الضوء بين نقطتين هو المسار

الذي يستغرق فيه الضوء أقل زمن) وقاعدة هاميلتون (في مجال القوى المحافظ ، مسار حركة جسيم هو المسار الذي يجعل تكامل الفعل في نهايته الصغرى ، أي أن :

$\int_{t_1}^{t_2}$ (الطاقة الكامنة – الطاقة الحركية) dt .

في نهايته الصغرى هما مثالان من الطبيعة على إيجاد النهايات الصغرى للداليات .

5- تستخدم مفاهيم حساب التغيرات أيضاً في إيجاد النهايات الصغرى لبعض الداليات التكاملية المضاعفة مثل :

$$J[u]=\int_D\int F(x,y,u,u_x,y_y)\ dx\ dy$$

حيث تصبح معادلة أويلر – لاكرانج في هذه الحالة الآتي :
(معادلة تفاضلية جزئية) :

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0$$

وفي الحقيقة أن هذه الداليات ستكون مدار البحث في الدرس الآتي : لأن معادلة أويلر – لاكرانج هي معادلة تفاضلية جزئية ، ومع ذلك فإن فلسفتنا العامة ستختلف قليلاً لأن هدفنا هو إيجاد الدالة $u(x,y)$ (بأسلوب ما) بحيث يصبح الدالي التكاملي المضاعف في نهايته الصغرى أي إيجاد حل المعادلة التفاضلية الجزئية وبعبارة أخرى ، نحل المعادلة التفاضلية الجزئية بجعل الدالي في نهايته الصغرى ، وهذا على نقيض ما قمنا به في هذا الدرس بالنسبة للداليات التكاملية الإجادية حيث وجدنا الدالة التي تجعل الدالي في نهايته الصغرى بحل معادلة أويلر – لاكرانج ، هذا وأن طرائق حل المعادلة التفاضلية بإيجاد النهايات الصغرى للداليات $J[u]$ المناظرة لها ، تسمى بالطرائق المباشرة في حساب التغاير ، بينما تسمى طرائق إيجاد الدوال التي تجعل الداليات $J[u]$ في نهاياتها الصغرى بحل معادلات أويلر – لاكرانج المناظرة لها ، تسمى بالطرائق غير المباشرة في حساب التغاير ، وسنناقش في الدرس القادم طريقة مباشرة معروفة جيدا لريتز .

تمارين

1- أوجد الدالة $\overline{y}(x)$ التي تجعل الدالي :

$$J[y]=\int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\ dx$$

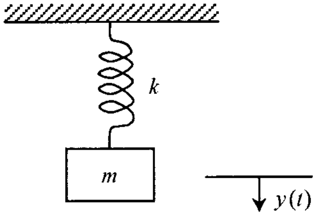
في نهايته الصغرى ، ضمن المنحنيات التي تحقق $y(0)=0$ و $y(1)=1$ ، ما تفسيرك للجواب ؟ وما قيمة $J[\overline{y}]$ ؟ وما معنى $J[\overline{y}]$.

2- تعطى الطاقة الحركية ، لكتلة مهتزة بسيطة بالعلاقة :

$$KE=\frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

حيث $\dot{y}=dy/dt$ والطاقة الكامنة تعطى بالعلاقة :

$$PE=\frac{1}{2}ky^2$$



كتلة مهتزة بنهاية حلزون

وتنص قاعدة هاملتون بأن الحركة $y(t)$ للكتلة تكون بحيث :

$$\int_{t_1}^{t_2}\ [KE-PE]\,dt=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\ \left[m\dot{y}^2-ky^2\right]dt$$

في نهايته الصغرى ، إذا كانت هذه القاعدة صحيحة فما المعادلة التفاضلية التي تحققها الكتلة المهتزة ؟

3- برهن على أن الدالة $\bar{y}(x)$ التي تجعل الدالي :

$$J[y]=\int_{0}^{\pi/2}\left[y'^2-y^2\right]dx$$

في نهايته الصغرى بالشروط الحدودية $y(0)=0$ و $y(\pi/2)=1$ هي $\bar{y}(x)=\sin x$
احسب $J(\sin x)$.

4- استنتج معادلة لاكرانج أويلر :

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0$$

من الدالي :

$$J[u]=\int_D\int F(x,y,u,u_x,u_y)\,dx\,dy$$

الدرس الثالث والأربعون
أنظمة التغير لحل المعادلة التفاضلية الجزئية

43–1 الغرض من الدرس

تبيان كيفية حل المعادلة التفاضلية بالاستعانة بمعادلة لاكرانج – أويلر لدالـي معين ثم إيجاد الدالة التي تجعل الدالي بنهايته الصغرى (بطريقة جديـدة معينـة) ، عندئـذ تصبح الدالة المذكورة حل المعادلة التفاضليـة الجزئيـة ، والمسـألة تصبح عندئـذ تصبح الدالـة المذكورة حل المعادلة التفاضلية الجزئية ، والمسألة تصبح عندئذ إيجاد ذلك الدالي الـذي تكون له معادلة أويلر – لاكرانج هي نفسها المعادلة الأصلية ، وسـتعطي نتيجـة معروفـة جيـداً (النظرية الطاقة – الصغرى) التي تنص على أن الحل u لمسائل قيم حدودية معينة مثل :

في منطقة D $\qquad u_{xx} + y_{yy} = f$

على حدود المنطقة D $\qquad u = 0$

يكافئ إيجاد الحل u (يساوي صفر أيضاً على حـدود D) الذي يجعل دالي الطاقة الكامنة الآتي في نهايته الصغرى .

$$J[u] = \int_D \int \left[u_x^2 + u_y^2 + 2uf\right] dx\ dy$$

أي أن $\nabla^2 u = f$ هي معادلة أويلر – لاكرانج للدالي $J[u]$.

ويمكن إيجاد دالة تقريبية تجعل $J[u]$ بنهايته الصغرى وذلك بطريقة ريتز وعليه سيكون لدينا حلاً تقريبياً للمعادلة التفاضلية الجزئية ، وسنناقش طريقة ريتز وإيجاد النهاية الصغـرى بـهذه الطريقة لدالي معين .

هناك طريقة جديدة لحل مسائل القيم الحدودية (مثل مسألة الغشاء الممط) بالبحث بـالبحث عن سطح أملس يجعل الطاقة الكامنة للغشاء في نهايتها الصغرى ، وبعبارة أخـرى إذا اعتبرنـا المعادلة التفاضلية الجزئية أنها معادلة أويلر – لاكرانج لدالي معين $J[u]$ عندئذ يمكن حـل المعادلة التفاضلية بإيجاد النهاية الصغرى للدالي (لأن الدالة التي تجعل الدالي فـي نهايتـه الصغرى هي أيضاً حل لمعادلة أويلر – لاكرانج المناظرة) .

كنا قد درسنا فقط الداليـات التـي تكـون معـادلات أويلـر – لاكوانـج التابعـة لـها معـادلات تفاضلية اعتيادية ، وفي هــذا الـدرس نـاقش الداليـات التـي تكـون لـها معـادلات أويلـر – لاكرانـج معـادلات تفاضليـة جزئيـة ، وعلـى سـبيل المثـال فـإن معادلـة أويلـر لاكرانـج للدالي :

$$J[u] = \int_0^1 \int_0^1 \left[u_x^2 + u_y^2\right] dx\, dy$$

هي :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

ويمكن ملاحظة ذلك بنفس طريقة المعادلة التفاضلية الاعتيادية فـي الـدرس السـابق ، وعليـه لحل مسألة دير إشليه في المرجع الذي طول ضلعه يساوي واحد الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < y < 1$$

الشرط الحدودي :

$$u = g$$

يمكن أن نجد ، بطريقة بديلة ، الدالة $u(x,y)$ التي تساوي g علـى محيـط المربـع وتجعـل $J[u]$ في نهايته الصغرى ، هذا ومن المحتمل وبدون دهشة أن يكون الدالي :

$$J[u]=\int_0^1 \int_0^1 \left[u_x^2+u_y^2\right] dx\ dy$$

ممثلاً للطاقة الكامنة للغشاء ، وعليه فإن ما نقوم بعمله حقاً هو إيجاد النهاية الصغرى للطاقة الكامنة للسطح .

والسؤال عادة هو أن أنه إذا علمت المعادلة التفاضلية فكيف يمكن إيجاد الدالي $J[u]$ الذي يمثل الطاقة الكامنة للحل ؟ والجواب لذلك بموجب نظرية معروفة جداً (نظرية الطاقة – الصغرى) ينص على أن :

الحل u لمسألة دير إشليه :

في منطقة	D	$\nabla^2 u = f$	المعادلة التفاضلية الجزئية
على حدود	D	$u = 0$	الشرط الحدودي

هو نفس الدالة u التي تجعل دالي الطاقة :

$$J[u]=\int_D \int \left[u_x^2+u_y^2+2uf\right] dx\ dy$$

في نهايته الصغرى (ضمن تلك الدوال التي تحقق الشرط الحدودي $u = 0$) .
ولنفهم هذه النظرية نلاحظ المثال الآتي :

2–43 التعويض عن معادلة بواسون بدالي الطاقة المناظر لها

لاحظ مسألة ديرإشليه الآتية :

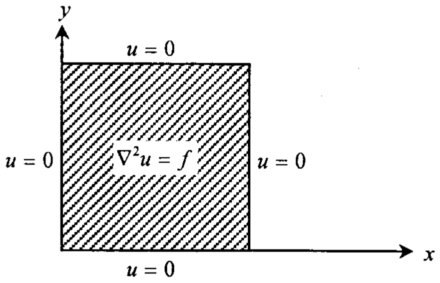
المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{xx}+u_{yy}=f \qquad 0<x<1 \qquad 0<y<1 \qquad (1)$$

الشرط الحدودي :

على محيط المربع $\qquad u = 0$

لاحظ شكل 43-1 .



شكل 43-1

هنا يكون دالي الطاقة $J[u]$ كالآتي :

$$J[u] = \int_0^1 \int_0^1 \left[u_x^2 + u_y^2 + 2uf\right] dx\, dy \qquad (2)$$

وعليه لحل مسألة (1) فإنه يكفي إيجاد الدالة $\bar{u}$ (وعليه لحل مسألة (1) فإنه يكفـــي إيجاد الدالة $\bar{u}$) ضمن تلك الدوال التي تساوي صفراً على محيط المربع ، التي تجعــل $J[u]$ فــي نهايته الصغرى ، هذا يكمل الجزء الأول من هذا الدرس ، وللجزء الثاني سنبين كيفية إيجاد الدالة $\bar{u}$ التي تجعل $J[u]$ بنهايته الصغرى وذلك بطريقة ريــتز التــي ســوف نتطـرق لـها فـي الدرس المقبل .

تمارين

1- جد دالي الطاقة $J[u]$ المناظر للمسألة الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{xx} + u_{yy} = 1 \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < y < 1$$

الشرط الحدودي :

$$u = 0$$

على محيط المربع .

2- كيف يمكن إيجاد النهاية الصغرى للدالي :

$$J[y] = \int_0^1 \left[y^2 + y'^2\right] dx \qquad y(0) = 0 \qquad y(1) = 1$$

تلميح : لاحظ أن الدالة الجديدة $z(t) = (1-x)\,y(t)$ تحقق :

$z(0) = 0$ و $z(1) = 0$

الدرس الرابع والأربعون
طريقة ريتز

44–1 الغرض من الدرس

حل المعادلات التفاضلية الجزئية من خلال طريقة ريتز وهي الطريقة التي سميت باسم الرياضي ريتز وتعتبر من الطرق البسيطة تماماً وتتألف من الخطوات الثلاث الآتية :

الخطوة الأولى : عوض عن الدالة u في الدالي :

$$J[u] = \int_0^1 \int_0^1 \left[u_x^2 + u_y^2 + 2uf\right] dx\ dy$$

بدالة تقريبية وذلك كما يأتي ، خذ عدداً صحيحاً n وضع :

$$u_n(x, y) = a_1\phi_1(x, y) + a_2\phi_2(x, y) + \dots + a_n\phi_n(x, y)$$

حيث أن الدوال $\phi_1\ , \phi_2\ , \dots , \phi_n$ دوال يتم اختيارها مسبقا بحيث يكون كل منها مساوياً صفراً على محيط المربع ويكون عددها بما فيه الكفاية لكي يقرب حل المسألة بطريقة مقبولة ، ومن الأمثلة على هذا الاختيار لمسألة دير إيشليه داخل المربع الذي طول ضلعه واحد هو ما يأتي :

$$\phi_1(x, y) = xy(1-x)(1-y) \qquad \leftarrow \qquad \text{صفر على المحيط}$$

$$\phi_2(x, y) = x\phi_1(x, y)$$

$$\phi_3(x, y) = x\phi_1(x, y)$$

$$\phi_4(x, y) = x^2\phi_1(x, y)$$

$$\phi_5(x,y) = xy\phi_1(x,y)$$

$$\phi_6(x,y) = y^2\phi_1(x,y)$$

وبعبارة أخرى فإن التقريبات الأربع الأولى للحل هي :

$$u_1(x,y) = a_1 xy(1-x)(1-y)$$

$$u_2(x,y) = xy(1-x)(1-y)[a_1 + a_2 x]$$

$$u_3(x,y) = xy(1-x)(1-y)[a_1 + a_2 x + a_3 y]$$

$$u_4(x,y) = xy(1-x)(1-y)\left[a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2\right]$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

الخطوة الثانية : عندئذ يكون الدالي :

$$J[u_n] = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left[\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x}\right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial \phi_j}{\partial y}\right]^2 + 2f\sum_{j=1}^{n} a_j \phi_j \right\} dx\ dy$$

دالة بدلالة $a_1\ , a_2\ , \ldots , a_n$ وعليه لإيجاد هـذه المعاملات التي تجعل J بنهايته الصغرى تساوي المشتقات الجزئية مع الصفر :

$$\frac{\partial J[u_n]}{\partial a_n} = 2\int_0^1 \int_0^1 \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial \phi_j}{\partial x}\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y}\frac{\partial \phi_1}{\partial y}\right] a_j + f\phi_1 \right\} dx\ dy = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{\partial J[u_n]}{\partial a_n} = 2\int_0^1 \int_0^1 \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial \phi_j}{\partial x}\frac{\partial \phi_n}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y}\frac{\partial \phi_n}{\partial y}\right] a_j + f\phi_1 \right\} dx\ dy = 0$$

وتبدو هذه المعادلات معقدة إلى حد ما إلا إذا أعيدت صياغتها بدلالة المصفوفات فسنحصل على منظومة من المعادلات الخطية :

$$Aa = b$$

حيث $A = (A_{ij})$ مصفوفة نونية مربعة عناصرها كالآتي :

$$A_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y}\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right] dx\, dy \qquad (1)$$

وأن $b = (b_i)$ المتجه الذي مركباته :

$$b_i = -\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\phi_i(x,y)\, dx\, dy \qquad (2)$$

وأن $a = (a_i)$ المتجه المجهول الذي تمثل مركباته معاملات الحل المقرب :

$$u_n(x,y) = a_1\phi_1(x,y) + \ldots + a_n\phi_n(x,y)$$

الخطوة الثالثة : حـل منظومة المعـادلات $Aa = b$ لإيجـاد قيم المعاملات $a_1\ , a_2\ , \ldots\ a_n$ لذا فإن الحل المقرب للدالة التي تجعل الدالي في نهايته الصغرى هو :

$$u_n(x,y) = a_1\phi_1(x,y) + a_2\phi_2(x,y) + \ldots + a_n\phi_n(x,y)$$

وعليه فهو الحل التقريبي لمسألة ديرإشليه (1) في الدرس السابع والثلاثون .

ملاحظات

1- تـم فـي هـذا الـدرس اسـتخدام طريقـة ريـتز لإيجـاد النـهايات الصغـرى لداليـات التكاملات المضاعفة ، ويمكن استخدامها أيضاً لإيجاد النهايات الصغرى لداليـات مثل :

$$J[y]=\int_0^1 \left[y^2+y'^2\right]dx$$

$$y(0)=0 \qquad y(1)=1$$

وأن الفرق الوحيد هنا هو أن التقريب بالدوال :

$$y_n(x)=a_1\phi_1+a_2\phi_2+\ldots+a_n\phi_n \quad \phi_1\ ,\ \phi_2\ ,\ \phi_3\ ,\ \ldots\ ,\ \phi_n$$

يجب أن يحقق الشروط الحدودية :

$$\begin{aligned}\phi_i(0)&=0\\ \phi_i(1)&=1\end{aligned} \qquad i=1,2,\ldots,n$$

2- لم نبرهن في هذا الدرس على أن معادلة أويلر – لاكرانج للتكامل المضاعف :

$$J[u]=\int_0^1\int_0^1 \left[u_x^2+u_y^2\right]dx\ dy$$

هي معادلة لابلاس .

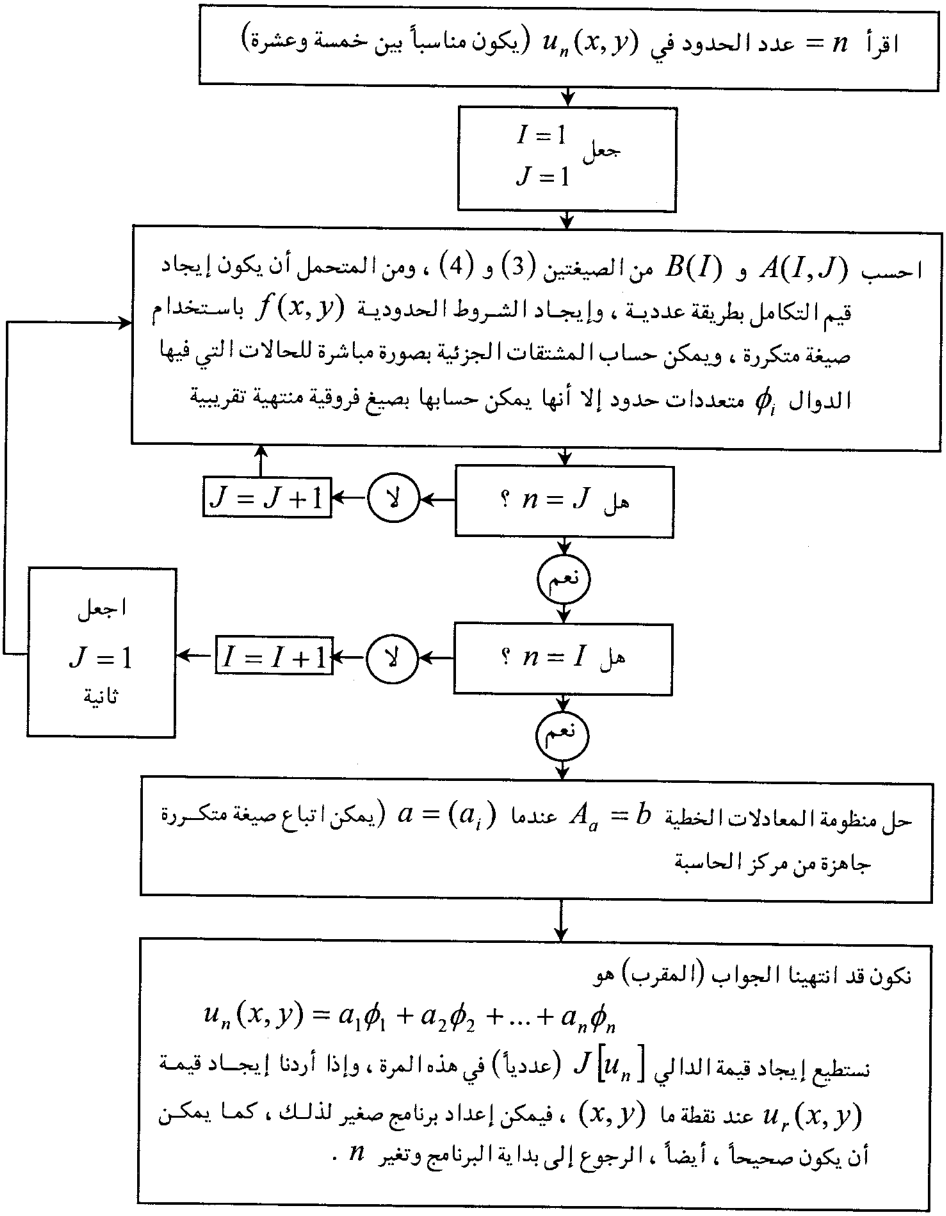
3- كما ازداد العدد n كلما حصلنا على قيم أقل للدالي $J[u_n]$ وعندئذ نحصل على حل أدق للمعادلة التفاضلية ويمكن حساب $u_n(x,y)$ لقيم كبرى للعدد n لملاحظة مقدار نقصان $J[u_n]$.

4- لكل الأغراض العملية تجري الحسابات في طريقة ريتز على الحاسبة الإلكترونية ما عدا عندما يكون n عدداً صغيراً ، ويوضح المخطط الانسيابي في شكل 2 الحسابات التي يمكن إجراءها لحل مسألة القيم الحدودية (1) بطريقة ريتز .
وللقيام بذلك يجب تهيئة صيغة متكررة لتعريف الدوال $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n$.

وهكذا يمكن إجراءه باستخدام برنامج الحاسب الآلي وذلك على النحو التالي :

```
      SUBROUTINE BC (X, Y, PH)
C     SUBROUTINE PROVIDED BY THE USER TO EVALUATE THE
C     FUNCTIONS PHI (1), PHI (2), ... , PHI(N)

      DIMENSION PHI (20)
      PHI(1) = X * Y * (1 – X) * (1 – Y)
      PHI(2) = X * PHI (1)  (these are the functions we've been using)
      PHI(3) = Y * PHI (1)
         .          .
         .          .
         .          .
      PHI(N) = (whatever it is)
      PETURN
      END
```



شكل 44-1 مخطط انسيابي لطريقة ريتز

تمارين

1- اكتب برنامجاً لإجراء الحسابات في شكل (1-44) .

2- برهن على أن معادلة أويلر – لاكرانج للدالي :

$$J[u] = \int_0^1 \int_0^1 \left[u_x^2 + u_y^2\right] dx\, dy$$

هي :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

3- يمكن حل مسألة ديرإشليه الآتية :

$$u_{xx} + u_{yy} = \sin(\pi x) \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < y < 1$$

$$u = 0$$ e على محيط المربع

باستخدام التحويل الجيبي المنتهي (حول المتغير x) ويكون الحل :

$$u(x, y) = \left[Ae^{\pi y} + Be^{-\pi y} - \frac{1}{\pi^2} \right] \sin(\pi x)$$

حيث $A = 0.06$ و $B = 0.04$ ، كيف يمكن إيجاد الطاقة الكامنة للحل ؟ راجع التحويل الجيبي لإيجاد هذا الحل $u(x, y)$.

الدرس الخامس والأربعون
طرائق ترجافيه لحل المعادلات التفاضلية الجزئية

45-1 الغرض من الدرس

تبيان كيفية حل مسائل مختلة (غير خطية ، معادلات ذات معاملات متغيرة ، منطلقات غير منتظمة بترجافها إلى مسائل أبسط ، وبعبارة أخرى ، تبيان كيفية تعديل حلول المسائل البسيطة إلى حلول تقريبية لمعادلات أصعب .

وعلى سبيل المثال ، سنبين كيف يمكن تقريب حل المسألة غير الخطية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u + u^2 = 0 \qquad 0 < r < 1$$

الشرط الحدودي :

$$u(1,\theta) = \cos\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

بترجاف الحل $u(r,\theta) = r\cos\theta$ لمسألة ديرإشليه الخطية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 0 < r < 1$$

الشرط الحدودي :

$$u(1,\theta) = \cos\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

غالباً ما يمكن تغيير حل مسألة معروفة ، باستمرار وبالتدريج بحيث يصبح حلاً لمسائل قريبة لمسائل قريبة منها ، أي أننا نعدل باستمرار (نرجف) المسألة الأصلية (وحلها) بطريقة تدريجية لكي نستطيع حل المسألة المقاربة ، وعلى سبيل المثال يمكن باستمرار تعديل معادلة لابلاس .

$$\nabla^2 u = 0$$

على ضوء المسائل :

$$\nabla^2 u + \varepsilon u^2 = 0 \qquad\qquad 0 \le \varepsilon \le 1$$

بحيث نحصل على حل المعادلة غير الخطية الجديدة الآتية :

$$\nabla^2 u + u^2 = 0$$

وبهذه الطريقة نعمل على حل المسائل غير الخطية بتعديل حل معادلة لابلاس (لاحظ شكل 45-1) .

$$\begin{array}{ccccc} \nabla^2 u = 0 & \longrightarrow & \nabla^2 u + \varepsilon u^2 = 0 & \longrightarrow & \nabla^2 u + u^2 = 0 \\ (\varepsilon = 0) & & (0 < \varepsilon < 1) & & (\varepsilon = 1) \\ \text{الحل} & & \text{الحل} & & \text{الحل} \\ u_0 & \longrightarrow & u = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k & \longrightarrow & u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \end{array}$$

شكل 45-1 مخطط الطرائق الترجافية

لإيجاد حل معادلة لابلاس المرجفة :

$$\nabla^2 u + \varepsilon u^2 = 0$$

نعدل الحل u_0 لمعادلة لابلاس بإضافة ترجافات صغيرة ويبدو مناسباً أن تكون المعادلة المرجفة :

$$\nabla^2 u + \varepsilon u^2 = 0$$

ذات حل من الصيغة :

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots$$

لاحـظ أن سلسلة القـوى (1) بالعـدد ε تتفق مع حـل معادلة لابلاس $u = u_0$ عندما $\varepsilon = 0$ ومع حل المسألة غير الخطية :

$$\nabla^2 u + u^2 = 0$$

عندما $\varepsilon = 1$ ، وبعبارة أخرى ، فإن معادلة (1) تعمل كمركبة تنقلنا من معادلة لابلاس إلى أخرى غير خطية ، والمسالة الآن هي إيجاد الدوال $u_0\ , u_1\ , u_2\ , \ldots$ في السلسلة (1) ، وفي الجزء الباقي من هذا الدرس سنبين كيفية حل مسائل قيم حدودية مختلفة باستخدام هذا المبدأ العام .

45-2 حل ترجافي للمسألة غير الخطية $\nabla^2 u + u^2 = 0$

لنفرض أننا نبحث عن حل معادلة ديرإشليه غير الخطية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u + u^2 = 0 \qquad 0 < r < 1 \qquad (2)$$

الشرط الحدودي :

$$u(1,\theta) = \cos\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

وهنا نعتبر أن هذه المسألة غير الخطية ترجافاً للمسألة الخطية الآتية :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u + u^2 = 0 \qquad 0 < r < 1 \qquad (3)$$

الشرط الحدودي :

$$u(1,\theta) = \cos\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

التي حلها هو $u_0(r,\theta) = r\cos\theta$ ثم نعمل على تعديل هذا الحل بحيث تحقق مسألة (2) . وكما ذكرنا مسبقاً ، نقدم عائلة من المسائل $\nabla^2 u + \varepsilon u^2 = 0$ ونبحث عن حلول لكل من هذه

المعادلات ، من الصيغة :

$$u(r,\theta) = u_0(r,\theta) + \varepsilon u_1(r,\theta) + \varepsilon^2 u_2(r,\theta) + \dots \qquad (4)$$

وبهذه الطريقة نجد الحل لمسألتنا غير الخطية (2) بوضع $\varepsilon = 1$ وبتعويض معادلة (4) في المسألة :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\nabla^2 u + \varepsilon u^2 = 0$$

الشرط الحدودي :

$$u(1,\theta) = \cos\theta$$

نحصل على :

$$\nabla^2(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) + \varepsilon(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)^2 = 0$$

$$u_0(1,\theta) + \varepsilon u_1(1,\theta) + \varepsilon^2 u_2(1,\theta) + \dots = \cos\theta$$

وبعد التبسيط ومساواة معاملات قوى ε في الأطراف المتناظرة من المعادلتين أعلاه نحصل على متتابعة $p_0, p_1, p_2 \dots$ من المسائل التي يمكن حلها لإيجاد الدوال المجهولة $u_0, u_1, \dots$ (لاحظ أن المسائل خطية وغير متجانسة) :

$$p_0 \qquad \begin{cases} \nabla^2 u_0 = 0 & 0 < r < 1 \\ u_0(1,\theta) = \cos\theta \end{cases} \qquad u_0(r,\theta) = r\cos\theta$$

$$p_1 \qquad \begin{cases} \nabla^2 u_1 = -u_0^2 \\ u_1(1,\theta) = 0 \end{cases}$$

$$p_2 \qquad \begin{cases} \nabla^2 u_2 = -2u_0 u_1 \\ u_2(1,\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

لنبدأ بإيجاد $u_1(r,\theta)$ من المسألة p_1 (حيث أننا نعلم u_0) الآتية :

$$p_1 \qquad \left\{\nabla^2 u_1 = -r^2\cos^2\theta = -\frac{r^2}{2}\left[1+\cos(2\theta)\right] = -\frac{r^2}{2}-\frac{r^2}{2}\cos(2\theta)\right.$$

ولحل هذه المسألة غير المتجانسة نتبع أسلوباً من نظرية المعادلات التفاضلية الاعتيادية يتألف مما يأتي :

1- إيجاد الحل العام y_h للمعادلة المتجانسة .

2- إيجاد الحل الخاص y_p للمعادلة غير المتجانسة .

3- التعويض عن $y_h + y_p$ بالشرط الابتدائي والحل لحساب قيم الثوابت .

هذا الأسلوب نافع لهذه المسألة المعينة ، وفي مسألتنا p_1 ، الصيغة العامة لحل المعادلة المتجانسة $\nabla^2 u = 0$ حيث $0 < r < 1$ التي تتبع من طريقة فصل المتغيرات هي :

$$u_n(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\left[a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)\right]$$

والآن لإيجاد الحل الخاص (حل واحد فقط) لمعادلة غير المتجانسة :

$$\nabla^2 u = -\frac{r^2}{2}-\frac{r^2}{2}\cos(2\theta)$$

نختبر :

$$u_p(r,\theta) = Ar^4 + Br^4\cos(2\theta)$$

[المدخلات r^n و $\cos(n\theta)$ و $r^n\sin(n\theta)$ تؤدي إلى حلول من الصيغ Ar^{n+2} و $Br^{n+2}\cos(n\theta)$ و $Cr^{n+2}\sin(n\theta)$ على التوالي] ، وبالتعويض عن $u_p(r,\theta)$ في المعادلة غير الخطية يتبع أن :

$$A=-\frac{1}{32} \qquad B=-\frac{1}{24}$$

وعليه يكون :

$$u_p(r,\theta)=-\frac{r^4}{32}-\frac{r^4}{24}\cos(2\theta)$$

والخطوة الأخيرة الآن في حل p_1 هي التعويض عن الشرط الحدودي $u(1,\theta)=0$ بالحل العام $u(r,\theta)=u_h(r,\theta)+u_p(r,\theta)$ للحصول على أن :

$$\sum_{n=0}^{\infty}[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]-\frac{1}{32}-\frac{1}{24}\cos(2\theta)=0$$

وعليه فإن $a_0=1/32$ و $a_2=1/24$ وجميع الثوابت الأخرى صفرية ، وبعبارة أخرى فإن حل المسألة p_1 هو :

$$\begin{aligned}u_1(r,\theta)&=\frac{1}{32}+\frac{1}{24}r^2\cos(2\theta)-\frac{r^4}{24}\cos(2\theta)\\&=-\frac{(r^2-1)}{32}-\frac{(r^4-r^2)}{24}\cos(2\theta)\end{aligned}$$

تسمى الدالة $u_1(r,\theta)$ بالترجاف الأول للدالة $u_0(r,\theta)$ وبإذافة $u_0(r,\theta)$ نحل على تقريب جديد للمسألة (2) .

$$u=u_0+u_1=r\cos\theta-\frac{(r^4-1)}{32}-\frac{(r^4-r^2)}{24}\cos(2\theta) \qquad (5)$$

لإيجاد الترجاف التالي $u_2(r,\theta)$ يجب أن نحل المسألة :

$$p_2 \qquad \begin{cases}\nabla^2u_2=-2u_0u_1\\ u_2(1,\theta)=0\end{cases}$$

حيث يعوض عن $u_0(r,\theta)$ و $u_1(r,\theta)$ في الطرف الأيمن من هذه المعادلة ، هذا ونحن في غنى عن القول بأنه بدون الاستعانة بالحاسبة لإجراء هذه العمليات الجبرية فإن هذه المسألة بحد ذاتها ستكون مسألة مهمة ، ولحسن الحظ أن المعادلة (5) تعطي حلاً دقيقاً مقبولاً لمسألتنا ، وفي الحقيقة أننا إذا عوضنا عن هذا التقريب في الطرف الأيسر من معادلتنا غير الخطية :

$$\nabla^2 u + u^2$$

سنلاحظ أنه يوشك أن يساوي صفراً داخل الدائرة $0 < r < 1$ وإضافة لأن نظرية الترجاف تعمل على حل المعادلات غير الخطية فإنها يمكن تطبيقها في حل المسائل ذات الحدود غير المنتظمة (طالما أنها ليست غير منتظمة بشكل كبير) ونعطي الآن مثالاً بسيطاً .

3–45 مثال على الترجاف حدودي

إنه لا يمكن ترجاف المعادلات التفاضلية فحسب ، بل يمكن أيضا إيجاد حل معادلة لابلاس داخل دائرة مشوهة بترجاف حل معادلة لابلاس داخل دائرة ، وعلى سبيل المثال ، نفرض أن المطلوب إيجاد الجهد داخل المنطقة $r = 1 + \frac{1}{4}\sin\theta$ إذا علم الجهد u على محيطها ، وبعبارة أخرى ، نحل المسألة :

$$\begin{aligned} &\nabla^2 u = 0 && 0 < r < 1 + \frac{1}{4}\sin\theta \\ &u\left(1 + \frac{1}{4}\sin\theta\ ,\ \theta\right) = \cos\theta && 0 \le \theta \le 2\pi \end{aligned} \qquad (6)$$

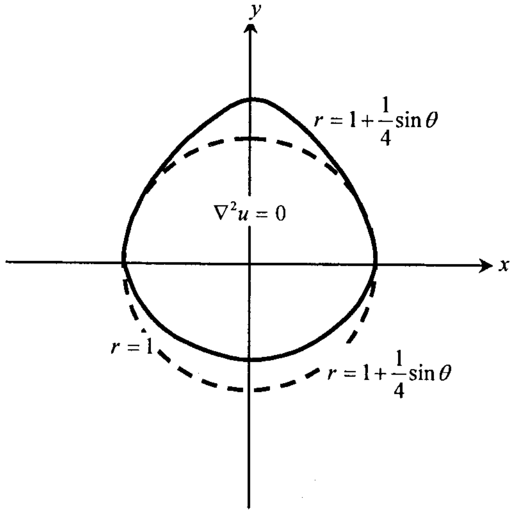
لاحظ شكل $(2-45)$ ، نستطيع أن نصف هذه المسألة بتكوينه الغشاء الصابوني عندما يكون ارتفاع السلك مساوياً $\cos\theta$.

بما أن الفلسفة العامة لطرائق الترجاف تتمثل بالتعبير عن المسائل الصعبة بدلالة مسائل أسهل فيمكن اعتبار الشرط الحدودي على الدائرة المشوهة :

$$u\left(1+\frac{1}{4}\sin\theta,\theta\right)=\cos\theta$$

الشرط الحدودي الأقصى لعائلة الشروط الحدودية :

$$u(1+\varepsilon\sin\theta,\theta)=\cos\theta \qquad 0\le\varepsilon\le\frac{1}{4}$$



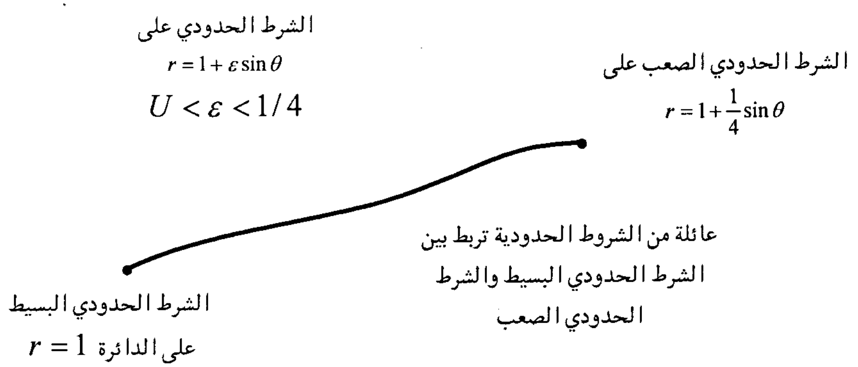
شكل 45–2 معادلة لابلاس داخل دائرة مشوهة

لاحظ شكل (45–3) هذا المفهوم يقودنا للتعبير بدلالة سلاسل تايلور ، فباستخدام سلسلة تايلور الآتية :

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h++f''(x)\frac{h^2}{2!}+\ldots$$

يمكن أن نعبر عن الشرط الحدودي الصعب بدلالة شرط بسيط ، أي أن :

$$u(1+\varepsilon\sin\theta,\theta)=u(1,\theta)+u_r(1,\theta)(\varepsilon\sin\theta)+u_{rr}(1,\theta)\frac{(\varepsilon\sin\theta)^2}{2!}+\ldots$$



شكل 45-3 مخطط يوضح عمليات الترجاف

وبالتعويض عن هذا في المسألة الأصلية نحصل على المسألة المكافئة (وسنضع طبعاً $\varepsilon = \frac{1}{4}$ للمسألة الأصلية) الآتية :

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2 u = 0 \qquad\qquad 0 < r < 1 + \varepsilon \sin\theta \\
&u(1,\theta) + u_r(1,\theta)(\varepsilon \sin\theta) + u_{rr}(1,\theta)\frac{(\varepsilon \sin\theta)^2}{2!} + \ldots = \cos\theta
\end{aligned}
\tag{7}
$$

وهذه بالطبع لا تبدو مسألة بسيطة ، ولكننا يمكن أن نجزئها إلى متتابعة من المسائل حيث بحلها فرادي نستطيع إيجاد الدوال $u_0 , u_1 , u_2 , \ldots$ في الحل المطلوب :

$$
u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots \tag{8}
$$

وإذا عوضنا هذه السلسلة في مسالة (7) نحصل على المتتابعة الآتية من المسائل التي نجد منها $u_0 , u_1 , \ldots$.

$$
p_0 \quad \begin{cases} \nabla^2 u_0 = 0 & 0 < r < 1 \quad \text{(داخل دائرة)} \quad u_0(r,\theta) = r\cos\theta \\ u_0(1,\theta) = \cos\theta & \qquad\qquad \text{(داخل دائرة)} \end{cases}
$$

$$p_1 \quad \begin{cases} \nabla^2 u_1 = 0 & 0 < r < 1 \\ u_1(1,\theta) = -\sin\theta \dfrac{\partial u_0(1,\theta)}{\partial r} = -\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

وعليه ، يمكن حل كل من هذه المسائل الديرإشلية (داخل الدائرة) لإيجاد الدوال $u_0 , u_1 , u_2 , \ldots$ ثم الحصول على الحل :

$$u = u_0 + \frac{1}{4} u_1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 u_2 + \ldots$$

(لاحظ أننا وضعنا $\varepsilon = \frac{1}{4}$) لمسالة ديرإشليه في المنطقة المشوهة ، ويمكن للقارئ إيجاد الترجاف الأول u_1 والتحقق من التقريب .

$$u_0 + \frac{1}{4} u_1$$

لملاحظة مدى تحقق معادلة (6) .

ملاحظات

ليس المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية هي النمط الوحيد الذي يمكن حل مسائله بطرائق الترجاف .

حيث يمكن حل مسألة القيم الابتدائية الآتية :

$$\begin{aligned} & u_t = (1+x)\, u_{xx} \\ & u(x\,,0) = \phi(x) \end{aligned} \qquad -\infty < x < \infty \qquad (9)$$

باستخدام المعادلة الوسيطية :

$$u_t = (1+\varepsilon x)\, u_{xx} \qquad (10)$$

والبحث عن حل من الصيغة :

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$$

وبالتعويض عن هذا المقدار في مسألة (10) نحصل على المتتابعة الآتية من المسائل :

$$p_0 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ u_0(x,0) = \phi(x) \end{cases}$$

$$p_1 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = x \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ u_1(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

لاحظ أن كلتا المسألتين المطروحتين ذاتي معاملات ثابتة ، ولابد للقارئ أن يلاحظ أن ε في معادلة الترجاف يجب أن يكون صغيراً وغلا فلن تكون السلسلة غير المنتهية متقاربة .

تمارين

1- عوض عن معادلة (8) في مسألة (7) لإيجاد متتابعة المسائل :

$$p_0 \ , \ p_1 \ , \ p_2 \ , \ldots$$

2- برهن على أن المسألة غير الخطية :

$$\nabla^2 u + u^2 = 0 \qquad 0 < r < 1$$
$$u(1,\theta) = \cos\theta$$

تؤدي إلى متتابعة من المسائل الخطية ... , p_0 , p_1 , p_2 كما ورد في الدرس .

3- عوض عن معادلة (5) في المسألة غير الخطية :

$$\nabla^2 u + u^2 = 0$$

$$u(1,\theta) = \cos\theta$$

لملاحظة دقتها .

4- حل مسألة p_1 في مسألة الترجاف الحدودية ثم تحقق من مدى تحقيق $u(r,\theta) = u_0(r,\theta) + \frac{1}{4}u_1(r,\theta)$ للمسألة :

$$\nabla^2 u = 0$$

$$u\left(1 + \frac{1}{4}\sin\theta, \theta\right) = \cos\theta$$

الدرس السادس والأربعون
حلول المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام التحويل الحافظ للزوايا

46–1 الغرض من الدرس

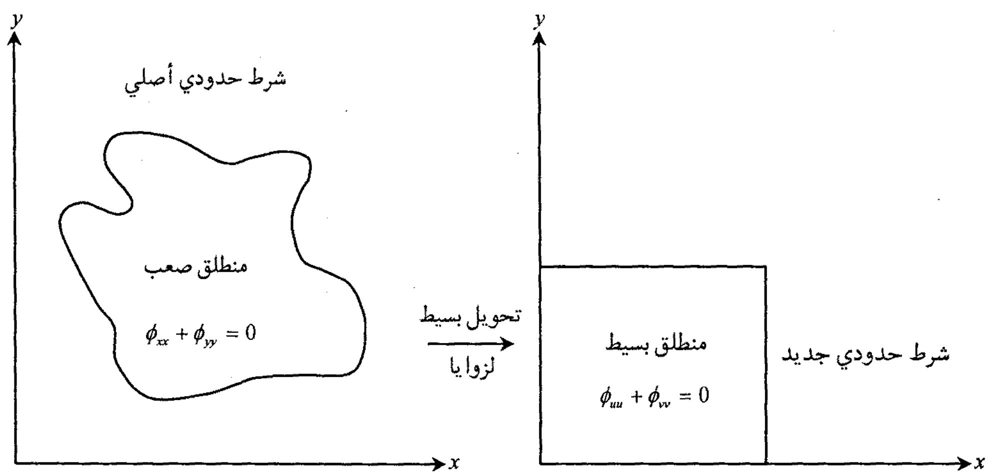
تبيان كيفية تحويل بعض مسائل القيم الحدودية في البعدين إلى أخرى باستخدام التحويل الحافظ للزاويا ، فعلى سبيل المثال يمكن حل معادلة لابلاس :

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

داخل منطلق صعب من المستوى xy (شرط حدودي ذي نمط معين) بتحويل المسالة إلى معادلة لابلاس جديدة .

$$\phi_{uu} + \phi_{vv} = 0$$

داخل نطاق بسيط في المستوى uv الجديد .



إذا كان التحويل حافظاً للزوايا فعندئذ تتحول معادلات لابلاس $\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$ بالإحداثيين الأصليين (x, y) إلى معـادلة لابلاس $\phi_{uu} + \phi_{vv} = 0$ بالإحـداثيين الجديدين (u, v) (بدلاً من معادلة أخرى مثل $\phi_{uu} + 2\phi_{uv} + \phi_{vv} = 0$ ، عندئذ يمكن حل معادلة لابلاس الأخيرة لإيجاد $\phi(u, v)$ في منطلق بسيط (مثل دائرة أو نصف مستو أو مربع) ونعوض بالتحويل $v = v(x, y)$ و $u = u(x, y)$ فـي هـذا الحـل لإيجـاد الحـل $\phi[u(x, y)\ ,\ v(x, y)]$ بدلالة الإحداثيين الأصليين x, y .

وفي هذا الدرس سنبين للقارئ :

1- طبيعة التحويل الحافظ للزوايا .

2- كيفية بناءها (لمدى معين) .

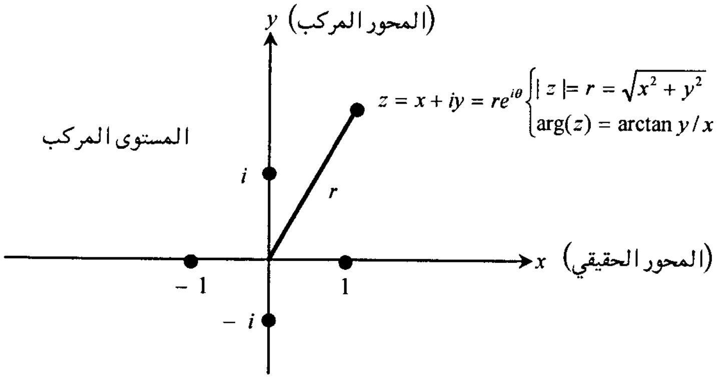
3- أمثلة لمسائل تحل بهذا الأسلوب .

إن إحدى الصعوبات العظمى في حل مسائل القيم الحدودية تأتي من صعوبة الحدود ، حتى أن بعض الحدود البسيطة نسبياً غالباً ما تسبب مسألة صعبـة جـدا ، وأن إحـدى طرائـق معالجة المسائل ذات الحدود المنتظمة هي باستخدام ، طرائق الترجاف ، غلا أن هذه تكـون نافعة فقط عندما تكون الحدود قريبة من حدود بسيطة .

وعلى الرغم من ذلك ، فهناك طريقة لحل معادلة لابـلاس فـي البعديـن عندمـا تكـون الحدومد عامة بصورة مقبولة ، وهي باستخدام التحـ يل الحافظ للزاويا ومـع ذلـك ، فقبـل أن نسدخل بالتطبيق الحقيقي لهذا الأسلوب ن علينا أ نقضـي وقتـاً قيـلاً للتعـرف علـى مفـهوم التحويل الحافظ للزاويا والأعداد المركبة بصورة عامة .

46-2 التحويلات الحافظة للزوايا والدوال المركبة

سنعطي في هذا الدرس بعض المفاهيم القليلة من المتغيرات المركبة التي سنحتاجها بعدئذ نستطيع القول بأن العدد المركب $z = x + \imath y$ هو نقطة في المستوى xy (شكل 46-1) .



شكل 46–1 المستو المركب وصيغ نافعة

لغرض إعطاء مفهوم التحويل الحافظ للزوايا ، يجب أن نتعرف على مفهوم دالة المتغير المركب :

$$w = f(z)$$

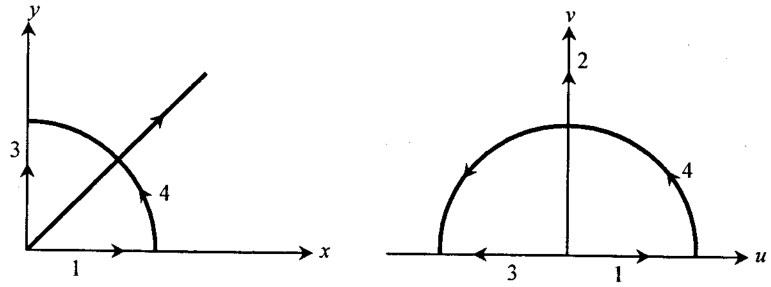
وهنا z متغير مركب (أي أن منطلقه مجموعة جزئية من المستوى المركب z) وأن $w = u + iv$ متغير مركب جديد (الذي تكون قيمه وفق الصيغة $f(z)$ في مستوى مركب جديد w) ، وعلى سبيل المثال فإن الدالة المركبة $w = z^2$ معرفة في الربع الأول من المستوى المركب z ، تنقل هذه المنطقة على النصف العلوي $v > 0$ من المستوى المركب w ، وبصورة خاصة أن $w = z^2$ يحول النقاط الآتية من المستوى z على النقاط المناظرة في المستوى المركب w ، لاحظ شكل (46–2) .

وبعبارة أخرى ، فعندما نتكلم عن الدوال المركبة $w = f(z)$ (على النقيض من الدوال الحقيقية ، المعروفة من قبل القارئ) فإننا نناقش كيف تتحول المنحنيات في المستوى z إلى منحنيات في المستوى w ، فقبل كل شيء تجب صياغة الدوال المركبة مثل $w = z^2$ ، بصيغة حقيقية مكافئة ، فالصيغة الحقيقية تدلنا على كيفية تحول الإحداثيات الأصلية (x, y)

في المستوى z إلى الإحداثيات الجديدة (u,v) في المستوى w ، ولإيجاد الصيغة الحقيقية لهذا التحويل نعبر عن $w = z^2$ كما يأتي :

جدول 1

المستوى $-z$	$z \to z^2$	المستوى $-w$
0	$\longrightarrow$	0
i	$\longrightarrow$	-1
$1+i$	$\longrightarrow$	$2i$
محور x	$\longrightarrow$	محور x الموجب
الربع الأول p	$\longrightarrow$	النصف العلوي من المستوى



شكل 46–2 تحويل الربع الأول من مستوى z على النصف العلوي من مستوي

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

وعندئذ ، بمساواة حقيقية فيما بينها والأجزاء الخالية فيما بينها يتبع أن :

$$u = x^2 - y^2 \qquad \text{(الصيغة الحقيقية لتحويل } w = z^2 \text{)}$$
$$v = 2xy$$

هذه الصيغة ستكون مفيدة مستقبلاً ، وفي الحالة الخاصة هذه افـإن الصيغـة المذكـورة مهمـة لأنها تنص على أن القطوع الزائدة في المستوى z تتحول علـى مسـتقيمات شـاقولية ، ثـابت $= u$ ، ومستقيمات أفقية ، ثابت $= v$ ، في المستوى المركب w .

والآن نبدأ بنمط خاص من الدوال المركبة تسـمى الـدوال الحافظـة للزوايـا أو التحويـلات الحافظة للزوايا .

46–3 تعريف التحويل الحافظ للزوايا

يقال عن التحويل $w = f(z)$ من المستوى المركب z إلى المستوى المركـب w إنه حافظ للزاوية عند النقطة z_0 في المستوى z إذا كانت المشتقة $f'(z_0) \neq 0$ ويقـال أن $f(z)$ حافظ للزوايا في المنطقة D من المستوى z إذا كان $f'(z) \neq 0$ عند كل نقاط D .

وعلى سبيل المثال أن التحويل $f(z) = z^2$ حـافظ للزوايـا مـا عـدا عنـد النقطـة $z = 0$ لأن $f'(z) = 2z \neq 0$ لكل $z \neq 0$.

ومـن، ناحيـة أخـرى فـإن التحـويـل e^x حـافظ للـزوايـا فـي كـل المستوى z لأن $f'(z) = e^z \neq 0$ لكـل z ، والسـؤال الآن لمـاذا التحويـلات الحافظـة للزوايـا مفيـــدة ؟ والجواب هو أنه عند حل معادلة لابلاس $\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$ في منطقة ما من المستوى xy فإننـا نعتبر المستوى xy كالمستوى المركب z ونعطي تحويلاً مركباً $w = f(z)$ مـن المسـتوى z إلى المستوى الجديد w .

فالـمستـوى w ذو إحـداثايات (u,v) وعليـه فـإن مـعــادلـة لابـلاس الأصـليـــة $\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$ تتحـول إلى معادلة تفاضلية جزئية جديدة بالإحداثيين الجديدين v و u ، والفـكرة هنـا هـي أنـه إذا كـان التـحويـل $w = f(z)$ حافظاً للزوايـا فـي منطقـة المعادلـة $\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$ فعندئذ تكون المعادلة التفاضلية الجزئية الجديدة هي أيضاً معادلـة لابـلاس ولكن بالإحداثيين الجديدين u,v ، أي أن المعادلة $\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$ تتحــول إلـى المعادلـة

$\phi_{uu}+\phi_{vv}=0$ وعليه فالمطلوب هو إيجاد التحويل الحافظ للزوايا الذي يحول الحدود الأصلية الصعبة لى حدود بسيطة (تذكر أن التحويل $w=z^2$ يحول محيط الربع الأول في المستوى z إلى المحور الحقيقي ي المستوى w) .

تمارين

1- أين يكون التحويل الآتي :

$$w = \log\left[\frac{z-1}{z+1}\right]$$

حافظاً للزوايا ؟ هل أنه يحول النصف العلوي من المستوى z على الشريط $-\infty < u < \infty \ , \ 0 < v < \pi$ من المستوى w .

4- ما صورة الربع الأول بفعل التحويل $z = re^{i\theta}$ ؟ (تلميح : استخدم الإحداثيات القطبية) .

3- حل مسألة ديرإشليه بالربع الأول الآتية :

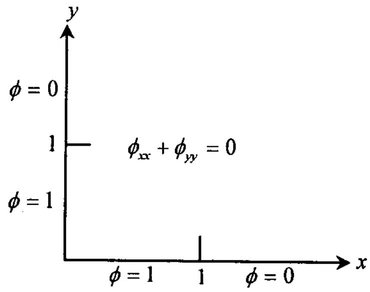
المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \qquad 0 < x < \infty \qquad 0 < y < \infty$$

الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} \phi(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 \le x < \infty \end{cases} \\ \phi(0,y) = \begin{cases} 1 & 0 < y < 1 \\ 0 & 1 \le y < \infty \end{cases} \end{cases}$$

4- باستخدام التحويل الحافظ للزوايا $w = z^2$ لاحظ الشكل الآتي :

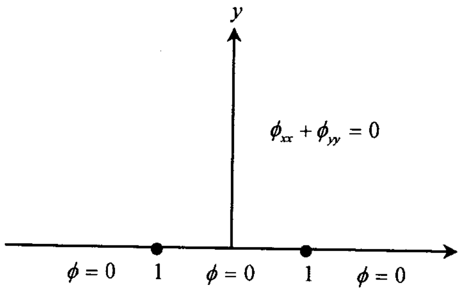


الدرس السابع والأربعون

معادلة لابلاس في النصف العلوي من المستوى

1–47 الغرض من الدرس

حل مسأل ديرإشيليه الآتية في النصف العلوي من المستوى (شكل 47–1) .



شكل 47–1 مسألة قيم حدودية في النصف العلوي من المستوى

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < y < \infty \qquad (1)$$

الشرط الحدودي :

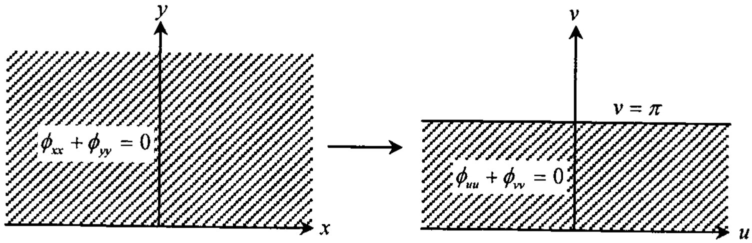
$$\phi(x,0) = \begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 & |x| \le 1 \end{cases}$$

إحدى الطرائق المتبعة لحل هذه المسألة هي باستخدام تحويل فوريه للمتغير x إلا أن هناك طريقة أبسط هي استخدام التحويل الحافظ للزوايا لتحويل النصف العلوي من المستوى $y > 0$ إلى منطقة أخرى في المستوى uv .

يلاحظ القارئ ، بعد قليل من الجهد أن للتحويل الحافظ للزوايا :

$$w = \log\left\{\frac{z-1}{z+1}\right\}$$

الخواص الآتية (لاحظ شكل 47–2) .



شكل 47–2 تحويل حافظ للزوايا لمسألة صعبة إلى أخرى أسهل

1- يحول النصف العلوي من مستوى على المنطقة $0 < v < \pi \;\; -\infty < u < \infty$ من مستوى w .

2- يحول قطعة المستقيم $-1 < x < 1, y = 0$ من مستوى z (حيث أن الجهد ϕ يساوي واحداً) على المستقيم $v = \pi$, $-\infty < u < \infty$ في مستوى w .

3- يحول قطعتي المستقيم $y = 0$, $x > 1$ و $y = 0$, $x < -1$ في مستوى z على الجزئين الموجب والسالب من محور u في مستوى w على التوالي .

هذا وإن أهمية هذه الخواص تكمن في أن المسألة الأصلية (1) قد تحولت إلى أخرى أسهل هي :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\phi_{uu} + \phi_{vv} = 0 \quad -\infty < u < \infty \qquad 0 < v < \pi \qquad (2)$$

الشرط الحدودي :

$$\begin{cases} \phi(u,0) = 0 \\ \phi(u,\pi) = 1 \end{cases}$$

التي يتضح أن حلها هو $\phi(u,v)=\frac{1}{\pi}v$ وعليه لإيجاد حل المسألة الأصلية (1) علينا أن نجد الإحداثي v بدلالة x و y والتعويض عنه في الحل $\phi(u,v)=v/\pi$ وبإجراء ذلك نحصل على أن :

$$w=u+iv=\log\left[\frac{z-1}{z+1}\right]$$

$$=\log\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+i\arg\left[\frac{z-1}{z+1}\right]$$

وعليه فإن :

$$v=\arg\left[\frac{z-1}{z+1}\right]=\arg\left[\frac{x+iy-1}{x+1+iy}\right]$$

$$=\arg\left[\frac{x^2+y^2-1+i2y}{(x+1)^2+y^2}\right]$$

$$=\arctan\left[\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right]$$

[في القاعدة العامة $\arg(x+iy)=\arctan(y/x)$ ومن ثم جزء من $\tan^{-1}$ بين π , 0]

وعليه فإن الحل $\phi(x,y)$ للمسألة الأصلية (1) .

$$\phi(x,y)=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left[\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right]$$

وعلى القارئ التحقق من بيان هذه الدالة على مختلف المستقيمات $y=c$ لمعرفة شكل هذا البيان .

وللمثال الثاني نحول منطقة بين دائرتين غير متمركزتين إلى منطقة بين دائرتين متمركزتين (شكل حلقي) .

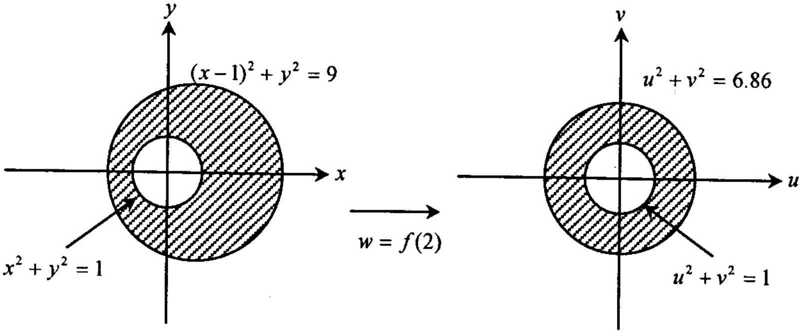
2–47 مسألة ديرإشليه بين دائرتين غير متمركزتين

لنفرض أننا نرغب في إيجاد الجهد $\phi(x, y)$ بين الدائرتين :

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 9$$

إذا علم أن الجهد على الدائرة الداخلية يساوي 1 وعلى الدائرة الخارجية يساوي 2 (شكل 47–3) .



شكل 47–3 تحويل حافظ الزوايا على شكل حلقي

وبعبارة أخرى ، فإن المسألة الأصلية هي :

المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \qquad 1 \qquad D \text{ داخل}$$

الشروط الحدودي :

$$\begin{cases} \phi(x, y) = 1 & x^2 + y^2 = 1 \quad \text{على الدائرة} \\ \phi(x, y) = 2 & (x-1)^2 + y^2 = 9 \quad \text{على الدائرة} \end{cases} \qquad (3)$$

والمسألة الآن هي إيجاد التحويل الحافظ للزوايا الـذي يحـول هـذه المنطقـة إلـى أخرى سهلة وواضحة بحيث تصبح المسألة الجديدة بسيطة ، وفي هـذه الحالـة يبـدو واضحـاً البحث عن تحويل يحول المنطقة الأصلية إلى شكل حلقي .

تمارين

1- حل مسألة ديرإشليه – نويمان المركبة داخل المنطقة المحصورة بين ضلعي الزاويـة $45°$ الآتية :

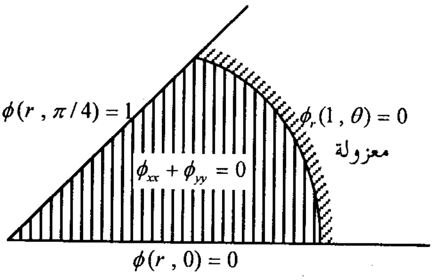
المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\phi_{rr} + \frac{1}{r}\phi_r + \frac{1}{r^2}\phi_{\theta\theta} = 0 \qquad 0 < r < 1 \quad 0 < \theta < \pi/4$$

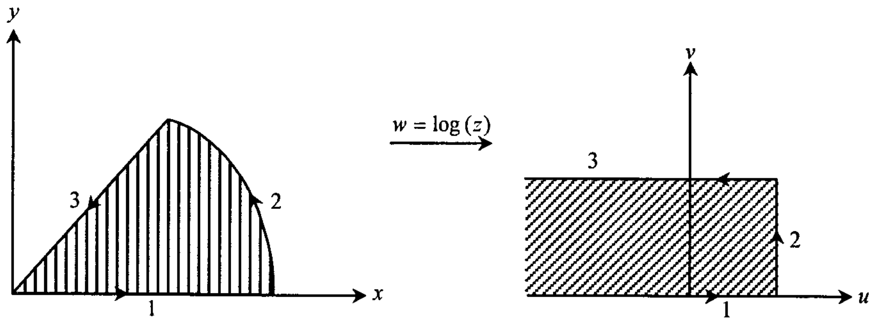
الشروط الحدودية :

$$\begin{cases} \phi(r,0) = 0 \\ \phi(r,\pi/4) = 1 \\ \phi_r(1,\theta) = 0 \end{cases}$$

تلميح : إن الدالة المركبة $w = \log z = \log|z| + i\arg(z)$



تحـول الشعـاع $\theta = c_1$ مـن المستوى z على المستقيم $v = c_1$ في المستوى w ، وتحويل المنحنى $r = c_2$ على المستقيم $u = \log c_2$ حيث $\log$ تعني اللوغاريتم الطبيعي ، لاحظ الشكل الآتي :


y
x
1
2
3
w = log (z)
v
u
1
2
3

الملاحق

الملحق الأول

- جدول A : التحويلات التكاملية .
- جدول B : تحويل فوريه الأسي .
- جدول C : تحويل فوريه الجيبي .
- جدول D : تحويل فوريه الجيبتمامي .
- جدول E : تحويل فوريه الجيبي المنتهي .
- جدول F : تحويل فوريه الجيبتمامي المنتهي .
- جدول G : تحويل لابلاس .

ملحق A

جدول A مختصر للتكاملات

بعض الصيغ الأساسية

1. $\int du = u + C$

2. $\int C du = C \int du$

3. $\int (f + g + ...)\, du = \int f du + \int g du + ...$

4. $\int u dv = uv - \int v du$

5. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$

6. $\int \dfrac{du}{u} = \ln u + C$

صيغ جذرية محتوية $a + bu$

7. $\int \dfrac{u du}{a+bu} = \dfrac{1}{b^2}\left|a + bu - a \ln (a+bu)\right| + C$

8. $\int \dfrac{u^2 du}{a+bu} = \dfrac{1}{b^3}\left|\tfrac{1}{2}(a+bu)^2 - 2a\ (a+bu) + a^2 \ln (a+bu) + C\right|$

9. $\int \dfrac{u\, du}{(a+bu)^2} = \dfrac{1}{b^2}\left[\dfrac{a}{a+bu} + \ln (a+bu)\right] + C$

10. $$\int \frac{u^2 du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left[a+bu-\frac{a^2}{a+bu}-2a\ln(a+bu)\right]+C$$

11. $$\int \frac{du}{u(a+bu)} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+bu}{u}+C$$

12. $$\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au}+\frac{b}{a^2}\ln\frac{a+bu}{u}+C$$

13. $$\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)}-\frac{1}{a^2}\ln\frac{a+bu}{u}+C$$

صيغ محتوية $\sqrt{a+bu}$

14. $$\int u\sqrt{a+bu}\, du = \frac{2(3bu-2a)}{15b^2}(a+bu)^{\frac{3}{2}}+C$$

15. $$\int u^2\sqrt{a+bu}\, du = \frac{2(15b^2u^2-12a\,bu-8a^2}{105b^3}(a+bu)^{\frac{3}{2}}+C$$

16. $$\int \frac{udu}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2(bu-2a)}{3b^2}\sqrt{a+bu}+C$$

17. $$\int \frac{u^2du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2(3b^2u^2-4abu+8a^2}{15b^3}\sqrt{a+bu}+C$$

18. a. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}+C\,(a>0)$$

18. b. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{\sqrt{-a}}\ \text{Arc}\ \tan\sqrt{\frac{a+bu}{-a}}+C\,(a<0)$$

19. $$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{au} - \frac{b}{2a}\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

20. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

21. $$\int \sqrt{\frac{a+bu}{u^2}}du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

صيغ محتوية $a^2 \neq u^2$ و $u^2 - a^2$

22. $$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\text{Arc}\tan\frac{u}{a}C \text{ , if } a > 0$$

23. $$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+u}{a-u} + C = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a} + C \text{ , if } u^2 < a^2$$

24. $$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{u-a}{u+a} + C = -\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{u}{a} + C \text{ , if } u^2 > a^2$$

صيغ محتوية $\sqrt{a^2-u^2}$

25. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{Arc }\sin\frac{u}{a} + C \text{ , if } u^2 < a^2, a > 0$$

26. $$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\text{Arc }\sin\frac{u}{a} + C$$

27. $$\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du =$$

$$-\frac{u}{4}(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{a^2}{8}u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8}\text{Arc }\sin\frac{u}{a} + C$$

28. $$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right) + C$$

29. $$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}du = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \text{Arc sin}\frac{u}{a} + C$$

30. $$\int \frac{u^2du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\text{Arc sin}\frac{u}{a} + C$$

31. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right) + C$$

32. $$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + C$$

33. $$\int \left(a^2-u^2\right)^{\frac{3}{2}}du =$$

$$-\frac{u}{8}(2u^2-5a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{3a^4}{8}\text{Arc sin}\frac{u}{a} + C$$

34. $$\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$$

صيغ محتوية $\sqrt{a^2+u^2}$

35. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C = \sinh^{-1}\frac{u}{a} + C$$

36. $$\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$$

$$= \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\frac{u}{a} + C$$

37. $$\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du$$

$$=\frac{u}{8}(2u^2+a^2)\sqrt{a^2+u^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)+C$$

$$=\frac{u}{8}(2u^2+a^2)\sqrt{a^2+u^2}-\frac{a^4}{8}\sinh^{-1}\frac{u}{a}+C$$

38. $$\int\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}du=\sqrt{a^2+u^2}-a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right)+C$$

39. $$\int\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}du=-\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}+\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)+C$$

$$=-\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}+\sinh^{-1}\frac{u}{a}+C$$

40. $$\int\frac{u^2du}{\sqrt{a^2+u^2}}=\frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)+C$$

$$=\frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2}-\frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\frac{u}{a}+C$$

41. $$\int\frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}}=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right)+C$$

42. $$\int\frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}}=-\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2u}+C$$

43. $$\int(a^2+u^2)^{\frac{3}{2}}du$$

$$= \frac{u}{8}(2u^2 + 5a^2)\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$$

$$= \frac{u}{8}(2u^2 + 5a^2)\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{3a^4}{8}\sinh^{-1}\frac{u}{a} + C$$

44. $$\int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 + u^2}} + C$$

صيغ محتوية $\sqrt{u^2 - a^2}$

45. $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + C = \cosh^{-1}\frac{u}{a} + C$$

46. $$\int \sqrt{u^2 - a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + C$$

$$= \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{u}{a} + C$$

47. $$\int u^2\sqrt{u^2 - a^2}\,du =$$

$$\frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C$$

48. $$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \text{ Arc } \cos\frac{a}{u} + C$$

$$= \sqrt{u^2 - a^2} - a \text{ Arc } \sec\frac{u}{a} + C$$

49. $$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2}du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + C$$

50. $$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C$$
$$= \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{u}{a} + C$$

51. $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\text{Arc }\cos\frac{a}{u} + C = \frac{1}{a}\text{Arc }\sec\frac{u}{a} + C$$

52. $$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$$

53. $$\int (u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} du =$$
$$\frac{u}{8}(2u^2 - 5a^2)\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + C$$
$$= \frac{u}{8}(2u^2 - 5a^2)\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{3a^4}{8}\cosh^{-1}\frac{u}{a} + C$$

54. $$\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2 - a^2}} + C$$

صيغ محتوية $\sqrt{2au - u^2}$

55. $$\int \sqrt{2au - u^2}\, du =$$
$$\frac{u - a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2}\text{Arc }\cos\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C$$

56. $$\int u\sqrt{2au - u^2}\, du =$$
$$\frac{2u^2 - au - 3a^2}{6}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2}\text{Arc }\cos\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C$$

57. $$\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u}du = \sqrt{2au-u^2} + a \text{ Arc}\cos\left(1-\frac{u}{a}\right)+C$$

58. $$\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u^2}du = -\frac{2\sqrt{2au-u^2}}{u} - \text{Arc }\cos\left(1-\frac{u}{a}\right)+C$$

59. $$\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = 2\text{Arc}\sin\sqrt{\frac{u}{2a}}+C = \text{Arc }\cos\left(1-\frac{u}{a}\right)+C$$

60. $$\int \frac{udu}{\sqrt{2au-u^2}} = -\sqrt{2au-u^2} + a \text{ Arc}\cos\left(1-\frac{u}{a}\right)+C$$

61. $$\int \frac{u^2du}{\sqrt{2au-u^2}} =$$

$$-\frac{(u+3a)}{2}\sqrt{2au-u^2}+\frac{3a^2}{2}\text{Arc }\cos\left(1-\frac{u}{a}\right)+C$$

62. $$\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au}+C$$

63. $$\int \frac{du}{(2au-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u-a}{a^2\sqrt{2au-u^2}}+C$$

صيغ مثلثية :

64. $$\int \sin u \; du = -\cos u + C$$

65. $$\int \cos u \; du = \sin u + C$$

66. $$\int \tan u \; du = -\ln\cos + C = \ln\sec u + C$$

67. $\int \cot u \; du = \ln \sin u + C = -\ln \csc + C$

68. $\int \sec u \; du = \ln(\sec u + \tan u) + C = \ln \tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$

69. $\int \csc u \; du = -\ln\;(\csc u + \cot u) + C = \ln \tan\left(\frac{u}{2}\right) + C$

70. $\int \sec^2 u \; du = \tan u + C$

71. $\int \csc^2 u \; du = -\cot u + C$

72. $\int \sec u \tan u \; du = \sec u + C$

73. $\int \csc u \cot u \; du = -\csc u + C$

74. $\int \sin^2 u \, du = \frac{1}{2}(u - \sin u \cos u) + C = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u + C$

75. $\int \cos^2 u \; du = \frac{1}{2}(u + \sin u \cos u) + C = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + C$

76. $\int \tan^2 u \; du = \tan u - u + C$

77. $\int \sec^3 u \; du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln(\sec u + \tan u) + C$

78. $\int \sin mu \sin nu \; du = \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + C$

79. $\int \sin mu \cos nu \; du = -\frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} + C$

80. $$\int \cos mu \cos nu \, du = \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + C$$

81. $$\int u \sin u du = \sin u - u \cos u + C$$

82. $$\int u \cos u \, du = \cos u + u \sin u + C$$

83. $$\int u^2 \sin u \, du = (2-u^2)\cos u + 2u \sin u + C$$

84. $$\int u^2 \cos u \, du = (u^2 - 2)\sin u + 2u \cos u + C$$

85. a. $$\int \sin^m u \cos^n u \, du =$$
$$-\frac{\sin^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} u \cos^n u \, du$$

85. b. $$\int \sin^m u \cos^n u \, du =$$
$$\frac{\sin^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m u \cos^{n-2} u \, du$$

86. a. $$\int \frac{du}{a+b\cos u} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \text{Arc } \tan\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}\tan\frac{u}{2}}{a+b}\right) + C$$

if $a^2 > b^2$

86. b. $$\int \frac{du}{a+b\cos u} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left(\frac{a+b+\sqrt{b^2-a^2}\tan\frac{u}{2}}{a+b-\sqrt{b^2-a^2}\tan\frac{u}{2}}\right) + C$$

if $a^2 < b^2$

87. a. $$\int \frac{du}{a+b\sin u} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \text{Are } \tan\left(\frac{a\tan\frac{u}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)+C$$

if $a^2 > b^2$

87. b. $$\int \frac{du}{a+b\sin u} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left(\frac{a\tan\frac{u}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{u}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}\right)+C$$

if $a^2 < b^2$

صيغ مثلثية عكسية :

88. $\int \text{Arc } \sin u \, du = u \text{ Arc } \sin u + \sqrt{1-u^2} + C$

89. $\int \text{Arc } \cos u \, du = u \text{ Arc } \cos u - \sqrt{1-u^2} + C$

90. $\int \text{Arc } \tan u \, du = u \text{ Arc } \tan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

صيغ أسية ولوغاريتمية :

91. $\int e^u du = e^u + C$

92. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

93. $\int ue^u du = e^u(u-1) + C$

94. $\int u^n e^u du = u^n e^u - n\int u^{n-1} e^u du$

95. $\int \frac{e^u}{u^n} du = -\frac{e^u}{(n-1)\, u^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^u du}{u^{n-1}}$

96. $\int \ln u \; du = u \ln u - u + C$

97. $\int u^n \ln u \; du = u^{n+1} \left[\frac{\ln u}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] + C$

98. $\int \frac{du}{u \ln u} = \ln(\ln u) + C$

99. $\int e^{au} \sin nu \; du = \frac{e^{au}(a \sin nu - n \cos nu)}{a^2 + n^2}$

100. $\int e^{au} \cos nu \; du = \frac{e^{au}(a \cos nu + n \sin nu)}{a^2 + n^2} + C$

صيغ زائدية :

101. $\int \sinh u \; du = \cosh u + C$

102. $\int \cosh u \; du = \sinh u + C$

103. $\int \tanh u \; du = \ln \cosh u + C$

104. $\int \coth u \; du = \ln \sinh u + C$

105. $\int \operatorname{sec} h \; u \; du = \text{Arc } \tan(\sinh u) + C$

106. $\int \operatorname{csc} h \; u \; du = \ln \tanh \frac{1}{2} u + C$

107. $\int \sec h^2 u \; du = \tanh u + C$

108. $\int \csc h^2 u \; du = -\coth u + C$

109. $\int \sec h \; u \tanh u \; du = -\sec h \; u + C$

110. $\int \csc h \; u \coth u \; du = -\csc h \; u + C$

111. $\int \sinh^2 u \; du = \frac{1}{4}\sinh 2u - \frac{1}{2}u + C$

112. $\int \cosh^2 u \; du = \frac{1}{4}\sinh 2u + \frac{1}{2}u + C$

113. $\int u \sinh u \; du = u \cosh u - \sinh u + C$

114. $\int u \cosh u \; du = u \sinh u - \cosh u + C$

115. $\int e^{au} \sinh nu \; du = \frac{e^{au}(a \sinh nu - n \cosh nu)}{a^2 - n^2} + C$

116. $\int e^{au} \cosh nu \; du = \frac{e^{au}(a \cosh nu - n \sinh nu)}{a^2 - n^2} + C$

: Wallis formula **صيغ وليس**

117. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u \; du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u \; du$

$$=\begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)\dots4.2}{n(n-2)\dots5.3.1,}, & 1< \text{ إذا كان } n \text{ عدداً صحيحاً فردياً} \\[2ex] \dfrac{(n-1)(n-3)\dots3.1}{n(n-2)\dots4.2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{ إذا كان } n \text{ عدداً صحيحاً زوجياً} \end{cases}$$

118. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m u \cos^n u\, du$

$$=\begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)\dots4.2}{(m+n)(m+n-1)\dots(m+5)(m+3)(m+1)} \\ 1< \text{ إذا كان } n \text{ عدداً صحيحاً فردياً} \\ \dfrac{(m-1)(m-3)\dots4.2}{(n+m)(n+m-2)\dots(n+5)(n+3)(n+1)} \\ 1< \text{ إذا كان } m \text{ عدداً صحيحاً فردياً} \\ \dfrac{(m-1)(m-3)\dots3.1.(n-1)(n-3)\dots3.1}{(m+n)(m+n-2)\dots4.2}.\dfrac{\pi}{2}, \\ \text{ إذا كان } n,m \text{ كلاهما عددين صحيحين موجبين زوجيين} \end{cases}$$

الملحق B

تعريف الدوال في الجداول

$\delta(x) =$ دالة دلتا

$$H(x-a) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases}$$ دالة هافيسايد

$$H(a-x) = \begin{cases} 1 & x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}$$ دالة هافيسايد المنعكسة

جدول B تحويل فوريه الأسي

	$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$	$F(\omega) = \mathcal{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$
1.	$f'(x)$	$i\omega F(\omega)$
2.	$f''(x)$	$-\omega^2 F(\omega)$
3.	$f^{(n)}(x)$ المشتقة النونية	$(i\omega)^n F(\omega)$
4.	$f(ax) \quad a > 0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
5.	$f(x-a)$	$e^{-ia\omega}F(\omega)$
6.	$e^{-a^2x^2}$	$\frac{1}{a\sqrt{2}}e^{-\omega^2/4a^2}$
7.	$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}$
8.	$\begin{cases} 1 & \lvert x\rvert < a \\ 0 & \lvert x\rvert > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin a\omega}{\omega}$
9.	$\begin{cases} 1 & \lvert x\rvert < 1 \\ 0 & \lvert x\rvert > 1 \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{i}{\omega}(\cos\omega - \frac{1}{\omega}\sin\omega)$

$f(x) = \mathscr{F}^{-1}[F] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$		$F(\omega) = \mathscr{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$
10.	$\delta(x-a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ia\omega}$
11.	$f(x) * g(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(\omega)G(\omega)$
12.	$(1+x^2)^{-1}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\lvert\omega\rvert}$
13.	$xe^{-a\lvert x\rvert} \quad a>0$	$-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ia\omega}{(\omega^2+a^2)^2}$
14.	$H(x+a)-H(x-a)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(a\omega)}{\omega}$
15.	$\frac{a}{x^2+a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\lvert\omega\rvert}$
16.	$\frac{2ax}{(x^2+a^2)^2}$	$-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\omega e^{-a\lvert\omega\rvert}$
17.	$\cos(ax) \quad \lvert x\rvert<\pi/2a$ $0 \quad \lvert x\rvert>\pi/2a$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2-\omega^2}\cos(\pi\omega/2a)$
18.	$1-\lvert x\rvert \quad \lvert x\rvert<1$ $0 \quad \lvert x\rvert>1$	$2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega}\right]^2$
19.	$\cos(ax)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a)]$
20.	$\sin(ax)$	$i\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\delta(\omega+a)-\delta(\omega-a)]$

الملحق C

جدول C   تحويل فوريه الجيبي

$f(x)=\int_0^x F(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega$ $0<x<\infty$	$F(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^x f(x)\sin(\omega x)\,dx$ $0<\omega<\infty$
1. $f''(x)$	$-\omega^2F(\omega)+\frac{2}{\pi}\omega f(0)$
2. $f(ax)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
3. e^{-ax}	$\frac{2\omega}{\pi(a^2+\omega^2)}$
4. $x^{-1/2}$	$\left[\frac{2}{\pi\omega}\right]^{1/2}$
5. $H(a-x)$	$\frac{2}{\pi\omega}[1-\cos(\omega a)]$
6. x^{-1}	1
7. $\frac{x}{x^2+a^2}$	$e^{-a\omega}$
8. $\frac{x}{x^4+4}$	$\frac{1}{2}e^{-\omega}\sin\omega$
9. $\tan^{-1}\frac{a}{x}$	$\frac{1-e^{-a\omega}}{\omega}$
10. $-x^2f(x)$	$\frac{2}{\pi}F''(\omega)$
11. $erfc\left(x/2\sqrt{a}\right)$	$\frac{2}{\pi}\left[\frac{1-e^{-a\omega^2}}{\omega}\right]\quad a>0$

الملحق D

جدول D تحويل فوريه الجيبتمامي

$f(x)=\int_0^\infty F(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega$ $0<x<\infty$	$F(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)\,dx$ $0<\omega<\infty$
1. $f''(x)$	$-\omega^2F(\omega)-\frac{2}{\pi}f'(0)$
2. $f(ax)$	$\frac{1}{a}F(\omega/a)$
3. e^{-ax}	$\frac{2a}{\pi(a^2+\omega^2)}$
4. $\delta(x)$	$\frac{2}{\pi}$
5. $x^{-1/2}$	$\left[\frac{2}{\pi\omega}\right]^{1/2}$
6. $H(a-x)$	$\frac{2}{\pi\omega}\sin(a\omega)$
7. e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}e^{(-\omega 2/4a)}$
8. $\frac{\sin(ax)}{x}$	$H(a-\omega)$
9. $\frac{a}{x^2+a^2}$	$e^{-a\omega}$
10. $-x^2f(x)$	$\frac{2}{\pi}F''(\omega)$

الملحق E

جدول E التحويل الجيبي المنتهي

إن التحويل الجيبي المنتهي يحول الدالة $f(x)$ حيث $0 \le x \le \pi$ إلى متتابعة حيث $n = 1,\ 2,$ وذلك باستخدام الصيغة :

$$S_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx$$

ومن المناسب قدر ما يتعلق ذلك بالجداول أن تكون قيم x ضمن الفترة المغلقة $[0,\pi]$ ، ويستطيع القارئ تحويل أي فترة مغلقة $[a,b]$ إلى $[0,\pi]$ باستخدام التحويل .

$$y = \frac{\pi}{b-a}(x-a)$$

ولا غموض هناك حول التحويل الجيبي المنتهي ، حيث أن حدود المتتابعة S_n هي معاملات $\sin(nx)$ في سلسلة فوريه الجيبية للدالة $f(x)$ ، أي أن :

جدول E التحويل الجيني المنتهي

$$f(x) = \sum_{n-1}^{x} S_n \sin(nx)$$

$f(x) = \sum_{n=1}^{x} S_n \sin(nx)$ $0 \le x \le \pi$		$S_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx$ $n = 1,\ 2,\ \ldots$
1. $f''(x)$		$-n^2 S_n + \frac{2n}{\pi}\left[f(0) - (-1)^n f(\pi)\right]$
2. $\sin(mx)$	$m = 1,\ 2,\ 3,\ldots$	$\begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$

$f(x)=\sum_{n=1}^{x} S_n \sin(nx)$ $0 \le x \le \pi$		$S_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$ $n = 1, 2, \ldots$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$	a_n
4.	$\pi - x$	$\frac{2}{\pi}$
5.	x	$\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$
6.	1	$\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$
7.	$\begin{cases} -x & x \le a \\ \pi - x & x > a \end{cases}$	$\frac{2}{n}\cos(na) \qquad 0 < a < \pi$
8.	$\begin{cases} (\pi - a)x & x \le a \\ (\pi - x)a & x > a \end{cases}$	$\frac{2}{n^2}\sin(na) \qquad 0 < a < \pi$
9.	$\frac{\pi}{2}e^{ax}$	$\frac{n}{n^2+a^2}\left[1-(-1)^n e^{a\pi}\right]$
10.	$\frac{\sinh a(\pi - x)}{\sinh a\pi}$	$\frac{2n}{\pi(n^2+a^2)}$

التحويل الجيبتمامي

إن التحويل الجيبتمامي المنتهي يحول الدالة $f(x)$ حيث $0 \le x \le \pi$ إلى متتابعة C_n، حيث $n = 0, 1, 2, \ldots$ وذلك باستخدام الصيغة :

$$C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

ومن المناسب – قدر ما يتعلق ذلك بالجداول – أن تكون قيم x ضمن الفترة المغلقة $[0,\pi]$ ، ويمكن للقارئ أن يحول أي فترة أخرى $[a,b]$ إلى الفترة $[0,\pi]$ باستخدام التحويل :

$$y = \frac{\pi}{b-a}(x-a)$$

ولا غمـوض حـول التحويل الجيبتمامي ، حيث أن حـدود المتتابعة C_n هـي معامـلات $\cos(nx)$ في سلسلة فوريه الجيبتمامية للدالة $f(x)$.

الملحق F

جدول F التحويل الجيبتمامي المنتهي

$$f(x)=\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(nx)$$

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(nx)$ $0\le x\le\pi$		$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ $n=1,2,\ldots$
1. $f''(x)$		$-n^2C_n+\frac{2}{\pi}[f'(0)-(-1)^n f'(\pi)]$
2. $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$		a_n
3. $f(\pi-x)$		$(-1)^n\frac{2}{\pi}C_n$
4. 1		$\begin{cases}2 & n=0\\ 0 & n=1,2,\ldots\end{cases}$
5. $\cos(mx)$	$m=1,2,\ldots$	$\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\ne m\end{cases}$
6. x		$\begin{cases}\pi & n=0\\ \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n-1] & n=1,2,\ldots\end{cases}$
7. x^2		$\begin{cases}2\pi^2/3 & n=0\\ \frac{4}{n^2}(-1)^n & n=1,2,\ldots\end{cases}$
8. $-\log(2\sin x/2)$		$\begin{cases}0 & n=0\\ 1/n & n=1,2,\ldots\end{cases}$

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(nx)$ $0 \le x \le \pi$	$C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ $n = 1, 2, \ldots$
9. $\frac{1}{a}e^{ax}$	$\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n e^{a\pi}-1}{n^2+a^2}\right]$
10. $\begin{cases} 1 & 0 < x < a \\ -1 & a < x < \pi \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{2}{\pi}(2a-\pi) & n=0 \\ \frac{4}{n\pi}\sin(na) & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$

الملحق G

جدول G تحويلات لابلاس

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	
1. 1	$\dfrac{1}{s}$	$s > 0$
2. e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$s > a$
3. $\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
4. $\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$
5. $\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	$s > \lvert a \rvert$
6. $\cosh at$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$s > a$
7. $e^{at}\cos bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$s > a$
8. $e^{at}\cos bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$s > a$
9. t^n عدد صحيح موجب n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
10. $t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$
11. $H(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$ $\quad s>a$
12. $H(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
13. $e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
14. $f(t)*g(t)$	$F(s)G(s)$
15. $f^{n}(t)$ المشتقة النونية	$s^{n}F(s)-s^{n-1}f(0)-\ldots-f^{n-1}(0)$
16. $f(at)$	$\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$ $\quad a>0$
17. $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\dfrac{1}{s}F(s)$
18. $erf(t/2a)$	$\dfrac{1}{s}e^{a^2s^2 erfc(as)}$
19. $erfc(a/2\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}$
20. $J_0(at)$	$(s^2+a^2)^{-1/2}$
21. $\delta(t-a)$	e^{-sa}
22. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(\dfrac{-a^2}{4t}\right)$	$\dfrac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}$ $\quad a\geq 0$
23. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}-ae^{a^2t}erfc\left(a\sqrt{t}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}+a}$

الملحق الثاني

اللابلاسية في نظم إحداثية مختلفة

اللابلاسية ذات البعدين بالإحداثيات الديكارتية :

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}$$

اللابلاسية ذات البعدين بالإحداثيات القطبية :

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

اللابلاسية ذات الأبعاد الثلاثة بالإحداثيات الديكارتية :

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

اللابلاسية ذات الأبعاد الثلاثة بالاسطوانية :

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_{zz}$$

اللابلاسية ذات الأبعاد الثلاثة بالإحداثيات الكروية :

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cot\theta}{r^2} u_\theta + \frac{1}{r^2 \sin\theta} u_{\Phi\Phi} = 0$$

الملحق الثالث

المعادلات التفاضلية الأساس

معادلات نمط القطع الناقص

معادلة لابلاس	$\nabla^2 u = 0$
معادلة هيلمولتز	$\nabla^2 u + \lambda^2 u = 0$
معادلة بواسون	$\nabla^2 u = k$
معادلة شرودنكر	$\nabla^2 u + k(E - V)u = 0$

معدلات نمط القطع الزائد

معادلة الوتر المهتز ذو البعد الواحد	$u_{tt} = c^2 u_{xx}$
معادلة الوتد المهتز بوجود الاحتكاك	$u_{tt} = c^2 u_{xx} - hu_t$
معادلة الإرسال	$u_{tt} = c^2 u_{xx} - hu_t - ku$
معادلة الموجة بوجود قوة مؤثرة	$u_{tt} = c^2 u_{xx} - f(x,t)$
معادلة الموجة ذات الأبعاد العليا	$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u$
معادلة الموجة العامة بوجود الاحتكاك	$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u - hu_t$

معادلات نمط القطع المكافئ

معادلة الانتشار ذات البعد الواحد	$u_t = \alpha^2 u_{xx}$
معادلة الانتشار والحمل	$u_t = \alpha^2 u_{xx} - hu_x$
معادلة الانتشار بوجود تسرب حراري أوتركيزي جانبي	$u_t = \alpha^2 u_{xx} - ku$
معادلة الانتشار بوجود مصدر أو مستهلك حراري	$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t)$