



الجمهورية اليمنية

جامعة العلوم والتكنولوجيا

المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات

إعداد

الدكتور | عايش المنادوة

الدكتور | إسماعيل بوتقة

المقدمة

يسعدنا أن نقدم كتاب المعادلات التفاضلية وتطبيقات للناطقين بالضاد . لقد حاولنا جهدنا أن يأتي هذا الكتاب متناسقاً مترابطاً يتسم بسهولة العبارات وتسلسل الأفكار وتعدد الأمثلة حتى يتسنى للقارئ الكريم أن يلم بجوانب هذا المنهج ؛ كما يجد بين طياته مجموعة من التطبيقات الهندسية والفيزيائية والكهربائية .

يحتوي الكتاب على أربعة عشر فصلاً :

في الفصل الأول تطرقنا إلى مجموعة من التعاريف والمفاهيم حول المعادلات التفاضلية العادية .

أما في الفصل الثاني والثالث والرابع والخامس فقد تعرضنا إلى دراسة المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى وإلى طرق حلها بصورة تفصيلية.

أما في الفصل السادس عرضنا مجموعة من الأمثلة التطبيقية المتنوعة جزء منها هندسية والأخرى فيزيائية حول المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى .

في الفصل السابع تناولنا دراسة المعادلات التفاضلية الخطية وغير الخطية من المرتبة الثانية وبعض طرق إيجاد الحل على صورة مغلقة .

في الفصل الثامن عرضنا مجموعة من التطبيقات المتنوعة في شتى فروع العلوم الفيزيائية والهندسية على المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية .

في الفصل التاسع درسنا طريقة هامة لحل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية والمتمثلة في إيجاد الحل على هيئة متسلسلة بجوار نقطة ما .

في الفصل العاشر تطرقنا إلى البحث عن متسلسلات الحلول لبعض المعادلات التفاضلية الشهيرة .

في الفصل الحادي عشر تم توسيع دراسة المعادلات الخطية لتشمل المعادلات ذات المراتب العالية وطرق حلها .

في الفصل الثاني عشر تناولنا دراسة تحويل لابلاس الذي يعتبر إحدى الطرق النافعة لحل المعادلات التفاضلية الخطية .

في الفصل الثالث عشر درسنا نظرية وجود وحدانية حلول المعادلات التفاضلية من وجهة الرياضيات البحتة .

في آخر فصل تعرضنا إلى دراسة النظم الخطية للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والتي تتركز أساساً على معرفة المفاهيم في الجبر الخطي وجبر المصفوفات .

كما وضعنا في نهاية كل فصل مجموعة من التمارين غير محلولة ليتدرب عليها الطالب .

وفي الختام نأمل أن نكون قد وفقنا في إعطاء صورة واضحة عن مختلف مواضيع هذا الفرع من الرياضيات التطبيقية .

هذا ولا يفوتنا أن نتقدم بالشكر للأخوة الذين ساهموا من قريب أو بعيد في إخراج هذا الكتاب إلى حيز الوجود .

والله نسأل أن يكون هذا المجهود المتواضع أمر ذو بال وحينئذ نسأله أن تعم الفائدة .

والله من وراء القصد وهو يهدي السبيل

المؤلفان

الفصل الأول

~~المعادلات التفاضلية العادية~~

Ordinary Differential Equations

الفصل الأول

المعادلات التفاضلية العادية

Ordinary Differential Equations

Introduction

I - 1. مقدمة:

يمكن القول دون تجاوز أو مبالغة أن المعادلات التفاضلية تحتل المكانة المرموقة في كل فروع العلوم الهندسية والفيزيائية ؛ حيث اغلب العلاقات والقوانين الحاكمة بين متغيرات مسألة فيزيائية أو هندسية تظهر على صورة معادلات تفاضلية ولفهم هذه المسألة فلا بد من حل هذه المعادلة التفاضلية أو على الأقل معرفة كثير من خصائص هذا الحل وأن استعصى الحصول عليه صراحة ؛ وعملية الحصول على الحل ليست دوماً بالمسألة اليسيرة بل أن كثيراً من المعادلات التفاضلية غير قابل للحل .

لقد استحوذ هذا الأمر على اهتمام الرياضيين منذ بداية علم التفاضل في القرن السابع عشر وحتى أيامنا هذه ؛ سواء من ناحية دراسة وجود الحل أو من ناحية خصائصه وطبيعته أو من ناحية الحصول عليه . ولم يقف الرياضي طويلاً أمام المعادلات التفاضلية التي يصعب حلها على صورة مغلقة (Closed Form Solution) بل تجاوز ذلك إلى الحل التقريبي والحل العددي . وتمثل الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية مساحة كبيرة من خريطة الأبحاث الرياضية خصوصاً في عصرنا هذا عصر الحاسبات الآلية الكبيرة السعة والمفرطة السرعة .

أولاً : المعادلة التفاضلية :-

Differential Equation

هي علاقة بين المتغير التابع والمتغير (المتغيرات) المستقل (المستقلة) تدخل فيها المشتقات أو التفاضلات وتسمى المعادلة التفاضلية عادية (Ordinary) إذا كان المتغير التابع دالة في متغير مستقل واحد وبالتالي لا تحتوي إلا على مشتقات عادية .

أمثلة -1-

ليكن x المتغير المستقل و y المتغير التابع ؛ فالعلاقات التالية تمثل معادلات تفاضلية عادية :-

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + y = 3x^2$$

$$(2) \quad x \frac{d^3y}{dx^3} + (2 \sin x) \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dy}{dx} = (3 - x^2)y$$

$$(3) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$(4) \quad (x - y)dx + (x + y)dy = 0$$

-: **ملاحظة**

كثير ما نستخدم الشرطه المائله للدلالة على المشتقة العادية فمثلاً :

المشتقة الأولى للمتغير y بالنسبة إلى x هي $y' = \frac{dy}{dx}$

المشتقة الثانية تكتب على الصورة $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} \quad \text{المشتقة الثالثة تكتب على الصورة}$$

وللمشتقات العليا يصعب تكرار الشرطه فنكتب المشتقة على الصورة :

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

حيث توضح مرتبة المشتقة أعلى المتغير وبين قوسين لتميزها عن الأس وعلى ذلك $y^{(4)}$ تعني المشتقة الرابعة و $y^{(5)}$ هي المشتقة الخامسة وهكذا وعليه يمكن كتابة المعادلة (2) على الصورة :

$$(3) \quad xy''' + (2 \sin x)y'' \cdot y' = (3 - x^2)y$$

ثانياً : المعادلة التفاضلية الجزئية (Partial) :-

هي معادلة تفاضلية فيها المتغير التابع داله لأكثر من متغير مستقل أي تظهر فيها المشتقات الجزئية .

أمثلة -2-

ليكن U المتغير التابع و z, y, x المتغيرات المستقلة ؛ فالعلاقات التالية هي معادلات تفاضلية جزئية :

$$(5) \quad \frac{\partial U}{\partial x} + 3 \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

$$(6) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$

$$(7) \quad x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 3y \frac{\partial U}{\partial x} + (x - y^2)U = 0$$

ثالثاً : مرتبة المعادلة التفاضلية (order) :

إذا كانت المشتقة النونية $y^{(n)}$ هي أعلى مشتقة تظهر بالمعادلة التفاضلية العادية قيل أن هذه المعادلة من المرتبة n (order) تتحدد مرتبة المعادلة التفاضلية بأعلى مشتقة داخله فيها .

مثال -3-

- المعادلة التفاضلية (1) هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى.
- المعادلة التفاضلية (2) هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثالثة .
- المعادلة التفاضلية (3) هي من المرتبة الثانية .
- المعادلة التفاضلية (4) هي من المرتبة الأولى لاحتوائها على التفاعلات dx , dy .

رابعاً : درجة المعادلة التفاضلية (Degree) :

هي الأس المرفوع إليها أعلى مشتقة تظهر بالمعادلة التفاضلية ، وقبل تحديد درجة المعادلة يجب وضعها على صورة قياسية وصحيحة من حيث المشتقات .

أمثلة -4-

- المعادلة (1) هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى ومن الدرجة الأولى.
- المعادلة (2) هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثالثة ومن الدرجة الأولى.
- المعادلة :

$$(8) \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^2y^3 = e^x \sin x$$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ومن الدرجة الثالثة .

- المعادلة :

$$(9) \quad \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + 3 \frac{d^2 y}{dx^2} + xy = 0$$

قبل تحديد درجة هذه المعادلة يجب وضعها على صورة خالية من الجذور

$$1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \left(3 \frac{d^2 y}{dx^2} + xy \right)^2 \quad \text{أي :}$$

$$9 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 + 6xy \frac{d^2 y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + x^2 y^2 - 1 = 0 \quad \text{أو}$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ومن الدرجة الثانية .

خامساً - المعادلة التفاضلية الخطية (Linear) :

هي المعادلة الخطية في المتغير التابع ومشتقاته جميعاً .

مثال -5-

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = e^x \sin x \quad \text{المعادلة :}$$

هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية حيث أن كلاً من المتغير التابع y ومشتقاته y' , y'' خطية أي كل منها مرفوع للأس واحد ولا توجد حواصل ضرب مشتركة فيما بينها ولا يهم أن تكون معاملاتها ثابتة أو دوال في x . إذا لم تكن المعادلة التفاضلية خطية فإنها معادلة تفاضلية لا خطية .

مثال -6-

المعادلات التفاضلية التالية معادلات تفاضلية لا خطية :

$$(10) \quad yy'' + y' = x$$

$$(11) \quad y' + x\sqrt{y} = \sin x$$

$$(12) \quad y''' + x^2 y'' + \sin y = 0$$

حيث تظهر لا خطية المعادلة (10) في حاصل الضرب بين y , y'' .
بينما في المعادلة (11) تظهر في الحد y مرفوع لأس يختلف عن الواحد في
المعادلة (12) تظهر في الحد $\sin y$ وهي دالة لا خطية في y .

ملاحظة :

لا تؤثر اللاخطية على مرتبة المعادلة التفاضلية ،

- فالمعادلة (10) لا خطية من المرتبة الثانية .
- والمعادلة (11) لا خطية من المرتبة الأولى .
- والمعادلة (12) لا خطية من المرتبة الثالثة .

سادساً : الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n هي

$$(13) \quad P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + P_1(x)y' + P_0(x)y = Q(x)$$

$$(14) \quad \sum_{i=0}^n P_i(x)y^{(i)} = Q(x) \quad \text{أو}$$

حيث المتغير التابع y وجميع مشتقاته مرفوعة للأس واحد ولا توجد حواصل ضرب مشتركة بين أي منها . والدوال المعاملات $P_i(x)$ هي دوال في x خطية أم غير خطية وكذلك بالنسبة للدالة $Q(x)$.

سابعاً : المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (Homogeneous) :

إذا انعدمت الدالة $Q(x)$ من المعادلة التفاضلية (13) لجميع قيم x قيل أنها معادلة
تفاضلية خطية متجانسة ، وإلا كانت المعادلة التفاضلية غير متجانسة أو كاملة .

أمثلة -7-

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0 \quad \text{- المعادلة}$$

هي معادلة تفاضلية عادية خطية متجانسة من المرتبة الثانية .

$$xy' + (\sin x)y = x^2(\sin x + 2) \quad \text{- المعادلة}$$

هي معادلة تفاضلية عادية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى .

ملاحظة :

إذا كانت المعاملات $P_i(x)$ في المعادلة (13) ثابتة لا تتعلق بالمتغير x قيل عن المعادلة التفاضلية الخطية أنها ذات معاملات ثابتة (of Constant Coefficients) وإلا فإنه يقال عنها أنها ذات معاملات متغيرة (of Variable Coefficients) .

أمثلة :

$$y''' + 6y'' - 3y' + 2y = e^x \quad \text{- المعادلة}$$

هي معادلة تفاضلية عادية خطية غير متجانسة من المرتبة الثالثة ذات معاملات ثابتة

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0 \quad \text{- المعادلة}$$

فهي معادلة تفاضلية ذات معاملات متغيرة .

Arbitrary Constants

ثامناً : الثوابت الاختيارية :

عادة ما تظهر ثوابت في حل المعادلات التفاضلية ؛ ويكون الثابت اختيارياً (Arbitrary constant) إذا كانت القيم التي يأخذها لا تعتمد على المتغير التابع أو المتغير المستقل وتكون الثوابت الاختيارية الداخلة في تعبير ما جوهرية (Essential) إذا لم يمكن دمج أحدها في ثابت آخر .

أمثلة -8-

$$T(x) = Ae^{-x^2+B}$$

- لنعتبر التعبير

قد يبدو لأول وهله أن هناك ثابتين A , B ولكن بإمعان النظر نرى أنه يمكن دمج الثابتين في ثابت جوهري واحد :

$$T(x) = Ae^{-x^2+B} = Ae^B \cdot e^{-x^2} = ce^{-x^2}$$

$$C = Ae^B$$

حيث :

$$T(x) = A_1 \sin x + A_2 \sin 3x + A_3 \sin^3 x$$

- لنعتبر التعبير

الذي يتضمن ثلاثة ثوابت ولكن الحقيقة يمكن اختزالهم إلى ثابتين جوهريين فقط
حيث :

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$$

$$T(x) = A_1 \sin x + A_2 \sin 3x + A_3 \left[\frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \right]$$

إن

$$= (A_1 + \frac{3}{4} A_3) \sin x + (A_2 - \frac{1}{4} A_3) \sin 3x$$

$$= A_4 \sin x + A_5 \sin 3x$$

$$A_4 = A_1 + \frac{3}{4} A_3 , A_5 = A_2 - \frac{1}{4} A_3$$

حيث

ملاحظات :

1- يمكن تحويل أماكن الثوابت الاختيارية دون التأثير على عددها .

أمثلة -9-

- التعبير $T(x) = e^{B-x^2}$ يحتوي على ثابت واحد B ويمكن كتابته على الصورة :

$$T(x)' = e^B \cdot e^{-x^2} = Ae^{-x^2}$$

حيث $A = e^B$

- التعبير $T(x) = \ln x + A$ يمكن كتابته على الصورة :

$$T(x) = \ln x + A = \ln(Bx)$$

حيث $A = \ln B$

- التعبير $T(x) = A \cos x + B \sin x$ وهو يتضمن ثابتين A, B ويمكن كتابته على الصورة :

$$T(x) = A \cos x + B \sin x = C \cos(x + \varepsilon)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \varepsilon = -\tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) \quad \text{حيث}$$

2- نذكر هنا بالثابت الجمعي والثابت الضربي . فالأول يضاف إلى الدالة والثاني يضرب في الدالة .

أمثلة -10-

- في التعبير $T(x) = x^2 \cdot e^{-x} + A$ ، A هو ثابت جمعي ويقال أن الدالة $T(x)$ تساوي $x^2 e^{-x}$ في حدود ثابت جمعي .

- في التعبير $T(x) = Ax^2 e^{-x}$ ، A ثابت اختياري يقال أن الدالة $T(x)$ تساوي $x^2 e^{-x}$ في حدود ثابت ضربي .

I-3- حل المعادلة التفاضلية :

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية :

$$(15) \quad F[x, y, y', \dots, y^{(n)}] = 0$$

والتي من المرتبة n ؛ حيث F تابع حقيقي .

ليكن $f(x)$ تابعاً حقيقياً معرفاً من أجل جميع قيم x في المجال الحقيقي I .
وكذلك كل مشتقاته حتى المرتبة n معرفة من أجل كل قيمة للمتغير x حيث $x \in I$

نقول أن التابع $f(x)$ حل للمعادلة (15) إذا تحقق الشرطان التاليان :

$$أ- إذا كان التابع $F[x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)]$$$

معرفاً من أجل كل قيم $x \in I$

$$ب- إذا كان : $F[x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)] \equiv 0$$$

من أجل كل قيم $x \in I$

وهذا يعني أنه بتعويض $f(x)$ ومشتقاته مكان y ومشتقاته في المعادلة التفاضلية

(15) تتحول المعادلة (15) إلى مطابقة من أجل جميع قيم $x \in I$.

أمثلة -11-

- لنعبر المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى التالية :

$$xy' - 2y = 0$$

$$حلها هو $y = Ax^2$ من أجل $x \in I$$$

حيث A ثابت اختياري .

$$\text{وللتحقق من ذلك نحسب } y' = 2Ax$$

ثم نعوض في الطرف الأيسر للمعادلة التفاضلية فنجد :

$$xy' - 2y = x(2Ax) - 2(Ax^2) \equiv 0$$

- لنعتبر المعادلة التالية :

$$y'' + k^2 y = 0 \quad \text{حيث ثابت } k =$$

حل هذه المعادلة هو $y = A \cos kx + B \sin kx$

حيث B, A ثابتان اختياريان لأن :

$$y' = Ak \sin kx + Bk \cos kx$$

$$y'' = -k^2 [A \cos kx + B \sin kx]$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية تتحول إلى مطابقة .

ملاحظات :

1- توضح الأمثلة السابقة أن المعادلة التفاضلية تقبل ما لانهاية من الحلول وهذه اللانهاية من الحلول يمكن تمثيلها عموماً على هيئة دالة أو صيغة واحدة تحوي على ثوابت اختيارية ؛ وتعتبر هذه الدالة حلاً عاماً (General solution) للمعادلة التفاضلية يمكن منه انتقاء أي حل خاص (Particular solution) بإعطاء الثوابت الاختيارية أي قيم نشاء . على انه قد يوجد أحد أو بعض الحلول للمعادلة التفاضلية لا يمكن استنتاجها من الحل العام بإعطاء قيم مناسبة للثوابت الاختيارية ومثل هذا الحل أن وجد يسمى بالحل المنفرد (Singular solution) للمعادلة التفاضلية ونادراً ما تقابلنا مثل هذه الحلول المتفردة في المسائل الهندسية. وإذا تضمن حل عام للمعادلة التفاضلية كل الحلول لهذه المعادلة فهو حل كامل (Complete Solution) .

2- يمكن تشكيل المعادلة التفاضلية لمعادلة غير محلولة بالنسبة للثابت الاختياري ؛ إذا كان لدينا مجموعة التوابع :

$$F(x, y, A) = 0$$

ومشتقها هو :

$$F'_x(x, y, A) + F'_y(x, y, A) \equiv 0$$

فالمعادلة التفاضلية للتوابع (16) هي المعادلة الناتجة من حذف الثابت الاختياري A من المعادلتين (16) ؛ (17) ولتكن :

$$(18) \quad G(x, y, y') = 0$$

مثال -12-

$$y = Ax^2 \quad \text{لنعبر الدالة}$$

$$y' = 2Ax \quad \text{مشتقتها هي}$$

ب حذف الثابت الاختياري A بين هاتين المعادلتين نحصل على المعادلة التفاضلية التي تحققها هذه الدالة وهي :

$$xy' - 2y = 0$$

I-4. مسألة القيم الحدية في المعادلات التفاضلية :-

قد نكون أحياناً مضطرين للبحث عن حل لمعادلة تفاضلية بحيث أن هذا الحل يجب أن يحقق شروطاً معينة عند أكثر من قيمة من قيم المتغير المستقل . في هذه الحالة قد نوجد جميع الحلول ثم ننتقي منها ما يحقق الشروط المطلوبة ؛ وقد نبحت مباشرة عن هذا الحل دون النظر إلى بقية الحلول . نسمي الشروط المطلوبة تحقيقها بالشروط الحدية (Boundary Conditions) ونسمي المعادلة التفاضلية المصحوبة بتلك الشروط الحدية بمسألة القيم الحدية (Boundary Value Problem) .

مثال -13-

لنعبر المعادلة التفاضلية التالية :

$$y'' + y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(\pi) = 1$$

هذه المعادلة التفاضلية تكون مسألة القيم الحدية وحلها هو :

$$y = \cos x - \sin x$$

تمارين

I - صنف المعادلات التالية من حيث ذكر المرتبة ؛ المتغير التابع ؛ والمتغيراو المتغيرات المستقلة وكونها عادية أو جزئية . في حالة كونها عادية حدد هل هي خطية أم لا ؟ وإذا كانت خطية هل هي متجانسة أم لا ؟

(i) $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$ (ii) $y'' = [1 + y^2]^{3/2}$

(iii) $d(Ug) = g^2 dg$ (iv) $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$

(v) $\ddot{x}^3 + x^4 = 1$ (vi) $xyy' = (y'')^3$

II - تحقق من أن الحل المذكور قرين كل من المعادلات التفاضلية التالية يصلح حلاً لها . اذكر هل هو حل عام أم لا ؟

(i) $y' + y = 2$, $y = Ae^{-x} + 2$

(ii) $\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} - 3v = 2\cos t - 4\sin t$, $v = Ae^t + Be^{-3t} + \sin t$

(iii) $x(y'')^2 = 2yy'$, $y = Ax^2$

أرسم عدة أعضاء من طائفة المنحنيات ذات البارامتر الواحد $y = Ae^{-x} + 2$ في المطلوب (i) كذلك عين الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (ii) الذي يحقق كون $v'(0) = -5$, $v(0) = 2$

III - للمعادلة التفاضلية اللاخطية ذات المرتبة الأولى $y'' - xy' + y = 0$ حل علم (أساسية) $y = Ax - A^2$ يتضمن ثابتاً اختيارياً واحداً . كذلك لها حل

$y = \frac{x^2}{4}$ لا يمكن استنتاجه من الحل العام بإعطاء قيم مناسبة للثابت الاختياري A .

جد بيانيا العلاقة بين الحل العام والحل المتفرد . هل يمكن استنتاج هذه العلاقة تحليلياً

IV- ارسم مختلف أعضاء طائفة المنحنيات ذات البارامتر الواحد والتي تمثلها الأساسية

$$x^2 + By^2 = 1$$

ثم جد المعادلة التفاضلية لهذه الطائفة من المنحنيات .

V- جد المعادلة التفاضلية للأساسية :

$$y^2 = Ax + B$$

VI- جد المعادلة التفاضلية لمجموعة التوابع :

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

VII- تعريف المغلف :

مغلف منحنيات هو منحنى يمس في كل نقطة من نقاطه أحد هذه المنحنيات .

إيجاد المغلف :

إذا كان لدينا مجموعة المنحنيات

$$F(x, y, c) = 0 \quad (1)$$

حيث C ثابت اختياري إذا كان لهذه المنحنيات مغلف فهذا المغلف يحقق في كل نقطة من نقاطه العلاقة (1) ومشتقها بالنسبة للثابت أي

$$F'_c(x, y, c) = 0 \quad (2)$$

وبالتالي يحقق لهما المشترك الناتج من حذف الثابت بينهما أي

$$G(x, y) = 0 \quad (3)$$

وهذا الشرط لازم وغير كاف

تطبيق :- جد مغلف المنحنيات التكاملية للمعادلة التفاضلية :

$$y'^2 = y - 2$$

الفصل الثاني

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

Differential Equations of the First Order

الفصل الثاني

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

Differential Equations of the First Order

II - 1. المعنى الهندسي للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى :

Geometrical Interpretation:

سندرس في هذا الفصل طرق حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى سواء من الدرجة الأولى أو من الدرجة الأعلى من الأولى ومثل هذه المعادلات يكتب على الصورة العامة التالية:

$$(1) \quad F(x, y, y') = 0$$

وقبل البدء في عرض مختلف الطرق لحل المعادلة التفاضلية (1) نقدم أولاً المعنى الهندسي (الجيومتري) لهذه المعادلة التفاضلية .

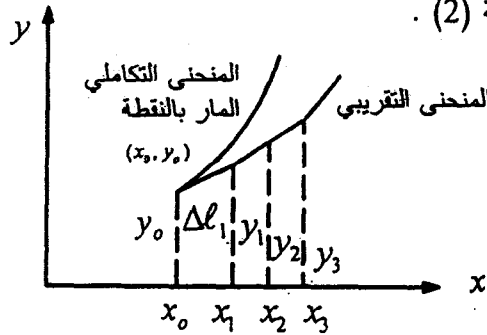
لنعتبر المعادلات التي تحل في أي التي يمكن كتابتها على الصورة:

$$(2) \quad y' = f(x, y)$$

حيث الدالة $f(x, y)$ وحيدة القيمة عند جميع النقط (x, y) في منطقة ما T وتمثل القيمة $f(x_0, y_0)$ قيمة المشتقة y' عند النقطة (x_0, y_0) أي ميل المنحنى التكاملية للمعادلة التفاضلية (2) المار بالنقطة (x_0, y_0) وللحصول على المنحنى التكاملية لهذه المعادلة المار بالنقطة (x_0, y_0) نتحرك مسافة Δl_1 في اتجاه $f(x_0, y_0)$ لنصل إلى النقطة (x_1, y_1) نحسب $f(x_1, y_1)$ أي الميل عند النقطة (x_1, y_1) ثم نتحرك مسافة Δl_2 في هذا الاتجاه الجديد $f(x_1, y_1)$ لنصل إلى النقطة (x_2, y_2) ؛ نحسب الميل $f(x_2, y_2)$ عند هذه النقطة ثم نتحرك في هذا الاتجاه مسافة صغيرة Δl_3 لنصل إلى

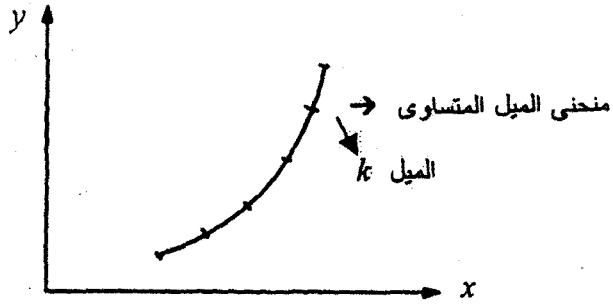
النقطة (x_3, y_3) وهكذا لنحصل في النهاية حينما نؤول المسافات الصغيرة إلى الصفر على المنحنى التكاملي المار بالنقطة (x_0, y_0) شكل -1-

ويتميز هذا المنحنى بأن أي نقطه عليه وميل مماسه عند هذه النقطة يحققان المعادلة التفاضلية (2). وهذا المنحنى التكاملي هو أحد الحلول البيانية الخاصة بهذه المعادلة التفاضلية وكل مرة نبدأ من نقطة جديدة نحصل على منحنى تكاملي جديد كأحد الحلول للمعادلة (2).



شكل -1- المعنى الهندسي للمعادلة (2)

يمكن رسم المنحنى $f(x, y) = k$ حيث k ثابت في المستوى xy ويسمى هذا المنحنى بمنحنى الميل المتساوي (Curve of Constant Slope) للمعادلة (2) ثم نرسم من عند نقط هذا المنحنى أجزاء قصيرة من مستقيمت متوازية ميلها k تسمى بالعناصر المستقيمة (Lineal Elements) وكل عنصر من هذه العناصر المستقيمة يمس المنحنى التكاملي للمعادلة (2) عند نقطة تقاطعه مع منحنى الميل المتساوي. نكرر هذه العملية بإنشاء منحنيات ميل متساوية مختلفة تغطي المنطقة T وذلك بإعطاء الثابت k قيماً مختلفة ولكل من هذه المنحنيات نرسم العناصر المستقيمة الخاصة به ، وتكون مجموعة العناصر المستقيمة مجال أو حقل الاتجاه (Direction Field) للمعادلة التفاضلية (2) ويمكن بسهولة بمساعدة هذه العناصر المستقيمة رسم منحنيات تقريبية للمنحنيات التكاملية للمعادلة (2) شكل -2-



شكل -2- منحنيات الميل المتساوية

أمثلة:

ارسم مجال الاتجاه لكل من المعادلتين التفاضليتين من المرتبة الأولى

التاليتين :-

(3) $y' = xy$ -1

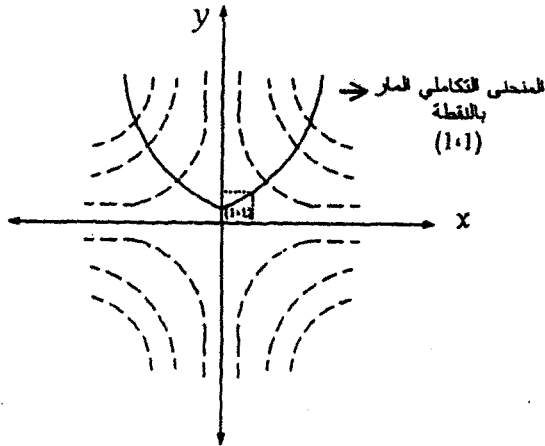
(4) $y' = x$ -2

وارسم المنحنى التكاملي المار بالنقطة (1,1) لكلتا المعادلتين .

الحل :

1- منحنيات الميل المتساوي للمعادلة (3) هي : $x.y = k$

وهي زائديات قائمة بالنسبة لمحوري الإحداثيات

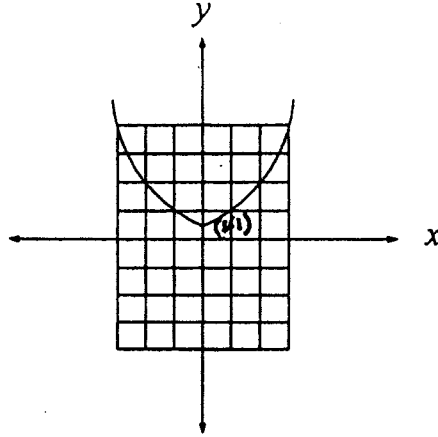


شكل -3- حل المعادلة $y' = xy$

وبين الشكل -3- مجموعة من هذه المنحنيات مع العناصر المستقيمة لكل منحنى ولرسم المنحنى التكاملي المار بالنقطة (1,1) نتحرك من هذه النقطة على منحنى يوازي العناصر المستقيمة لكل من منحنيات الميل المتساوي .

2- بنفس الطريقة فمنحنيات الميل المتساوي للمعادلة (4) هي $x = k$

وهي مستقيمات موازية للمحور y



شكل -4- حل المعادلة $y' = x$

وبين الشكل -4- مجموعة من هذه المنحنيات مع العناصر المستقيمة لكل منحنى كما يوضح أيضا المنحنى التكاملي المار بالنقطة (1,1) .

ملاحظة:

قبل التطرق إلى مختلف الطرق لحل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى نذكر انه قد يكون للمعادلة التفاضلية (1) حل وحيد (Unique Solution) وقد يوجد لها حلول عديدة (Many Solutions) وقد لا يوجد لها أي حل على الإطلاق

مثال -3-

مسألة القيم الحدية التالية :-

$$xy' = 2y \quad \text{و} \quad y(x_0) = y_0$$

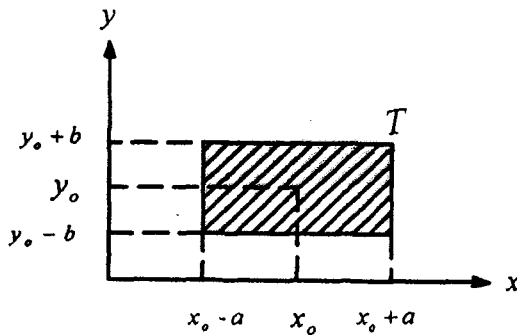
يوجد لها حل وحيد هو $y = x^2$ إذا كانت $y(1) = 1$
 وتوجد لها حلول لانهاية هي $y = Ax^2$ حيث A ثابت اختياري إذا كانت $y(0) = 0$
 ولا يوجد لها حل على الإطلاق إذا كانت $y(0) = 1$

Existence Theorem :

II-2 نظرية وجود الحل

إذا كانت (x_0, y_0) نقطة في المستوى oxy وكانت T منطقة مستطيلة معرفة كمايلي:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, a, b \in \mathbb{R}^+\}$$



شكل 5- المنطقة T

وإذا كانت الدالة $f(x, y)$ في المعادلة (2) وحيدة القيمة ومستمرة عند جميع نقاط T وتحقق الشرط التالي :

$$\forall (x, y) \in T \quad \exists M \geq 0 \quad : \quad |f(x, y)| < M$$

وكانت $h = \min(a, \frac{b}{M})$

فان المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ تقبل حلاً وحيداً على الأقل $y = \phi(x)$ في المجال $|x - x_0| < h$ ويأخذ هذا الحل القيمة y_0 عند $x = x_0$.

Uniqueness Theorem

نظرية أحادية الحل

إذا كانت كل من $f(x, y)$ ؛ $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ دالة وحيدة القيمة ومستمرة في

المنطقة T وتحقق الشرط التالي :

$$\forall (x, y) \in T, \exists M \geq 0 : |f(x, y)| < M$$

$$\forall (x, y) \in T, \exists K \geq 0 : \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| < K$$

وكانت $h = \min(a, \frac{b}{M})$ فإنه يوجد حل وحيد $y = \phi(x)$ يحقق المعادلة التفاضلية

(2) في الفقرة $|x - x_0| < h$ ويحقق الشرط الابتدائي التالي :

$$y(x_0) = \phi(x_0) = y_0$$

ملاحظة :

الجدير بالذكر أن " وجود الحل " لا يعني إمكانية الحصول عليه في صورة مغلقة "Closed Form" أو مضبوطة في جميع الأحوال بل قد يمكن الحصول على الحل بإحدى الطرق التقريبية أو العددية .

II - 3- معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى قابلة لفصل المتغيرين :

Separable First order Equations:

في حالات كثيرة يمكن وضع المعادلة التفاضلية :

$$(5) \quad y' = f(x, y)$$

على الشكل

$$(6) \quad g(y) \frac{dy}{dx} + h(x) = 0$$

أو ما يكافئ ذلك

$$(7) \quad g(y) dy + h(x) dx = 0$$

ويقال عن هذه المعادلة أنها معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرين أو للسهولة معادلة قابلة للفصل (Separable Equations) وذلك لأنه يمكن فصل المتغير x عن المتغير y تماماً . وبمعنى آخر يتم فصل المتغيرين إذا كان معامل تفاضل x دالة من x فقط ومعامل تفاضل y دالة من y فقط .
وبمكاملة الطرفين نحصل على :

$$(8) \quad \int g(y)dy + \int h(x) dx = A$$

حيث A ثابت اختياري واستخدمنا ثابتاً واحداً لأن المعادلة من المرتبة الأولى ؛
وبإجراء التكاملين ينتج :

$$(9) \quad G(y) + H(x) = A$$

ونكون قد حصلنا على حل عام للمعادلة التفاضلية .

ملاحظة :

قد نجد صوراً أخرى للمعادلة التفاضلية القابلة للفصل

مثال -4-

$$(10) \quad g_1(y)f_2(x)dy + g_2(y)f_1(x).dx = 0 \quad -1$$

$$(11) \quad \frac{dy}{dx} + f(x) h(y) = 0 \quad -2$$

حيث يمكن فصل المتغيرات في المعادلة (10) بالضرب في عامل التكميل

$$\frac{1}{f_2(x)g_2(y)} \quad (\text{Integrating Factor})$$

لنحصل على :

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy + \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = 0$$

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy + \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = A \quad \text{ويمكن الآن أن نكمل :}$$

بينما يمكن فصل المتغيرات في المعادلة (11) بالضرب في العامل التكميلي $\frac{1}{h(x)}$ لنحصل على :

$$\frac{1}{h(y)} dy + f(x) dx = 0$$

$$\int \frac{1}{h(y)} dy + \int f(x) dx = A \quad \text{ومنها}$$

مثال -5-

$$\frac{dy}{dx} - xy = 0 \quad \text{حل المعادلة التفاضلية :}$$

الحل :

المعادلة معطاة على شكل المعادلة (11) السابقة بالقسمة على y يمكن

فصل المتغيرين

$$\frac{dy}{y} - x dx = 0$$

$$\ln y - \frac{x^2}{2} = \ln A \quad \text{بالمكاملة}$$

ووضعنا الثابت الاختياري على الصورة $\ln A$ لكونها أكثر ملائمة

$$\ln \frac{y}{A} = \frac{x^2}{2}$$

$$y = Ae^{x^2/2}$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة وهو عبارة عن طائفة منحنيات Gauss الأسية .

4. II معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى تختزل إلى صورة قابلة للفصل:

First-Order Differential Equation Reducible to Separable Form:

1- معادلة تفاضلية متجانسة من المرتبة الأولى:

Homogeneous First-Order Differential Equation:

تعريف :

يقال عن دالة $f(x, y)$ أنها دالة متجانسة من الدرجة n

(Homogeneous Function of degree) إذا كان :

$$(12) \quad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

ويتحقق ذلك إذا كان كل حد من حدود $f(x, y)$ له نفس الدرجة في المتغيرين x, y

$$- \text{ فمثلاً الدالة : } f(x, y) = x^3 - x^2y + 2xy^2 + 7y^3$$

هي دالة متجانسة من الدرجة (3) وذلك لأن :

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^3 - (\lambda x^2)(\lambda y) + 2(\lambda x)(\lambda y)^2 + 7(\lambda y)^3 \\ &= \lambda^3 f(x, y) \end{aligned}$$

- كذلك الدالة $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ هي دالة متجانسة من الدرجة صفر لأن :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x - \lambda y}{\lambda x + \lambda y} = \frac{x - y}{x + y} f(x, y) = \lambda^0 f(x, y)$$

- والدالة $f(x, y) = e^{y/x} + \sin^1(y/x)$ هي أيضاً دالة متجانسة من الدرجة 0 .

- بينما الدالة $f(x, y) = x^3 + \sin n^2 \cos y$ هي دالة غير متجانسة لأن

$$f(\lambda x, \lambda y) \neq \lambda^n f(x, y)$$

- كذلك الدالة $f(x, y) = \frac{x-y+1}{x+y-2}$ ليست متجانسة .

وبناءً على ما تقدم وكامتداد له يقال عن المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى :

$$(13) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

أنها معادلة تفاضلية متجانسة إذا كان كل من الدالتين $M(x, y)$ ، $N(x, y)$ دالة متجانسة من نفس الدرجة .

ويمكن كتابة المعادلة (13) على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

وواضح أن الطرف الأيمن هو دالة متجانسة من الدرجة 0 لأن :

$$\frac{M(\lambda x, \lambda y)}{N(\lambda x, \lambda y)} = \frac{\lambda^n M(x, y)}{\lambda^n N(x, y)} = \lambda^0 \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{M(\lambda x, \lambda y)}{N(\lambda x, \lambda y)} \quad \text{وبالتالي}$$

وبإعطاء λ القيمة الخاصة $\lambda = 1/x$ نحصل على :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(1, y/x)}{N(1, y/x)}$$

$$(14) \quad \frac{dy}{dx} = g(y/x) \quad \text{أي}$$

وهذه صورة أخرى قياسية للمعادلة التفاضلية المتجانسة وفيها المتغير الكسري هو (y/x) وهو نفسه دالة متجانسة من الدرجة 0 .

ويمكن اختزال المعادلة المتجانسة (14) إلى صورة قابلة للفصل باستخدام التعويض التالي :

$$g = y/x$$

$$y = xg \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \frac{dg}{dx} + g \quad \text{حيث}$$

فالمعادلة (14) تكتب على الشكل :

$$\frac{1}{g(g)-g} dg = \frac{1}{x} dx$$

أي

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dg}{dx} + g = g(g)$$

أي انه تم فصل المتغيرين في المعادلة المتجانسة وبمكاملة المعادلة الأخيرة نحصل على g كدالة من x ثم نعوض عن $g = y/x$ لنستعيد العلاقة بين المتغيرين الأصليين x, y .

مثال -6-

$$(x^3, y^3) dx - 2xy^2 dy = 0 \quad \text{حل المعادلة التفاضلية}$$

الحل :

هذه المعادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة 3 باستخدام التعويض $y = xg$ يمكن اختزالها إلى صورة قابلة للفصل

$$y = xg \Rightarrow dy = xdg + gdx$$

$$(x^3 + x^3 g^3) dx - 2x(xg)^2 (xdg + gdx) = 0 \quad \text{أذن}$$

$$x^3[(1+g^3)dx - 2g^2(xdg + gdx)] = 0 \quad \text{أو}$$

$$(1+g^3 - 2g^3)dx - 2g^2xdg = 0 \quad \text{و}$$

$$\frac{1}{x}dx = \frac{2g^2}{1-g^3}dg \quad \text{إذن}$$

$$\text{Lnx} = -\frac{2}{3}\text{Ln}(1-g^3) + \text{Ln} A \quad \text{بالمكامله}$$

$$x^3 = \frac{A}{(1-g^3)^2} \quad \text{أو}$$

وبالتعويض عن $g = y/x$ نحصل على :

$$x^3\left(1 - \frac{y^3}{x^3}\right)^2 = x^3\left[\frac{x^3 - y^3}{x^3}\right]^2 = A$$

$$(x^3 - y^3)^2 = Ax^3 \quad \text{إذن}$$

2- معادلات فيها معاملات التفاضل دالتان خطيتان :

Coefficient Functions are Linear:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad \text{ليكن لدينا المعادلة التفاضلية}$$

إذا كانت كل من دالتي المعاملات M, N دالة خطية في x, y : أي

$$(15) \quad a_1x + b_1y + C_1)dx + (a_2x + b_2y + C_2)dy = 0$$

فأنه يمكن بتعويض خطي مناسب تحويل هذه المعادلة إلى معادلة تفاضلية متجانسة وبالتالي قابلة للفصل . وهناك حالتان ..

الحالة الأولى :

$$a_1x + b_1y + C_1 = 0$$

إذا كان المستقيمان

$$a_2x + b_2y + C_2 = 0$$

يتقطعان وشرط ذلك هو $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$ أي $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

فأنه يمكن تحويل المعادلتين السابقتين إلى معادلتين متجانستين بحذف الحدين المطلقين

C_2, C_1 وذلك بنقل المحورين y, x دون دوران إلى نقطة تقاطع المستقيمين .

لتكن هذه النقطة هي (h, k) أي : $a_1h + b_1k + C_1 = 0$

$$a_2h + b_2k + C_2 = 0$$

ليكن التحويل : $x = X + h$ و $y = Y + k$

فأن : $dx = dX$, $dy = dY$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية (15) ينتج :

$$\underbrace{(a_1h + b_1k + C_1)}_0 + a_1x + b_1y)dx + \underbrace{(a_2h + b_2k + C_2)}_0 + a_2x + b_2y)dy = 0$$

$$(a_1X + b_1Y)dx + (a_2X + b_2Y)dY = 0 \quad \text{ومنه}$$

بالتعويض $Y = gX$ نحصل على : $\frac{dY}{dX} g + X \frac{dg}{dX}$

$$(a_1X + b_1gX)dX + (a_2X + b_2gX)(g dX + X dg) = 0$$

$$[(a_1 + b_1 \vartheta) + (a_2 + b_2 \vartheta) \vartheta] dX \pm (a_2 + b_2 \vartheta) X d\vartheta = 0 \quad \text{أو}$$

$$\frac{dX}{X} = - \frac{a_2 + b_2 \vartheta}{a_1 + (b_1 + a_2) \vartheta + b_2 \vartheta^2} d\vartheta$$

ϑ, X وبتعويض

وقد تم فصل المتغيرين ؛ بالمكاملة نحصل على معادلة من

$$\vartheta = y/x \quad \text{نحصل على معادلة من } y, X$$

مثال -7-

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y' = \frac{x+y-1}{x-y+5}$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x-y+5}$$

لدينا

هذه المعادلة بهذه الصورة ليست متجانسة .

لنأخذ المستقيمين التاليين : $x+y-1=0$, $x-y+5=0$

نلاحظ أن المستقيمين غير متوازيين ونقط التقاطع هي $(-2,3)$

وعلى ذلك نستخدم التحويل التالي : $x = X - 2$, $y = Y + 3$

$$\therefore dx = dX \quad , \quad dy = dY$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(X-2) + (Y+3) - 1}{(X-2) - (Y+3) + 5} = \frac{X+Y}{X-Y}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة يتم فصل المتغيرين بالتعويض $Y = \vartheta X$ ومنه

$$\vartheta + X \frac{d\vartheta}{dX} = \frac{X + \vartheta X}{X - \vartheta X} = \frac{1 + \vartheta}{1 - \vartheta} \Rightarrow X \frac{d\vartheta}{dX} = \frac{1 + \vartheta^2}{1 - \vartheta}$$

$$\frac{1}{X} dX = \frac{1-g}{1+g^2} dg = \left[\frac{1}{1+g^2} - \frac{g}{1+g^2} \right] dg \quad \text{أو}$$

$$\ln X + A_1 = \tan^{-1} g - \ln(1+g^2) \quad \text{أو}$$

$$\ln X^2(1+g^2) + A_2 = 2 \tan^{-1} g \quad \text{أو}$$

وبالتعويض عن $g = \frac{Y}{X}$ نجد :

$$2 \tan^{-1} \frac{Y}{X} = \ln X^2(1 + \frac{Y^2}{X^2}) + A_2 = \ln(X^2 + Y^2) + A_2$$

ثم بالتعويض عن Y, X بدلالة x, y نجد :

$$\therefore 2 \tan^{-1} \left(\frac{y-3}{x+2} \right) - \ln[y^2 + x^2 - 6y + 4x + 13] = A$$

الحالة الثانية :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

إذا كان المستقيمان

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

متوازيين وشرط ذلك هو $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ معنى هذا أن

$$a_2x + b_2y = \ell(a_1x + b_1y)$$

حيث ℓ ثابت .

وباستعمال التحويل $g = a_1x + b_1y$ نحصل على :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1} \left[\frac{dg}{dx} - a_1 \right] \Leftrightarrow \frac{dg}{dx} = a_1 + b_1 \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1} \left[\frac{d\vartheta}{dx} - a_1 \right] = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} = \frac{\vartheta + c_1}{\ell \vartheta + c_2}$$

$$\therefore \frac{d\vartheta}{dx} - a_1 = b_1 \frac{\vartheta + c_1}{\ell \vartheta + c_2} \Rightarrow \frac{d\vartheta}{dx} = a_1 + \frac{b_1(\vartheta + c_1)}{\ell \vartheta + c_2}$$

$$\frac{\ell \vartheta + c_2}{a_1 c_2 + b_1 c_1 + \vartheta(\ell a_1 + b_1)} d\vartheta = dx \quad \text{ومنه}$$

بالمكاملة نحصل على معادلة من ϑ, x ثم بتعويض ϑ نحصل على الحل العام

مثال -8-

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$(x + 2y + 3)dx - (3x + 6y + 7)dy = 0$$

الحل :

$$(x + 2y + 3)dx - (3x + 6y + 7)dy = 0 \quad \text{لدينا}$$

واضح أن المستقيمين $3x + 6y + 7 = 0$, $x + 2y + 3 = 0$ متوازيان

بوضع

$$\vartheta = x + 2y \Rightarrow \frac{d\vartheta}{dx} = 1 + 2 \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[\frac{d\vartheta}{dx} - 1 \right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 3}{3(x + 2y) + 7} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{d\vartheta}{dx} - 1 \right) = \frac{\vartheta + 3}{3\vartheta + 7}$$

وبالترتيب نحصل على فصل المتغيرين :

$$\frac{3\vartheta + 7}{5\vartheta + 13} d\vartheta = dx$$

$$\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{25} \frac{5}{5\vartheta + 13} \right) d\vartheta = dx$$

$$\therefore \frac{3}{5}g - \frac{4}{25} \ln(5g+13) = x + A_1$$

$$15g - 4 \ln(5g+13) = 25x + A_2 \quad \text{أو}$$

وبالتعويض عن $g = x + 2y$ نجد :

$$\text{وهو المطلوب} \quad 5x - 15y + 2 \ln(5x + 10y + B) = A$$

2- معادلات على الصورة :

$$yM(xy)dx + xN(xy)dy = 0$$

ويمكن فصل المتغيرين من خلال التحويل $g = xy$

مثال -9

حل المعادلة التفاضلية :

$$y(xy - 1)dx + x(1 + xy)dy = 0$$

الحل :

$$xy = g \Rightarrow y = \frac{g}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x \frac{dg}{dx} - g}{x^2} \quad \text{نستخدم التعويض :}$$

$$\therefore \frac{g}{x}(g-1) + x(1+g) \left[\frac{x \frac{dg}{dx} - g}{x^2} \right] = 0$$

$$g(g-1) - g(g+1) + x(g+1) \frac{dg}{dx} = 0$$

$$\left(1 + \frac{1}{g}\right) dg = \frac{2}{x} dx$$

وبذلك تم فصل المتغيرين . وبأجراء التكامل :

$$g + \ln g = 2 \ln x - \ln A$$

$$x^2 = A g e^g \Rightarrow x = A y e^{xy} \quad \text{ومنه}$$

3- صور أخرى :

هناك صور أخرى غير قياسية يمكن بتعويضات مناسبة تحويلها إلى صورة قابلة للفصل . وليست هناك قاعدة عامة لمثل هذه التعويضات فكل معادلة لها ظروفها الخاصة التي توجي بالتعويض المناسب وكشأن كل تعويض ؛ فليس أي تعويض يؤدي إلى حل المسألة ؛ بل يحتاج الأمر إلى مهارة وفتنة للوصول إلى التعويض المناسب .

مثال -10-

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y' + 3(3x + y)^2 = 0$$

الحل :

توجي هذه المسألة باستخدام التعويض التالي :

$$g = 3x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{dx} - 3$$

ومنه

بالتعويض في المعادلة المعطاة :

$$\therefore \frac{dg}{dx} - 3 + 3g^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{1-g^2} dg = 3dx$$

$$\therefore \tanh^{-1} g = 3x + c_1$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+g}{1-g} = 3x + \ln A \Rightarrow \frac{g+1}{g-1} = Ae^{6x}$$

وبالتعويض عند g بدلالة y, x :

$$\frac{3x + y + 1}{3x + y - 1} = Ae^{6x}$$

تمارين

-I حل المعادلات التفاضلية التالية باستخدام طريقة فصل المتغيرات :

$$(i) \quad (1-x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

$$(ii) \quad (x^2+1)\frac{dy}{dx} + y^2 + 1 = 0 \quad , \quad y(0) = 1$$

$$(iii) \quad \frac{dy}{dx} = 4 - y \quad : \quad (1^\circ)y(0) = 1 \quad , \quad (2^\circ)y(0) = 5$$

$$(iv) \quad x(y^2 - 1) + y(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(v) \quad e^{2x-y} dx + e^{x+y} dy = 0$$

-II حل المعادلات التفاضلية التالية باستخدام التعويض $y = gx$:

$$(i) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x \sinh(y/x) + 3y \cosh(y/x)}{3x \cdot \cosh(y/x)}$$

$$(ii) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

$$(iii) \quad y^2 + (x^2 + xy)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(iv) \quad y^2 dx + (x^2 - xy)dy = 0$$

$$(v) \quad (x^2 + y^2)(x dx + y dy) - \frac{y}{x}(x dx - y dy) = 0$$

(باستخدام الإحداثيات القطبية)

-III حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x-y+5}$$

$$(x+2y+3)dx - (3x+6y+7)dy = 0$$

$$(6x-2y-3)dx - (2x+2y-1)dy = 0$$

$$(2x+3y+1)dx + (10x+15y+4)dy = 0$$

$$(10x-4y+12)dx - (x+5y+3)dy = 0$$

-IV حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$y(3x^2y^2 - 6xy + 5)dx + x(2x^2y^2 - 3xy)dy = 0$$

$$x^2y^3dx + 5x^2ydy + 6ydx = 0$$

$$y(1-xy+x^2y^2)dx + x(x^2y^2)dx + x(x^2y^2+xy)dy = 0$$

$$(1+2xy-x^2y^2)dx + 2x^2dy = 0 \quad (\text{اضرب بـ } y)$$

$$(1+xy \sin(xy))dx + x^2 \sin(xy)dy = 0 \quad (\text{اضرب بـ } y)$$

-V حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^2}{xy(1-x)} \quad (\text{استخدام الإحداثيات القطبية})$$

$$x^2y'^2 - 6xyy' + 5y^2 - 4x^3y = 0 \quad (\text{بعد إيجاد درجة تجانسها})$$

$$xyy' - 2y^2 - 4x^4 = 0 \quad (\text{بعد إيجاد درجة تجانسها})$$

$$(xy' - 2y)^2 = x^2(2xy' + y) \quad (\text{بعد إيجاد درجة تجانسها})$$

$$x^2y'^2 - 2xyy' + y^2 - 4x^3y = 0 \quad (\text{بعد إيجاد درجة تجانسها})$$

-VI المطلوب إثبات النظرية التالية وفق الخطوات المطلوبة :
نظرية :

$$(1) \quad F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \quad \text{كل معادلة من الشكل}$$

إذا استبدلنا فيها كل x بـ λx وكل y بـ $\lambda^n y$ ولم تتغير المعادلة فالمعادلة تـرد إلى منفصلة المتحولات وتسمى متجانسة من الدرجة n
المطلوب :

1- برهن هذه النظرية باستخدام الخطوات التالية :

أ- عوض في المعادلة (1) عن x بـ λx وعن y بـ $\lambda^n y$ ($\forall \lambda$)

ب- كيف تصبح المعادلة إذا أخذنا $\lambda = 1/x$

ج- بفرض أن $\vartheta = y/x^n$ (2)

$$\text{باشتقاق (2) برهن أن } \frac{y'}{x^{n-1}} = x\vartheta' + n\vartheta$$

د- كيف تصبح المعادلة في هذه الحالة

هـ- استنتج أنها معادلة قابلة لفصل المتغيرات وأن حلها من الشكل :

$$x = \lambda G(\vartheta)$$

وبالرجوع إلى التابع الأصلي نجد :

$$x = \lambda G\left(\frac{y}{x^n}\right)$$

خلاصة : لحل المعادلة (1) نعوض x بـ λx و y بـ $\lambda^n y$ ثم نعين قيمة n بحيث تصبح المعادلة غير تابعة لـ λ ثم نفرض :

$$\vartheta = y/x^n$$

$$y' = nx^{n-1}\vartheta + x^n\vartheta' \quad , \quad y = \vartheta x^n \quad \text{فيكون :}$$

تطبيق : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$xyy' - 2y^2 + 4x^4 = 0$$

الفصل الثالث

المعادلات التفاضلية التامة من المرتبة الأولى

Exact First Order Differential Equations

الفصل الثالث

المعادلات التفاضلية التامة من المرتبة الأولى

Exact First Order Differential Equations

Definitions

III.1 تعاريف

أ- لنكن الدالة $U = f(x, y)$ حيث f دالة مستمرة وقابلة للأشتقاق في مجال ما من x نقول بأن التفاضل الكلي للدالة U هو dU حيث .

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

ومن نظريات التحليل الرياضي في المشتقات الجزئية نعلم بأن :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

ب- نقول عن المقدار : $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ بأنه تفاضل تام إذا كان هناك دالة ما U بحيث أن تفاضلها الكلي هو :

$$dU = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

وبعبارة أخرى نقول عن المقدار :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

بأنه تفاضل تام إذا كانت هناك دالة بحيث يكون :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y)$$

ج- إذا كان المقدار $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ تفاضلاً تاماً فنسمي المعادلة التفاضلية :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

بمعادلة تفاضلية تامة .

III 2 نظرية -1 :-

لتكن المعادلة التفاضلية :

$$(1) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

فالشرط اللازم والكافي لتكون هذه المعادلة تامة هو :

$$(2) \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

1- لزوم الشرط:

الفرض : المعادلة (1) تامة

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

الطلب : البرهان أن :

البرهان: بما أن المعادلة التفاضلية تامة فإن المقدار :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

هو تفاضل تام . أي هناك دالة U بحيث أن :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = M \quad \text{و} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = N$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ولكن

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{ومنه :}$$

-2 كفاية الشرط :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{الفرض : المعادلة التفاضلية (1) تحقق الشرط}$$

الطلب: البرهان بأن المعادلة تامة.

البرهان:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{يجب أن تبتدئ من الفرض وهو أن :}$$

ونبرهن على أن المعادلة (1) هي معادلة تامة. وهذا يعني أنه يجب أن نبرهن بأنه توجد هناك دالة مثل U بحيث يكون:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N$$

بسهولة يمكن إيجاد دالة مثل U تحقق الشرطين الأخيرين ولكن الصعوبة في إيجاد دالة تحقق الشرطين الأخيرين معاً. ومن أجل البرهان نبتدئ بإيجاد U الذي يحقق أحد الشرطين. أي ليكن U الذي يحقق الشرط.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M$$

وبالمكاملة بالنسبة إلى x مع اعتبار y ثابتاً نجد :

$$(3) \quad U = \int M dx + \phi(y)$$

حيث ϕ ثابت التكامل. ولكن بما أننا اعتبرنا y ثابتاً فإن ϕ قد تكون دالة في y فقط وليست دالة في x .

في الحقيقة إذا كانت هذه الدالة المطلوبة فيجب أن تحقق الشرط التالي أي :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = N = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int M \partial x + \phi(y) \right]$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{d\phi}{dy} \quad \text{ولكن}$$

$$(4) \quad \frac{d\phi}{dy} = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M \partial x \quad \text{ومنه نجد}$$

وبما أن ϕ دالة في y فقط فإن $\frac{d\phi}{dy}$ دالة في y فقط وبالتالي مشتقتها بالنسبة للمتغير x معدومة.
إذن :

$$0 = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int M \partial x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int M \partial x \right] \quad \text{أو}$$

ولكن ما داخل القوسين يعني تكاملاً جزئياً بالنسبة للمتغير x مع اعتبار y ثابت ثم اشتقاقه جزئياً بالنسبة للمتغير x مع y ثابت. إذن يمكن كتابة العلاقة الأخيرة على الشكل:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

وهذا محقق بالفرض . إذن هناك دالة U تفاضلياً معيناً بالمعادلة (1) ومعيناً بالعلاقة (3).

أما لإيجادها فيكفي إيجاد $\phi(y)$ وتعويضها بقيمتها في (3) ولكن:

$$\frac{d\phi}{dy} = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M \partial x$$

وبالمكاملة كلياً بالنسبة للمتغير y نجد:

$$\phi(y) = \int \left[N - \int \frac{\partial M}{\partial y} \partial x \right] dy$$

وبالتعويض في U نجد :

$$U = \int M \partial x = \int \left[N - \int \frac{\partial M}{\partial y} \partial x \right] dy$$

وبما أن المعادلة تامة فإن $dU = 0$ وبالتالي $U = A$ هو حل لهذه المعادلة. ومنه

$$(5) \quad \int M \partial x + \int \left[N - \int \frac{\partial M}{\partial y} \partial x \right] dy = A \quad \text{فالحل العام للمعادلة هو:}$$

ملاحظات:-

1- لإيجاد الحل العام للمعادلة قد نتبع طريقة برهان النظرية وقد نتبع طريقة التجميع ونعني بذلك إذا أخذنا المعادلة التفاضلية وفرقناها إلى مجموعة تفاضلات بحيث تكون كل مجموعة تفاضلاً تاماً (أو بحيث نجعل كل مجموعة منها تفاضلاً تاماً) عندها بمكاملة مجموعة التفاضلات التامة نجد الحل العام للمعادلة المعطاة.

2- إذا حققت المعادلة التفاضلية :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

الشرط :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

فالمعادلة تامة .

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{أما إذا كان :}$$

فالمعادلة غير تامة ولا تحل بالطريقة السابقة .

مثال -1-

بين أن المعادلة :

$$(6) \quad (4x - 3y - y \sin x)dx + (\cos x - 3x - \sin y)dy = 0$$

هي معادلة تفاضلية تامة ومن ثم جد حلها العام.

الحل :

في حالتنا هذه :

$$M(x, y) = 4x - 3y - y \sin x$$

$$N(x, y) = \cos x - 3x - \sin y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -3 - \sin x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\sin - 3$$

ومنه فإن $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ مما يعني أن المعادلة المعطاة تامة ويمكن حلها بأكثر من طريقة.

الطريقة الأولى:

بسبب كون المعادلة المعطاة تامة , يمكن كتابتها على الصورة :

$$dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$(7) \quad \therefore \frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y) = 4x - 3y - y \sin x$$

$$(8) \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y) = \cos x - 3x - \sin y$$

بمكاملة (7) جزئياً بالنسبة إلى x نحصل على:

$$(9) \quad U(x, y) = 2x^2 - 3yx + y \cos x + \phi(y)$$

لإيجاد الدالة ϕ نفاضل طرفي (9) جزئياً بالنسبة إلى y لنحصل على :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -3x + \cos x + \frac{d\phi}{dy} = N(x, y) = \cos x - 3x - \sin y$$

$$\frac{d\phi}{dy} = -\sin y \Rightarrow \phi(y) = \cos y \quad \text{إذن :}$$

وعلية :

$$U(x, y) = 2x^2 - 3yx + y \cos x + \cos y$$

وبالتالي فحل المعادلة التفاضلية التامة المعطاة هو :

$$(10) \quad 2x^2 - 3yx + y \cos x + \cos y = A$$

حيث A ثابتاً اختيارياً .

ملاحظة :-

يمكن اتباع نفس الخطوات السابقة ولكن نبدل x و y أي بمكاملة (8) نحصل على:

$$(11) \quad U(x, y) = y \cos x - 3xy + \cos y + \omega(x)$$

ثم نفاضل هذه المعادلة بالنسبة إلى x :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -y \sin x - 3y + \frac{d\omega}{dx}$$

$$M(x, y) = 4x - 3y - y \sin x$$

$$\frac{d\omega}{dx} = 4x \quad \text{إذن}$$

$$\omega(x) = 2x^2 \quad \text{ومنه}$$

$$U(x, y) = y \cos x - 3xy + \cos y + 2x^2 = A \quad \text{أي}$$

وهو نفس التعبير الذي وصلنا إليه.

الطريقة الثانية : طريقة المقارنة :-

نحصل على الدالة $U(x, y)$ مرة من تكامل $M(x, y)$ جزئياً بالنسبة إلى x ومرة من تكامل $N(x, y)$ جزئياً بالنسبة إلى y ثم نقارن المعادلتين الناتجتين:

$$U(x, y) = 2x^2 - 3yx + y \cos x + \phi(y)$$

$$U(x, y) = y \cos x - 3xy + \cos y + \omega(x)$$

وينتج أن :

$$\phi(y) = \cos y \quad , \quad \omega(x) = 2x^2$$

الطريقة الثالثة :

باستخدام الصيغة (5) مباشرة :

$$\begin{aligned}U(x, y) &= \int M(x, y) dx + \int \left[N - \int \frac{\partial M}{\partial y} \partial x \right] dy \\&= (2x^2 - 3yx + y \cos x) + \int \left[\cos x - 3x - \sin y - \frac{\partial}{\partial y} (2x^2 - 3yx + y \cos x) \right] dy \\&= (2x^2 - 3yx + y \cos x) + \int [\cos x - 3x - \sin y + 3z - \cos x] dy \\&= 2x^2 - 3yx + y \cos x + \int -\sin y dy = 2x^2 - 3yx + y \cos x + \cos y\end{aligned}$$

وهو نفس التعبير السابق والذي نساوية بثابت A لنحصل على الحل:

الطريقة الرابعة :

بتطبيق القاعدة التالية :

تكامل $M(x, y)$ بالنسبة إلى x بإعتبار y ثابت ثم نضيف إلى ناتج التكامل، تكامل حدود $N(x, y)$ التي لا تحتوي على x بالنسبة إلى y ثم نساوي المجموع بثابت اختياري لنحصل على الحل.

$$\int (4x - 3y - y \sin x) \partial x + \int -\sin y dy = A$$

ويكون لدينا :

$$2x^2 - 3xy + y \cos x + \cos y = A \quad \text{وهو نفس الحل .}$$

الطريقة الخامسة :

ترتيب حدود المعادلة ليكون كل حد تفاضلاً تاماً :

فالمعادلة المعطاة يمكن كتابتها على الصورة :

$$4x dx - 3(y dx + x dy) - (y \sin x dx - \cos dy) - \sin y dy = 0$$

$$d(2x^2) - 3d(xy) + d(y \cos x) + d(\cos y) = 0 \quad \text{أو}$$

وكل حد الآن هو تفاضل تام وبالمكاملة نجد أن:

$$2x^2 - 3xy + y \cos x + \cos y = A$$

وهو نفس الحل بطبيعة الحال .

وفي الحقيقة فإن طرف الحل هذه ترتبط ببعضها البعض ولا يعني الأمر أن تحل المسألة دوماً بأكثر من طريقة، بل سردنا هذه الطرق كي يتمرس الطالب على التفكير والحدس. وواضح أن أوجز هذه الطرق هي الطريقة الرابعة.

Integrating Factor

3.III عامل التكميل

أ- تعريف :

في أغلب الأحيان تكون المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى التالية :

$$(12) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{معادلة تفاضلية غير تامة أي أن:}$$

ولكن في بعض الحالات يمكن تحويل هذه المعادلة غير التامة إلى معادلة تفاضلية تامة عن طريق الضرب في دالة مناسبة $\rho(x, y)$ تسمى بمعامل التكميل (Integrating Factor) .

إذا كان $\rho(x, y)$ هو عامل التكميل للمعادلة التفاضلية غير التامة السابقة (12) فإن المعادلة التالية :

$$(13) \quad \rho(x, y)M(x, y)dx + \rho(x, y)N(x, y)dy = 0$$

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial y}(\rho M) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho N)$$

ويمكن حل المعادلة (12) باستخدام معلومات الفقرة السابقة ومن اليسير أثبات أن حل المعادلة التامة (13) هو أيضا حل للمعادلة التفاضلية غير التامة (12).

مثال -2-

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية :

$$(15) \quad ydx - xdy = 0$$

هذه المعادلة ليست تامة بصورتها الحالية
ولكننا نعلم أن :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) &= -\frac{ydx - xdy}{x^2} = -\frac{1}{x^2}(ydx - xdy) \\ &= -\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy \end{aligned}$$

ومنذ ذلك نرى أنه بضرب طرفي (15) في المعامل $-\frac{1}{x^2}$ فإنها تتحول إلى معادلة تفاضلية تامة :

$$(16) \quad -\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \right) \quad \text{حيث :}$$

وحل هذه المعادلة هو بالطبع $y/x = A$ أي $y = Ax$

معنى ذلك أن $(-\frac{1}{x^2})$ هو عامل التكميل للمعادلة (15).

$$d \left[\text{Ln} \left(\frac{y}{x} \right) \right] = \frac{1}{y/x} \frac{xdy - ydx}{x^2} \quad \text{كذلك نعلم أن :}$$

$$= -\frac{1}{xy} (ydx - xdy)$$

وعلى ذلك فإن $(-\frac{1}{xy})$ يصلح أيضاً أن يكون عامل تكميل للمعادلة .

وحلها هو ثابت $\text{Ln} \frac{y}{x} = \text{ثابت}$ أي $y = Ax$ وهو نفس الحل بطبيعة الحال .

معنى هذا أنه قد يوجد أكثر من عامل تكميل لنفس المعادلة التفاضلية ولكن ألا يتبادر لذهن الطالب أن ذلك متيسر دائماً.

ب- طرق البحث عن عامل التكميل :

ليست هناك عموماً طريقة واحدة مضمونه لإيجاد عامل التكميل بل كما قلنا تحتاج

عملية إيجاد عامل التكميل إلى فطنه ومهارة.

ووجدنا أن الشرط الذي يجب أن يحققه عامل التكميل هو:

$$\frac{\partial}{\partial y} (\rho M) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho N)$$

$$(17) \quad M \frac{\partial \rho}{\partial y} - N \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \rho = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية جزئية التي يحققها عامل التكميل $\rho(x, y)$ وحلها يعطي عامل التكميل المطلوب. ولكن حل هذه المعادلة التفاضلية الجزئية أصعب من حل المعادلة التفاضلية الأصلية. وسنستعرض حالات خاصة:

$$-1 \text{ إذا كان } \rho(x, y) = c$$

عندها يكون

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

ويكون $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ أي أن المعادلة التفاضلية تامة و منه نقول إذا كانت المعادلة

التفاضلية تامة، فأى عدد ثابت هو عامل تكميل لهذه المعادلة.

$$-2 \text{ إذا كان } \rho = \rho(x)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{dx}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad \text{فندها يكون}$$

فالمعادلة (17) تصبح من الصورة :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = f(x)$$

وكون الطرف الأيسر فرضاً دالة من x فقط يتطلب أن يكون الطرف الأيمن أيضاً دالة من x فقط .

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = f(x) \quad \text{وبالتالي :}$$

$$(18) \quad \ln \rho = \int f(x) dx \Rightarrow \rho = e^{\int f(x) dx}$$

مثال -3-

جد معامل تكميل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dy}{dx} - 2xy + x = 0$$

الحل:

نكتب المعادلة على الصورة القياسية التالية :

$$(x - 2xy)dx + dy = 0$$

$$M(x,y) = x - 2xy \quad , \quad N(x,y) = 1 \quad \text{أي}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad \text{ومنه}$$

وهذا يعني أن المعادلة التفاضلية غير تامة.

ونلاحظ أن

$$\frac{1}{N} \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] = -2x = f(x)$$

وعلى ذلك يكون معامل التكميل من الصورة : $\rho = \rho(x)$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = -2x \Rightarrow \rho(x) = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}$$

وبضرب المعادلة في $\rho(x)$ تصبح تامة ويمكن حلها بإحدى الطرق المذكورة سابقاً.

$$y = \frac{1}{2} + A.e^{x^2} \quad : \quad \text{ويكون الحل من الصورة}$$

3- إذا كان $\rho = \rho(y)$.

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{d\rho}{dy} \quad \text{عندها يكون}$$

ويصبح الشرط على الشكل التالي:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dy} = -\frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = g(y)$$

وكون الطرف الأيسر دالة من y فقط يتطلب أن يكون الطرف الأيمن أيضا دالة من y فقط.

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dy} = g(y) \quad \text{وبالتالي :}$$

أو

$$(19) \quad \ln \rho = \int g(y) dy \Rightarrow \rho(y) = e^{\int g(y) dy}$$

مثال -4-

جد عامل تكميل المعادلة التفاضلية التالية :

$$2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$$

الحل :

هذه المعادلة من الصورة القياسية : $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$$M(x,y) = 2xy \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad \text{أي :}$$

$$N(x,y) = y^2 - 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -6x \quad \text{و :}$$

إذن المعادلة غير تامة :

$$\frac{1}{M} \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] = \frac{4}{y} = g(y) \quad \text{ونلاحظ أن :}$$

إذن : $\rho = \rho(y)$ ومنه:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dy} = -\frac{4}{y} \Rightarrow \rho(y) = 1/y^4$$

وبضرب المعادلة المعطاة $\rho = \rho(y)$ تصبح تامة ويكون حلها من الشكل :

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = A$$

4- إذا كان عامل التكميل من الشكل $\rho = \rho(x,y)$

نأخذ $t = x.y$ فيكون:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = y \frac{d\rho}{dt}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = x \frac{d\rho}{dt}$$

ويصبح الشرط :

$$(20) \quad \frac{d\rho/dt}{\rho} = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{yN - xM}$$

إذا عوضنا y بعبارتها $y = \frac{t}{x}$ في الطرف الثاني وكان الناتج أن الطرف الثاني

للشرط السابق غير متعلق بالمتغير x فيكون عامل التكميل من الشكل المفروض والحصول عليه سهل.

وذلك ينتج من مكاملة المعادلة (20) وأخذ أحد الحلول الخاصة. أما إذا كان الطرف الثاني تابعاً للمتغير x أيضاً فالفرض خاطئ ويجب أن نفتش عن شكل آخر لعامل التكميل.

مثال -5-

جد عامل تكميل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y(1+xy)dx + x(1-xy)dy = 0$$

الحل :

لدينا في هذه الحالة :

$$M(x, y) = y(1 + xy) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy$$

$$N(x, y) = x(1 - xy) \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 1 - 2xy$$

ومنه يصبح الشرط (20) من الصورة :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{2}{xy} = -\frac{2}{t} \Rightarrow \rho(t) = t^{-2}$$

$$\rho(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2} \quad \text{أي :}$$

وبضرب المعادلة التفاضلية المعطاة في عاملها التكميلي تصبح تامة ويكون حلها من الشكل :

$$\ln \frac{x}{y} - \frac{1}{xy} = A \quad , \quad \text{ثابت اختياري } A =$$

$$-5 \text{ - إذا كان } \rho = \rho(x + y)$$

في هذه الحالة نضع $t = x + y$ وعندها يكون :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{d\rho}{dt} \quad , \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{d\rho}{dt}$$

ويصبح الشرط :

$$(21) \quad \frac{d\rho/dt}{\rho} = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N - M}$$

إذ عوضنا في الطرف الثاني في المعادلة السابقة كل x بالمتغير $(t - y)$ وكان الناتج في الطرف الثاني دالة المتغير t فقط فيكون عامل التكميل من الشكل المفروض . والحصول عليه سهل وذلك يكون بالمكاملة وإلا الفرض خاطئ ويجب أن نفتش عن عامل تكميل من شكل آخر .

مثال -6-

جد عامل تكميل المعادلات التفاضلية التالية:

$$(x^2 - y^2 + 2x)dx + (x^2 - y^2 - 2y)dy = 0$$

الحل :

واضح أن المعادلة التفاضلية المعطاة غير تامة لأن :

$$M(x, y) = x^2 - y^2 + 2x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -2y$$

$$N(x, y) = x^2 - y^2 + 2y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

فلنفتش عن عامل تكميل من الشكل $\rho = \rho(t)$ حيث $t = x + y$

فيصبح الشرط (21) من الصورة :

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} = \frac{-2(x+y)}{-2(x+y)} = 1 \Rightarrow \rho = e' = e^{x+y}$$

وبضرب المعادلة التفاضلية في معاملها التكميلي تصبح تامة ويكون حلها من الصورة:

$$e^{(x+y)}(x^2 - y^2) = A \quad : \quad A = \text{ثابت اختياري}$$

6- إذا كانت المعادلة $M(x, y)dx + N(x, y) = 0$ متجانسة فإن عامل التكميل

$$(22) \quad \rho(x, y) = \frac{1}{xM + yN} \quad \text{يعطي بالعلاقة :}$$

ويمكن إثبات هذا باستعمال نظرية أويلر Euler للدوال المتجانسة التي تنص على أن :

إذا كانت $f(x, y)$ دالة متجانسة من الدرجة n فإن :

$$(23) \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

ونترك إثبات ذلك للقارئ ..

مثال -7-

جد عامل تكميل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y^2 dx + (x^2 - y^2 - xy) dy = 0$$

الحل:

$$M(x, y) = y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2y$$

لدينا :

$$N(x, y) = x^2 - xy - y^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2x - y$$

و

إذن المعادلة غير تامة، ولكن نلاحظ أن المعادلة المعطاة هي معادلة متجانسة. وعلى ذلك يكون معامل التكميل من الصورة :

$$\rho(x, y) = \frac{1}{xM + yN} = \frac{1}{y(x^2 - y^2)}$$

وبضربها في المعادلة التفاضلية تصبح تامة ويكون حلها من الصورة :

$$y^2(x - y) = A(x + y)$$

حيث A ثابت اختياري .

7- إذا كان :

$$(24) \quad M(x, y) = yf_1(xy) \quad , \quad N(x, y) = xf_2(xy)$$

فإن عامل التكميل يكون من الصورة :

$$(25) \quad \rho(x, y) = \frac{1}{xM - yN}$$

بشرط أن لا يندم المقدار $xM - yN$

ولإثبات ذلك نلاحظ أنه كي تكون المعادلة التفاضلية :

$$(26) \quad \rho(x, y)Mdx + \rho(x, y)Ndy = 0$$

. معادلة تامة يجب أن يكون:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho M) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho N)$$

ولكن :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(\rho M) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{M}{xM - yN} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{f_1(xy)}{x(f_1(xy) - f_2(xy))} \right] \\ &= \frac{f_1 \frac{\partial f_2}{\partial y} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y}}{x(f_1 - f_2)^2} \end{aligned}$$

بالمثل :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho N) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{N}{xM - yN} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{f_2}{y(f_1 - f_2)} \right]$$

$$= \frac{f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x}}{y(f_1 - f_2)^2}$$

وبما أن $x \frac{\partial f(xy)}{\partial y} = y \frac{\partial f(xy)}{\partial x}$ فإنه ينتج أن :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{M}{xM - yN} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{N}{xM - yN} \right]$$

وهذا هو المطلوب .

أما إذا أعدم المقدار $xM - yN$ فهذا يعني أن :

$$xM = yN$$

وتصبح المعادلة (26) من الصورة : $ydx + xdy = 0$

وحلها هو :

$$xy = A$$

مثال -8-

جد عامل تكميل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y(2xy+1)dx + x(1+2xy-x^3y^3)dy = 0$$

الحل:

هذه المعادلة غير تامة. ولكن نلاحظ أن :

$$M = y(2xy+1) = yf_1(xy)$$

$$N = x(1+2xy-x^3y^3) = xf_2(xy)$$

و

وبالتالي معامل التكميل هو من الصورة (25) أي:

$$\rho(x, y) = \frac{1}{xM - yN} = \frac{1}{x^4 y^4}$$

وبضرب المعادلة في عامل التكميل تصبح تامة . ويكون حلها من الصورة :

$$y = Ae^{\frac{3xy+1}{3x^3y^3}}$$

حيث A ثابت اختياري .

8- بصورة عامة نفرض $\rho = \rho(t)$ حيث $t = f(x, y)$ و f دالة مفروضة ويكون عندئذ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{d\rho}{dt}$$

$$(22) \quad \frac{d\rho/dt}{\rho} = \frac{\partial M/\partial x - \partial N/\partial y}{N \frac{\partial t}{\partial x} - M \frac{\partial t}{\partial y}} \quad \text{ويصبح الشرط :}$$

إذا عوضنا كل y بقيمتها المستخرجة من التابع $t = f(x, y)$ كان الطرف الثاني للشرط تابعا فقط للمتغير t فيكون كامل التكميل من الشكل المفروض والحصول عليه سهل . وإلا يجب تغيير شكل الدالة f .

وفيما يلي جدول لبعض مجموعات حدود وعامل التكميل الذي يحول كل مجموعة إلى تفاضل تام.

التفاضل التام	عامل التكميل	مجموعة الحدود
$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d(y/x)$	$-1/x^2$	$ydx - xdy$
$\frac{ydx - xdy}{y^2} = d(x/y)$	$1/y^2$	$ydx - xdy$
$\frac{xdy - ydx}{xy} = d(\ln y/x)$	$-1/xy$	$ydx - xdy$
$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d(\tan^{-1} y/x)$	$-\frac{1}{x^2 + y^2}$	$ydx - xdy$
$\frac{ydx + xdy}{xy} = d(\ln xy)$	$\frac{1}{x y}$	$ydx + xdy$
$\frac{ydx + xdy}{(xy)^n} = d\left[\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right]$	$\frac{1}{(xy)^n} \quad n > 1$	$ydx + xdy$
$\frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2} = d\left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)\right]$	$\frac{1}{x^2 + y^2}$	$ydx + xdy$
$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = d\left[\frac{-1}{2(n-1)(x^2 + y^2)^{n-1}}\right]$	$\frac{1}{(x^2 + y^2)^n} \quad n$	$ydx + xdy$
$\frac{2xydx - x^2dy}{y^2} = d\left(\frac{x^2}{y}\right)$	$1/y^2$	$2xydx - x^2dy$

جدول I - عوامل التكميل لبعض مجموعات الحدود.

تمارين

I- هل المعادلات التفاضلية التالية تامة أو غير تامة، إذا كانت تامة - جد الحل - :

$$1/ \quad y' = \frac{y^2 e^{-xy^2} + x^2}{y^2 - 2xye^{-xy^2}}$$

$$2/ \quad y' = \frac{1 - 2xy^2}{2xy^2 + y^2}$$

$$3/ \quad (3x^2 y^2 + \frac{1}{x})dx + (2x^3 y - 1)dy = 0$$

$$4/ \quad (2x + 4y) + (2x - 2y)y' = 0$$

$$5/ \quad (2x \sin x^2 + 3 \cos y)dx - 3x \sin y dy = 0$$

$$6/ \quad y' = -\frac{ax - by}{bx - cy}$$

$$7/ \quad (x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$$

$$8/ \quad (e^x \sin y + 3y)dx - (3x - e^x \sin y)dy = 0$$

$$9/ \quad (4x^3 y^2 - 2xy)dx + (3x^4 y^2 - x^2)dy = 0$$

$$10/ \quad (3e^{3x} y - 2x)dx + e^{3x} dy = 0$$

$$11/ \quad (\cos y + y \cos x)dx + (\sin x - x \sin y)dy = 0$$

$$12/ \quad (x \ln y + xy)dx + (y \ln x + xy)dy = 0 \quad , \quad x > 0 \quad , \quad y > 0$$

-II جد عامل تكميل كل من المعادلات التفاضلية التالية ، ثم جد حلها ؟

1/ $y' - 2xy + x = 0$

2/ $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$

3/ $(x^3 + xy^4)dx + 2y^3dy = 0$

4/ $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$

5/ $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$

6/ $y' = e^{3x} + y - 1$

7/ $(1 - 2xy^2)dx + 2xy(1 - x - xy^2)dy = 0$

8/ $dx + \left(\frac{x}{y} - \sin y\right)dy = 0$

9/ $ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$

10/ $e^x dx + (e^x \tan^{-1} y + 2y + \cos^{-1} y)dy = 0$

11/ $y(1 + xy)dx + x(1 - xy)dy = 0$

12/ $y' = \frac{y^2}{y^2 + xy - x^2}$

13/ $y' = \frac{2xy^2 + y}{x^4 y^2 - 2x^2 y - x}$

14/ $(3x + \frac{6}{y}) + (\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x})y' = 0$

الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى

Linear First Order Differential
Equations

الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى

Linear First - Order Differential Equations

Linear Differential Equation

1.IV المعادلة التفاضلية الخطية

سبق أن عرفنا المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n وبهنا هنا المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى والتي تكتب على الصورة :-

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

حيث $P(x)$ و $Q(x)$ دالتان في المتغير n فقط .

وهذه المعادلة ليست علي وجه العموم معادلة تفاضلية تامة ولكن يمكن إيجاد عامل تكميل يحولها إلى معادلة تفاضلية تامة ونقول بانها خطية وبدون طرف ثان إذا كان $Q(x) = 0$ أي أن شكلها :-

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

وتسمى الدالة $Q(x)$ بالطرف الثاني للمعادلة .

ونلاحظ أن هذه المعادلة (2) أنها منفصلة المتحولات وتكتب على الشكل :

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0$$

$$y = Ae^{-\int P(x)dx} \quad \text{- وتكملها هو :-}$$

IV 2 نظرية 1:-

لكل معادلة تفاضلية خطية من الشكل (1) عامل تكميل دالة من (x) فقط على الشكل التالي :

$$(3) \quad \rho(x) = e^{\int P(x) dx}$$

البرهان :-

لنكتب المعادلة (1) على الشكل التفاضلي التالي :-

$$(4) \quad [p(x)y - Q(x)]dx + dy = 0$$

$$M(x, y) = P(x)y - Q(x) \quad , \quad N = 1 \quad \text{حيث}$$

وبما أن $P(x) \neq 0$ فالمعادلة (4) غير تامة لأن

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x) \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial y} \quad \text{أذن}$$

ومن جهة أخرى فان :-

$$\frac{1}{N} \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] = P(x)$$

بناء على الفقرة III - 3 - ب - 2 - فان عامل التكميل e يكون دالة من x فقط ويجب أن يحقق الشرط :

$$\frac{d\rho}{\rho} = P(x) dx$$

$$\rho(x) = e^{\int P(x) dx} \quad \text{ومنه فان}$$

وهو عامل تكميل للمعادلة (4) .

3.IV نظرية 2:

إن حل كل معادلة تفاضلية خطية ومن الرتبة الأولى هو دالة خطية بالنسبة

لثابت اختياري . والعكس صحيح :-

البرهان :-

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{لزوم الشرط :- الفرض :-}$$

$$y = Cf_1 + f_2 \quad \text{الطلب : حلها من الشكل :-}$$

بضرب طرفي المعادلة في المعادلة في عامل التكميل $\rho(x)$ نحصل على :-

$$\rho y' + \rho P(x)y = \rho Q(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\rho y) + y\left(\rho P - \frac{d\rho}{dx}\right) = \rho Q \quad \text{والتي يمكن كتابتها على الشكل :}$$

$$\frac{d\rho}{dx} = P(n)\rho \quad \text{وبما أن :}$$

$$\frac{d}{dx}(\rho y) = \rho Q \quad \text{فان :}$$

$$y = \rho(x)Q(x)dx + A \quad \text{بالمكاملة نحصل على :-}$$

$$y = \frac{1}{\mu} \left[\int \rho(x)Q(x)dx + A \right] \quad \text{أو}$$

وبفك الأقواس وبتعويض عن \int يكون الحل من الشكل :-

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + Ae^{-\int P(x)dx}$$

ونلاحظ أن الطرف الثاني عبارة عن مجموع دالتين معلومتين . إحداهما مضروبة بثابت اختياري A أي من الشكل :

$$y = Af_1(x) + f_2(x) \quad (x)$$

وهو المطلوب .

$$y = Af_1(x) + f_2(x) \quad \text{الفرض لدينا الدالة}$$

حيث A ثابت اختياري f_2, f_1 دالتان معلومتان
الطلب : إن المعادلة التفاضلية لهذه الدالة ومن المرتبة الأولى
بالاشتقاق بالنسبة إلى (x) نجد :

$$y' = Af_1'(x) + f_2'(x)$$

$$\frac{y' - f_2'}{y - f_2} = \frac{f_1'}{f_2} \quad \text{ومن الأولى والثانية نجد :}$$

$$y' - \frac{f_1'}{f_1} y = \frac{f_1' f_2 - f_2 f_1'}{f_1} \quad \text{وبالترتيب نجد :}$$

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{وهي توضح على الشكل الآتي :}$$

وهو المطلوب .

نتيجة -1-

مما سبق نخلص إلى أن حل المعادلة التفاضلية الخطية (1) من الشكل :-

$$(6) \quad y = Ae^{\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx$$

نتيجة -2-

إذا كانت المعادلة التفاضلية (1) بدون طرف أي لا تحوي على $Q(x)$ فعندها نقول بان $Q(x)=0$ والحل ينتج من الحل العام بوضع $Q(x)=0$ فنجد حلها :

$$y = Ae^{-\int P(x)dx} = Af_1$$

أما إذا وضعنا $A=0$ في الحل العام حلا خاصا للمعادلة (1) مع طرف وهو :-

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx = f_2$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية مع طرف هو مجموع حلين أولهما الحل العام لمعادلة بدون طرف وهو Af_1 الدالة المتممة (Complementary Function) وثانيهما الحل الخاص للمعادلة مع طرف وهو f_2 أي :

$$y = Af_1 + f_2$$

ملاحظة :-

هناك طريقة أخرى لحل المعادلات (1) أي :-

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

تدعى طريقة تحويل الثابت ونطبقها كما يلي :-

نأخذ المعادلة المعطاة ونضع الطرف الثاني صفرا فينتج :

$$(7) \quad y' + P(x)y = 0$$

$$(8) \quad y = A_1 e^{-\int P(x)dx} \quad \text{وحلها كما وجدنا هو}$$

حيث A ثابت اختياري إلا أن نجعل A دالة للمتغير x بحيث تكون الدالة المعينة بالعلاقة (7) حلاً للمعادلة مع طرف . وحتى تكون هذه الدالة حلاً للمعادلة (1) يجب أن تحقق المعادلة لذلك نعوض (8) في (7) مع العلم بأن A دالة من x فنجد من أن :-

$$y' = A_1'(x)e^{-\int P(x)dx} - A_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$A_1'e^{-\int P(x)dx} - A_1'le^{-\int P(x)dx} + A_1Pe^{-\int P(x)dx} = Q(x) \quad \text{نجد (1) بالتعويض في}$$

$$A_1' = e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x) \quad \text{ومنه}$$

$$A_1 = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + A \quad \text{بالمكاملة نجد :}$$

وبتعويض A بقيمته في (8) نحصل على الحل العام التالي :-

$$y = Ae^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx$$

مثال -1- : حل المعادلة التفاضلية : $xy' - 2y - x^3e^x = 0$

الحل :- نضع هذه المعادلة على الصورة التالية :

$$y' + \left(-\frac{2}{x}\right)y = x^2e^x$$

وهي معادلة تفاضلية خطية فيها $P(x) = -2/x$ ، $Q(x) = x^2 \cdot e^x$ وعامل التكميل يكون من الشكل :

$$\rho = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}$$

ويكون الحل من الشكل التالي : $\frac{1}{x^2} y = \int x^2 e^x \cdot \frac{1}{x^2} dx + A = e^x + A$

$$أو \quad y = x^2 \cdot e^x + Ax^2$$

IV-4. المعادلات التي يمكن إرجاعها إلى معادلات خطية :-

هناك كثير من المعادلات التي يمكن إرجاعها إلى معادلات خطية وذلك إما بتغيير الدالة أو تغيير المتحول أو تغيير كليهما معاً إلى دالة متحول جديدين ونذكر منها على سبيل المثال المعادلة التالية :

$$(9) \quad \frac{1}{y'} + P(y)x = Q(y)$$

التي نكتب على الشكل :- $\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$

وهي خطية بالنسبة للدالة x والمتحول y وهناك بعض الأنواع الأخرى.

IV-4.1. معادلة بيرنولي التفاضلية (Bernoulli's Differeential Equation)

تعريفها وشكلها العام :-

$$(10) \quad y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad \text{كل معادلة من الشكل}$$

تسمى معادلة بيرنولي حيث n ثابت معلوم ومن أجل $n=1$ نحصل على الشكل الخاص لها وهو المعادلة الخطية بدون طرف ، ومن أجل $n=0$ نجد المعادلة الخطية مع طرف وقد سبق دراسة هاتين الحالتين ، أما في حالة $n \neq 0,1$ فإن المعادلة غير خطية ولدينا النظرية التالية :

نظرية -3-

أن معادلة بيرنولي (10) ترد إلى خطية من المرتبة الأولى بأجراء تغيير في الدالة من y إلى g حيث :

$$(11) \quad g = \frac{1}{y^{n-1}}$$

البرهان :-

لنقسم المعادلة (10) على y^n فنجد :-

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{P(n)}{y^{n-1}} = Q(n)$$

$$g = \frac{1}{y^{n-1}} \quad \text{وبفرض أن :}$$

$$g' = \frac{1-n}{y^n} \cdot y' \quad \text{ويكون :}$$

$$\frac{y'}{y^n} = \frac{g'}{1-n} \quad \text{ومنه :}$$

بالتعويض في المعادلة نجد :-

$$g' + (1-n)P(x)g = (1-n)Q(x)$$

التي هي من الشكل :

$$g' + P_1(x)g = Q(x)$$

وهي معادلة خطية بالنسبة للدالة g والمتحول x وبحلها نجد :-

$$g = Af_1(x) + f_2(x)$$

والرجوع للمتحول الأصلي نجد :

$$y = [Af_1(x) + f_2(x)]^{1/n}$$

مثال -2 حل المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = xy^3$$

الحل :-

هذه معادلة بيرنولي التفاضلية حيث $n = 3$ بالقسمة على y^3

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + 2xy^{-2} = x$$

$$\frac{1}{-2} \frac{d}{dx} (y^{-2}) + 2x(y^{-2}) = x$$

بوضع $\rho = y^{-2}$ تتحول هذه المعادلة إلى :-

$$\frac{d\rho}{dx} - 4x\rho = -2x$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية عاملها التكميلي :

$$\rho = e^{\int -4x dx} = e^{-2x^2}$$

$$e^{-2x^2} \rho = \int (-2x)e^{-2x^2} dx + A = \frac{1}{2} \int e^{2x^2} d(-2x^2) + A$$

$$\rho = \frac{1}{2} + Ae^{2x^2}$$

$$g = y^{-2}$$

بالتعويض عن

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{2} + Ae^{2x^2}$$

$$y^2 = \frac{2}{1 + Be^{2x^2}}$$

حيث $B = 2A$ ثابت اختياري .

IV- 2.4. معادلة ريكاتي التفاضلية : (Riccati's Differential Equation)

تعريفها :-

كل معادلة من الشكل :-

$$(12) \quad y' + P(x)y^2 + R(x)y + Q(x) = 0$$

تسمى معادلة ريكاتي . واحد أشكالها الخاصة هو عندما يكون $Q(x) = 0$ حيث تصبح معادلة بيرنولي التي درسناها سابقا .
أو عندما يكون $P(x) = 0$ حيث تصبح معادلة خطية ويمكن تحويلها إلى خطية من المرتبة الثانية التي ترجى دراستها الآن .

تمارين

-I- حل المعادلات التفاضلية التالية:

$$\sin x \cdot \frac{dy}{dx} = y \cos x = \sin x - x \cos x - 1 \quad -1$$

$$\frac{dy}{dx} + y = \sin x, \quad y(\pi) = 1 \quad -2$$

$$(y - x \sin x^2) dx + x dy = 0 \quad -3$$

$$(y - 2xy - x^2) dx + x^2 dy \quad -4$$

$$y' + \frac{1}{x} y = \sin x \quad -5$$

$$x^2 y' + 3xy = \frac{1}{x} \sin x \quad -6$$

$$xy' + 2y = x^2 - x + 1, \quad y(1) = 1/2 \quad -7$$

$$xy' + y = e^x, \quad y(1) = 1 \quad -8$$

$$y' + \frac{1}{x \ln x} y = 1/2 \quad -9$$

-II- حل المعادلات التفاضلية التالية:

$$\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = \cos y (1 - x \cos y) \quad -1$$

$$y' + xy = 6x\sqrt{y}, \quad y(10) = 1 \quad -2$$

$$y' + 2xy + xy^4 = 0 \quad -3$$

$$(x - y) dx + x dy + x(x dy + x dy) = 0 \quad -4$$

$$ydx - (x + 2y^2)dy = 0 \quad -5$$

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad -6$$

$$\left(2xy - \frac{-xe^{-x^2}}{y^3}\right)dx + dy = 0 \quad -7$$

$$xy' + y = y^2 \ln x \quad -8$$

III - حول معادلة ريكاتي إلى معادلة خطية من المرتبة الثانية :

$$y' + p(x)y + R(x)y^2 + Q(x) = 0$$

بإجراء التغيير التالي :- $\underline{Ry} = \frac{J'}{J}$

IV- برهن أنه إذا كان f_1 حلاً خاصاً للمعادلة التالية :

$$y' + p(x)y = \mathfrak{R}_1$$

و f_2 حلاً خاصاً للمعادلة التالية:

$$y' + p(x)y = \mathfrak{R}_2$$

فبعدها f ، حيث $f = f_1 + f_2$ ، هو حل خاص للمعادلة :

$$y' + p(x)y = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$$

ماذا نستنتج من ذلك :

V- حول المعادلة التالية إلى معادلة بيرنولي :

$$p(y/x)dx + q(y/x)dy + x^n d(y/x) = 0$$

باستخدام التعويض $\mathfrak{G} = y/x$.

الفصل الخامس

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى ومن الدرجة العليا

Differential equations of first order and higher degree

الفصل الخامس

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى ومن الدرجة العليا

Differential equations of first order and higher degree

Definition

v. 1 - تعريف :-

سبق أن عرفنا درجة (degree) المعادلات التفاضلية بأنها قوة أعلى مشتقة داخلية في هذه المعادلة بعد وضعها علي صورة قياسية وصحيحة . ويهمننا في هذا الفصل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى أي التي تحتوي علي المشتقة الأولى فقط لكن مرفوعة لقوة صحيحة اكبر من الواحد أي التي على الصورة

$$(1) \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

أو

$$(2) \quad F(x, y, p) = 0 \quad : \quad p = \frac{dy}{dx}$$

وقوة P هي درجة المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والصورة العامة للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة $n > 1$ هي :-

$$(3) \quad F_n(x, y)p^n + F_{n-1}(x, y)p^{n-1} + \dots + F_1(x, y)p + F_0(x, y) = 0$$

ولا توجد طريقة أو طرق عامة لحل مثل هذه المعادلات ؛ ومع ذلك يمكن حل بعض هذه المعادلات عن طريق اختزالها إلي معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى ومن الدرجة الأولى تحل بإحدى الطرق المقلدة أو العددية ومن الحالات القابلة للحل نذكر ما يلي :-

Equation Solvable For P :

2.V معادلات تحل في P :

باعتبار أن المعادلة (3) هي كثيرة حدود من الدرجة n في P ؛ فإنه قد يمكن تحليلها إلى n من العوامل الخطية حسب نظرية الجبر لتصبح على الصورة :-

$$(4) \quad [p - f_1(x, y)][p - f_2(x, y)] \dots [p - f_n(x, y)] = 0$$

مما يعني انعدام كل عامل على حدة وبالتالي :-

$$(5) \quad P = \frac{dy}{dx} = f_1(x, y) \Rightarrow \text{حلها} \quad g_1(x, y, A) = 0$$

$$(6) \quad P = \frac{dy}{dx} = f_2(x, y) \Rightarrow \text{حلها} \quad g_2(x, y, A) = 0$$

$$(7) \quad P = \frac{dy}{dx} = f_n(x, y) \Rightarrow \text{حلها} \quad g_n(x, y, A) = 0$$

وذلك باستخدام أي من الطرق السابقة لحل المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى ويكون الحل العام للمعادلة (3) هو حاصل ضرب الحلول الفردية أي :

$$(8) \quad g_1(x, y, A)g_2(x, y, A) \dots g_n(x, y, A) = 0$$

لأن أي حل خاص للمعادلة التفاضلية يعدم أحد أقواس الحل العام وبالتالي جميع الحلول للمعادلة التفاضلية موجودة في الحل العام .

ملاحظة :-

لقد استخدمنا نفس الثابت الاختياري A في الحلول الفردية (5) وذلك لأن المعادلة التفاضلية (3) من المرتبة الأولى وبالتالي فأساسها (8) تحتوي على ثابت اختياري واحد .

مثال -1- حل المعادلة التفاضلية :-

$$\underline{\underline{P^2 + (x + y - 10)p + 2(5 - y)(y - x) = 0, P = \frac{dy}{dx}}}$$

الحل : المعادلة المعطاة هي معادلة جبرية من الدرجة الثانية في p حلها هو :

$$P = \frac{1}{2} \left\{ (x + y - 10) \pm \left[(x + y - 10)^2 - 4 \times 2(5 - y)(y - x) \right]^{1/2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (x + y - 10) \pm \left[x^2 + y^2 - 6xy + 20x - 60y + 100 \right]^{1/2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (x + y - 10) \pm \left[(x - 3y + 10)^2 \right]^{1/2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ -(x + y - 10) \pm (x - 3y + 10) \right\}$$

$$P = \begin{cases} \frac{1}{2} [-(x + y - 10) + (x - 3y + 10)] = 2(5 - y) \\ \frac{1}{2} [-(x + y - 10) - (x - 3y + 10)] = y - x \end{cases}$$

المعادلة : $P = 2(5 - y)$

هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى حلها : $y(x) = 5 + Ae^{-2x}$

والمعادلة : $P = y - x$

هي أيضاً معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى حلها : $y(x) = 1 + x + Ae^x$

وعلي ذلك فالحل العام للمعادلة المعطاة هو حاصل ضرب الحلين الفرديين بعد وضعهما على الصورة الصفرية :

$$(y - 5 - Ae^{-2x})(y - 1 - x - Ae^x) = 0$$

والحل العام يحتوي علي ثابت اختياري واحد A كما هو متوقع .

Equations solvable For y :

3. y معادلات تحل في y

وهي التي على الصورة :

$$(9) \quad y = f(x, p) : P = \frac{dy}{dx}$$

بمفاضلة الطرفين بالنسبة إلى x وملاحظة أن $P = \frac{dy}{dx}$ نجد :-

$$\frac{dy}{dx} = P = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx} + \left(\frac{1}{-\partial f / \partial x} \right) P = \frac{\partial f / \partial x}{-\partial f / \partial p} \quad \text{أو}$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى في P متغيرها المستقل x وبالتالي بفرض إمكانية الحل يمكن وضع حلها العام على الصورة :

$$(10) \quad x = g(p, A)$$

حيث A ثابت اختياري وإذا أمكن حذف P بين (9) و(10) نحصل على علاقة بين x, y بدلالة ثابت اختياري A وهذه العلاقة هي الأساسية المطلوبة للمعادلة (9) ، على أنه يمكن كتابة المعادلتين (9) و(10) على الصورة :

$$x = g(p, A)$$

$$y = f[g(p, A), p]$$

وهما معادلتان بارامتريتان في P

مثال -2-

$$y = x + \ln p \quad : \quad p = \frac{dy}{dx} \quad : \quad \text{حل المعادلة}$$

الحل : بمفاضلة الطرفين بالنسبة إلى x نجد :

$$\frac{dy}{dx} = p = 1 + \frac{1}{p} \frac{dp}{dx}$$

$$dx = \frac{1}{p(p-1)} dp = \left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right] dp \quad \text{أن}$$

$$x = \ln(p-1) - \ln p + A = \ln \frac{p-1}{p} + A \quad \text{ومنه}$$

وعلى ذلك يكون الحل العام البارامتري للمعادلة المعطاة بدلالة البارامتر p هو :-

$$x = \ln \frac{p-1}{p} + A$$

$$y = x + \ln p = \ln(p-1) + A$$

ويمكن بالطبع حذف P بين هاتين المعادلتين للحصول على علاقة صريحة بين y, x ولكنها ستكون علاقة معقدة .

Equations Solvable For x : **4-V- معادلات تحل في x :**

هي التي على الصورة :

$$(11) \quad x = g(y, p) \quad \text{و} \quad P = \frac{dy}{dx}$$

ويتبع في حلها خطوات مماثلة للحالة الثانية لكن بتبديل y, x

مثال -3-

$$P = \frac{dy}{dx} \quad y = x + \ln p \quad \text{حل المعادلة :}$$

الحل :- يمكن كتابة المعادلة التفاضلية السابقة على الصورة :

$$x = y - \ln p$$

بمفاضلة الطرفين بالنسبة إلى y ومراعاة أن $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ نحصل على :-

$$\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{p} \frac{dp}{dy} \Rightarrow \frac{1}{p-1} dp = dy$$

$$y = \ln(p-1) + A \quad \text{أو}$$

وبالتعويض عن y في المعادلة الأولى ينتج :

$$x = \ln\left(\frac{p-1}{p}\right) + A$$

وهو نفس البارامترى الذي حصلنا عليه في المثال السابق :

Clairaut's Equation

-5 -V معادلة كليرو

وهي معادلة تفاضلية من الشكل :

$$(12) \quad y = px + f(p) \quad ; \quad p = \frac{dy}{dx}$$

وهذه من نوع المعادلات (الحالة الثانية) التي تحل في y وسنرى الآن أساسية هذه المعادلة أي حلها العام هو :-

$$(13) \quad y = Ax + f(A)$$

وهو عبارة عن طائفة من المستقيمات نحصل عليها بوضع ثابت اختياري A محل

$$\text{المشتقة } p = \frac{dy}{dx} \text{ في معادلة كليرو ..}$$

الإثبات :

بمفاضلة (12) بالنسبة إلى x :

$$\frac{dy}{dx} = p = p + [x + f'(p)] \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx} [x + f'(p)] = 0 \quad \text{أو}$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = A \quad \text{الحالة الأولى :}$$

وبالتعويض عن $p = A$ في (12) نحصل على الحل العام $y = Ax + f(A)$

$$x + f'(p) = 0 \quad \text{الحالة الثانية :}$$

وهذه المعادلة مع (12) تعطي حلاً منفرداً على صورة بارامترية وهو عبارة عن غلاف لطائفة المستقيمات (13) .

مثال -4-

$$y = px + \sqrt{p^2 + 1} \quad ; \quad p = \frac{dy}{dx} \text{ حل المعادلة}$$

الحل :

$$f(p) = \sqrt{p^2 + 1} \quad \text{هذه معادلة كليرو فيها}$$

وبالتالي فحلها العام هو :

$$(14) \quad y = Ax + \sqrt{p^2 + 1}$$

وهو طائفة من المستقيمات ميلها A وتقطع جزءاً قدره $\sqrt{A^2 + 1}$ من المحور الراسي ولإيجاد الحل المنفرد نستخدم (13)

$$(15) \quad x + \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} = 0 \Rightarrow x = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}}$$

بالتعويض عن x في المعادلة المعطاة . أذن

$$(16) \quad y = \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + 1}} + \sqrt{p^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$$

وتعطي المعادلتان (15) و (16) الحل المنفرد بارامترياً بحذف البارامتر p نحصل على الصورة الصريحة للحل المنفرد :

$$x^2 + y^2 = 1$$

هي دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها الوحدة وتغلق طائفة المستقيمات (14).

تـمـارـيـن

I - معادلات تحل في P .

حل المعادلات التفاضلية التالية حيث : $P = \frac{dy}{dx}$

$$p^4 + (x - y + 1)p^3 + (x - y - xy)p^2 - xyp = 0$$

$$x(x-2)p^2 + (2y-2xy-x-2)p + (y^2+!!) = 0$$

$$x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0$$

$$y^2 p^2 + 3xp - y = 0$$

II - معادلات تحل في x أو في y :

حل المعادلات التفاضلية التالية حيث $\rho = \frac{dy}{dx}$

$$\rho^2 - xp + y = 0$$

$$y = (p + 2)x + p^2$$

$$yp^2 - 2xp + y = 0$$

$$y = xp + x^2 p^2$$

$$y = -xp - \frac{1}{x^2 p}$$

III - معادلات كليرو :

حل المعادلات التفاضلية التالية حيث $p = \frac{dy}{dx}$

$$y = px + \sqrt{p^2 + 1}$$

(باستخدام تحويل مناسب حولها $yp^2 - 2xp + y = 0$ إلى معادلة كليرو) ...

$$y = xp - 2p^2$$

الفصل السادس

تطبيقات مختلفة على المعادلات التفاضلية

**Different Applications or Differential
Equations**

الفصل السادس

تطبيقات مختلفة على المعادلات التفاضلية

Different Applications On Differential Equations

VI - 1- مقدمة :-

لقد قلنا سابقا أن العلاقات والقوانين الحاكمة بين متغيرات مسألة فيزيائية أو هندسية تظهر على صورة معادلة تفاضلية .
إذن فالمعادلات التفاضلية تدخل في شتى مجالات العلوم الفيزيائية والهندسية بل والإنسانية . وفيما يلي مجموعة من الأمثلة التطبيقية المتنوعة جزء منها هندسية والأخرى فيزيائية .

VI - 2- تطبيقات هندسية :-

أن كل علاقة من الشكل $F(x, y, y') = 0$

فهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى

وواضح أنها عبارة عن علاقة ما بين إحداثيات نقطة ما مثل $M(x, y)$ وميل المماس للمنحنى المار من تلك النقطة . وكل منحنى يمر من النقطة M وميل مماسه يحقق المعادلة التفاضلية فهو منحنى تكاملي . ومن ذلك نستنتج أن المعادلة التفاضلية هي علاقة بين إحداثيات نقطة من منحنى وميل المماس لهذا المنحنى في تلك النقطة .
إذن كل مسألة هندسية تتعلق بإحداثيات النقطة وميل المماس فيها هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى .

المثال الأول :-

أعطيت طائفة منحنيات أولى معادلتها التفاضلية هي :

$$(1) \quad F(x, y, y') = 0$$

i - أثبت أن المعادلة التفاضلية لطائفة المنحنيات التي يقطع كل عضو منها جميع أعضاء الطائفة الأولى بزاوية α هي :

$$(2) \quad F\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0$$

حيث $k = \tan(\alpha)$

وتسمى الطائفة الثانية بالمسارات α (المسارات المائلة) للطائفة الأولى .

ii - اثبت أن المعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة على الطائفة الأولى أي $\alpha = 90^\circ$ هي :

$$(3) \quad F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

iii - جد معادلة طائفة المنحنيات التي تقطع طائفة القطع المكافئة $y = (x - A)^2$ حيث A بارامتر بزاوية $\pi/4$ عند أي نقطة في الربع الأول .

iv - جد معادلة المسارات المتعامدة مع طائفة المنحنيات (الدوائر)

$$x^2 + y^2 + cx = 0$$

حيث C بارامتر .

الحل :

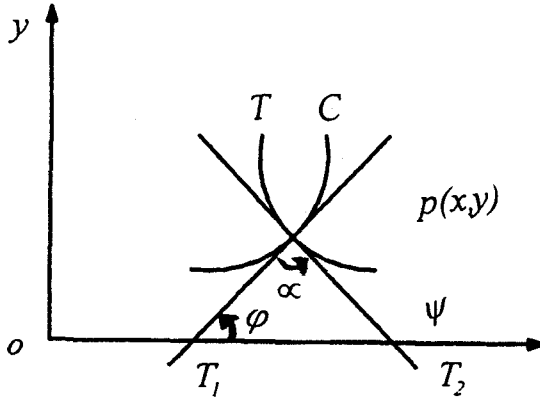
i- المسارات المائلة :

ليكن C منحنياً من مجموعة المنحنيات التكاملية للمعادلة التفاضلية (i) :

$$F(x_c, y_c, y'_c) = 0 \quad (i)$$

ليكن T مساراً من مجموعة المسارات α التي يقطع المنحنى C عند النقطة p بزاوية

α انظر الشكل -1-



شكل -1-

$\varphi =$ زاوية ميل مماس المنحنى C $\psi =$ زاوية ميل مماس المنحنى T

$$\alpha = \psi - \varphi$$

نلاحظ من الشكل أن

$$\varphi = \psi - \alpha$$

ومنه

$$\tan \varphi = \tan(\psi - \alpha)$$

وبالتالي

$$\tan \varphi = \frac{\tan \psi - \tan \alpha}{1 + \tan \psi \tan \alpha}$$

إذن

ولكن :

$$y'_T = \tan\psi \quad , \quad y'_c = \tan\varphi \quad , \quad \tan\alpha = k \quad (ii)$$

وعند النقطة p يكون :

$$y_c = y_T \quad , \quad x_c = x_T \quad (iii)$$

ومنه

$$y'_c = \frac{y'_T - k}{1 + y'_T k} \quad (iv)$$

وبالتعويض عن y'_c, y_c, x_c في (i) من (ii) ؛ (iii) ؛ (iv) نجد أن :

$$F(x_T, y_T, \frac{y'_T - k}{1 + ky'}) = 0 \quad (v)$$

وهذه العلاقة الأخيرة صحيحة لأي نقطة عامة P تقع على المنحنى T وبإهمال الدليل السفلي T تكون المعادلة التفاضلية لطائفة المسارات α هي :

$$F(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}) = 0 \quad (vi)$$

حيث $k = \tan \alpha$ وهي تقطع طائفة المنحنيات (1) بزواوية α .

ii - المسارات المتعامدة :

في حالة التقاطع على الشكل المتعامد تكون $\alpha = \pi/2$ أي أن $k = \infty$

وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية لطائفة المسارات المتعامدة هي :

$$F(x, y, \frac{y'/k - 1}{\frac{1}{k} + y'}) = 0$$

$$F(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0 \quad (\text{vii})$$

iii - طائفة المسارات $\pi/4$ التي تقطع المنحنيات $y = (x - A)^2$

أولاً: نوجد المعادلة التفاضلية لطائفة المنحنيات المكافئة بحذف البارامتر A بين

$$y' = 2(x - A) \Rightarrow x - A = \frac{y'}{2} \quad \text{حيث } y', y$$

$$y = \left(\frac{y'}{2}\right)^2 \Rightarrow y' = \pm 2\sqrt{y} \quad \text{إن}$$

وحيث أن الأمر يتعلق بأجزاء المنحنيات المكافئة التي تقع في الربع الأول حيث يكون الميل موجبا فان :

$$y' = 2\sqrt{y} \quad (\text{viii})$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية لطائفة القطع المكافئة (viii) وعليه تكون المعادلة التفاضلية لطائفة المنحنيات التي تقطع القطع المكافئة بزواوية $\frac{\lambda}{4}$ هي :

$$\frac{y' - \tan \frac{\lambda}{4}}{1 + y' \tan \frac{\lambda}{4}} = 2\sqrt{y}$$

$$\frac{y' - 1}{1 + y'} = 2\sqrt{y} \Rightarrow y' = \frac{1 + 2\sqrt{y}}{1 - 2\sqrt{y}} \quad (\text{ix})$$

$$\int \frac{1 - 2\sqrt{y}}{1 + 2\sqrt{y}} dy = \int dx = x + B \quad \text{إن}$$

ولإجراء التكامل في الطرف الأيسر نستخدم التعويض :

$$\sqrt{y} = t \Rightarrow \frac{dy}{2\sqrt{y}} = dt \Rightarrow 2tdt$$

$$\int \frac{1-2\sqrt{y}}{1+2\sqrt{y}} dy = 2 \int \frac{t-2t^2}{1+2t} dt = -2 \int \frac{2t^2-1}{2t+1} dt$$

و

ثم بقسمة بسط موضوع التكامل علي مقامة

$$\begin{aligned} -2 \int \frac{2t^2-1}{2t+1} dt &= -2 \int \left[t - 1 + \frac{1}{2t+1} \right] dt \\ &= -2 \left[\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} \ln(2t+1) \right] \end{aligned}$$

$$-2 \int \frac{2t^2-1}{2t+1} dt = -y + 2\sqrt{y} - \ln(2\sqrt{y}+1)$$

وعليه تكون طائفة معادلات المسارات هي $\frac{\Lambda}{4}$:

$$2\sqrt{y} - y - \ln(2\sqrt{y}+1) = x + B$$

$$x^2 + y^2 = cy \quad \text{17- طائفة الدوائر}$$

مركزها $(0, \frac{C}{2})$ يقع علي محور y ونصف قطرها $|\frac{C}{2}|$ حيث C بارامتر . بحذف

البارامتر C بين هذه المعادلة و تفاضلها :

$$2x + 2yy' = cy'$$

نحصل على المعادلة التفاضلية لطائفة الدوائر على الصورة :

$$2x + 2yy' = [(x^2 + y^2)/y]y'$$

$$y' = -\frac{2xy}{y^2 - x^2} \quad \text{أو}$$

وبوضع $-\frac{1}{y'}$ على y' نحصل على المعادلات التفاضلية للمسارات المتعامدة على الصورة :

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة يمكن حلها باستخدام التعويض :

$$y = \vartheta x \Rightarrow x \frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta = \frac{x^2\vartheta - x^2}{2x(x\vartheta)} = \frac{\vartheta - 1}{2\vartheta}$$

$$x \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{\vartheta^2 - 1}{2\vartheta} - \vartheta = -\frac{1 + \vartheta^2}{2\vartheta}$$

$$(1 + \vartheta^2) = A/x \Rightarrow y^2 + x^2 = Ax \quad \text{إذن:}$$

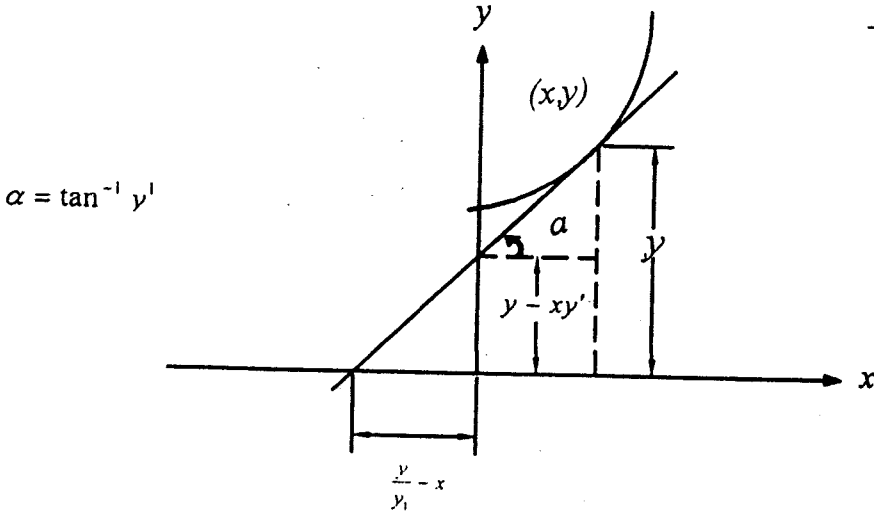
وهذه المسارات المتعامدة عبارة عن طائفة من الدوائر مركزها $(A/2, 0)$ على

محور x ونصف قطرها $|A/2|$

المثال الثاني: جد :-

- i - طائفة المنحنيات التي يكون طول جزء المماس لكل عضو فيها من نقطة التماس إلى محور y مساوياً للجزء المقطوع من محور y بهذا المماس .
- ii - طائفة المنحنيات التي يكون طول جزء المماس لكل عضو فيها المحصور بين محوري الإحداثيات ثابتاً a .
- iii - شكل العاكس الذي يعكس الضوء الصادر من نقطة ثابتة في خطوط مستقيمة متوازية .

الحل :-



شكل -2-

- i - من الشكل (1) نرى أن الجزء المقطوع بالمماس من محور y هو $y - xy'$ وطول المماس من النقطة (x, y) إلى المحور y هو $\sqrt{x^2 + (xy')^2}$

وعليه
$$\sqrt{x^2 + (xy')^2} = y - xy'$$

بالتربيع والاختصار نجد أن :-

$$x^2 + (xy')^2 = y^2 - 2xyy' + x^2y''$$

$$x^2 + (xy')^2 = y^2 - 2xy y' + x^2 y''$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

ونلاحظ أن هذه المعادلة أنها متجانسة من الدرجة صفر حلها كما في المثال السابق

$$y^2 + x^2 = Ax \quad (i)$$

ii- من الشكل -2- نلاحظ أن طول المماس المحصور بين محوري الإحداثيات يساوي

$$\left[\left(\frac{y}{y'} - x \right)^2 + (y - xy')^2 \right]^{1/2}$$

وعليه

$$\left(\frac{y}{y'} - x \right)^2 + (y - xy')^2 = a^2$$

حيث a ثابت موجب بالترتيب والاختصار نحصل على :-

$$\frac{1}{y'^2} (y - xy')^2 + (y - xy')^2 = a^2$$

$$y = xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad \text{أو}$$

وهي من الصورة :-

$$y = xp \pm \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} \quad (ii)$$

حيث $p = y'$

وهذه على صورة معادلة كليرو. وبالتالي حلها العام هو :-

$$y = Ax \pm \frac{aA}{\sqrt{1 + A^2}}$$

حيث A ثابت اختياري وهذه طائفة من المستقيمات ميلها A وتقطع الجزء
 $\pm \frac{aA}{\sqrt{1 + A^2}}$ من محور y .

وهناك حل متفرد يأتي من الحالة الثانية لمعادلة كليرو حيث :

$$x \pm \frac{d}{dp} \left[\frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} \right] = 0$$

$$x = \pm \frac{-a}{(1 + p^2)^{3/2}}$$

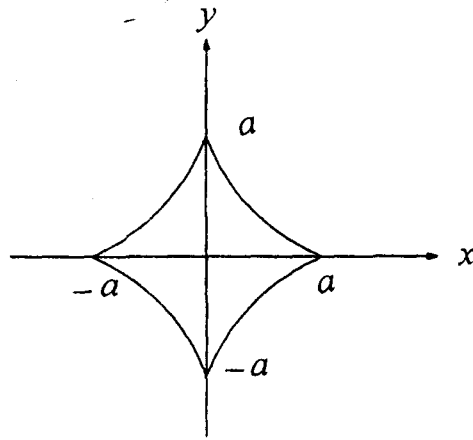
وبالتعويض عن x في (i) نجد أن :

$$y = \pm \frac{ap^3}{(1 + p^2)^{3/2}}$$

والمعادلتان الأخيرتان هما الحل المتفرد البارامتري وب حذف البارامتر (P) بينهما
 نحصل علي :

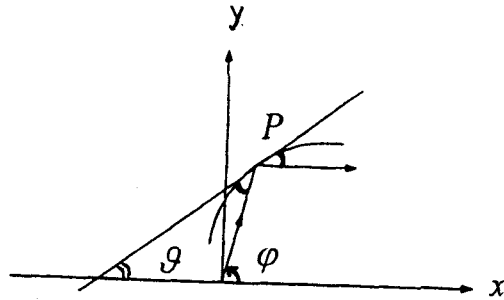
$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad (iii)$$

وهذه هي الصورة الكرتيزية للحل المتفرد وهو عبارة عن منحنى دويري
 تحتي (hypocycloid) يغلف طائفة المستقيمات كما هو موضح في الشكل التالي :-



شكل -3-

iii- لتكن النقطة الثابتة (منبع الأشعة الضوئية) كنقطة أصل نفرض أن الأشعة المنعكسة تكون في اتجاه موازي لمحور x .
 ولتكن P نقطة عامة على السطح الدوراني العكس الذي يقطع مستوي الإحداثيات xy في المنحني الذي معادلته $y = f(x)$
 ولدينا زاوية السقوط تساوي زاوية الانعكاس $\vartheta = \varphi$



شكل -4-

إذن نستنتج من هندسية الشكل ما يلي :-

$$\varphi = 2\vartheta \Rightarrow \tan \varphi = \frac{2 \tan \vartheta}{1 - \tan^2 \vartheta}$$

$$\therefore \tan \varphi = \frac{y}{x} \text{ and } \tan \vartheta = y'$$

$$\therefore \frac{y}{x} = \frac{2p}{1-p^2} \quad ; \quad p = y'$$

$$(a) \quad 2x = y \left(\frac{1-p^2}{p} \right)$$

وهذه معادلة تفاضلية تحل في x بالمفاضلة بالنسبة إلى y وملاحظة أن :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$$

نجد أن

$$2 \frac{dx}{dy} = \frac{1-p^2}{p} - y \cdot \frac{1+p^2}{p^2} \cdot \frac{dp}{dy} = \frac{2}{p}$$

$$(b) \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dp}{p} \Rightarrow p = \frac{A}{y} \quad \text{وبالاختصار نحصل على :-}$$

وبحذف (p) بين (a و b) نحصل على الحل الكرتيزي :

$$2x = y \frac{1 - (A/y)^2}{A/y} = \frac{1}{A} (y^2 - A^2)$$

$$y^2 = 2Ax + A^2 \quad \text{إذن}$$

وهذه معادلة طائفة من القطع المكافئة بؤرتها نقطة الأصل وبالتالي فالسطح العاكس

هو أحد أعضاء طائفة السطوح المكافئة الدورانية ..

$$y^2 + z^2 = 2Ax + A^2$$

حيث محور الدوران هو المحور x .

2.VI - تطبيقات فيزيائية :-

المثال الثالث :-

بفرض أن عدد سكان بلد في وقت ما يتزايد بمعدل يتناسب وعدد السكان أنفسهم عند هذا الوقت فان كان عدد سكان ليبيا عام 1950 هو 2 مليون ثم تضاعف عدد السكان في عام 1990 فما هو عدد السكان عام 2000 م .

الحل :

نفرض أن عدد سكان ليبيا هو N مليون عند زمن t وحيث وحدة الزمن هي السنة ومقياسا بدء من عام 1950 م وعليه يكون :-

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

حيث k ثابت التناسب وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى حلها من الشكل :-

$$N(E) = Ae^{kt}$$

وبما أن : $N = 2$ عند $t = 0 \Leftarrow A = 2$

$$\therefore N(t) = 2e^{kt}$$

وفي عام 1990م أي عند $t = 40$ تضاعف العدد فاصبح $N = 4$

$$\therefore N = 4 = 2e^{k(40)} \Rightarrow e^{40k} = 2 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{40} = 0.0173$$

وفي عام 2000م يكون $t = 50$ وبالتالي :

$$N = 2e^{k(50)} = x.e^{50 \times 0.0173} = 2.e^{0.865} = 4.75 \text{ مليون}$$

ملاحظة :-

افترضنا هنا أن عدد السكان $N(t)$ دالة مستمرة في الزمن ولكن في الواقع $\bar{N}(t)$ هي دالة متقطعة (Discrete function) لا تأخذ إلا قيماً صحيحة ومع ذلك فالمعادلة التفاضلية تعتبر تقريبا جيدا لمثل هذه المسائل .

المثال الرابع :

حوض يحتوي علي 100 لتر من الماء يتدفق محلول ملحي يحتوي 2 كجم من الملح لكل لتر إلى الحوض بمعدل 3 لترات في كل دقيقة بينما يتدفق الخليط بعد تقلبيه جيدا إلى الخارج بنفس المعدل .

I - ما هي كمية الملح الموجودة في الحوض عند أي زمن ؟

II - متى يحتوي الحوض علي 100 كجم من الملح ؟

III - عند I إذا كان معدل تدفق الخليط للخارج :

أ- 2ℓ في الدقيقة ؛ ب- 4ℓ في الدقيقة

الحل :

لتكن $Q =$ كمية الملح (بكغم) الموجودة في الحوض عند أي زمن t

(دقيقة)

عند $t = 0$ حجم الحوض $V_0 = 100 \ell$ (كان الحوض يحتوي علي الماء)

معدل تدفق المحلول الملحي إلى الحوض $f_i = 3\ell / \text{min}$

معدل تدفق الخليط خارج الحوض $f_o = 3\ell / \text{min}$

تركيز الملح في المحلول الداخل إلى الحوض $f_i = 2\text{kg} / \ell$

حجم المحلول في الحوض بعد زمن t هو : $V = V_0 + (f_i - f_o)t$

ويكون تركيز الملح في المحلول عند هذا الزمن هو :

$$\frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_o + (f_i - f_o)t} \text{ kg / } \ell$$

ويكون معدل تدفق الملح إلى خارج الحوض :

$$f_o \frac{Q}{V} = \frac{f_o Q}{V_o + (f_i - f_o)t} \text{ kg min}$$

معدل تزايد كمية الملح في الحوض $\frac{dQ}{dt}$ عند الزمن t هو :-

$$\frac{dQ}{dt} = F_i f_i (\text{kg / min}) - f_o \frac{Q}{V} = \text{معدل دخول الملح} - \text{معدل خروج الملح}$$

$$\frac{dQ}{dt} = F_i f_i - \frac{f_o Q}{V_o + (f_i - f_o)t}$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى .

$$\frac{dQ}{dt} = 6 - \frac{3}{100} Q \quad \text{I} \quad \text{:- بالتعويض بالمعطيات نجد أن}$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{3}{100} Q = 6 \quad \text{أو}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية .

$$\rho = e^{\int \frac{3}{100} dt} = e^{3t/100} \quad \text{عامل التكامل لهذه المعادلة هو :-}$$

وعليه يكون الحل من الشكل :

$$Q = e^{-3t/100} \left[A + \int 6e^{3t/100} dt \right] = e^{-3t/100} \left[A + 200e^{3t/100} \right]$$

$$Q = 200 + Ae^{-0.03t}$$

وبما أن $Q = 0$ عند $t = 0 \Leftarrow A = -200$

$$Q = 200[1 - e^{-0.03t}] \quad \text{و بالتالي يكون :-}$$

II- لحساب الزمن الذي عنده يصبح بالحوض 100kg من الملح نعوض في المعادلة الأخيرة

$$100 = 200[1 - e^{-0.03t}] \Rightarrow e^{-0.03t} = 0.5$$

$$\therefore t = -\frac{1}{0.03} \ln 0.5 = 23.105 \text{ min}$$

أي بعد 23.100 دقيقة تقريباً :

III- أ) في حالة كون $f_0 = 2\ell/\text{min}$ فان المعادلة تكون من الشكل :

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{2}{100+t}Q = 6$$

$$\rho = e^{\int \frac{2}{100+t} dt} = e^{2 \ln(100+t)}$$

وهذه معادلة خطية عاملها التكميلي هو :-

$$\therefore \rho = (100+t)^2$$

$$Q = \frac{1}{(100+t)^2} \left[A + \int 6(100+t)^2 dt \right] = \frac{1}{(100+t)^2} \left[A + 2(100+t)^3 \right]$$

بما أن $Q = 0$ عند $t = 0 \Leftarrow A = 2 \times 10^6$ وبالتالي :-

$$Q = 2(100 + t) - \frac{2 \times 10^6}{(100 + t)^2}$$

III- (ب) في حالة $f = 4L/\text{min}$ يكون لدينا :-

$$\frac{dQ}{dt} = 6 - \frac{4Q}{100 - t}$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{4Q}{100 - t} = 6$$

$$\therefore \rho = e^{\int \frac{4}{100-t} dt} = e^{-4 \ln(100-t)} = \frac{1}{(100-t)^4}$$

$$Q = (100-t)^4 \left[A + \int \frac{6}{(100-t)^4} dt \right] = \left[\frac{2}{(100-t)^3} + A \right] (100-t)^4$$

وبما أن $Q = 0$ عند $t = 0$ فإن $A = -2 \times 10^{-6}$

$$\therefore Q = 2(100-t) - 2 \times 10^{-6}(100-t)^4$$

وبما أن :- $Q > 0$ فإن $t \leq 100 \text{ min}$

المثال الخامس :-

ما هي أقل سرعة يطلق بها جسم عموديا علي سطح الأرض بحيث يتمكن من الهروب من الجاذبية الأرضية؟ نهمل مقاومة الهواء وتأثير جاذبية أية أجرام أخرى خلاف الأرض التي نعتبرها كرة نصف قطره $R = 6375 \text{ kg}$ وتسارع جاذبية الأرض عند سطحها $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

الحل :-

لتكن r المسافة بين الجسم ومركز الكرة الأرضية .

طبقا لقانون الجذب العام لنيوتن فان قوة جذب الأرض للجسم نجد:-

$$a = \frac{dV}{dt} = -\frac{k}{r^2}, k > 0$$

حيث r هو موضع الجسم V سرعته k ثابت موجب أخذت الإشارة سالبة لكون r متجهة إلى مركز الكرة الأرضية .

عند $r = R$ تكون $k = gR^2 \Leftarrow a = -g$

$$\therefore r = \frac{dV}{dt} = \frac{-gR^2}{r^2}$$

ومنه

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = V \frac{dV}{dr} = -\frac{gR^2}{r^2}$$

وبفصل المتغيرات و المكاملة :-

$$\frac{1}{2}V^2 = \frac{gR^2}{R} + A$$

وبفرض أن سرعة إطلاق الجسم من عند سطح الأرض ($r = R$) هي V_0 ينتج :-

$$\frac{1}{2}V_0^2 = \frac{gR^2}{R} + A \Rightarrow A = \frac{1}{2}V_0^2 - gR$$

وبالتعويض عن A نحصل علي :-

$$V^2 = \frac{2gR^2}{r} + V_0^2 - 2gR$$

وحتى يفلت الجسم من الجاذبية الأرضية فإنه يجب أن تتعدم V عند $r = \infty$ وذلك يستوجب أن تكون :-

$$V_0^2 = 2gR \Rightarrow V_0 = \sqrt{2gR}$$

وتسمى أقل سرعة هذه بسرعة الانفلات : $v_0 = 11.1838 \text{ km/s}$

المثال السادس :-

يهبط جندي مظلات بسرعة قدرها 60 km/s لحظة انفتاح المظلة فإذا كانت مقاومة الهواء تتناسب مع مربع سرعة الهبوط بحيث كانت مقاومة الهواء لوحدة الكتل عند وحدة السرعة هي 0.392 N/kgm^2 فما هي سرعة الهبوط بعد نصف ثانية؟ ما هي سرعة الهبوط النهائية؟

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 \quad \text{اعتبر}$$

الحل :-

لتكن m كتلة الجندي والمظلة معا . بتطبيق قانون نيوتن للحركة والذي ينص علي أن مجموع القوي المؤثرة في الجسم ما يساوي حاصل ضرب الكتلة في العجلة ومنه :

$$m\gamma = \frac{d\mathcal{G}}{dt} = mg - k\mathcal{G}^2$$

حيث g هي سرعة هبوط الجندي و g تسارع الجاذبية الأرضية و k ثابت تناسب (حيث k/g هو مقاومة الهواء) .

ويمكن كتابة المعادلة السابقة علي الشكل التالي :-

$$\frac{d g}{g^2 - \frac{mg}{R}} = -\frac{k}{m} dt$$

وبوضع $b = k/m a^2 = mgk$

$$\therefore \frac{d g}{g^2 - a^2} = -b dt$$

و بالمكاملة نجد :-

$$\int \frac{d g}{g^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{g}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{g-a}{g+a} = -bt + A$$

بناء علي المعطيات حيث ان عند $t=0$ تكون $g = g_0 = 60 m/s$

$$\therefore \frac{1}{2a} \ln \frac{g_0 - a}{g_0 + a} = A$$

$$\frac{1}{2a} \ln \left(\frac{g-a}{g+a} \right) \left(\frac{g_0+a}{g_0-a} \right) = -bt$$

أو

$$\frac{g-a}{g+a} = \frac{g_0-a}{g_0+a} e^{-2abt}$$

وبما أن مقاومة الهواء هي k/g^2 إذن مقاومة الهواء لوحدة الكتل عند وحدة السرعة

هي k/m

$$\therefore \frac{k}{m} = 0.392 = b$$

$$\therefore a = \sqrt{\frac{mg}{k}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.392}} = 5$$

$$ab = 5 \times 0.392 = 1.96 \quad , \quad g_0 = 60 \text{ m/s} \quad \text{و}$$

وبالتعويض نحصل علي ما يلي :-

$$\frac{g-5}{g+5} = \frac{55}{65} e^{-3.92t}$$

ومنها نجد أن :-

$$g = 5 \frac{13 + 11 e^{-3.92t}}{13 - 11 e^{-3.92t}}$$

وتكون سرعة الهبوط بعد $\frac{1}{2}$ ثانية هي $g = 5 \frac{13 + 11 e^{-1.96}}{13 - 11 e^{-1.96}} = 6.3536 \text{ m/s}$

ولزمن يتجاوز الثانية تؤول الدالة الأسية $e^{-3.92t}$ من الصفر وبالتالي تقترب السرعة من القيمة النهائية .

$$g_f = a = 5 \text{ m/s}$$

المثال السابع :-

وضع جسم ما درجة حرارته مجهولة في ثلاجة درجة حرارتها ثابتة وتسلوي 20°C ولوخط إن درجة حرارة الجسم أصبحت 10°C بعد نصف ساعة -10°C بعد ساعة . فما هي درجة الحرارة الابتدائية للجسم عند وضعه في الثلاجة ؟ متى تصل درجة حرارة الجسم إلي -19°C .

الحل :-

لتكن T درجة حرارة الجسم في الزمن t , $T_s = -20^\circ$ درجة حرارة التلاجة بناء علي قانون نيوتن للتبريد أن معدل تغير درجة حرارة جسم بالنسبة للزمن متناسب مع الفرق بين درجة حرارته T ودرجة حرارة الوسط المحيط T_s

$$\therefore \frac{dT}{dt} = -k(T - T_s)$$

حيث k ثابت تناسب موجب يعتمد علي طبيعة الجسم والوسط المحيط ويمكن كتابة المعادلات السابقة علي الشكل التالي :-

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_s$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية عاملها التكميلي e^{-kt} وعليه :-

$$T = e^{-kt} \left[A + \int kT_s e^{kt} dt \right] = e^{-kt} \left[A + kT_s e^{kt} \right]$$

$$\therefore T = Ae^{-kt} + T_s \quad \text{او}$$

وبفرض ان درجة حرارة الجسم هي T_0 عند $t = 0$

$$\therefore T_0 = A + T_s \Rightarrow A = T_0 - T_s$$

وبالتعويض في الحل العام نحصل علي :-

بما أن عند

$$10 = (T_0 - 20)e^{-30k} - 20 \Leftarrow T = +10^\circ C \quad \text{تكون } t = 305$$

$$30 = (T_0 + 20)e^{-30k} \quad \text{أو}$$

كذلك عند $t = 60S$ تكون $T = 10^\circ c$ $-10 = (T_0 + 20)e^{-60k} - 20$

$$10 = (T_0 + 20)e^{-6k} \quad \text{أو}$$

بقسمة المعادلتين السابقتين نحصل علي :-

$$3 = e^{30k} \Rightarrow k = \frac{\ln 3}{30} = 0.0366$$

وبالتعويض في إحدى المعادلتين السابقتين نجد أن :-

$$30 = (T_0 + 20) \frac{1}{3} \Rightarrow T_0 = 70^\circ C$$

أي ان درجة حرارة الجسم الابتدائية هي :- $T_0 = 70^\circ C$

وتصبح المعادلة من الشكل : $T(t) = 90e^{-0.0366t} - 20$

وعندما تصبح $T = -19^\circ c$ يكون $-19 = 90e^{-0.0366t} - 20$

$$e^{-0.0366t} = \frac{1}{90} \Rightarrow t = 122.96S$$

أي أن درجة حرارة الجسم تصل إلى $-19^\circ c$ بعد حوالي 123 ثانية

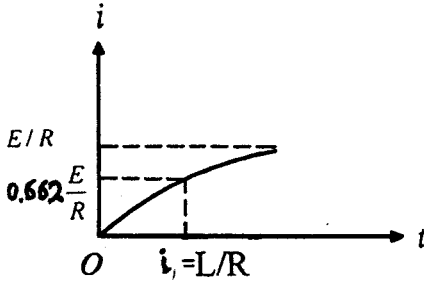
المثال الثامن :-

دائرة توال مكونة من مقاومة $R(\Omega)$ وملف $L(H)$, وبطارية قوتها الدافعة الكهربائية $E(V)$ الشكل (أ) : ظل المفتاح S مفتوحا لمدة طويلة ثم قفل فجأة عنده $t = 0$ جد شدة التيار المار في الدائرة عند أي لحظة $t > 0$ علق على النتيجة .

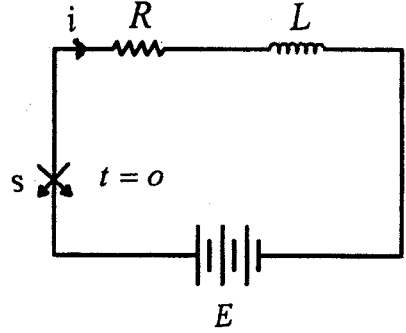
إذا كان $E = 20\text{v}$, $L = 10\text{mH}$, $R = 10\Omega$ - جد شدة التيار عند أي اللحظات :

$$t = 10 \text{ ms} \quad \text{و} \quad t = 1 \text{ ms}$$

الحل :-



(ب)



(أ)

شكل - 5 -

ليكن i شدة التيار عند الخطة t المارة في الدائرة الكهربائية بتطبيق قانون kirchhoff على هذه الدائرة نحصل على :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 جهد عبر جهد عبر القوة الدافعة
 الملف المقاومة الكهربائية
 $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}$

وهذه معادلة تفاضلية خطية عاملها التكميلي هو $e^{-\frac{R}{L}t}$ وبالتالي :

$$i = e^{-\frac{R}{L}t} \left[A + \int \frac{E}{L} \cdot e^{\frac{R}{L}t} dt \right] = e^{-\frac{R}{L}t} \left[A + \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} \right]$$

$$i(t) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t} \quad \text{أو}$$

لدينا عند الخطة $i = 0, t = 0$ وعليه :

$$0 = \frac{E}{R} + A \Rightarrow A = -\frac{E}{R}$$

$$i(t) = \frac{E}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right] \quad \text{و}$$

وهذه شدة التيار في الدائرة عند أي لحظة $0 < t$ انظر الشكل (ب)

التعليق :-

نلاحظ من عبارة العمل العام أن التيار الكهربائي المار في الدائرة هو مجموع حدين إحداهما هو الحد $Ae^{-\frac{R}{L}t}$ وهذا الحد يؤول إلى الصفر نظريا حينما $t \rightarrow \infty$ ولكن عمليا يؤول إلى الصفر بعد زمن يساوي عدة مرات من الزمن L/R والذي يسمى الثابت الزمني للدالة الآسية $\tau = \frac{L}{R} \text{sec}$ ويسمى هذا الحد بالحد العابر أو غير المستقر.

كلما كانت $R > L$ كلما دام الحد العابر الزمن أطول .

أما الحد الآخر فهو E/R وهو الحد الذي يدوم بعد تلاشي الحد العابر ولهذا السبب يسمى بالحد المستقر وهو التيار الذي يمر لو أتعدم الحث في الدائرة أي أن عمل الحد العابر هو سد الثغرة ما بين أحوال البداية وأحوال الاستقرار .

وبوضع $t = \tau = \frac{L}{R}$ في المعادلة السابقة لوجدنا أن شدة التيار تصبح :-

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-1}) = 0.632 \frac{E}{R}$$

أي أن التيار ينمو من الصفر إلى 63.2% من قيمته النهائية (المستقرة) بعد زمن يساوي الثابت الزمني للدائرة .
وبعد زمن $t = 5\tau$ يصبح التيار :

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-5}) = 0.993 \frac{E}{R} \approx \frac{E}{R}$$

أي أن التيار يصل تقريبا لقيمته المستمرة بعد فترة تساوي خمس مرات من الثابت الزمني للدائرة .
بالتعويض عن :

$$E = 10 \text{ V} , L = 10 \text{ mH} , R = 10 \Omega$$

نجد :

$$i(t) = 1 - e^{-10^3 t}$$

$$t = 1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s} , i = 1 - e^{-1} = 0.632 \text{ A} \quad \text{عند :}$$

$$\tau = \frac{L}{R} = 10^{-3} \text{ s} \quad \text{ويلاحظ أن الثابت الزمني في هذه الحالة :}$$

$$t = 10 \text{ ms} = 10^{-2} \text{ s} , i = 1 - e^{-10} = 0.999 \approx 1.0 \text{ A} \quad \text{عند :}$$

أي انه يمكن القول دون تجاوز أن التيار يصل لقيمته المستقرة 1A بعد زمن 10 ms وهو عشر مرات الثابت الزمني .

المثال التاسع :-

لتكن الدائرة المبينة في الشكل التالي (6) في حالة استقرار ، فإذا قفل عند

$t = 0$ جد :

I- التيار المار في كل فرع عنده $t = 0$ (قبل قفل المفتاح مباشرة)

II- شدة التيار المار في كل فرع عند أي لحظة $t > 0$

III- الثابت الزمني لكل تيار

IV- ارسم تغير كل تيار مع الزمن.

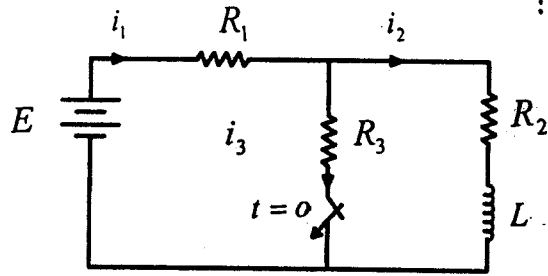
$$R_1 = 3\Omega$$

$$R_2 = 18\Omega$$

$$R_3 = 6\Omega$$

$$L = 0.1H$$

$$E = 42V$$



شكل - 6 -

I- قبل قفل المفتاح $t < 0$ الدائرة في حالة استقرار هذا يعني أن الملف لا يؤدي

دورا بسبب ثبات التيار المار فيها ، وحيث أن المفتاح مفتوح إذن :

$$i_1 = i_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} = 2A, i_3 = 0$$

وتظل نفس هذه القيمة حتى قبل فتح المفتاح مباشرة $t = 0$

-II بعد قفل المفتاح مباشرة يأخذ الملفات في العمل مع منع التغير المفاجئ فسي تيارها i_2 وعليه يكون :

$$i_2|_{t=0^+} = i_2|_{t=0^-} = 2A$$

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد حول إطارين مقفلين نجد ما يلي :

$$(1) \quad i_3 = i_1 - i_2$$

$$R_1 i_1 + R_3 i_3 = E \Rightarrow (R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_2 = E$$

$$(2) \quad \therefore 9i_1 - 6i_2 = 42 \Rightarrow i_1 = \frac{14 + 2i_2}{3}$$

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} = E$$

و

$$(3) \quad \therefore 3i_1 + 18i_2 + 0.1 \frac{di_2}{dt} = 42$$

بتعويض (2) في (3) نحصل على :

$$(4) \quad \frac{di_2}{dt} + 200i_2 = 280$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية عاملها التكميلي e^{200t} وبالتالي :

$$i_2 = e^{-200t} \left[A + \int 280e^{-200t} dt \right] = Ae^{-200t} + 1.4$$

ومن الشروط الابتدائية نجد أن :- $2 = 1.4 + A \Rightarrow A = 0.6$

$$(5) \quad \therefore i_2(t) = 0.6e^{-200t} + 1.4$$

ثم من (2) نجد :

$$(6) \quad i_1(t) = 0.4e^{-200t} + 5.6$$

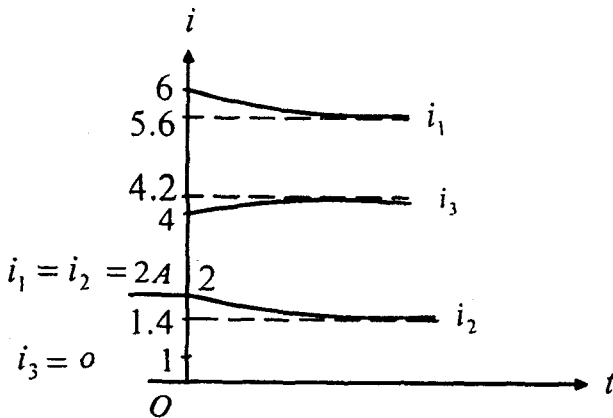
وكذلك :

$$(7) \quad i_3(t) = i_1 - i_2 = -0.2e^{-200t} + 4.2$$

III- ووضح أن الحد العابر في كل من هذه التيارات يتناسب والدالة الأسية e^{-200t} وهذه تصبح e^{-1} حينما .

$$200 \tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1}{200} = 5ms$$

IV- بين الشكل -7- التالي تغير التيارات مع الزمن :



شكل - 7 -

ملاحظة :

الجدير بالذكر القيم المستقرة الجديدة للتيارات أي بعد زمن كبير من قفل المفتاح $t \geq 5\tau$ حيث يختفي تأثير الحث وتصبح الدائرة الكهربائية عبارة عن مقاومات خالصة حيث :

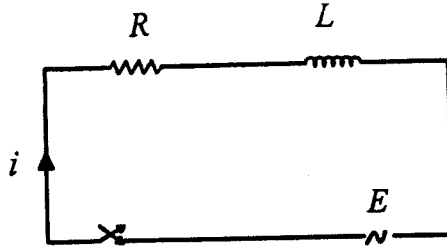
$$i_3 = 4.2A \quad , \quad i_2 = 1.4A \quad , \quad i_1 = 5.6A$$

المثال العاشر :-

لتكن لدينا الدائرة الكهربائية التالية شكل -8- حيث أن القوة الدافعة الكهربائية متناوبة جيبية على الصورة :

$$E(t) = E_0 \cos \omega t \quad , \quad \omega = 2\pi f$$

ارسم التغير الزمني للتيار على فرض أن $i(0) = 0$.



شكل -8-

الحل :

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد نحصل على :

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = E(t) = E_0 \cos \omega t$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E_0}{L} \cos \omega t$$

وعامل تكميل هذه المعادلة التفاضلية الخطية هو $e^{\frac{R}{L}t}$ وبالتالي :

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left[A + \frac{E_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t dt \right]$$

نلاحظ أن لدينا بالطرف الثاني التكامل من الشكل التالي :

$$I = \int e^{at} \cos bt dt$$

ويمكن حسابه بالتجزئة :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{b} e^{at} \sin bt - \frac{a}{b} \int e^{at} \sin btdt \\ &= \frac{1}{b} e^{at} \sin bt - \frac{a}{b} \left[-\frac{1}{b} e^{at} \cos bt + \frac{a}{b} \int e^{at} \cos btdt \right] \\ &= \frac{1}{b} e^{at} \sin bt + \frac{a}{b^2} e^{at} \cos bt - \frac{a^2}{b^2} I \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{b^2 + a^2}{b^2} I = \frac{1}{b} e^{at} \sin bt + \frac{a}{b^2} e^{at} \cos bt$$

ومنه نجد أن :

$$I = \int e^{at} \cos btdt = \frac{e^{at}}{b^2 + a^2} [b \sin bt + a \cos bt]$$

باستعمال هذه العلاقة نحصل على ما يلي :

$$i(t) = \frac{E_0}{R^2 + L^2 \omega^2} [R \cos \omega t + L \omega \sin \omega t] + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

والتي يمكن وضعها على الصورة :

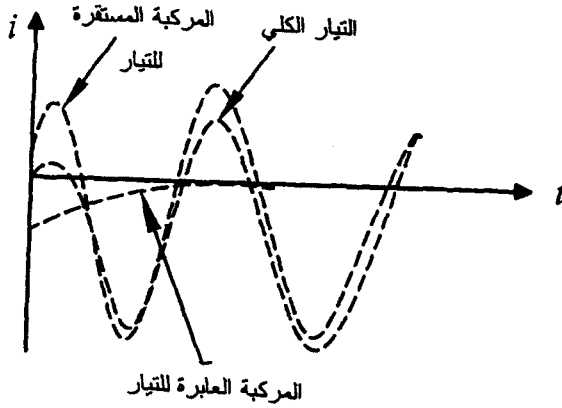
$$i(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi) + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right)$$

ويتعين الثابت الاختيار من الشروط الابتدائية حيث $i(0) = 0$ فان :

$$A = -\frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos \varphi$$

$$i(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \left[\cos(\omega t - \varphi) - \cos \varphi e^{-\frac{R}{L}t} \right]$$



شكل - 9 -

وواضح أن الحد العابر $Ae^{-\frac{R}{L}t}$ يتلاشى مع مرور الزمن ويبقى الحد المستقر للتيار وهو :

$$\frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2}} \cos \omega L = \varphi$$

وهي مركبة توافقية ترددها هو نفس تردد القوة الدافعة الكهربائية وطورها (صفحتها) يتأخر بزواوية :-

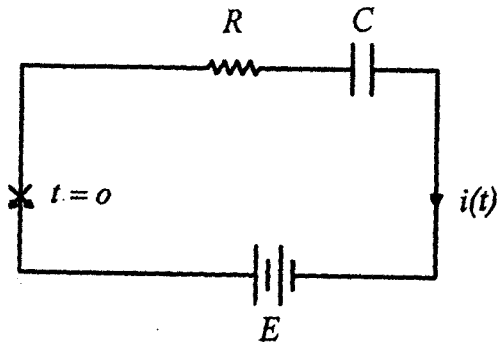
$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

عن طور القوة الدافعة .

المثال الحادي عشر :

في دائرة التوالي RC المبينة في الشكل -10- التالي ، المكثف C غير مشحون مسن الأصل ، قفل المفتاح عند $t = 0$ جد شدة التيار والجهد عبر المكثف عند أي لحظة

$t > 0$ ما هي المركبة العابرة والمركبة المستمرة لكل منهما؟ أرسم تغيرهما مع الزمن .



شكل - 10 -

الحل :-

العلاقة بين الجهد عبر المكثف V_c والشحنة عليه Q والتيار المار فيه i هي:

$$Q = CV_c$$

$$i = \frac{dQ}{dt} = c \frac{dV_c}{dt}$$

و

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد نجد :

$$Ri + V_c = E$$

$$RC \frac{dV_c}{dt} + V_c = E$$

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC}V_C = \frac{E}{RC} \quad \text{أو}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية نستطيع حلها بالطريقة المعتادة :

$$V_C = E + Ae^{-t/RC}$$

وحيث أن المكثف لم يكن مشحوناً في البداية (قبل قفل المفتاح) . وحيث أنه يحتاج لوقت لتغيير شحنته ، إذن $V_C = 0$ بعد قف المفتاح مباشرة

$$\therefore A = -E_0$$

ويكون :

$$V_C = E_0 \left(1 - e^{-t/RC} \right)$$

ولحساب شدة التيار هناك طريقتان :

$$V_C = E_0 \left(1 - e^{-t/RC} \right) \quad \text{و} \quad i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV_C}{dt} \quad \text{-1 لدينا:}$$

$$i = C \frac{dV_C}{dt} = \frac{E_0}{R} e^{-t/RC} \quad \text{نجد أن:}$$

2- نحصل على المعادلة التفاضلية للتيار بمفاضلة طرفي المعادلة $Ri + V_C = E$

$$R \frac{di}{dt} + \frac{dV_C}{dt} = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = 0 \Rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{1}{RC} dt \quad \text{أو}$$

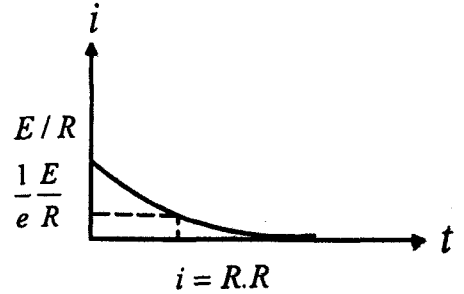
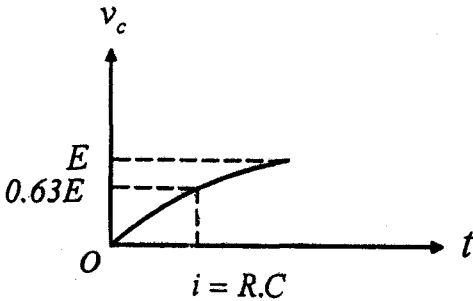
$$i = Be^{-t/RC} \quad \text{أو}$$

حيث B ثابت اختياري يتعين من الشروط الابتدائية ، عند قفل المفتاح مباشرة يظل جهد المكثف صفر لحظيا وبالتالي تظهر القوة الدافعة الكهربائية E كلها عبر المقاومة فيمر تيار E/R أي أن :

$$i(0^+) = E/R \Rightarrow B = E/R$$

وعليه

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/RC}$$



شكل -11-

بالنسبة للجهد : المركبة العابرة هي $-Ee^{-t/RC}$
تتلاشى مع مرور الزمن بن ثابت زمني قدرة $\tau = RC$
والمركبة المستقرة E

بالنسبة للتيار : فهو يتكون من مركبة العابرة فقط $\frac{E}{R} e^{-t/RC}$
تتلاشى مع مرور الزمن ويتلاشى الجهد عبر المقاومة .

تمارين

I - أوجد ما يلي:

1. معادلة المنحنى الذي مماسه عند نقطة ما (x, y) يقطع جزءاً $2xy^2$ من محور y .
2. معادلة المنحنى الذي عموده عند نقطة ما (x, y) يمر بنقطة الأصل.
3. معادلة المنحنى الذي مماسه عند نقطة ما (x, y) يمر بنقطة الأصل.
4. معادلة المنحنى الذي مماسه عند نقطة ما يصنع مع محاور الإحداثيات مثلثاً ذا مساحة ثابتة A .
5. معادلة المنحنى الذي يتناسب تحت له عند نقطة ما (x, y) مع مربع الإحداثي x .
6. معادلة المنحنى الذي يكون ميل المماس عند نقطة ما عليه نصف ميل المستقيم الذي يصل هذه النقطة بنقطة الأصل.
7. معادلة المنحنى الذي يكون ميل المماس عند نقطة ما مقلوب ميل المستقيم الذي يصل هذه النقطة بنقطة الأصل.
8. معادلة المنحنى الذي يكون طول العمود الساقط من نقطة الأصل على المماس لهذا المنحنى عند النقطة (x, y) مساوياً للإحداثي x .
9. معادلة المنحنى الذي يكون تحت المماس القطبي له مساوياً تحت العمودي القطبي.
10. معادلة المنحنى الذي تكون فيه الزاوية بين نصف القطر المتجه والمماس مساوياً لنصف الزاوية القطبية.

II- معدل تزايد البكتيريا يتناسب والعدد اللحظي للبكتيريا فإذا تضاعف العدد الأصلي للبكتيريا في ساعتين ، فبعد أي زمن يصل العدد إلى ثلاثة أمثال.

III- مادة مشعة تتحلل بمعدل يتناسب والكمية اللخطية الموجودة منها فإذا كانت الكمية الأصلية الموجودة من هذه المادة هي 100 مليغرام ولوحظ أن المادة فقدت % 15 من قيمتها الأصلية بعد 3 ساعات.

جد تغيير الكمية المادة الموجودة عند أي لحظة ؟ ما هي كمية المادة الموجودة بعد 6 ساعات ؟ يسمى زمن الحياة بالزمن اللازم لتفقد المادة % 50 من قيمتها الأصلية جد هذا الزمن ؟

IV- ينص قانون لامبرت (Lambert) للامتصاص على ان امتصاص الضوء في طبقة شفافة متصاغرة عموديا على اتجاه انتشار الضوء يتناسب وسمك هذه الطبقة من جهة وكمية الضوء الساقط على الطبقة من جهة أخرى . جد شدة الضوء داخل جسم سميك على عمق x من سطح السقوط .

V- سقط جسم كتلته 10 كجم من السكون في وسط مقاومته تتناسب مع مربع السرعة إذا كانت السرعة النهائية للجسم هي 50 م/ث فما هي سرعته بعد ثانييتين من لحظة السقوط ؟ وما هو الزمن الذي بعده تصبح السرعة 30م/ث؟

VI- يقف شاب عند الركن A من حمام سباحة مستطيل ABCD ممسكا بيده خيط مشدود طوله 10م مربوط بطرفه الآخر قارب (دون محرك) عند الركن B فإذا بدأ الشاب في التحرك على الجانب AD متجها صوب الركن D ومبقيا على الخيط مشدوداً دائماً .

جد معادلة مسار القارب وعين موضع كل الشاب والقارب عند ما يكون على بعد 6م من الجانب AC.

VII- أوجد التيار عند لحظة $t > 0$ في دائرة RL قوتها الدافعة الكهربائية $E = 10 \cos 50t$ (V) ومقاومتها $R = 10 \Omega$ ومحاثتها $R = 10 \text{ H}$ وتيارها الابتدائي يساوي صفراً .

VIII- دائرة RC قوتها الدافعة الكهربائية $E = 10 \sin 100 \pi t$ ومقاومتها 15 اوم وسعتها $C = 1 \text{ mF}$ والشحنة الابتدائية على المكثف قدرها $0.5C$ أوجد المركبة العابرة والمركبة المستقرة لكل من التيار وجهد المكثف .

الفصل السابع

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية

Second order linear Differential Equations

الفصل السابع

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية

Second order linear Differential Equations

Definitions and theorems

1. تعاريف ونظريات

- المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية هي معادلة من الصورة :

$$(1) \quad F(x, y, y', y'') = 0$$

وهي غالباً صعبة الحل ومعقدة الدراسة وسندرس في هذا الفصل المعادلات التفاضلية التي تحل في y'' والتي يمكن كتابتها على الصورة :-

$$(2) \quad y'' = f(x, y, y')$$

وكما سبق أن رأينا في الفصول السابقة أن الحل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى (أي التي تحتوي على المشتقة الأولى) يحتوي على ثابت اختياري واحد فقط وبما أن المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية تتضمن المشتقة الثانية أي يجب أن تكامل مرتين للحصول على الحل العام ومن الطبيعي أن نترقب ظهور ثابتين اختياريين في الحل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية .

مثال -1-

الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :-

$$y'' = g(x)$$

يكون من الشكل :-

$$y = A + Bx + \int^x \left[\int^t g(s) dx \right] dt$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

ملاحظة :-

للحصول علي منحني تكاملي واحد للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية فانه يجب معرفة شرطين إضافيين مثل قيمة التابع y وقيمة مشتقة y' عند هذه نقطة ما x_0 ويسمى هذان الشرطان بالشروط الابتدائية أو الحدية بمعنى آخر للحصول علي منحني تكاملي للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية يجب تحديد نقطة يمر بها وميل المنحني عند هذه النقطة .

سبق أن ذكرنا نظرية التواجد الأحادية بالنسبة للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى وسنذكر هنا أيضا نفس النظرية ولكن بالنسبة للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية .

2_ نظرية التواجد والأحادية الحل

Existence and Uniqueness Theorem

إذا كانت الدوال f , $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial g}$ مستمرة ووحيدة القيمة في منطقة R مفتوحة من الفضاء الثلاثي xyg و إذا كانت النقطة (x_0, y_0, y'_0) في R إذن في مجال حول x_0 فانه يوجد حل وحيد $y = \Phi(x)$ للمعادلة التفاضلية :

$$y'' = f(x, y, y')$$

ويحقق هذا الحل الشرطين الابتدائيين التاليين:-

$$y(x_0) = y_0 \quad , \quad y'(x_0) = y'_0$$

لا يعني وجود الحل، الحصول عليه بسهولة في عبارة صريحة ؛ فقد نتمكن من الحصول عليه في عبارة صريحة في حالة إذا كانت f دالة بسيطة .

3- يمكن أن نفرق بين المعادلات التفاضلية الخطية وغير الخطية من المرتبة الثانية كما هو الحال بالنسبة للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى . فالمعادلة التفاضلية الخطية العامة من المرتبة تكون من الشكل :

$$(3) \quad P(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$

حيث $G(x)$, $R(x)$, $Q(x)$, $P(x)$ دوال معلومة .

مثال 2-

أ- أهم مثال على المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية هي المعادلة التفاضلية التي تحكم حركة كتلة m معلقة بقباض (زنبرك) ثابت مرونته k ومعامل الاحتكاك c :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

حيث k, c, m ثوابت معلومة و F دالة معرفة من اجل جميع قيم t .

ب - معادلة ليجندر (Legendre (1784-1846 ذات الدرجة ∞ :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha - 1)y = 0$$

هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية .

ج- معادلة بيسل Bessel (1784-1846) من الدرجة ν :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية .

4- إذا كان معامل y'' في المعادلة التفاضلية (3) يختلف عند الصفر $P(x) \neq 0$ في هذه الحالة يمكن قسمة المعادلة على $P(x)$ فنحصل على المعادلة التفاضلية من الشكل :-

$$(4) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x)$$

ويمكن كتابتها على شكل المعادلة التفاضلية (2) فنحصل على الدالة f :-

$$f(x, y, y') = -p(x)y' - q(x)y + g(x)$$

$$\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} = -p(x) \quad , \quad \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} = -q(x) \quad \text{بحيث :-}$$

ونخلص إلى النظرية التالية بالنسبة للمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية .

نظرية التواحد وأحادية الحل للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية (2) :

- إذ كانت العوامل $g(x)$, $q(x)$, $p(x)$ دوال مستمرة في مجال مفتوح

$\alpha < x < \beta$ فإنه توجد دالة واحدة وواحدة فقط $y = \Phi(x)$ تحقق المعادلة:-

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

علي كل المجال $\alpha < x < B$ وتحقق أيضا الشرطين الابتدائيين :-

$$y(x_0) = y_0 \quad , \quad y'(x_0) = y'_0$$

عند نقطة خاصة x_0 في المجال $\alpha < x < B$ -

مثال -3-

جد حل المعادلة التالية :-

$$y'' + y = 0$$

الذي يحقق الشرطين الابتدائيين التاليين :- $y'(0) = 1$, $y(0) = 0$

الحل :-

انه من السهولة التحقق من أن : $\sin x$, $\cos x$ حلول للمعادلة التفاضلية المعطاة . أما التي تحقق الشروط الابتدائية هي $y = \sin x$ إذن وفق النظرية السابقة $y = \sin x$ هو الحل الوحيد للمعادلة المعطاة .

مثال -4-

ما هو الحل الوحيد للمعادلة التالية:-

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

حيث $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$ و x_0 نقطة في المجال

$$\alpha < x < B$$

الحل :-

بما أن $y = 0$ تحقق المعادلة التفاضلية والشروط الابتدائية معا إذن $y = 0$ هو الحل الوحيد

5- لحل المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

نبحث أولاً عن حل المعادلة المتجانسة :

$$(5) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

النتيجة من المعادلة (4) بوضع $g(x) = 0$.

وإذا عرفنا حل هذه المعادلة يمكن بطريقة عامة الحصول على حل المعادلة غير المتجانسة (4) .

2.VII المعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية :-

Nonlinear second Order Differential Equations.

إذا لم تكن المعادلة (2) من الشكل (3) فإنها معادلة تفاضلية غير خطية ، وبرغم أن دراسة المعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية صعبة إلى حد ما ، فإن هناك حالتين خاصتين يمكن فيهما اختزال المعادلة التفاضلية العامة غير الخطية من المرتبة الثانية (2) إلى معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ويحدث هذا في حالة غياب المتغير x أو المتغير y من الدالة $f(x, y, y')$ في المعادلة (2) أي لما تكون المعادلة من الشكل :

$$(6) \quad y'' = f(x, y')$$

$$(7) \quad y'' = f(y, y') \quad \text{أو}$$

يتم إجراء التغيير $y' = \vartheta$ بحيث تحل المعادلة من المرتبة الأولى بالنسبة للمتغير ϑ بإحدى الطرق المفصلة في الفصول السابقة ثم بعدها تكامل عبارة ϑ بالنسبة إلى x للحصول على الحل العام للمعادلة الأصلية .

الحالة الأولى :-

إذا كانت المعادلة من الشكل :- $y'' = f(x, y')$

بوضع $y' = \vartheta$ و $\vartheta' = y''$ نجد :

$$\vartheta' = f(x, \vartheta)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ليكن حلها من الشكل :

$$\vartheta = g(x, A)$$

$$\frac{dy}{dx} = \vartheta = g(x, A) \quad \text{وبما أن :}$$

$$y = \int g(x, A) dx + B \quad \text{وتكامل هذه المعادلة يعطي :-}$$

مثال -5-

حل المعادلة التفاضلية التالية :-

$$x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0$$

الحل :-

بوضع $y' = \vartheta$ تصبح المعادلة من الشكل :-

$$x^2 \vartheta' + 2x\vartheta - 1 = 0$$

$$\vartheta' + \frac{2}{x}\vartheta = \frac{1}{x^2} \quad \text{أو}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى وعامل التكميل :

$$\rho = e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$$

$$\rho \mathcal{G} = \int x^2 \frac{1}{x^2} dx + A = x + A \quad \text{وحلها من الشكل :}$$

$$\frac{dy}{dx} = \mathcal{G} = \frac{1}{x} + \frac{A}{x^2} \quad \text{أي :}$$

$$y = \ln x - \frac{A}{x} + B \quad \text{نكامل هذه المعادلة فنحصل على :-}$$

وهو الحل الوحيد للمعادلة المعطاة :-

الحالة الثانية :-

$$y'' = f(y, y') \quad \text{إذا كانت المعادلة من الشكل :}$$

بوضع $\mathcal{G} = y'$ نجد :

$$\mathcal{G}' = f(y, \mathcal{G})$$

هذه المعادلة تحتوي على y, x و \mathcal{G} وهي ليست على الصورة التفاضلية من المرتبة الأولى ، ولكن يمكن حذف المتغير x وتعويضه بالمتغير التابع y حيث :

$$\frac{d\mathcal{G}}{dx} = \frac{d\mathcal{G}}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \mathcal{G} \frac{d\mathcal{G}}{dy}$$

وتصبح المعادلة الأصلية من الصورة :

$$\mathcal{G} \frac{d\mathcal{G}}{dy} = f(y, \mathcal{G})$$

وهذه المعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ، وحلها هو عبارة عن علاقة بين y, g أي $g = g(y)$ أما العلاقة بين x, y ونحصل عليها من حل المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

ومن ناحية أخرى يظهر ثابتان اختياريان في الناتج النهائي .

مثال -6-

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$yy'' + (y')^2 = 0$$

الحل :-

$$y g' + g^2 = 0 \quad \text{بوضع } g = y' \text{ نجد :-}$$

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = g \frac{dg}{dy} \quad \text{ولكن}$$

$$y g \frac{dg}{dy} + g^2 = 0 \quad \text{إذن تصبح المعادلة من الشكل :-}$$

$$\frac{dg}{g} + \frac{dy}{y} = 0 \quad \text{وتكتب من الشكل :}$$

$$\ln g + \ln y = \ln A' \Rightarrow g = \frac{A'}{y} \quad \text{بعد المكاملة نجد :}$$

$$g = \frac{dy}{dx} = \frac{A'}{y} \quad \text{وبما أن}$$

$$ydy = A'dx \quad \text{أو}$$

$$\frac{1}{2}y^2 = A'x + B' \quad \text{ومنه}$$

إذن الحل العام للمعادلة المعطاة هو : $y^2 = Ax + B$

VII-3- المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية

Homogenous Linear Second Order Differential Equations .

انه من المفيد لدراسة المعادلات التفاضلية الخطية ، في أحيان كثيرة إدخال المؤثر التفاضلي الخطي وبما أن الدوال $p(x)$, $q(x)$ دوال مستمرة على المجال المفتوح $\alpha < x < B$. إذن إذا كانت y دالة قابلة للاشتقاق مرتين على المجال $\alpha < x < B$ فيمكن أن نعرف المؤثر الخطي بالمعادلة :-

$$L[y] = y'' + p \cdot y' + q \cdot y$$

ونعرف المؤثر التفاضلي بأنه ذلك المؤثر الذي إذا اثر على دالة ما $f(x)$ فان نواتج التأثير يكون المعامل التفاضلي لهذه الدالة أي مشتقتها $f'(x)$:-

$$Df(x) = f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2} \quad , \quad D = \frac{d}{dx} \quad \text{مما يعني انه :}$$

ومنه يمكن كتابة المؤثر الخطي L على الصورة :- $L = D^2 + pD + q$ وقيمة الدالة $L[y]$ عند النقطة x هي :-

$$L[y](x) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)$$

ويمكن كتابتها من الشكل :- $L[y] = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)$

مثال -7-

إذا كان: $y = \sin 3x$, $q(x) = 1 + x$, $p(x) = x^2$,

$$L[y] = (\sin 3x)'' + x^2 (\sin 3x)' + (1 + x)\sin 3x$$

فإن :

$$= -9 \sin 3x + 3x^2 \cos 3x + (1 + x)\sin 3x$$

ويمكن كتابة المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية على الصورة الموجزة :-

$$L[y] = g(x)$$

كما نأخذ المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية الصورة الموجزة :

$$L[y] = 0$$

في هذه الفقرة سندرس المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية :-

$$L[y] = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y = 0$$

حيث أن q, p دوال مستمرة على المجال المفتوح $\alpha < x < B$

نظرية -3-

إذا كان $y = y_1(x)$ و $y = y_2(x)$ حلين للمعادلة التفاضلية :

$$L[y] = 0$$

فإن التوافقية الخطية $y = Ay_1(x) + By_2(x)$ هي أيضا حلا للمعادلة التفاضلية

حيث أن B, A ثابتين اختياريان .

البرهان :-

لدينا $y = y_1(x)$ هو الحل للمعادلة التفاضلية $L[y] = 0$ أي أن :-

$$L[y_1] = y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$$

ولدينا $y = y_2(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $L[y] = 0$ أي أن :-

$$L[y_2] = y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$$

لنحسب $L[Ay_1 + By_2]$

$$L[Ay_1 + By_2] = (Ay_1 + By_2)'' + p(x)(Ay_1 + By_2)' + q(x)(Ay_1 + By_2)$$

$$= A(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + B(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)$$

$$= AL[y_1] + BL[y_2] = 0$$

إذن $y = Ay_1 + By_2$ هو حل للمعادلة المعطاة .

ملاحظات :-

1- إذا أخذنا في العبارة الأخيرة $B = 0$ فنلاحظ انه إذا كانت y_1 حلا للمعادلة

$L[y] = 0$ فان Ay_1 هو أيضا حل للمعادلة .

2- واضح من برهان النظرية -3 أن المؤثر التفاضلي L له الخاصية التالية :-

$$L[Ay_1 + By_2] = AL[y_1] + BL[y_2]$$

كل مؤثر له هذه الخاصية يدعي (مؤثر خطي) و بالخصوص المؤثر التفاضلي

L هو مؤثر تفاضلي خطي من المرتبة الثانية .

3- ونخلص في النهاية إلى مبدأ يلعب دورا هاما في موضوع المعادلات التفاضلية الخطية الذي يعرف بمبدأ التراكب (Superposition principle) :-
 إذا كانت فئة الدوال $\{y_i(x)\}_{i=1..m}$ هي حلول مستقلة للمعادلة التفاضلية المتجانسة $L[y] = 0$ فان أية توافقية خطية

$$\sum_{i=1}^k A_i y_i(x) = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) + \dots + A_k y_k(x)$$

من بين هذه الحلول هي أيضا حل المعادلة المتجانسة $L[y] = 0$.

ملاحظة :-

يجب قبل البدء في تطبيق المبدأ التأكد من أن المعادلة التفاضلية خطية ومتجانسة حيث أنه لا ينطبق هذا المبدأ على المعادلات التفاضلية غير الخطية أو غير المتجانسة .

مثال -8-

تحقق بالتعويض المباشر أن $y = A \cos x + B \sin x$ هو حل للمعادلة التفاضلية :

$$y'' + y = 0$$

الحل :

بالتعويض المباشر في المعادلة التفاضلية نجد :

$$y'' + y = (A \cos x + B \sin x)'' + (A \cos x + B \sin x)$$

$$= A [(\cos x)'' + \cos x] + B [(\sin x)'' + \sin x]$$

$$= A [-\cos x + \cos x] + B [-\sin x + \sin x] = 0$$

مثال -9-

تحقق من أن $y = x + 1$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 3y' + y = x + 4$ وان الدالة $\Phi(x) = 2x$ ليست حلا للمعادلة .

الحل :

$$y = x + 1 \quad , \quad y' = 1 \quad , \quad y'' = 0 \quad \text{بما أن}$$

$$y'' + 3y' + y = 0 + 3(1) + (x + 1) = x + 4 \quad \text{إذن}$$

$$\Phi'' + 3\Phi' + \Phi = 0 + 3(2) + 2(x + 1) \neq x + 4 \quad \text{ولدينا}$$

هذا لا يتعارض مع النظرية -3- لأن المعادلة التفاضلية غير متجانسة بالرغم من كونها خطية .

مثال -10-

بين أن إذا كانت y_1, y_2 حلين للمعادلة التفاضلية :

$$L[y] = y'' + y^2 = 0$$

فانه ليس من الضروري أن تكون التوافقية الخطية $Ay_1 + By_2$ حلا للمعادلة :-

الحل :

$$L[y_1] = y_1'' + y_1^2 = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$L[y_2] = y_2'' + y_2^2 = 0$$

ومنه يكون لدينا :-

$$L[Ay_1 + By_2] = (Ay_1 + By_2)'' + (Ay_1 + By_2)^2$$

$$= Ay_1'' + By_2'' + A_1^2 y_1^2 + B^2 y_2^2 + 2AB y_1 y_2$$

$$\neq AL[y_1] + BL[y_2]$$

لان المعادلة ليست خطية .

نتيجة -1-

تقد رأينا انه إذا كان y_2, y_1 حلين للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (5) فإن كل توافقية خطية $Ay_1 + By_2$ هي أيضا حل للمعادلة .

نتيجة -2-

نسمي فئة الحلول $\{y_1, y_2\}$ قاعدة الحلول للمعادلة التفاضلية الخطية (5) إذا كان كل حل للمعادلة على صورة توافقية خطية من كل قاعدة الحلول هذه . وعدد الدوال المكونة لقاعدة حلول معادلة تفاضلية خطية متجانسة ثابت ، وان اتخذت هذه الدوال صوراً مختلفة على انه يمكن إرجاع هذه الصورة بعضها لبعض .

تعريف :-

لنكن لدينا دالتان y_2, y_1 قابلتان للاشتقاق ومعرفتان على مجال ما مفتوح نعرف محددة رونسكي أن ببساطة رونسكيان (wronskion) الدالتين y_2, y_1 بأنها المحددة :

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

ورونسكيان فئة دوال هو عموماً ما دالة للمتغير المطلق x وقد يكون ثابتاً أو صفراً فمثلاً :-

$$w(x, x^2, x^3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3$$

$$w(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$$

$$w(-2x, x) = \begin{vmatrix} -2x & x \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

و الآن إلى النظرية الهامة التالية :-

نظرية -4-

إذا كانت الدالتان $p(x)$, $q(x)$ مستمرتين على المجال المفتوح $\alpha < x < B$ إذا كانت الدالتان y_1, y_2 حلين للمعادلة التفاضلية (5)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

على المجال $\alpha < x < B$ وإذا كانت على الأقل نقطة واحدة في المجال $\alpha < x < B$ حيث $w(y_1, y_2)$ لا يساوي الصفر ، إذن كل حل y للمعادلة (5) يمكن أن يوضع على الصورة :-

$$y = Ay_1 + By_2$$

البرهان :-

الفرض : لتكن y_1, y_2, y_3 حلول المعادلة (5)

و $w(y_1, y_2)$ لا يساوي الصفر على المجال $\alpha < x < B$.

المطلوب إثبات إن : $y_3 = Ay_1 + By_2$

الإثبات :

بما أن y_1, y_2, y_3 هي حلول المعادلة التفاضلية (5) إذن :-

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$$

$$y_3'' + p(x)y_3' + q(x)y_3 = 0$$

بضرب المعادلة الأولى في $(-y_2)$ والثانية في y_1 ثم تجمع المعادلتين الناتجتين فنحصل على :-

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + P(x)[y_1 y_2' - y_2 y_1'] = 0 \quad (a)$$

$$w_{12}(x) = W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' \quad \text{بوضع}$$

نلاحظ أن المعادلة (a) يمكن أن تكتب على الشكل :

$$w_{12}' + p(x)w_{12} = 0 \quad (b)$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى قابلة للفصل وحلها يكون من الشكل :

$$W_{12}(x) = C_{12} e^{-\int p(x) dx} \quad (c)$$

وتعرف هذه العلاقة بمطابقة ابل (Abel's Identity) نسبة إلى الشاب الرياضي النرويجي نيلز ابل (1802-1829) ..

حيث أن الدالة الأسية $e^{-\int p dx}$ لا تتعدم أبداً إلا إذا كان $\int p dx = \infty$ وهذا لن يتوفر حدوثه لأن p دالة مستمرة فرضاً . إذن فلن ينعدم الرونسكيان إلا بانعدام الثابت الاختياري فقط وفي هذه الحالة فقط الحلان y_1, y_2 متناسبان طردياً .

وبنفس الطريقة باستعمال الثانية والثالثة معا تم الأولى والثالثة معا فنحصل على :-

$$W'_{23} + p(n)(x)_{23} = 0 \quad (d)$$

$$W'_{13} + p(n)(x)_{13} = 0 \quad (e)$$

وهما معادلتان تفاضليتان من المرتبة الأولى قابلتين للفصل ومنه :

$$W_{23} = C_{23} e^{-\int p(x) dx} \quad (f)$$

$$W_{13} = C_{13} e^{-\int p(x) dx} \quad (g)$$

حيث C_{13}, C_{23}, C_{12} ثوابت اختيارية وخاصة $C_{12} \neq 0$ لأن $W_{12} \neq 0$ فرضا .
بضرب المعادلة (f) في $(-y_1)$ والمعادلة (g) في y_2 ثم بجمع المعادلتين فنجد:

$$(y_1 y_2' - y_1' y_2) y_3 = [C_{13} y_2 - C_{23} y_1] e^{-\int p(x) dx}$$

باستخدام (C) وتعويضنا في هذه المعادلة نجد :-

$$y_3 = -\frac{C_{23}}{C_{12}} y_1 + \frac{C_{13}}{C_{12}} y_2 = Ay_1 + By_2$$

إن y_3 هي عبارة عن توافقية خطية من y_1, y_2 وهو المطلوب .

ملاحظة :

يبقى أن نثبت أن للمعادلة التفاضلية (5) قاعدة حلول وهذا ما نثبتته في النظرية التالية :

نظرية -5-

إذ كانت الدالتان $p(x)$, $g(x)$ مستمرين على مجال ما مفتوح $\alpha < x < B$ فإن
إن فاته توجد قاعدة حلول للمعادلة التفاضلية (5)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

على المجال $\alpha < x < B$

البرهان :-

لتكن C نقطة من المجال $\alpha < x < B$ وبناء على نظرية و التواجد الأحادية فإنه

يوجد حلان y_1, y_2 وحيدان لمسألتى القيم الحدية التاليتين على الترتيب :-

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \quad , \quad y_1(c) = 1 \quad , \quad y_1'(c) = 0$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \quad , \quad y_2(c) = 0 \quad , \quad y_2'(c) = 1$$

على المجال $\alpha < x < B$ وواضح أن $w(y_1, y_2) \neq 0$ عند النقطة C أن من
النظرية (4) ينتج أن $\{y_1, y_2\}$ هي قاعدة حلول للمعادلة التفاضلية (5) .

vii. 4. الاستقلال والارتباط الخطي :-

Linear dependance and linear Independane.

أن فكرة انه الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية هو عبارة عن
توافقية خطية لحلين اثنين حيث رانسكيان هذين الحلين يختلف عن الصفر مرتبطة
بصميم فكرة التبعية الخطية لدالتين .

نعتبر العلاقة الخطية التالية :

$$(8) \quad Af(x) + Bg(x) = 0$$

حيث $f(x), g(x)$ دالتان في x معرفتنا في مجال ما $\alpha < x \leq \beta, A, B$ ثابتان اختياريان يراد تعيينهما . واضح أن هذه العلاقة تسري بالتأكيد على الحالة $B=0, A=0$ أما إذا وجد أن هذه العلاقة تسري على الحالة $A \neq 0$ فإنه يمكن القسمة على A نجد أن :-

$$f(x) = -\frac{A}{B}g(x)$$

بالمثل إذا كان $\alpha < B \neq 0$ فيالقسمة على A نجد أن $g(x) = \frac{A}{B}f(x)$

وفي كلتا الحالتين يكون هناك تناسب بين الدالتين $f(x), g(x)$ في المجال $\alpha < x < \beta$ ويقال في هذه الحالة ان هناك ارتباطا خطيا (linear Dependane) بين $f(x), g(x)$ أو انهما تابعتان أو مرتبطتان خطيا أي يمكن الحصول على إحدهما بدلالة الأخرى من خلال عملية تناسب . وبمعنى آخر تكون الدالتان $f(x), g(x)$ تابعتين خطيا على المجال المعرفتان عليه إذا وإذا فقط , أمكن إيجاد ثابتين A, B بحيث ينعدم كلاهما وبحيث تتحقق العلاقة :

$$Af(x) + Bg(x) = 0$$

لجميع قيم x في المجال $\alpha < x < \beta$

أما إذا لم تتحقق المتطابقة السابقة على المجال $\alpha < x < \beta$ إلا في حالة واحدة هي انعدام A, B معا فان $f(x), g(x)$ تكونان مستقلتين خطيا على المجال $\alpha < x < \beta$ وفي هذه الحالة لا يمكن التعبير عن إحدى الدالتين بدلالة الأخرى .

مثال 11-

الدالتان $f(x) = x, g(x) = 5x$ تابعتان خطيا على المجال $]-\infty + \infty[$ لانه يمكن تكوين علاقة خطية على نمط العلاقة السابقة (8) تتحقق للقيم :

$$5f(x) - g(x) = 5(x) - (5x) = 0 \quad : \quad B = -1, A = 5$$

وبطبيعة الحال فالتناسب بين $f(x)$, $g(x)$ واضح .
بينما الدالتان $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ دالتان مستقلتان خطيا لانه لا يمكن
تكوين علاقة خطية بينهما على نمط العلاقة (8) دون انعدام كل من A , B

حالة عامة :

الآن نعمم هذا المفاهيم :-

دوال الفئة $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$ المعرفة على المجال $\alpha < x < \beta$, تكون تابعة خطيا
على المجال $\alpha < x < \beta$ إذا وجدت فئة من الثوابت $\{A_i\}_{i=1}^n$ بحيث لا تتعدم
جميعها وبحيث يكون :

$$\sum_{i=1}^n A_i y_i(x) = 0$$

$$(9) \quad A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) + \dots + A_i y_i(x) + \dots + A_n y_n(x) = 0 \quad \text{أو}$$

عند أي قيمة x في المجال $\alpha < x < \beta$

مثال -12-

نلاحظ ان دوال الفئة $\{x, 2x, x^2\}$ ثابتة خطيا على المجال $[-\infty, +\infty]$ لانه
توجد فئة ثوابت $\{2, -1, 0\}$ لا تتعدم جميعها بحيث يكون

$$2(x) - 1(2x) + 0(x^2) = 0$$

كما يقال أن دوال الفئة $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$ المعرفة على المجال $\alpha < x < \beta$ تكون مستقلة
خطيا على هذا المجال إذا لم تكن تابعة خطيا ويستلزم ذلك إلا تتحقق (9) إلا بانعدام

جميع الثوابت $\{A_i\}_{i=1}^n$ أي أن

$$A_1 = A_2 = \dots = A_i = \dots = A_n = 0$$

مثال -13-

نلاحظ أن دوال الفئة $\{1, x, x^2\}$ مستقلة خطيا على المجال $]-\infty, +\infty[$ لأنه لا يمكن بأي حال تكوين فئة من الثوابت $\{A_1, A_2, A_3\}$ بحيث تتحقق المتطابقة $A_1(1) + A_2(x) + A_3(x^2) = 0$ إلا إذا انعدمت كل هذه الثوابت . ولكن يجدر ملاحظة انه إذا لم تتعدم هذه الثوابت فان هذه المتطابقة لا تتحقق إلا عند قيمتين على الأكثر من قيم x وليس عند جميع قيم x ، هما جذران المتطابقة إذا اعتبرناها معادلة من الدرجة الثانية في x . الآن نستطيع إعادة النظرية -4- باستعمال مفهوم الاستقلالية الخط .

نظرية -6-

إذا كانت الدالتان $p(x), q(x)$ مستمرتين على مجال ما مفتوح وإذا كانت الدالتان y_1, y_2 حلين مستقلين خطيا للمعادلة التفاضلية التالية :

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

إن فالرونسكيان $w(y_1, y_2)$ يختلف عن الصفر على المجال $\alpha < x < \beta$ وأن كل حل للمعادلة التفاضلية يمكن أن يوضع على شكل توافقية خطية من y_1, y_2 .
البرهان :-

لإثبات هذه النظرية يجب ان نبرهن انه إذا كانتا y_1, y_2 حلين للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية و هما مستقلان خطيا في المجال $\alpha < x < \beta$ إذن $w(y_1, y_2)$ يختلف عن الصفر المجال $\alpha < x < \beta$.
لنفترض انه توجد نقطة x_0 من المجال $\alpha < x < \beta$ حيث $w(y_1, y_2)(x_0) = 0$ وسنثبت الآن أن هذا يؤدي إلى تعارض .

إذا كان : $w(y_1, y_2)(x) = 0$

إذن فيظام المعادلتين :-

$$A_1 y_1(x_0) + B y_2(x_0) = 0$$

$$A y_1(x_0) + B y_2'(x_0) = 0$$

بالنسبة للثابتين A, B له حل غير الحل الصفري .

باستعمال هذه القيم للثابتين A, B , ليكن $y = A y_1(x) + B y_2(x)$ إذن y هي حل المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية ونلاحظ من المعادلتين السابقتين أنها تحقق الشروط الابتدائية .

$$y(x_0) = y'(x_0) = 0$$

وبناء على نظرية التوحد والفردية فإن $y(x) = 0$ من اجل كل قيم x في المجال

$$\alpha < x < \beta \quad \text{انظر مثال -4}$$

إذن $A y_1(x) + B y_2(x) = 0$ على المجال $\alpha < x < \beta$ والذي يستلزم أن y_1, y_2 مرتبطين (تابعين) خطيا . وهذا تناقض .

معكوس النظرية هو أيضا صحيح ونعني انه إذا كان :

$$L[y_1] = 0 \quad , \quad L[y_2] = 0$$

و $w(y_1, y_2) \neq 0$ على المجال $\alpha < x < \beta$

إذن فالدالتان y_1, y_2 مستقلتان خطيا على المجال $\alpha < x < \beta$ ولإثبات هذه

القضية نعرض العكس أن y_1, y_2 مرتبطين خطيا على المجال $\alpha < x < \beta$

إذن فانه يوجد ثابتان A, B يختلفان عند الصفر حيث :

$$A y_1(x) + B y_2(x) = 0 \quad \text{على المجال } \alpha < x < \beta$$

وبالتالي $A y_1'(x) + B y_2'(x) = 0$ على المجال $\alpha < x < \beta$

إذن من أجل قيم $A, B, (A \text{ أو } B)$ تختلف عن الصفر المحققة للمعادلتين السابقتين فإنه من اللازم ومن الواجب أيضا أن يكون $w(y_1, y_2) = 0$ من أجل كل x وهذا تناقض .

إذن يكون حلا المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية مستقلين خطيا إذا و إذا فقط رونسكيان الدالتين يختلف عن الصفر عند أي نقطة على المجال $\alpha < x < \beta$

5.vii تنفيذ المرتبة لمعادلة تفاضلية خطية :-

من أهم خواص المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية أنه إذا كان حل واحد للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية معلوما فإنه يمكن تعيين الحل الثاني المستقل خطيا وأيضا القاعدة الأساسية للحل وهذه الطريقة تسمى بطريقة دالمبير DAmbert او بطريقة تخفيض المرتبة .

نفرض أن y_1 حيث $y_1 \neq 0$ حل للمعادلة :-

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

ولنستعمله في تخفيض مرتبة هذه المعادلة بأخذ دالة جديدة $\mathcal{G}(x)$ حيث :

$$(10) \quad y = \mathcal{G}(x)y_1(x)$$

وبالاشتقاق نجد :

$$y' = \mathcal{G}(x)y_1'(x) + \mathcal{G}'(x)y_1(x)$$

$$y'' = \mathcal{G}(x)y_1''(x) + 2\mathcal{G}'(x)y_1'(x) + \mathcal{G}''(x)y_1(x)$$

وبالتعويض في المعادلة بعد الترتيب نجد :

$$\mathcal{G}(x) \left[y_1'' + p y_1' + q y_1 \right] + \mathcal{G}' \left[2 y_1' + p y_1 \right] + \mathcal{G}'' y_1 = 0$$

بما أن y_1 حل للمعادلة التفاضلية من المرتبة فالحد الأول من هذه المعادلة معدوم .
وبما أن $y_1 \neq 0$ يمكن القسمة على y_1 فنحصل على :

$$(11) \quad \mathcal{G}'' + \left[p + 2 \frac{y_1'}{y_1} \right] \mathcal{G}' = 0$$

لنفرض أن $z = \mathcal{G}'$ فنجد أن المعادلة (11) يمكن أن تكتب على الشكل :

$$Z' + \left[p + 2 \frac{y_1'}{y_1} \right] Z = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية في المرتبة الأولى بالنسبة للمتغير التابع Z ويمكن حلها
بفصل المتغيرات حيث :

$$\frac{dz}{z} = - \left[p + 2 \frac{y_1'}{y_1} \right] dx$$

بالمكاملة نجد :

$$\ln Z = - \int p dx - 2 \ln y_1 + \ln A$$

حيث A ثابت اختياري

$$\mathcal{G}' = Z = A \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} = AU(x) \quad \text{أو}$$

بالمكاملة مرة أخرى نجد :

$$\vartheta(x) = \int Z dx = A \int U(x) dx + B$$

$$U(x) = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} \quad \text{حيث :}$$

و B ثابت اختياري ثاني .

بالتعويض في التابع الأصلي نجد :-

$$y = \vartheta(x)y = Ay_1 = Ay_1(x) \int U(x) dx + By_1(x)$$

وهكذا نلاحظ أننا إذ عرفنا حلا واحدا للمعادلة الخطية من المرتبة الثانية فإننا نحتاج إلى عمليتي تكامل للوصول إلى الحل العام .
ونلاحظ أن الحلين :

$$(12) \quad y = y_1(x) \quad , \quad y = y_1(x) \int U(x) dx$$

حلان مستقلان خطيا .

ملاحظات :-

(1) انه من الممكن الحصول على الحل الثاني المستقل خطيا المعطي بالعلاقة (12) باستعمال قاعدة ابييل (Abel) لرونسكيان لحلين مستقلين خطيا .

(2) طريقة تخفيض المرتبة يمكن استعمالها أيضا في حالة المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة .

مثال -14-

بين أن $y = x$ هو الحل لمعادلة ليجندر (Legendre) :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad -1 < x < 1$$

ثم جد الحل الثاني المستقل خطيا .

الحل :-

$$y'' = 0 \quad , \quad y' = 1 \quad \text{فإن } y = x \text{ كان إذا كان}$$

بالتعويض في المعادلة نجد :

$$(1 - x^2)0 - 2x + 2x = 0$$

إذن $y = x$ هو حل للمعادلة .

ولإيجاد الحل الثاني نفرض $y = xg(x)$

$$y' = xg' + g \quad \text{و} \quad y'' = xg'' + 2g'$$

وبالتعويض في المعادلة عن y, y', y'' نجد :

$$(1 - x^2)(xg'' + 2g') - 2x(xg' + g) + 2xg = 0$$

بعد الترتيب والقسمة على $x(1 - x^2)$ نحصل على :

$$g'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{1 - x^2} \right) g' = 0$$

ونلاحظ ان معامل g' غير معرف عند النقطة $x = 0$ وهو صفر الدالة $p(x)$ وهذا

لا يؤثر في الحل العام ولهذا نبحت أولا عن العمل للمعادلة الأخيرة في المجال

$$0 < x < 1 \quad \text{ثم في المجال } -1 < x < 0$$

المعادلة الأخيرة عبارة عن معادلة خطية من المرتبة الأولى لـ g' وعامل تكميل هذه المعادلة هو $x^2(1-x^2)$ إذن :

$$\left[x^2 (1 + x^2) g' \right] = 0$$

$$x^2 (1 - x^2) g' = A'$$

$$g(x) = A' \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} + B = A' \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2} \right) dx + B \quad \text{ومنه}$$

$$= A' \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right] + B$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية من الشكل :

$$y = A \left[1 - \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right] + Bx = Ay_2 + By_1$$

$$y_2 = 1 - \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \text{حيث}$$

وهو الحل الثاني للمعادلة .

ونلاحظ أن الدالة $g(x)$ غير معرفة عند النقطة $x=0$ وواضح ان نهاية $y_2(x)$ عندما $x \rightarrow 0$ موجودة . فالدالة $y_2(x)$ المعرفة على المجال $-1 < x < 1$ تحقق المعادلة التفاضلية على المجال $-1 < x < 1$ وليس فقط على المجالين $-1 < x < 0$ و $0 < x < 1$. من جهة أخرى تصبح y_2 غير منتهية عندما $x \rightarrow \pm 1$ وهذا يتفق تمام مع ان معامل y'' في المعادلة ينعدم عندما $x \rightarrow \pm 1$ بينما معاملي y, y' لا ينعدمان وسنعود لهذا الموضوع فيما بعد .

VIII-6. المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة :

Second order Homogenous Linear Differential Equations with constant coefficients .

نعود الآن إلى الدراسة العامة للمعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية بغية الحصول على حلول ذات المعاملات الثابتة وتكتب هذه المعادلات على الصورة:

$$(12) \quad ay'' + by' + cy = 0$$

حيث $c, b, a \neq 0$ ثوابت اختيارية نفترضها حقيقية للملاءمة وبناء على النظرية -6- فإنه يوجد حلان مستقلان خطيا للمعادلة (12) ولإيجاد هذين الحلين نلاحظ أولا أن هذه المعادلة هي علاقة خطية بين $y(x)$ ومشتقاتها والدالة التي يمكن أن تحقق مثل هذه العلاقة الخطية هي الدالة الأسية e^{mx} . لكن لقيم خاصة أو مميزة يراد تعيينها للثابت m ويرجع ذلك لكون الدالة الأسية هي الدالة الوحيدة التي تناسب جميع مشتقاتها معها ومع بعضها البعض .

اذن نفرض حلا للمعادلة (12) على الصورة الأسية $y = e^{mx}$:

$$(13) \quad y = e^{mx} \Rightarrow y' = me^{mx}, y'' = m^2 e^{mx}$$

وبالتعويض عن y ومشتقاتها من (13) في (12) واخذ e^{mx} عاملا مشتركا نجد أن :

$$(am^2 + bm + c)e^{mx} = 0$$

وحيث أن e^{mx} لا يمكن أن تتعدم . إذن يجب أن يتعدم القوس :

$$(14) \quad am^2 + bm + c = 0$$

أي انه كي تكون e^{mx} حلا للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة (12) فان الثابت m يجب أن يحقق المعادلة (14) والتي هي معادلة جبرية من الدرجة الثانية في m وتسمى المعادلة (14) المعادلة المميزة (Characteristic or Auxiliary Equation) أو المعادلة المساعدة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة للمعادلة (14) جذرين هما :

$$(15) \quad m_1 = \frac{1}{2\alpha} \left[-b + \sqrt{b^2 - 4\alpha c} \right]$$

$$m_2 = \frac{1}{2\alpha} \left[-b - \sqrt{b^2 - 4\alpha c} \right]$$

واضح أن طبيعة حلول المعادلة (12) تتعلق بقيمتي m_2, m_1 والتي بدورها تتعلق بالمعاملات الثابتة في المعادلة التفاضلية من خلال العلاقة (15) وهناك ثلاث حالات جديرة بالاعتبار :

$$1- \text{الجذران حقيقيان متمايزان } b^2 - 4\alpha c > 0$$

في هذه الحالة يكون الحلان $e^{m_1 x}, e^{m_2 x}$ حلين مستقلين خطيا ويكون الحل العام من الصورة :

$$(16) \quad y = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x}$$

مثال-15-

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

هذه معادلة تفاضلية خطية متجانسة من المرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة .

المعادلة المميزة هي $m^2 - 5m + 6 = 0$ وجذراها $m_2 = 3, m_1 = 2$ حقيقيان متميزان وحلها العام هو :

$$y = Ae^{2x} + Be^{3x}$$

ملاحظة : على انه إذا كان المميز (descricant) $b^2 - 4ax$ كمية غير جذرية فانه يمكن وضع m_2, m_1 على الصورة :-

$$m_2 = p - q, \quad m_1 = p + q$$

$$p = -\frac{b}{2\alpha}, \quad q = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{b^2 - 4\alpha c} \quad \text{حيث}$$

وفي هذه الحالة يمكن وضع الحل العام (16) على صورة أخرى كما يلي :-

$$\begin{aligned} y &= Ae^{(p+q)x} + Be^{(p-q)x} = Ae^{px} e^{qx} + Be^{px} e^{-qx} \\ &= e^{px} [Ae^{qx} + Be^{-qx}] = e^{px} [A(\cosh x + \sinh x) + B(\cosh x - \sinh x)] \end{aligned}$$

$$\therefore y = e^{px} [A_1 \cosh x + B_1 \sinh x]$$

حيث $B_1 = A - B, A_1 = A + B$ ثابتان اختياريان آخران .

مثال -16-

$$y'' + 2y' - y = 0 \quad \text{المعادلة التفاضلية}$$

لها معادلة مميزة من الصورة :

$$m^2 + 2m - 1 = 0$$

$$m_2 = 1 - \sqrt{2}, \quad m_1 = 1 + \sqrt{2} \quad \text{وجذراها هما :}$$

وعليه يكون الحل العام هو :

$$y = Ae^{(-1+\sqrt{2})x} + Be^{(-1-\sqrt{2})x} = e^{-x} [A_1 \cosh \sqrt{2}x + B_1 \sinh \sqrt{2}x]$$

-2- جذران مركبان مترافقان $b^2 - 4ac < 0$

إذا كان المميز $b^2 - 4ac$ كمية سالبة كان الجذران مركبين ومترافقين ليكن :-

$$m_1 = \alpha + iB \quad , \quad m_2 = \alpha - iB$$

حيث

$$\alpha = \frac{b}{2a} \quad , \quad B = \sqrt{4ac - b^2} \quad , \quad i^2 = -1$$

يكون الحلان e^{m_1x} , e^{m_2x} حلين مستقلين خطيا ويكون الحل العام من الصورة :

$$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$$

وباستخدام علاقة اويلر (Euler) $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ يمكن تحويل هذه

الصورة المركبة إلى صورة حقيقية كما يلي :-

$$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x} = Ae^{(\alpha+i\beta)x} + Be^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$y = e^{\alpha x} [Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}] = e^{\alpha x} [A(\cos \beta x + i \sin \beta x) + B(\cos \beta x - i \sin \beta x)]$$

$$= e^{\alpha x} [(A+B)\cos \beta x +]$$

وضع $A_1 = A+B$ و $B_1 = i(A-B)$ نحصل على :

$$y = e^{\alpha x} [A_1 \cos \beta x + B_1 \sin \beta x] = Ce^{\alpha x} \cos(\beta x + \mu)$$

$$C = (A_1^2 + B_1^2)^{1/2} \quad \text{و} \quad \mu = \tan^{-1} \frac{B_1}{A_1} \quad \text{حيث}$$

ويلاحظ أن هناك دائما ثابتين اختياريين A, B أو A_1, B_1 أو μ, C

مثال -17-

$$y'' + y' + y = 0 \quad \text{لتكن المعادلة :-}$$

$$m^2 + m + 1 = 0 \quad \text{المعادلة المميزة هي :-}$$

$$m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad m_1 = -\frac{1}{2} + 1 \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{وجذراها هما :-}$$

وعلى ذلك يكون الحل العام هو :

$$y = Ce^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \mu\right)$$

3- جذران متساويان :

أي إن هناك جذرا واحدا مزدوجا هو $b/2a$ ويكون $e^{-bx/2a}$ هو أحد الحلين المستقلين خطيا والحل الأخر نستطيع الحصول عليه باستعمال طريقة تخفيض المرتبة للمعادلة التفاضلية الخطية .

$$y = g(x)e^{-(b/2a)x} \quad \text{ليكن}$$

إنن :

$$y' = g'(x)e^{-\frac{bx}{2a}} - \frac{b}{2a}g(x)e^{-\frac{bx}{2a}} = \left(g' - \frac{b}{2a}g\right)e^{-\frac{bx}{2a}}$$

بالتعويض في المعادلة (12) والقسمة على العامل المشترك $e^{-(b/2a)x}$ نحصل على:-

$$a \left(g'' - \frac{b}{a} g' + \frac{b^2}{4a^2} g \right) + \left(g' - \frac{b}{2a} g \right) + C g = 0$$

بعد ترتيب الحدود نحصل على :

$$a g'' - \left(\frac{b^2}{4a} - C \right) g = 0$$

وبما انه $b^2 - 4aC = 0$ إذن فالحد الثاني في هذه المعادلة معدوم ونحصل على :

$$g'' = 0$$

$$g(x) = Ax + B \quad \text{:- إذن}$$

حيث A, B ثابتان اختياريان يكون الحل العام هو :

$$y = e^{-bx/2a} (Ax + B)$$

مثال -18-

جد المعادلة التفاضلية : $y'' + 4y' + 4 = 0$

الحل :-

المعادلة المميزة لهذه المعادلة التفاضلية هي : $m^2 + 4m + 4 = 0$

ويكون جذراهما عبارة عن جذر مزدوج $m = -2$

وبالتالي يكون الحل العام هو :

$$y = e^{-2x} (Ax + B)$$

ملخص : وفيما يلي ملخص لهذه الحالات الثلاث :

الحل العام	قاعدة الحلول	المميز	جذرا المعادلة المميزة
$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$	$\{e^{m_1x}, e^{m_2x}\}$	$b^2 - 4aC > 0$	متمايزان حقيقيان m_1, m_2
$y = e^{\alpha x} [A \cosh \beta x + B \sinh \beta x]$	$\{e^{\alpha x} \cosh \beta x, e^{\alpha x} \sinh \beta x\}$	$b^2 - 4aC > 0$	متمايزان حقيقيان m_1, m_2
$y = e^{\alpha x} [A \cos \beta x + B \sin \beta x]$	$\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$	$b^2 - 4aC < 0$	مركبان مترافقان $\alpha \pm i\beta$
$y = e^{mx} (Ax + B)$	$\{e^{mx}, xe^{mx}\}$	$b^2 - 4aC = 0$	متساويان (جذر مزدوج) $m = -b/2a$

جدول I-1 جذور المعادلة المميزة وقاعدة الحلول والحل العام للمعادلة التفاضلية

$$ay'' + by + c = 0$$

مثال -19-

هما جذران المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

I—أثبت أن الحلين e^{m_1x} , e^{m_2x} يكونان حلين مستقلين خطياً فقط إذا كان $m_1 \neq m_2$

II—إذا كان $m_1 \neq m_2 = m = -\frac{b}{2a}$ فاثبت بالتعويض المباشر في المعادلة التفاضلية المعرفة أن e^{mx} يصلح حلاً لها . أوجد الحل الآخر المستقل خطياً باستعمال (11) :

الحل :-

I— لكي يكون الحلان e^{m_1x} , e^{m_2x} مستقلين خطياً يجب أن لا ينعدم الرونسيكان لهما :

$$W(e^{m_1x}, e^{m_2x}) = \begin{vmatrix} e^{m_1x} & e^{m_2x} \\ m_1 e^{m_1x} & m_2 e^{m_2x} \end{vmatrix} = (m_2 - m_1) e^{(m_1x+m_2x)}$$

وحيث أن الدالة الأسية لا تساوي الصفر إذن لا ينعدم الرونسيكان طالما لا يتساوى الجذران m_1 , m_2 ويكون الحلان مستقلين خطياً .

II—عندما ينعدم المميز يكون $b^2 = 4\alpha C$ أي أن $C = \frac{b^2}{4\alpha}$ ويكون الجذران متساويين وهما $m_1 \neq m_2 = m = -\frac{b}{2a}$ وبالتعويض e^{mx} في المعادلة المعطاة واخذ e^{mx} مشتركاً نحصل على :

$$\begin{aligned} (\alpha m^2 + bm + C) e^{mx} &= \left[\alpha \left(-\frac{b}{2\alpha} \right)^2 + b \left(-\frac{b}{2\alpha} \right) + \frac{b^2}{4\alpha} \right] e^{mx} \\ &= \left[\frac{b^2}{4\alpha} - \frac{b^2}{2\alpha} + \frac{b^2}{4\alpha} \right] e^{mx} \end{aligned}$$

أي أن $e^{bx/2a}$ هو حل للمعادلة المعطاة ويكون الحل الآخر باستخدام (11) حيث :

$$p(x) = \frac{b}{\alpha}$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{y^2} dx = e^{-bx/2\alpha} \int \frac{e^{-bx/a}}{e^{-bx/2\alpha}} dx = e^{-bx/2\alpha} \int dx$$

$$= x e^{-bx/2\alpha}$$

ويكون الحل العام هو $y(x) = Ay_1 + By_2 = e^{-bx/2\alpha} [A + Bx]$:

-7- المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة :-

Nonhomogeneous Linear Differential Equations

نبحث الآن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من المرتبة الثانية والتي على الصورة :

$$(17) \quad L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

حيث $L[y]$ هو المؤثر التفاضلي الخطي و $p(x)$, $q(x)$, $g(x)$ دوال مستمرة على مجال معين .

لتكن $y_h(x)$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة $L[y] = 0$ وهي التي تحصل عليها باختزال الطرف الأيمن $g(x)$ إلى الصفر وكما ذكرنا سابقا تسمى المعادلة $L[y] = 0$ بالمعادلة المتجانسة (Homogenous Equation) ويسمى $y_h(x)$ بالحل المتجانس أو الحل المتمم (Homogeneous solution) وعلى ذلك :

$$(18) \quad L[y_h] = 0$$

الحل المتجانس هو نفسه الحل المعطى بالعلاقة (نظرية 4) :-

$$y_h(x) = Ay_1 + By_2(x)$$

والذي يحتوي على ثابتين اختياريين A, B و $\{y_1, y_2\}$ هي قاعدة فئة الحلول
(نظرية 5) أي y_2, y_1 حلان مستقلان خطيا للمعادلة المتجانسة .
ليكن $y(x)$ هو أي حل خاص (Particular solution) لا يحتوي على ثوابت
اختيارية للمعادلة غير المتجانسة $L[y] = g(x)$. أي :

$$(19) \quad L[y_p] = g(x)$$

نظرية -7-

الحل العام للمعادلة الخطية غير المتجانسة $L[y] = g(x)$ هو الحل العام للمعادلة
الخطية المتجانسة $L[y] = 0$ زائدا حل خاص لا يحتوي على ثوابت اختيارية
للمعادلة الخطية غير المتجانسة أي :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

البرهان :

$$L[y_p] = g(x) \quad , \quad L[y_h] = 0$$

إذن ينتج من خطية المؤثر L أن :

$$L[y_h + y_p] = L[y_h] + L[y_p] = 0 + g(x) = g(x)$$

$$L[y_h + y_p] = g(x) \quad \text{أو}$$

هذا يعني انه $y_h + y_p$ هو حل للمعادلة $L[y] = g(x)$ ويبقى أن نثبت أن هذا الحل
هو حل عام ويتم ذلك بإثبات أن أي حل للمعادلة $L[y] = g(x)$ يمكن وضعه على

$$y = y_h + y_p \quad \text{الصورة :}$$

ليكن y أي حل للمعادلة : $L[y] = g(x)$
 بوضع $\Phi = y - y_p$ إذن :-

$$L[\Phi] = L[y - y_p] = L[y] - L[y_p] = g(x) - g(x) = 0$$

أي أن Φ هو حل عام للمعادلة المتجانسة $L[y] = 0$. لكن $\Phi = y - y_p$ وعليه

$$y = \Phi + y_p$$

حيث Φ هو حل المعادلة المتجانسة $L[y] = 0$.

مثال -20-

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية : $y'' - y = 3e^{2x}$

المعادلة المتجانسة هي $y'' - y' = 0$

هذه المعادلة تقبل الحلين المستقلين خطياً التاليين e^x, e^{-x} وبالتالي فالحل المتجانس

$$\text{هو } y_h = Ae^{-x} + Be^{-x}$$

حيث A, B ثابتان اختياريان وهناك حل خاص للمعادلة غير المتجانسة هو e^{2x} .

وعلى ذلك يكون الحل العام للمعادلة المتجانسة المعطاة هو :

$$y(x) = y_h + y_p = Ae^x, Be^{-ex} + e^{2x}$$

ملاحظات :

1- إذا كانت $y_{p_1}(x)$ حلاً خاصاً للمعادلة غير المتجانسة $L[y] = R_2(x)$ وكانت

$y_{p_2}(x)$ حلاً خاصاً للمعادلة الخطية غير المتجانسة $L[y] = R_2(x)$ فإن

$y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$ تكون حلاً خاصاً للمعادلة الخطية غير المتجانسة

$$L[y] = R_1(x) + R_2(x)$$

وعموماً إذا كانت $y_{p_i}(x)$ حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية $L[y] = R_i(x)$ فإنه

$$L[y] = \sum_i R_i(x) \quad \text{تكون حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية} \quad \sum_i y_{p_i}(x)$$

إثبات ذلك يسير وينتج من التعويض مباشرة حيث :-

$$L[y_{p_1}] = y_{p_1}'' + p(x)y_{p_1}' + q(x)y_{p_1} = R_1(x)$$

$$L[y_{p_2}] = y_{p_2}'' + p(x)y_{p_2}' + q(x)y_{p_2} = R_2(x)$$

وبجمع المعادلتين نجد :-

$$(y_{p_1} + y_{p_2})'' + p(x)(y_{p_1} + y_{p_2})' + q(x)(y_{p_1} + y_{p_2}) = R_1 + R_2$$

$$L[y_{p_1} + y_{p_2}] = R_1(x) + R_2(x) \quad \text{أي إن}$$

وتفيد هذه الخاصية كثيراً في إيجاد حل خاص للمعادلة $L[y] = R(x)$ حيث يمكن تقسيم الدالة $R(x)$ إلى عدة أجزاء جمعية ثم إيجاد الحل الخاص المقابل لكل جزء ثم بالجمع تحصل على الحل الخاص المطلوب .

2- قد يوجد أكثر من حل خاص y_p للمعادلة الخطية المتجانسة $L[y] = R(x)$ ولكن الفرق بين هذه الحلول يكون عادة جزءاً من أحد الحلول للمعادلة المتجانسة $L[y] = 0$ بحيث أن الحل العام للمعادلة $L[y] = R(x)$ ، باستخدام أحد الحلول الخاصة ، يمكن الحصول على صورته العامة .

مثال -21-

لتبيان أن اختيار الحل الخاص y_p لمعادلة تفاضلية خطية غير متجانسة لا يهم كثيراً .
بين إن $y_{P_1} = -\cos x$, $y_{P_2} = e^x - \cos x$ هما حلان خاصان للمعادلة
الخطية غير المتجانسة $y'' - y = 2 \cos x$ وإذا كان الحلان المستقلان للمعادلة
المتجانسة $y'' - y = 0$ هما e^x , e^{-x} فاكتب الحل العام للمعادلة غير المتجانسة
مرة باستخدام الحل الخاص y_{P_1} ومرة باستخدام y_{P_2} . بين أنه يمكن تحويل أحد
هذين الحلين العامين للآخر .

الحل :

بالتعويض المباشر نرى أن $y_{P_1} = -\cos x$ و $y_{P_2} = e^x - \cos x$ هما حلان
خاصان للمعادلة $y'' - y = 2 \cos x$

$$y_{P_1}'' - y_{P_1} = (-\cos x)'' - (-\cos x) = 2 \cos x = \text{الطرف الأيمن}$$

$$y_{P_2}'' - y_{P_2} = (e^x - \cos x)'' - (e^x - \cos x) = 2 \cos x = \text{الطرف الأيسر}$$

$$y_{P_2} = e^x - \cos x , y_{P_1} = -\cos x \quad \text{إذن}$$

هما حلان خاصان

إذا كان الحلان المستقلان للمعادلة المتجانسة $y'' - y = 0$ هما

$$y_2 = e^{-x} , y_1 = e^x$$

الحل العام الأول للمعادلة غير المتجانسة هو $y = Ay_1 + By_2 + y_{P_1}$

$$y = Ae^x + Be^{-x} - \cos x$$

الحل العام الثاني للمعادلة غير المتجانسة هو :- $y = Ay_1 + By_2 + y_{P_2}$

$$y = Ae^x + Be^{-x} + (e^x - \cos x) = (A + B)e^x + Be^{-x} - \cos x$$

وبوضع $A' = A + B$ نجد :-

$$y = A'e^x + Be^{-x} - \cos x$$

وهو نفس الحل العام الأول حيث A, B, A' ثوابت اختيارية .

مثال -22-

جد الحل العام للمعادلة :

$$y'' + 4y = 1 + x + \sin x$$

الحل :-

أولاً : نأخذ المعادلة المتجانسة $y'' + 4y = 0$

وبالتعويض عن $y = e^{mx}$ نحصل على المعادلة المميزة $m^2 + 4 = 0$

ويكون الحل المتجانس من الشكل :

$$y_H = A \cos 2x + B \sin 2x$$

ثانياً : للبحث عن الحل الخاص للمعادلة نركب الحلول الخاصة للمعادلات :

$$y'' + 4y = 1 \quad , \quad y'' + 4y = x \quad , \quad y'' + 4y = \sin x$$

ويمكن بسهولة التحقق من أن $\frac{1}{4}$, $\frac{x}{4}$, $\frac{1}{3} \sin x$ هي حلولاً خاصة لهذه المعادلات على التوالي . إذن الحل العام للمعادلة المعطاة هي :-

$$y = A \cos x + B \sin x + \frac{1}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{3} \sin x$$

vii-8- طريقة المعاملات غير المعينة : Method of undetermined coefficients

سندرس في هذه الفقرة إحدى الطرق المختلفة للحصول على الحلول الخاصة للمعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة في ضوء ما رأيناه في الفقرات السابقة من تعاريف ونظريات . وتعطي المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من المرتبة الثانية والتي معاملاتها ثابتة على الصورة :-

$$\alpha \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = g(x)$$

حيث $a, b, c \neq 0$ ثابتة حقيقية اختيارية والحد المتجانس $g(x)$ هو دالة عامة في x قد تكون دالة أسية $e^{\alpha x}$ أو كثير حدود $(a_0 x^n + \dots + a_n)$ أو دالة جيبية $(\cos \beta x, \sin \beta x)$.

ونعلم من النظرية -7- أن الحل العام $y(x)$ للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة $L[y] = g(x)$ يتكون من مجموع حلين :

1- الحل العام المتجانس أو المتمم $y(x)$ للمعادلة الخطية المتجانسة $L[y] = 0$

2- أي حل خاص $y_p(x)$ للمعادلة الخطية غير المتجانسة $L[y] = g(x)$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad \text{أي أن :}$$

ودرسنا في الفقرات السابقة طرق حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة ويكون هذا الحل المتجانس $y_h(x)$.
ويبقى أن ندرس في هذه الفقرة والتي تليها طرق الحصول على الحل الخاص $y_p(x)$ وتتراوح الطرق المتبعة للحصول على الحل الخاص بين كونها طرقاً تخمينية إلى كونها طرقاً قائمة على أساس نظري قوي . وتتبنى مصداقية أي طريقة على مقدرتها الحصول على أي حل خاص يحقق المعادلة .

$$L[y] = g(x)$$

وقد يختلف حلان خاصان لنفس المعادلة باختلاف التقنية المتبعة في الحل , لكن الفرق بينهما هو نفس النوع الذي ذكرناه في المثال قبل السابق .
وتتلخص طريقة المعاملات غير المعنية في فرض حل خاص $y(x)$ بصرف النظر عن ثوابت ضربية كحل تجريبي (Trial solution) ويعتمد شكل هذا الحل الخاص على شكل الدالة $g(x)$ وتكون هذه الثوابت الضربية المعاملات غير المعنية والتي يتم تعيينها بالتعويض من الحل المفترض $y_p(x)$ ومشتقاته في المعادلة غير المتجانسة المعطاة (20) ثم مساواة معاملات الحدود المتشابهة على طرفي المتطابقة الناتجة .
وتمتاز هذه الطريقة ببسرها وبساطتها مقارنة بالطرق العامة الأخرى التي سنناقشها فيما بعد لكن عيبها هو محدوديتها على المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة ومع أنماط محدودة للدالة $g(x)$.
قبل البدء في مناقشة الطريقة العامة لنأخذ الأمثلة البسيطة التالية لتوضيح الطريقة .

مثال -23-

جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$

الحل :-

$$y'' - 3y' - 4y = 4x^2 \quad (i) \quad \text{لإيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية}$$

$$y_p = Ax^2 \quad (ii) \quad \text{نجرّب حلاً خاصاً على الصورة}$$

حيث A ثابت ضربي يراد تعيينه بالتعويض من (ii) في (i)

$$2A - 6Ax - 4Ax^2 = 4x^2 \quad (iii)$$

وحتى تتحقق هذه المتطابقة لجميع قيم x يجب أن تتساوى معاملات قوى x المختلفة

$$2A = 0, \quad -6A = 0, \quad -4A = 4 \quad \text{-: على الطرفين للمعادلة أي أن}$$

ولا يمكن أن يحقق الثابت الاختياري A هذه المتطابقات الثلاثة في آن واحد . وعليه

فانه غير ممكن إيجاد حل خاص للمعادلة (i) من الشكل (ii) $y_p = Ax^2$. لكن

حينما نرى الحد الغير المتجانس $4x^2$ في المعادلة (i) على الشكل كثير حدود

$4x^2 + 0x + 0$ فانه واضح أن نفرض أن الحل الخاص من الصورة .

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (iv)$$

حيث C, B, A ثوابت اختيارية يراد تعيينهما بالتعويض من (iv) في (i)

$$2A - 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$$

بمساواة معاملات قوى x المتشابهة على الطرفين نحصل على :-

$$2A - 3B - 4C = 0$$

$$-6A - 4B = 0$$

$$-4A = 4$$

مما يعنى أن $A = -1$, $B = \frac{3}{2}$, $C = -\frac{13}{8}$ وعليه يكون الحل الخاص هو :-

$$y_p(x) = -x + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$

مثال -24-

جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (i) $y'' + y' - 2y = \sin x$

الحل :

لإيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (i) نجرب حلاً خاصاً على الصورة :

$$y_p = A \sin x \quad (ii)$$

ونعوض من (ii) في (i) لنجد أن :

$$-A \sin x + A \cos x - 2A \sin x = 2 \sin x \quad (iii)$$

وبمساواة معاملات $\cos x$, $\sin x$ على الطرفين نجد أن $A = 0$, $-3A = 2$ وواضح أن لا معنى لذلك . أي أن (ii) لا تصلح حلاً خاصاً للمعادلة المعطاة (i) . نعدل هذا الحل التجريبي في ضوء الطرف الأيسر للمتطابقة (iii) ليصبح على الصورة :-

$$y_p(x) = A \sin x + B \cos x \quad (iv)$$

بالتعويض من (iv) في (i) نجد أن :

$$-(A \sin x + B \cos x) + (A \cos x - B \sin x) - 2(A \sin x + B \cos x) = 2 \sin x$$

بمساواة معاملي $\sin x$, $\cos x$ على الطرفين نجد أن :-

$$-3A - B = 2 \quad , \quad -3B + A = 0$$

$$B = -\frac{1}{5} \quad , \quad A = -\frac{3}{5} \quad \text{أي أن}$$

ويكون الحل الخاص هو :- $y_p = -\frac{1}{5}[3\sin x + \cos x]$

مثال -25 :-

جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : (i) $y'' + y = x^2 \cdot e^x$

الحل :

لإيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (i) نجرب حلا خاصا على الصورة :

$$y_p(x) = Ax^2 e^x \quad (ii)$$

نعوض من (ii) في (i) نجد إن (iii) $A(2x^2 + 4x + 2)e^x = x^2 e^x$

وبمساواة معامل الحدود المتشابهة على الطرفين نجد أن :

$$A = 1 \quad , \quad 4A = 0 \quad , \quad 2A = 0$$

لا معنى لذلك وبالتالي لا تصلح (ii) حلا خاصا . نعدل فرضيا في ضوء الطرف الأيسر للمتطابقة (iii) ليصبح :

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^x \quad (iv)$$

بالتعويض من (iv) في (i) نجد أن :

$$\{2Ax^2 + (4A + 2B)x + (2A + 2B + 2C)\}e^{-x} = x^2 e^x$$

بمساواة معاملات قوة x المختلفة على الطرفين نجد أن :

$$2A = 1 \quad , \quad 4A + 2B = 0 \quad , \quad 2A + 2B + 2C = 0$$

ومنها نجد أن $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$ وعليه يكون الحل الخاص هو :

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \right) e^x$$

ولطبيعة الحال لن نستمر على هذا المنوال سنورد الآن أهم القواعد التي تساعدنا على فرض شكل مناسب للحل الخاص .

القاعدة الأساسية :

إذا لم يكن هناك اية حدود مشتركة بصرف النظر عن أية ثوابت ضربية بين $g(x)$ والحل المتجانس $y_h(x)$ للمعادلة $L[y] = 0$ فان الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانس $L[y] = g(x)$ يفرض على الصورة :

$$y_p(x) = A_1 r_1(x) + A_2 r_2(x) + \dots + A_g r_g(x)$$

حيث فئة الحلول $\{r_i(x)\}$ هي الحدود المختلفة المكونة للدالة $g(x)$ (بصرف النظر عن أي ثوابت ضربية) علاوة على الحدود الجديدة التي تنتج في المشتقة العليا لهذه الحدود مع (إهمال أي ثوابت ضربية تظهر) فئة الثوابت $\{A_i\}$ هي معاملات غير معينة يراد تعيينها .

لتوضيح لهذه القاعدة نطبقها على الأمثلة السابقة (1-2-3)

في المعادلة الأولى $g(x) = 4x^2$ والحدود ومشتقاتها العليا هي $8x$, 8 وبالتالي نفرض الحل الخاص على الصورة $y_p = Ax^2 + Bx + C$ حيث امتصت الأعداد 8 , 8 في الثوابت A, B, C على الترتيب .

في معادلة المثال - 24 $g(x) = \sin x$ (بإهمال الثابت الضربي) والحدود الجديدة التي تظهر في مشتقاتها العليا هي $\cos x$ فقط . وبالتالي يكون الحل الخاص على

$$y_p = A \cos x + B \sin x \quad \text{الصورة :}$$

بينما في معادلة المثال -3- $g(x) = x^2 e^x$ ومشتقاتها العليا هي :

$$e^x, xe^x, \text{ و } (x^2 + 2x)e^x \text{ و } (x^2 + 4x + 2)e^x \text{ و } (x^2 + 6x + 6)e^x \text{ وهكذا :-}$$

وواضح أن الحدود غير الموجودة في $g(x)$ والتي ظهرت في المشتقات هي e^x, xe^x وعلى ذلك يكون الحل الخاص على الصورة :-

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^x$$

ملاحظة :-

تفشل طريقة المعاملات غير المعينة إذا ظهر عدد لانهائي من الحدود الجديدة

في المشتقات العليا للدالة $g(x)$

مثال ذلك إذا كان $g(x) = \tan x$ فإن عددا لانهائي من الحدود الجديدة يظهر في المشتقات العليا وبالتالي لا تنطبق طريقة المعاملات غير المعينة في هذه الحالة .

وبناء على هذه القاعدة الأساسية نستنبط القواعد الخاصة التالية :-

1- إذا كان $g(x) = P_n(x)$ كثير حدود من الدرجة

$$P_n(x) = Q_0 x^n + Q_1 x^{n-1} + \dots + Q_n : n$$

في هذه الحالة تكتب المعادلة التفاضلية على الصورة :-

$$Qy'' + by' + cy = Q_0 x^n + Q_1 x^{n-1} + \dots + Q_n \quad (i)$$

للحصول على الحل الخاص نفرضه على الصورة :-

$$y_p(x) = A_0 x^{n-1} + A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n \quad (ii)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على :

$$Q[n(n-1)A_0x^{n-2} + \dots + 2A_{n-2}] + b[nA_0x^{n-1} + \dots + A_{n-1}] + C[A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_n] = Q_0x^n + \dots + Q_n \quad (iii)$$

بمساواة معاملات مختلفة x على الطرفين نجد :

$$CA_0 = Q_0$$

$$CA_1 + nbA_0 = Q_1$$

$$CA_n + bA_{n-1} + 2QA_{n-2} = Q_n$$

إذا كان $C \neq 0$ فإن حل المعادلة الأولى هو $A_0 = Q_0 / C$ ثم بالتعويض في المعادلة التالية نجد A_n, \dots, A_2, A_1 بالترتيب .

إذا كان $C = 0$ ولكن $b \neq 0$ فيكون كثير الحدود في الطرف الأيسر من الدرجة $(n-1)$ ولا يمكن أن تتحقق المعادلة (iii) وحتى يكون $ay'' + by'$ كثير حدود من الدرجة n يجب اختيار $y_p(x)$ على شكل كثير حدود من الدرجة $n+1$.
أذن نفرض أن :

$$y_p(x) = x(A_0e^n + \dots + A_n)$$

حيث لا يوجد حد ثابت في عبارة $y_p(x)$ لأنه ليس من الضروري إدخال هذا الحد الثابت عندما يكون $C = 0$ فأني ثابت هو حل للمعادلة التفاضلية المتجانسة .

وبما أن $b \neq 0$ فإن $A_0 = \frac{Q_0}{b(n+1)}$ وبالمثال يمكن تعيين المعاملات A_n, \dots, A_1

وإذا كان $b = 0$ و $C = 0$ نفرض الحل الخاص من الشكل

$$y_p = x^2(A_0x^n + \dots + A_n)$$

الحد $Qy_p''(x)$ يحدث الحد من الدرجة n ويمكن إن نسير وفق ما سبق ونلاحظ ان الحد الثابت والحد الخطى قد أهملوا في عبارة y_p . في هذه الحالة يظهر الحدين في الحل المتجانس .

2- إذا كان $g(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ كثير حدود في دالة أسية $y(x) = e^{\alpha x} [A_0 x^n + A_n]$ في هذه الحالة تكون المعادلة التفاضلية من الصورة :-

$$Qy'' + by' + Cy = e^{\alpha x} P_n(x) \quad (i)$$

نفرض الحل الخاص من الشكل :

$$y_p(x) = e^{\alpha x} U(x)$$

$$y_p'(x) = e^{\alpha x} [U'(x) + \alpha U(x)] \quad \text{إن}$$

$$y_p''(x) = e^{\alpha x} [U''(x) + 2\alpha U'(x) + \alpha^2 U(x)] \quad \text{و}$$

بالتعويض عن y, y', y'' في المعادلة (i) وباختصار الحد $e^{\alpha x}$ نجد :-

$$Qu''(x) + (2Q\alpha + b)u'(x) + (Q\alpha^2 + b\alpha + C)u(x) = P_n(x) \quad (ii)$$

ولتعيين الحل الخاص لهذه المعادلة (ii) فهي نفس المسألة التي ناقشناها في الفقرة السابقة .

إذ كان $Q\alpha^2 + b\alpha + C \neq 0$ فإن الحل يكون من الشكل $U(x) = A_0 x^n + A_n$ ويكون الحل الخاص للمعادلة (i) على الصورة :-

$$y_p(x) = e^{\alpha x} [A_0 x^n + \dots + A_n] \quad (iii)$$

من ناحية أخرى إذا كان $Q\alpha^2 + b\alpha + C = 0$, $2Q\alpha + b \neq 0$ فإن :

$$U(x) = x(A_0 x^n + \dots + A_n)$$

ويكون الحل الخاص للمعادلة (i) :- $y_p = e^{\alpha x} (A_0 x^n + \dots + A_n)$

ونلاحظ أن في حالة $Q \alpha^2 + b \alpha + C = 0$ فإن $e^{\alpha x}$ هو حل للمعادلة المتجانسة
 إذ كان $Q \alpha^2 + b \alpha + C = 0$ و $2Q \alpha + b = 0$ ففي هذه الحالة $e^{\alpha x}$, $x e^{\alpha x}$
 هما حلان للمعادلة المتجانسة إذن الصورة الصحيحة للحل $U(x)$ هي :

$$U(x) = x^2 (A_0 x^n + \dots + A_n)$$

ويكون الحل الخاص للمعادلة (i) من الصورة : $y_p = e^{\alpha x} x^2 (A_0 x^n + \dots + A_n)$

3- إذا كان : $g(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \sin Bx$ أو $g(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \cos Bx$

هاتان الحالتان متشابهتان . لنأخذ الحالة الأخيرة $g(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \sin Bx$

ويمكن اختزال هذه الحالة إلى السابقة التي درسناها في الفقرة السابقة حيث :

$$g(x) = P_n(x) e^{\alpha x} \frac{1}{2i} [e^{iBx} - e^{-iBx}] = \frac{1}{2i} P_n(x) [e^{(\alpha+iB)x} - e^{(\alpha-iB)x}]$$

ويمكن اختيار الحل الخاص من الصورة :-

$$y_p(x) = e^{(\alpha+iB)x} [A_0 x^n + \dots + A_n] + e^{(\alpha-iB)x} [B_0 x^n + \dots + B_n]$$

أو الصورة المكافئة :-

$$y_p(x) = e^{\alpha x} (A_0 x^n + \dots + A_n) \cos Bx + e^{\alpha x} [B_0 x^n + \dots + B_n] \sin Bx$$

عادة تكون الصورة الأخيرة هي المفضلة .

وإذا كان $\alpha \pm iB$ يحقق المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية المتجانسة يمكن بطبيعة الحال ضرب كثير الحدود في x لرفع درجته بدرجة واحدة . وإذا كان الحد غير المتجانس يحتوي على العبارتين $e^{\alpha x} \cos Bx$, $e^{\alpha x} \sin Bx$ فإنه من الملائم معالجة العبارتين معاً ، لان كل عبارة تسبب نفس الصورة للحل الخاص فمثلاً :-

إذا كان $g(x) = x \sin x + 2 \cos x$ فان الحل الخاص يكون من الصورة :

$$y_p = (A_0 x + A_1) \sin x + (B_0 x + B_1) \cos x$$

بحيث انه لا يكون $\cos x, \sin x$ حلين للمعادلة المتجانسة ونلخص ما سبق في الجدول التالي :-

$g(x)$	$y_p(x)$
$P_n(x) = Q_0 x^n + Q_1 x^{n-1} + \dots + Q_n$	$x^5 (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n)$
$P_n(x) e^{\alpha x}$	$x^5 (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) e^{\alpha x}$
$P_n(x) e^{\alpha x} \begin{cases} \sin Bx \\ \cos Bx \end{cases}$	$x^5 [(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) e^{\alpha x} \sin Bx + (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n) e^{\alpha x} \cos Bx]$
حيث 5 عدد صحيح غير سالبه (5 = 0,1,2) الذي يؤمن عدم وجود حد في الحل الخاص هو حل للمعادلة المتجانسة .	

جدول -2-

مثال -26-

حل باستخدام طريق المعاملات غير المعينة المعادلة التفاضلية التالية :-

$$y'' - y' - 2y = 2x^2 - 4e^{3x} + 5 \sin 2x + xe^{-n}$$

الحل :-

نبحث أولاً الحل المتجانس وهو حل المعادلة المتجانسة $y'' - y' - 2y = 0$

$$\text{ومعادلتها المميزة : } m^2 - m - 2 = 0$$

$$\text{وجذراهما هما : } m_1 = -1 , m_2 = 2$$

ويكون الحل المتجانس من الشكل : $y_h = Ce^{-x} + De^{2x}$

لإيجاد الحل الخاص نستعمل طريقة المعاملات غير المعينة ، قبل ذي بدء .

$$\text{نلاحظ أن : } g(x) = 2x^2 - 4e^{3x} + 5\sin 2x + xe^{-x}$$

ولا توجد حدود مشتركة بين $g(x)$ والحل المتجانس $y_h(x)$ إلا أن e^{-x} حد في y_h يقابل الجذر غير المتكرر $m = -1$ بينما xe^{-x} حد في $g(x)$ وعلى ذلك فالحدود التي تدخل الحل الخاص نتيجة xe^{-x} تنشأ عن x^2e^{-x} ومشتقاتها وهذه الحدود هي e^{-x} ، xe^{-x} ، x^2e^{-x} ويستبعد الأخير بسبب وجوده في الحل المتجانس . وعلى ذلك نفرض حلاً خاصاً على الصورة :-

$$y_p = (A_1x^2 + A_2x + A_3) + (A_4e^{3x}) + (A_5 \cos 2x + A_6 \sin 2x) + x(A_7x + A_8)e^{-x}$$

ونلاحظ أن جميع أجزاء الحل الخاص المقترح تنتج من القواعد السابقة مباشرة :-

$$y'_p = 2A_1x + A_2 + 3A_4e^{3x} - 2A_5 \sin 2x + 2A_6 \cos 2x + A_7x(-x+2)e^{-x} + A_8(-x+1)e^{-x}$$

$$y''_p = 2A_1 + 9A_4e^{3x} - 4A_5 \cos x - 4A_6 \sin x + A_4(x^2 - 4x + 2)e^{-x} + A_8(x - 2)e^{-x}$$

وبالتعويض عن y_p ومشتقاته في المعادلة المعطاة وتجميع الحدود المتشابهة نحصل على :

$$\begin{aligned} & (-2A_1)x^2 - 2(A_1 + A_2)x + (2A_1 - A_2 - 2A_3) + 4A_4e^{3x} + \\ & - (6A_5 + 2A_6)\cos 2x + (2A_5 - 6A_6)\sin 2x + 0x^2e^{-x} \\ & - 6A_7xe^{-x} + (2A_7 - 3A_8)e^{-x} = 2x^2 - 4e^{3x} + \sin 2x + xe^{-x} \end{aligned}$$

وبمساواة معاملات الحدود المتشابهة على الطرفين نجد أن :

$$-2A_1 = 2 \quad \text{(i)}$$

$$A_1 + A_2 = 0 \quad \text{(ii)}$$

$$2A_1 - A_2 - 2A_3 = 0 \quad \text{(iii)}$$

$$4A_4 = -4 \quad \text{(iv)}$$

$$6A_5 + 2A_6 = 0 \quad \text{(v)}$$

$$2A_5 - 6A_6 = 5 \quad \text{(vi)}$$

$$-6A_7 = 1 \quad \text{(vii)}$$

$$2A_7 - 3A_8 = 0 \quad \text{(viii)}$$

وحل هذه المعادلات يعطي :-

$$A_1 = -1 \quad , \quad A_2 = 1 \quad , \quad A_3 = -\frac{3}{2} \quad , \quad A_4 = -1$$

$$A_5 = \frac{1}{4} \quad , \quad A_6 = -\frac{3}{4} \quad , \quad A_7 = -\frac{1}{6} \quad , \quad A_8 = -\frac{1}{9}$$

وعلى ذلك يكون الحل الخاص هو :-

$$y_p(x) = x^2 + x - \frac{3}{2}e^{-3x} + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{3}{4}\sin 2x + x\left(-\frac{1}{6}x - \frac{1}{9}\right)e^{-x}$$

ويكون الحل العام هو الحل المتجانس زائد الحل الخاص :-

$$y = \left(C - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x\right)e^{-x} + De^{2x} - x^2 + x - \frac{3}{2}e^{-3x} + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{3}{4}\sin 2x$$

ملاحظة -1-

حيث أن $g(x)$ تتكون من أربعة حدود فإنه يمكن إيجاد الحل الخاص المقابل لكل حد ثم تجمع هذه الحلول الخاصة لتحصل بالطبع على نفس الجواب .

ملاحظة -2-

تعامل الدوال الزائدية $\cosh bx$, $\sinh bx$ معاملة الدوال المثلثية $\sin Bx, \cos Bx$ أو تحول إلى دوال أسية .
وإذا كان $g(x)$ توفيقية خطية من الحالات السابقة فإن $y_p(x)$ يكون توفيقية خطية أخرى من الحالات المقابلة مع تجميع الثوابت حيثما أمكن ذلك .

9-VII. طريقة تغيير البارامترات لحل المعادلات التفاضلية الخطية :

Method of Variation of Parameters (Lagrange's Method)

تمتاز طريقة لاغرانج لتغيير البارامترات بعموميتها حيث تسري على جميع أنواع المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة سواء كانت ذوات معاملات ثابتة أو ذوات معاملات متغيرة (دوال في x) وبصرف النظر عن نوع الطرف الأيمن $g(x)$.

بعكس الحال في طريقة المعاملات غير المعينة من الدالة $g(x)$ لكن يعيب طريقة لاغرانج .

- 1 - أكثر مشتقة خصوصا في حالة علو رتبة المعادلة التفاضلية .
- 2 - اعتمادها علي معرفة الحل المتجانس والذي قد يكون متعذرا في حالة كون المعاملات متغيرة .
- 3 - تضمنها تكاملات قد يتعذر الحصول عليها على صورة مغلقة .

تكتب المعادلة التفاضلية الخطية على الصورة العامة :-

$$L[y] = y'' + \rho(x)y' + q(x)y = g(x) \quad (i)$$

والجزء المتجانس من المعادلة هو :-

$$L[y] = y'' + \rho(x)y' + q(x)y = 0 \quad (ii)$$

ويتكون الحل المتجانس كما نعلم من حلين مستقلين خطيا $\{y_1, y_2\}$ حيث :-

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (iii)$$

حيث C_1, C_2 ثوابت اختيارية .

وتتلخص طريقة تغيير البارامترات في فرض حل خاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (i) علي الصورة (iii) لكن بعد تغيير الثوابت أو البارامترات $\{C_1, C_2\}$ إلى $\{u_1(x), u_2(x)\}$ ليكون الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة علي الصورة :-

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \quad (iv)$$

حيث يبقى علينا أن نعين الدوال الاختيارية $\{U_1, U_2\}$ وهذه بحيث يحقق y_p المعادلة غير المتجانسة (i) .

ونقنع هذين الدالتين الاختياريتين يلزم فرض شرطين من القيود وأحد هذين الشرطين هو بالطبع أن يحقق الحل المفروض (iv) المعادلة التفاضلية المعطاة (i) أي $L[y] = g(x)$. أما الشرط الثاني فيمكن فرضه بأكثر من طريقة نختارها بحيث تسهل الحسابات ونيسر الحل .

نفاضل $y_p(x)$ في المعادلة (iii) بالنسبة إلى x فنحصل علي :-

$$y'_p = u'_1 y_1 + u'_2 y_2 + u_1 y'_1 + u_2 y'_2 \quad (v)$$

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \quad (vi) \quad \text{سنختار الشرط الأول هو :-}$$

مع هذا الشرط علي u'_2, u'_1 تعطي y''_p علي الصورة :-

$$y''_p = u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 + u_1 y''_1 + u_2 y''_2 \quad (vii)$$

بالتعويض عن y_p, y'_p, y''_p في المعادلة (i) نحصل علي :-

$$u_1 (y''_1 + \rho(x)y'_1 + q(x)y_1) + u_2 (y''_2 + \rho(x)y'_2 + q(x)y_2) + u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g(x)$$

ونلاحظ أن الحدين بين قوسين في العبارة السابقة معدوما لان كل من y_1, y_2 حلين للمعادلة التفاضلية المتجانسة (ii) فنحصل علي :-

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g(x) \quad (viii)$$

وبكتابة المعادلة (vi), (viii) نحصل علي نظام من معادلتين :-

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0$$

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g(x)$$

أي أن المشتقات الأولى u'_2, u'_1 يجب أن تحقق 2 من المعادلات المقيدة (Restriction Equations) ومن هذين المعادلتين نحصل علي المشتقتين u'_2, u'_1 وبمكاملة كل مشتقة نحصل علي الدالتين المطلوبتين u_2, u_1 بحل هذا النظام نحصل علي :-

$$u'_1 = \frac{-y_2 g}{w(y_1, y_2)} , u'_2 = \frac{y_1 g}{w(y_1, y_2)} \quad (ix)$$

حيث $w(y_1, y_2) = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$ والقسمة علي $w(y_1, y_2)$ ممكنة لأن $w(y_1, y_2) \neq 0$ علي المجال . بمكاملة هذين المعادلتين (ix) ثم نعوض عنهما في المعادلة (iii) فنحصل علي الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (i) ونلخص إلى النظرية التالية :

نظرية -8-

إذا كانت الدوال $\rho(x), q(x), g(x)$ دوال مستمرة علي مجال ما $\alpha < x < \beta$ وإذا كانت الدالتان y_2, y_1 حلين مستقلين خطيا للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة الملحقة للمعادلة التفاضلية التالية :

$$y'' + \rho(x)y' + q(x)y = g(x)$$

إن فالحل الخاص لهذه المعادلة يعطي بالعلاقة :-

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_1(x)g(x)}{w(y_1, y_2)(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_2(x)g(x)}{w(y_1, y_2)(x)} dx \quad (x)$$

مثال 27-

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :-

$$y'' + y = \sec x \quad 0 < x < \pi/2$$

الحل :-

المعادلة المتجانسة هي $y'' + y = 0$

معادلة المميزة $m^2 + 1 = 0$ وجذراها المترافقان هما $m = \pm i$ وبالتالي فالحل

المتجانس هو :-

$$y_h = A \cos x + B \sin x$$

ونلاحظ أن المعادلة المعطاة هي معادلة ذات معاملات ثابتة والحل المتجانس معلوم ولكن لا يمكن أن نستخدم طريقة المعاملات غير المعينة لأن الحد المتجانس ليس من الشكل المذكور في القاعدة الأساسية والقواعد الخاصة . لهذا نستخدم طريقة تغيير البارامترات ونكتب الحل الخاص من الشكل :

$$y_p = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x$$

$$y_p' = [-u_1 \sin x + u_2 \cos x] + [u_1' \cos x + u_2' \sin x] \quad \text{إن}$$

وموضع الحد الثاني بين قوس يساوي الصفر وبالمفاضلة مرة أخرى وبالتعويض في

المعادلة الخطية غير المتجانسة نجد :-

$$u_1'(x)\cos x + u_2'(x)\sin x = 0$$

$$-u_1'(x)\sin x + u_2'(x)\cos x = \sec x$$

$$u_1'(x) = -\tan x \quad , \quad u_2'(x) = 1 \quad -: \text{ بحل المعادلتين نجد}$$

$$u_1(x) = \ln \cos x \quad , \quad u_2(x) = x$$

إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية المعطاة هو :-

$$y_p = x \sin x + (\cos x) \ln |\cos x|$$

ويكون الحل العام للمعادلة المعطاة من الشكل :-

$$y = A \cos x + B \sin x + x \sin x + \cos x \ln |\cos x|$$

وهو المطلوب .

مثال -28-

حل المعادلة التفاضلية التالية مستخدماً طريقة تغير البارامترات لا يجاد الحل الخاص:

$$y'' + \frac{x}{1-x} y' - \frac{1}{1-x} y = 1-x$$

الحل :-

$$y'' + \frac{x}{1-x} y' - \frac{1}{1-x} y = 1-x \quad -: \text{ المعادلة المطلوب حلها هي}$$

$$y'' + \frac{x}{1-x} y' - \frac{1}{1-x} y = 0 \quad -: \text{ المعادلة المتجانسة هي}$$

وهذه معادلة معاملات لها ليست ثوابت . بالبحث والتفتيش نجد أن أحد حلولها هو $y_1 = x$ والحل الآخر هو $y_2 = e^x$ وعلى ذلك :

$$y_h = A_x + Be^x$$

نفرض الحل الخاص للمعادلة المعطاة على الصورة :- $y_p = u_1(x)x + u_2(x)e^x$ حيث u_1, u_2 تحققان المعادلتين التاليتين :-

$$u_1'x + u_2'e^x = 0$$

$$u_1' + u_2'e^x = 1 - x$$

بحل هاتين المعادلتين في u_1', u_2' نحصل على :-

$$u_1' = 1 \quad , \quad u_2' = xe^{-x}$$

وعليه بالتكامل :- $u_1 = x \quad , \quad u_2 = (x+1)e^{-x}$

وبالتعويض في المعادلة y_p يكون الحل الخاص :- $y_p = x^2 + x + 1$ ويكون الحل العام للمعادلة غير المتجانسة هو :-

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p = Ax + Be^x + x^2 + 1 \\ &= A_1x + Be^x + x^2 + 1 \end{aligned}$$

حيث $A_1 = A + 1$

وهو المطلوب .

تمارين

I- باستخدام التعويض $g(x) = y'$ ، $g'(x) = y''$ جد حل المعادلات التفاضلية التالية :-

$$x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0 \quad , \quad x > 0$$

$$y'' + xy'^2 = 0$$

$$2x^2 y'' + (y')^3 = 2xy' \quad , \quad x > 0$$

$$yy'' + y'^2 = 0$$

$$y'' + y = 0$$

$$y'' + yy'^3 = 0$$

II- تحقق أن x^{-1}, x^2 والتوافقية الخطية $Ax^2 + Bx^{-1}$ حيث A, B ثابتان اختياريان هم حلول للمعادلة التفاضلية التالية :-

$$x^2 y'' - 2y = 0 \quad x > 0$$

III- تحقق أن $x^{\frac{1}{2}}, I$ هما حلان للمعادلة التفاضلية :-

$$yy'' + y'^2 = 0 \quad x > 0$$

ولكن التوافقية الخطية $A + Bx^{\frac{1}{2}}$ ليست حلا للمعادلة لماذا ؟

IV- إذا كان $L[y] = ay'' + by' + cy$ حيث $a, b, c, \in \mathbb{R}$ احسب :

$$L[x] \quad , \quad L[\sin x] \quad , \quad L[e^{rx}] : r \in \mathbb{R}$$

V - احسب رونسكيان الدوال الآتية :-

$$w(e^{mx}, e^{nx}): \quad m \neq n$$

$$w(\sinh x, \cosh x)$$

$$w(x, xe^x)$$

VI - باستعمال طريقة تخفيض المرتبة جد الحل الثاني للمعادلات التفاضلية التالية :-

$$y'' - 4y' - 12y = 0 \quad , \quad y_1 = e^{6x}$$

$$x^2 y'' + 2xy' = 0 \quad , \quad y_1 = 1$$

$$x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0 \quad , \quad x > 0, y_1 = x$$

VII - جد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية :-

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

$$4y'' + 4y' + y = 0$$

$$6y'' - y' - y = 0$$

$$2y'' - 3y + y = 0$$

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

$$y'' - 2y' + 6y = 0$$

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

VIII - استعمال طريقة المعاملات غير المعينة , جد الحل الخاص للمعادلات
التفاضلية التالية :-

$$y'' + y' - 2y = 2x$$

$$2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$$

$$y'' + 4y = x^2 + 3e^x$$

$$y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$$

$$y'' - 2y' + y = xe^x + 4$$

$$y'' - y' - 2y = \cosh 2x$$

$$y'' + y = x(1 + \sin x)$$

$$y'' + 3y' = 3x^4 + x^2 e^{-3x} + \sin 3x$$

الفصل الثامن

تطبيقات متنوعة على المعادلات التفاضلية من المرتبة
الثانية

Miscellaneous Applications

الفصل الثامن

تطبيقات متنوعة على المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية

Miscellaneous Applications

كما ذكرنا سابقا تدخل المعادلات التفاضلية في شتى مناحي العلوم الهندسية والفيزيائية . ولقد أعطينا عدة تطبيقات في الفصل السادس على المعادلات من المرتبة الأولى و الآن إلى مزيد من التطبيقات على المعادلات التفاضلية ذات المرتبة الثانية .

Geometrical Applications

VIII - 1. تطبيقات هندسية :-

المثال الأول :-

جد معادلة المنحنى الذي يمر بنقطة الأصل والذي مماسه عندها هو محور x والذي يتناسب معدل تغير ميل مماسه عند أي نقطة مع جذر الإحداثي الراسي لهذه النقطة .

الحل :-

ميل المماس عند النقطة (x, y) هو $\frac{dy}{dx}$. ومعدل تغير ميل المماس هو $\frac{d^2y}{dx^2}$ وعلى ذلك يكون :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\sqrt{y}$$

حيث a ثابت تناسب . وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تخلص صراحة من المتغير x .

إذن بوضع : $y' = g$ وبالتالي $y'' = g \frac{dg}{dy}$ وتتحول المعادلة إلى :-

$$g \frac{dg}{dy} = a\sqrt{y} \Rightarrow g dg = a\sqrt{y} dy \Rightarrow g^2 = \frac{4a}{3} y^{3/2} + A_1$$

وحيث أن محور x يمس المنحنى عند نقطة الأصل إذن :

$$\Rightarrow A_1 = 0 \Rightarrow g = \sqrt{\frac{4a}{3}} \cdot y^{3/4}$$

$$g = \frac{dy}{dx} = 0 \text{ لدينا } (0,0)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{4a}{3}} y^{3/4} \Rightarrow \sqrt{\frac{4a}{3}} x + A_2 = 4y^{1/4} \text{ إذن}$$

وحيث أن المنحنى يمر بنقطة الأصل إذن $A_2 = 0$ وعليه يكون المنحنى المطلوب

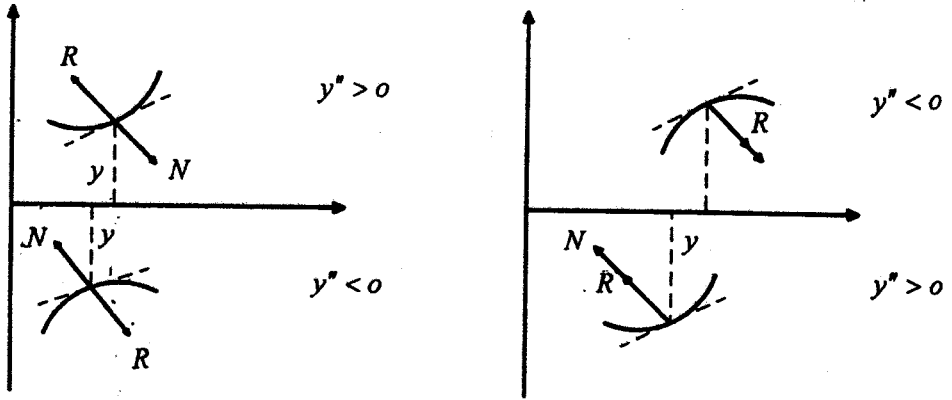
$$\text{هو :- } y = \left(\frac{a}{12}\right)^2 x^4$$

المثال الثاني :-

جد معادلة المنحنى الذي نصف قطر انحنائه عند أي نقطة عليه يساوي

- 1- طول العمودي وفي اتجاهه عند هذه النقطة
- 2- طول العمودي وعكس اتجاهه عند هذه النقطة .

الحل :-



شكل -1-

نعم أن نصف قطر الانحناء R المنحني $y = f(x)$ عند نقطة (x, y) عليه يعطى بالعلاقة :-

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

وكما يعطي طول العمودي N من عند نفس النقطة إلى محور x بالعلاقة :

$$N = (1 + y'^2)^{1/2} |y|$$

وكما يتضح طول من الشكل السابق يكون لنصف قطر الانحناء نفس اتجاه العمودي إذا اختلفت إشارتا y'' و y بينما يتضاد اتجاهها نصف قطر الانحناء والعمودي إذا تطابقت إشارتا y'' و y

1- لكي يكون $R = N$ فإن إشارة y يجب أن تختلف عن إشارة y'' وبالتالي :-

$$\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = -y(1 + y'^2)^{1/2} \Rightarrow yy'' + y'^2 + 1 = 0$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة التفاضلية على الصورة :-

$$\frac{d}{dx}(yy') + 1 = 0 \Rightarrow yy' + x = A_1$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى يمكن حلها بفصل المتغيرات ومنه :-

$$ydy = (A_1 - x)dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}(A_1 - x)^2 + A_2$$

وهذه طائفة من الدوائر ذات بارامترين مركزها $(A_1, 0)$ وأنصاف أقطارها $\sqrt{A_2}$ حيث A_2, A_1 ثابتان اختياريان .

ملاحظات :-

- المعادلة $yy'' + y'^2 + 1 = 0$ هي معادلة تامة لأنه يمكن الحصول عليها بمفاضلة المعادلة $yy' + x = A_1$.

- المعادلة $yy'' + y'^2 + 1 = 0$ خالية صراحة من المتغير المستقل x وبالتالي يمكن تجربة حلها باستخدام التعويض $y' = g$ وبالتالي $y'' = g \frac{dg}{dy}$ حيث يمكن كتابة

المعادلة $yy'' + y'^2 + 1 = 0$ على الشكل :-

$$yg \frac{dg}{dy} + g^2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{g dg}{g^2 + 1} = 0$$

$$\ln y + \frac{1}{2} \ln(g^2 + 1) = \ln A_2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{y} \sqrt{A_2 - y^2}$$

وبفصل المتغيرات :

$$\pm \frac{y dy}{\sqrt{A_2 - y^2}} = dx \Rightarrow A_2 - y^2 = (x - A_1)^2$$

حيث A_2, A_1 ثابتان اختياريان .

2- لكي يكون $R = -N$ يجب أن نتطابق إشارتا y, y'' وعليه :-

$$\frac{1}{y''} (1 + y'^2)^{3/2} = y (1 + y'^2)^{1/2} \Rightarrow yy'' - y'^2 - 1 = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية خالية من x صراحة وبالتالي يمكن استخدام التعويض $y' = g$

ومن ثم $y'' = g \cdot \frac{dg}{dy}$ وعليه تصير المعادلة إلى :-

$$y g \frac{dg}{dy} - g^2 - 1 = 0$$

بفصل المتغيرات والمكاملة :-

$$\frac{g dg}{1 + g^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(1 + g^2) = \ln + \ln A_1$$

$$1 + g^2 = A_1^2 y^2 \Rightarrow g = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{A_1^2 y^2 - 1} \quad \text{أو}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{A_1^2 y^2 - 1}} = \pm dx \quad \text{بفصل المتغيرات والمكاملة :}$$

$$\frac{1}{A_1} \cosh^{-1}(A_1 y) = \pm x + A_2 \quad \text{إن}$$

$$A_1 y = \cosh(\pm A_1 x + A_1 A_2) \Rightarrow y = \frac{1}{A_1} \cosh(\pm A_1 x + A_1 A_2)$$

بوضع $B = A_1 A_2, A = 1/A_1$ نحصل على :-

$$y = A \cosh\left(\pm \frac{x}{A} + B\right)$$

وهذه طائفة من السلاسل (catenaires) ذات بارامترين B, A

VIII. 2. تطبيقات فيزيائية :-

المثال الثالث :-

جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث عجلته تساوي ثلاثة أمثال سرعته . فإذا كان بعده عند لحظة البداية عن نقطة الأصل متر واحد وكانت سرعته الابتدائية $1.5m/s$ فأوجد الزمن الذي يصبح عنده على بعد $10m$ من نقطة الأصل .

الحل :-

ليكن بعد الجسم عن نقطة الأصل عند اللحظة t هو x وبالتالي تكون سرعته هي $\frac{dx}{dt}$ وعجلته $\frac{d^2x}{dt^2}$ عند هذه اللحظة :-

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3 \frac{dx}{dt}$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية فيها المتغير التابع x والمتغير المستقل t وهي خالية صراحة من المتغير التابع والمتغير المستقل . إذن بوضع $\vartheta = \frac{dx}{dt}$

ومن ثم $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\vartheta}{dt}$ تؤول هذه المعادلة إلى :-

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 3\vartheta \Rightarrow \frac{d\vartheta}{\vartheta} = 3dt \Rightarrow \vartheta = A_1 e^{3t}$$

وحيث انه عند $t = 0$ كانت $g = 1.5m/s$ إذن :-

$$1.5 = A_1 e^0 \Rightarrow A_1 = 1.5 \Rightarrow g = 1.5e^{3t}$$

ولكن

$$g = \frac{dx}{dt} = 1.5e^{3t} \Rightarrow dx = 1.5e^{3t} dt \Rightarrow x = \frac{1}{2}e^{3t} + A_2$$

وحيث انه عند $t = 0$ كانت $x = 1m$ أذن :-

$$1 = \frac{1}{2}e^{3 \times 0} + A_2 \Rightarrow A_2 = 0.5$$

$$x = \frac{1}{2}[e^{3t} + 1] \Rightarrow 3t = \ln(2x - 1) \quad \text{إذن}$$

الزمن الذي يصبح عنده الجسم على بعد $10m$ هو :

$$3t = \ln(2 \times 10 - 1) \Rightarrow t = 0.9815$$

أي أن الجسم يكون على بعد $10m$ من نقطة الأصل بعد حوالي الثانية .

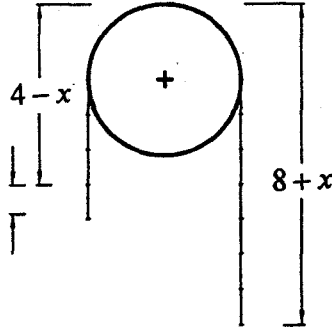
المثال الرابع :-

عُقدت سلسلة طولها $12m$ على بكرة بحيث يتدلى منها $4m$ من ناحية و $8m$ من الناحية الأخرى . جد الزمن اللازم لانزلاق السلسلة ؟

1- بإهمال الاحتكاك بين السلسلة والبكرة .

2- إذا كان الاحتكاك بين السلسلة والبكرة يساوي $\frac{1}{2} mg$.

الحل :-



شكل -2-

لتكن كتلة المتر الواحد من السلسلة هي $m(kg/m)$ تبدأ السلسلة في الانزلاق على البكرة بفعل فارق الطول على جانبي البكرة كما هو مبين في الشكل -2- لتكن المسافة التي انزلقتها السلسلة بعد زمن t هي x وبالتالي يكون الجزء الأقصر عند هذه اللحظة $(4-x)$ والجزء الأطول $(8+x)$ وفارق طول هذين الجزئين وهو $(4+2x)$ يؤثر بقوة $(4+2x)mg$ على السلسلة إلى اسفل حيث g هي عجلة الجاذبية الأرضية .

1- بإهمال الاحتكاك وبتطبيق قانون نيوتن للحركة نحصل على :-

$$(4+2x)mg = (12m)\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{6}x = \frac{g}{3}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من المرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة .

الحل المتجانس هو :-

$$x_h(t) = A_1 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{6}}t\right) + A_2 \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{6}}t\right)$$

بينما الحل الخاص يمكن الحصول عليه باستخدام طريقة المعاملات غير المعينة وذلك بوضع :

$$x = A_3$$

بالتعويض في المعادلة نجد $A_3 = -2$ إذن يكون الحل الكامل من الشكل :-

$$x(t) = A_1 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{6}} t\right) + A_2 \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{6}} t\right) - 2$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{6}} \left[A_1 \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{6}} t\right) + A_2 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{6}} t\right) \right] \quad \text{و}$$

وحيث أن عند اللحظة $t = 0$ كانت $x = 0$ ، $\frac{dx}{dt} = 0$

أذن :

$$0 = A_1 - 2 \Rightarrow A_1 = 2$$

$$0 = \sqrt{\frac{g}{6}} A_2 \Rightarrow A_2 = 0$$

وعلى ذلك يكون :

$$x(t) = 2 \left[\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{6}} t\right) - 1 \right]$$

وعندما يتم انزلاق السلسلة تكون $x = 4$ ، ويتحدد الزمن اللازم للانزلاق من :-

$$4 = 2 \left[\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{6}} t\right) - 1 \right] \Rightarrow t = \sqrt{\frac{6}{g}} \cosh^{-1} 3 = 1.379 \text{ sec}$$

2- بأخذ قوة الاحتكاك وهي $\left(\frac{1}{2}mg\right)$ في الحساب تصبح معادلة الحركة على

الصورة :-

$$(4+2x)mg - \frac{1}{2}mg = (12m) \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{6}x = \frac{7}{24}g$$

والحل بنفس الطريقة يعطي :-

$$x(t) = \frac{7}{4} \left[\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{6}}t\right) - 1 \right]$$

$$t = \sqrt{\frac{6}{g}} \cosh^{-1}\left(\frac{16}{7} + 1\right) = 1.454 \text{ sec} \quad \text{:- والزمن اللازم للانزلاق هو :-}$$

المثال الخامس :-

تعطي المعادلة التفاضلية للجهد الكهربائي V عند أي نقطة بين سطحين كرتيين لهما نفس المركز نصف قطريهما r_1 ، $r_2 > r_1$ بحويان داخلها شحنه كهربية بالعلاقة :-

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = 0$$

حيث r بعد النقطة عن المركز المشترك للسطحين . جد الجهد الكهربائي عند أي نقطة إذا كان جهد السطح الداخلي V_1 وجهد السطح الخارجي V_2
الحل :-

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = 0$$

هذه معادلة تفاضلية تخلو صراحة من المتغير التابع V .

بوضع $\vartheta = \frac{dV}{dr}$ ومن ثم $\frac{d\vartheta}{dr} = \frac{d^2V}{dr^2}$ نحصل على .

$$\frac{d\vartheta}{dr} + \frac{2}{r}\vartheta = 0 \Rightarrow \frac{d\vartheta}{\vartheta} = -\frac{2}{r}dr \Rightarrow \ln \vartheta = -2 \ln r + \ln A_1$$

$$\vartheta = \frac{dV}{dr} = \frac{A_1}{r^2} \Rightarrow dV = \frac{A_1}{r^2}dr \Rightarrow V = -\frac{A_1}{r} + A_2$$

بتطبيق الشروط الحدية :-

$$V_1 = \frac{-A_1}{r_1} + A_2 \quad , \quad V_2 = \frac{-A_1}{r_2} + A_2$$

$$A_1 = \frac{-r_1 r_2}{r_2 - r_1} (V_1 - V_2) \quad \text{-: بحل هذين المعادلتين نجد أن}$$

$$A_2 = \frac{r_2 V_2 - r_1 V_1}{r_2 - r_1}$$

وبالتعويض في معادلة الجهد نحصل على الجهد عند أي نقطة $r_1 < r < r_2$ على الصورة :

$$V(r) = \frac{r_1(r_2 - r)V_1 + r_2(r - r_1)V_2}{r(r_2 - r_1)}$$

المثال السادس :-

عندما يتحرك جسم مشحون كتلته $m(\text{kg})$ وشحنته q (Coulombs) تحسب تأثير مجال كهربائي E (Volts /meter) ومجال مغناطيسي B (Tesla) فإنه يعاني قوة

تسمى بقوة لورنتز (Lorentz Force) وتعطي بالعلاقة :-

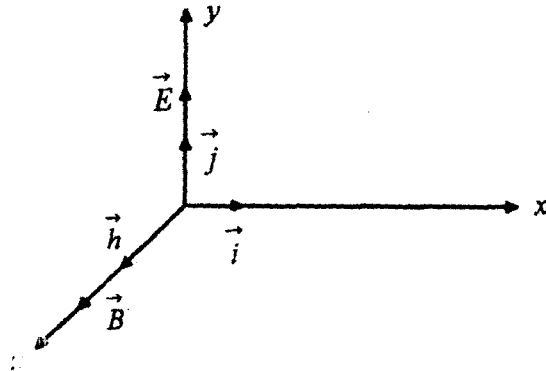
$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{V} \wedge \vec{B}$$

حيث V هي سرعة الجسم عند أي لحظة t وعلامة (\wedge) تشير إلى إن الضرب هو ضرب اتجاهي (Vector Product).
جد المسار الذي يسلكه هذا الجسم إذا بدأ حركته من السكون عند نقطة الأصل في مجالين منتظمين لا يتغيران مع الزمن إحداهما وهو المجال الكهربائي مواز لمحور y والآخر هو المجال المغناطيسي مواز لمحور z .

للملاءمة نضع $a = u/w = mE/qB^2$ ، $u = E/B$ ، $w = qB/m$
الحل :-

$$\vec{E} = E\vec{j} \quad , \quad \vec{B} = B\vec{k} \quad \text{ليكن}$$

حيث \vec{j}, \vec{k} متجاها وحدة في اتجاه محوري y, z على الترتيب .



شكل -3-

$$\vec{V} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V_x & V_y & V_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = BV_y \vec{i} - BV_x \vec{j}$$

$$\vec{F} = qE \vec{j} + qBV_y \vec{i} - qBV_x \vec{j} = qBV_y \vec{i} + q(E - BV_x) \vec{j} \quad \text{إذن}$$

أي أن القوة المؤثرة على الجسم المشحون تقع في المستوي xy . وبالتالي فالحركة محصورة في هذه المستوي لان الجسم يبدأ حركته من السكون فرضاً . بتطبيق قانون نيوتن للحركة في الاتجاهين y, x نحصل على :-

$$m \frac{dV_x}{dt} = BV_y \quad , \quad m \frac{dV_y}{dt} = (E - BV_x)$$

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{B}{m} V_y \quad , \quad \frac{dV_y}{dt} = \frac{B}{m} \frac{E}{B} - \frac{B}{m} V_x \quad \text{أو}$$

$$\frac{dV_x}{dt} = wV_y \quad (1) \quad , \quad \frac{dV_y}{dt} = wu - wV_x \quad (2) \quad \text{أو}$$

نحل المعادلتين الأنيتين في V_y, V_x بمفاضلة الثانية بالنسبة للزمن والتعويض عن

$\frac{dv}{dt}$ من الأولى نحصل على :-

$$\frac{d^2 V_y}{dt^2} + w^2 V_y = 0$$

وهذه معادلة متجانسة حلها هو :- $V_y = A_1 \cos wt + A_2 \sin wt$

وحيث أن عند $t = 0$ يكون $V_y = 0$ إذن $A_1 = 0$
 ومن المعادلة الثانية عند $t = 0$ يكون $\frac{dV_y}{dt} = wu$ إذن $A_2 = U$

$$V_y = U \sin wt \quad (3) \quad \text{إذن}$$

بالتعويض في المعادلة الأولى نجد أن : $\frac{dV_x}{dt} = wu \sin wt$

$$V_x = -u \cos wt + A_3 \quad \text{إذن}$$

حيث إن عند $t = 0$ يكون $V_x = 0$ فإن $A_3 = 0$

$$V_x = u(1 - \cos wt) \quad (4) \quad \text{إذن}$$

بمكاملة (3), (4) نحصل على y, x :-

$$y = \int V_y dt = -\frac{u}{w} \cos wt + A_4$$

$$y = 0, \text{ at } t = 0 \Rightarrow A_4 = +\frac{u}{w} = Q \quad \text{إذن}$$

$$y = Q(1 - \cos wt) \quad (5) \quad \text{إذن}$$

$$x = \int V_x dt = ut - \frac{u}{w} \sin wt + A_5$$

$$x = 0 \quad \text{at} \quad t = 0 \Rightarrow A_5 = 0 \quad \text{إذن :}$$

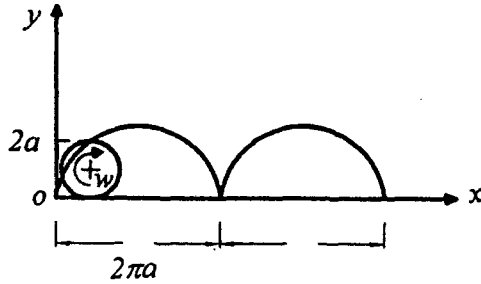
$$x = Q(wt - \sin wt) \quad (6)$$

وتعطي المعادلتان (5)، (6) والمعادلات البارامترية للمسار :

$$x = Q(\omega t - \sin \omega t)$$

$$y = Q(1 - \cos \omega t)$$

وهاتان المعادلتان هما المعادلتان البارامتريتان للمنحنى الدويري (cycloid) وهو مسار نقطة على محيط دائرة نصف قطرها Q تتدحرج دون انزلاق بسرعة زاوية ω على محور x كما هو مبين في الشكل التالي :-



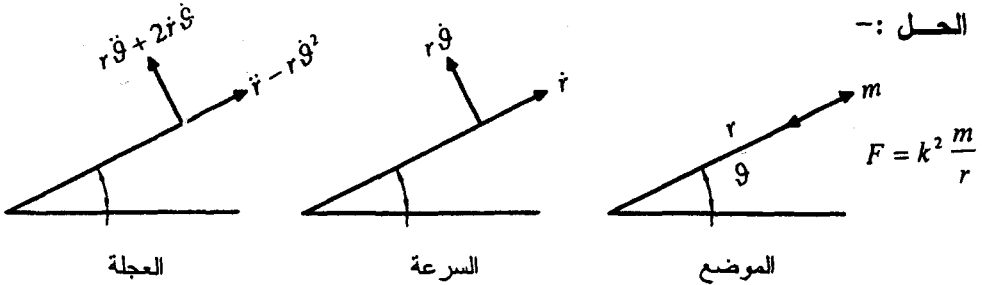
شكل -4-

المثال السابع :-

جسم متحرك كتلته m يجذب صوب نقطة ثابتة O بقوة تتناسب عكسيا ومربع بعده عنها .

اثبت إن الجسم يتحرك على مسار مخروطي (conic Path) بؤرتة النقطة الثابتة .
للسهولة استخدام الإحداثيات القطبية .

الحل :-



شكل -5-

لتكن القوة المؤثرة على الجسم عند أي موضع هي $\frac{k^2 m}{r^2}$ صوب النقطة الثابتة 0 حيث k ثابت .

بتطبيق قانون نيوتن في الاتجاه النصف قطري والمتعامد نحصل على :-

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = -\frac{k^2 m}{r^2} \quad , \quad m \left[r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right] = 0$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{k^2}{r^2} \quad (i) \quad , \quad r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (ii)$$

من (ii) نرى أن :-

$$r \frac{d^2 r}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[r^2 \frac{d\theta}{dt} \right] = 0 \Rightarrow r^2 \frac{d\theta}{dt} = A_1 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{A_1}{r^2} \quad (iii)$$

بالتعويض في المعادلة (i) نحصل على :-

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{A_1^2}{r^3} = -\frac{k^2}{r^2} \quad (iv)$$

ولتخلص من r في المقام نستخدم التعويض $e = \frac{1}{r}$ ثم نحذف t بين (iii), (iv)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{de} \cdot \frac{de}{dt} = \frac{dr}{de} \cdot \frac{de}{r d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \left(-\frac{1}{e^2} \right) \frac{de}{d\theta} (A_1 e^2) = -A_1 \frac{de}{d\theta}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(-A_1 \frac{de}{d\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(-A_1 \frac{de}{d\theta} \right) \cdot \frac{d\theta}{dt} = A_1^2 e^2 \frac{d^2 e}{d^2 \theta}$$

بالتعويض في (iv) نحصل على العلاقة التفاضلية بين e, ϑ على الصورة :-

$$\frac{d^2 e}{d\vartheta^2} + e = \frac{k_2}{A_1^2} \quad (v)$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة حلها المتجانس هو :-

$$e_h(\vartheta) = A_2 \cos(\vartheta + \vartheta_0)$$

حيث A_2, ϑ_0 ثابتان اختياريان والحل الخاص هو $e_p = k^2 / A_1^2$ ويكون الحل الكامل هو :-

$$e(\vartheta) = A_2 \cos(\vartheta + \vartheta_0) + \frac{k^2}{A_1^2}$$

$$r = \frac{1}{A_2 \cos(\vartheta + \vartheta_0) + k^2 / A_1^2} \quad (vi) \quad \text{أو}$$

بوضع $\varepsilon^2 = A_2^2 A_1^4 / k^4, l = A_1^2 / k^2$ نأخذ معادلة المسار (vi) الصورة :

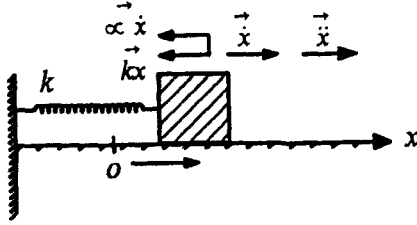
$$r(\theta) = \frac{l}{1 \pm \varepsilon \cos(\vartheta + \vartheta_0)}$$

وهذه هي المعادلة القطبية لمخروطي بؤرتيه النقطة الثابتة 0.

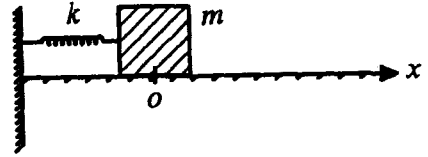
المثال الثامن :-

ناقش بالتفصيل الحركة المستوية لزنبرك (spring) ثابت مرونته k أحد طرفيه مثبت والطرف الآخر مربوط به جسم كتلته m [kg] . والجسم حر الحركة في مستوي أفقي تحت تأثير مقاومة تتناسب مع سرعته .
ما هو الشبيه الكهربائي لهذه المنظومة .

الحل :-



موضع خارج الاتزان (ب)



موضع الاتزان (أ)

شكل -6-

يبين الشكل (أ) وضع الاتزان للجملة المتحركة المتكونة من النابض وكتلة m . نعتبر الحركة في اتجاه محور x حيث وضع الاتزان هو نقطة الأصل .
أزح الجسم m بعيدا عن وضع الاتزان وتركت الجملة حرة الحركة بعد ذلك . يبين الشكل (ب) الوضع اللحظي عندما يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب لمحور x مسافة x من وضع الاتزان 0 ، حيث يؤثر عليه في اتجاه معاكس لحركته :
قوة النابض kx التي تتناسب مع الاستطالة x حيث k ثابت مرونته .
قوة مقاومة $\propto \frac{dx}{dt}$ تتناسب وسرعة الجسم $\frac{dx}{dt}$ حيث α وهي مقاومة التخميد للحركة . وعلى ذلك تكون معادلة الحركة هي :-

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

وإذا اعتبرنا α, k ثابت لا تعتمد على x أو t تكون معادلة الحركة معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة وهي في حالة الحركة الحرة معادلة متجانسة. المعادلة المميزة :-

$$ms^2 + \alpha s + k = 0$$

حيث استخدمنا الرمز x بدلا من m , لان الأخيرة تمثل الكتلة هنا . وجذرا المعادلة المميزة هما :-

$$S_{1,2} = \frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\lambda = \alpha / 2m \quad , \quad w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad B = \sqrt{\lambda^2 - w_0^2} \quad \text{:- للملاعبة نضع :-}$$

وعلى ذلك يكون الجذران هما :

$$s_1 = -\lambda + B, s_2 = -\lambda - B$$

وتتوقف طبيعة الحل على الطبيعة المميز : $\Delta = B^2 = \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - k/m$

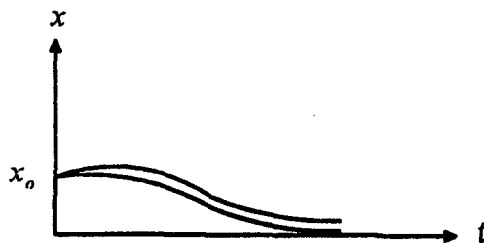
أولاً : المميز موجب :-

$$\Delta = B^2 > 0 \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m} \Rightarrow \alpha > \sqrt{4mk}$$

وينتج ذلك في حالة كون مقاومة الحركة كبيرة . وفي هذه الحالة يكون للمعادلة المميزة جذران حقيقيان مختلفان سالبان $s_1 = -\lambda + B$ و $s_2 = -\lambda - B$ حيث $\alpha > B$ وعلى ذلك :-

$$x = e^{-\lambda t} [Ae^{Bt} + Ce^{-Bt}]$$

ويبين الشكل التالي سلوك x في حالة وجود مقاومة كبيرة للحركة والتي تعرف بحاله التخميد الزائد (over Damping)



شكل - 7 -

عند $t = 0$: $x = x_0 = A + C$

عندما $t \rightarrow \infty$ فإن $x \rightarrow 0$

أي أن الجسم يمكن أن يمر بوضع اتزان واحد مرة واحدة قبل أن يستقر عنده

ثانياً :- المميز منعدم :-

$$\Delta = B^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{2m} \right)^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \alpha = \sqrt{4mk} = \alpha_c$$

في هذه الحالة يكون للمعادلة المميزة جذران حقيقيان سالبان ومتساويان (جذر مزدوج)

$$s = -\lambda = -\alpha / 2m$$

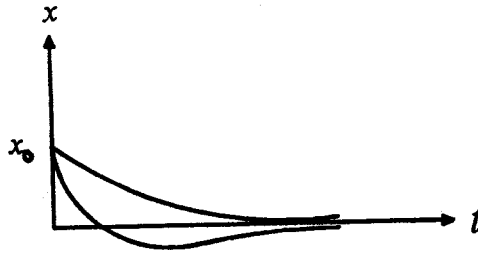
ويكون :

$$x = e^{-\lambda t} (At + C)$$

وواضح أيضا من هذه المعادلة الأخيرة انه إذا بدأ الجسم في التحرك من عند مسافة اختيارية $x_0 = C$ فانه سيقرب مع مرور الزمن من موضع اتزانه $x = 0$. والشكل العام للحركة مشابه لحالة التخميد الزائد وتعرف هذه الحالة بحالة التخميد الحرج (Critical Damping) حيث تكفي المقاومة $\alpha = \alpha_c$ لمنع تنذب الحركة . وتعرف قيمة المقاومة α_c بالمقاومة الحرجة (Critical Resistance)

ملحوظة :-

قد يعبر الجسم موضع اتزانه لمرة واحدة فقط عند زمن $t' = -A/C$ إذا سمحت ظروف المسألة باختلاف C, A في الإشارة .



شكل - 8 -

ثالثاً :- المميز سالب :

$$\Delta = B^2 < 0 \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{2m} \right)^2 < \frac{k}{m} \Rightarrow \alpha < \sqrt{4km}$$

وتتحقق هذه الحالة إذا ما قلت مقاومة الحركة إلى ما دون قيمتها الحرجة ويكون للمعادلة المميزة جذران مركبان مترافقان جزءاهما الحقيقيان متساويان وسالبان وللملاءمة نضع :-

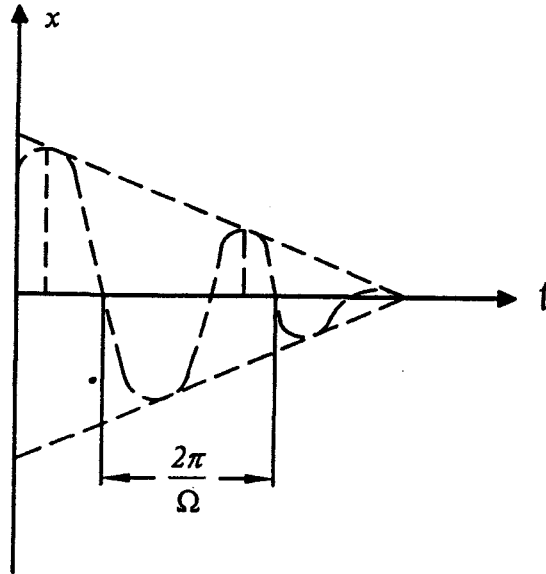
$$B^2 = -\Omega^2 \Rightarrow B = \pm i\Omega, \quad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

وبالتالي يكون جذر المعادلة المميزة هما $s_{1,2} = -\lambda \pm i\Omega$

ويكون الحل :-

$$x = Ae^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \phi_0)$$

حيث A, ϕ_0 ثابتان اختياريان يتحددان من طرف بدء الحركة . وواضح أن الحركة هنا حركة تذبذبية (Oscillatory Motion) ترددها الزاوي Ω والذي يسمى بالتردد الطبيعي (Natural Damped Frequency) . لكن سعة (Amplitude) هذه الحركة التذبذبية يتضاءل باستمرار مع مرور الزمن طبقاً للعلاقة $Ae^{-\lambda t}$. وتسمى الثابت الموجب λ بثابت التخميد أو معامل التخميد (Damping Constant)



شكل -9-

بين الشكل المقابل هذه الحركة التذبذبية حيث تبدأ بقيمة اختيارية $x_0 = A \cos \varphi_0$ وتنتهي بالصفر حالما الجسم في موضع الاتزان عند $t = \infty$.
ولكن في طريقه للاستقرار يمر بموضع الاتزان مرات عديدة بين كل مرور واخر يتضاءل بعد الجسم عند موضع اتزانه . وتعرف الحالة التذبذبية بحالة التخميد الناقص (Under Damping)

ملاحظة:-

من المعادلة السابقة نحصل على :-

$$\frac{dx}{dt} = -\Omega A e^{-\lambda t} \sin(\Omega t + \varphi_0) - \lambda A e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{dx}{dt} = -A e^{-\lambda t} [\lambda \cos(\Omega t + \varphi_0) + \Omega \sin(\Omega t + \varphi_0)] = A' e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi'_0)$$

$$A' = A \sqrt{\lambda^2 + \Omega^2} = w_0^2 A \quad \text{and} \quad \varphi'_0 = \varphi_0 - \tan^{-1} \frac{\Omega}{\lambda} - \lambda \quad \text{حيث}$$

أي إن سرعة الجسم هي أيضا كمية تذبذبية مخمدة لها نفس التردد الزاوي Ω ،
ونفس ثابت التخميد λ . ويلاحظ أن القيم العظمى المتتالية في نفس الاتجاه للبعد x
تتباعد على فترات زمنية متساوية طول كل فترة هو $T_d = \frac{2\pi}{\Omega}$ وهو الزمن الدوري
(Periodic time) للحركة التذبذبية .

ويجب التأكد على أن منحنى x ليس منحنى جيبيًا خالصًا بسبب وجود العامل الأسّي $e^{-\lambda t}$. فمثلا الفترة الزمنية بين قيمة عظمى وقيمة صفرية تليها مباشرة لا تساوي نصف دورة بالضبط . وقياس معدل تناقص القيم العظمى نعرف :

Numerical Decrement N.D

* التناقص العددي :-

هو الفرق بين قيمتين عظميتين (موجبين) متتاليتين مقسوماً على القيمة العظمى الأكبر أي أن :-

$$N.D = \frac{(x_n - x_{n-1})}{x_n} = 1 - e^{-\lambda T_d}$$

حيث n دليل سفلي نعد به القيم العظمى (الموجبة)

Logarithmic Decrement L.D

* التناقص اللوغاريتمي :

هو لوغزتم النسبة بين قيمة عظمى (موجبة) والقيمة العظمى الموجبة التي تليها مباشرة

$$L.D = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \ln e^{-\lambda T_d} = -\lambda T_d = 2\pi\lambda / \Omega$$

هذا يعني أن القيم العظمى الموجبة x_3, x_2, x_1 تكون متوالية هندسية أساسها $e^{-\lambda T_d}$

رابعاً : المميز تخيلي خالص :-

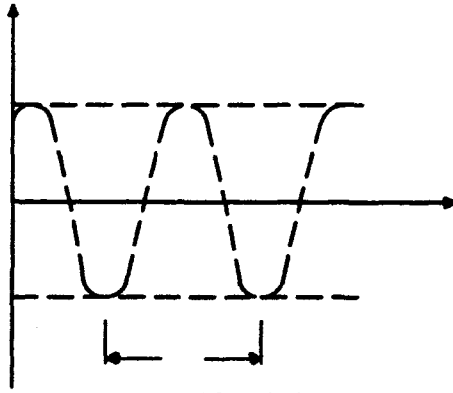
$$R(\Delta) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \Omega_d = \omega_0$$

وهذه هي الحالة التي تنعدم فيها مقاومة الحركة وبالتالي تصبح الحركة حركة تذبذبية

غير مخمدة (Undamped Oscillatory Motion) بتردد زاوي $\sqrt{\frac{k}{m}}$ ، يُعرف

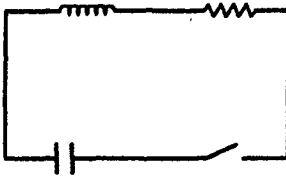
بالتردد الطبيعي غير المخمد وسعة الحركة ثابتة A تعتمد على ظروف بدء الحركة

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$



شكل -10-

الشبيه الكهربائي للجملة الميكانيكية :- Electrical Analog
 الشبيه الكهربائي للجملة الميكانيكية المبينة في الشكل (أ) والشكل (ب) هو الدائرة
 الكهربائي المبينة في الشكل التالي والمكونة من ملف L [Henry] على التوالي مع
 سعة C [Farad] ومقاومة كهربائية R [ohm] . فإذا افترضنا أننا حفزنا هذه الدائرة
 بوضع شحنة ابتدائية q_0 على المكثف C فإن هذه الشحنة تأخذ في التسرب عبر
 الدائرة من اللوح الموجب إلى اللوح السالب للمكثف وينشأ على ذلك تيار كهربائي i
 بتطبيق قانون كيرشوف للجهد حول الدائرة نحصل على :-



شكل - 11 -

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = 0$$

وبالمفاضلة مرة أخرى نجد :

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

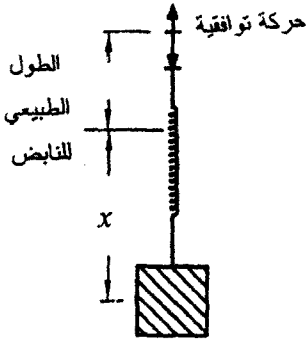
وهذه هي المعادلة التفاضلية للتيار الكهربائي وهي شبيهة بالمعادلة التفاضلية للجملة
 الميكانيكية ، ويلاحظ أن الملف L شبيهة الكتلة m ، والمقاومة الكهربائية R شبيهة
 المقاومة الميكانيكية ∞ ، والسعة الكهربائية C شبيهة مقلوب ثابت مرونته النسايب $1/k$
 وحل المعادلة التفاضلية السابقة شبيهة بحل المعادلة التفاضلية الميكانيكية في حالتها
 الأربعة التي فصلناها فيما سبق .

المثال التاسع :-

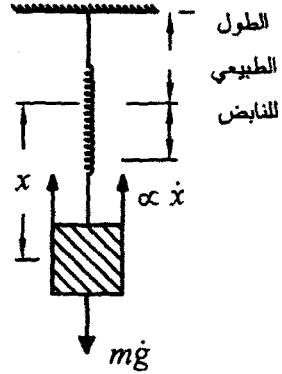
نابض ثابت مرونته $k = 392 \text{ N/m}$ مثبت من نهايته العليا ، ومعلق في نهايته السفلى جسم كتلته 8 kg فإذا كانت مقاومة الحركة هي 16 N/ms وعجلته الجاذبية هي 9.81 m/s^2

1- إذا سحب الجسم مساحة 5 cm اسفل موضع اتزانه ثم أطلق للتحرك من السكون فاثبت أن الجسم يتحرك حركة تذبذبية . جد معادلة الحركة والزمن الدوري والتناقص اللوغرتمي لها .

2- كما في (1) ولكن إذا أعطى الطرف الأعلى للنابض الحركة التوافقية $y = 0.2 \cos 7t$ في اتجاه النابض .



(ب)



(أ)

شكل -12-

الحل :

1- عندما تعلق الكتلة 8 kg في النابض فانه في حالة الاتزان يستطيل مسافة x حيث :

$$kx = mg \Rightarrow x = \frac{8 \times 9.8}{392} = 0.2 \text{ m}$$

ليكن موضع الجسم هو x من نهاية الطول الطبيعي لل نابض حيث الاتجاه الموجب مقاساً لأسفل كما في الشكل (أ) وعلى ذلك تكون معادلة الحركة هي :-

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - kx - \alpha \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = g \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 49x = 9.8$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 49x = 0 \quad \text{:- المعادلة المتجانسة هي :-}$$

$$m^2 + 2m + 49 = 0 \quad \text{:- المعادلة المميزة هي :-}$$

$$m_{1,2} = -1 \pm i4\sqrt{3} \quad \text{:- جذراهما هما :-}$$

ويكون الحل المتجانس كالتالي :

$$x_h = Ae^{-t} \cos(4\sqrt{3}t + \varphi_0)$$

حيث A, φ_0 ثابتان اختياريان .

والحل الخاص هو : $x_p = 0.2$

ويكون الحل الكامل هو :

$$x(t) = Ae^{-t} \cos(4\sqrt{3}t + \varphi_0) + 0.2$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Ae^{-t} [4\sqrt{3} \sin(4\sqrt{3}t + \varphi_0) + \cos(4\sqrt{3}t + \varphi_0)]$$

بدأ الجسم التحرك من السكون عند مسافة $x_0 = 0.05 + x = 0.25m$

$$0.25 = A \cos \varphi_0 + 0.2 \quad \text{إن}$$

$$0 = 4\sqrt{3} \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \quad \text{و}$$

$$\varphi_0 = 2.998 \text{rad} = 171.787^\circ \text{ and } A = -0.05 \text{m} \quad \text{أي أن}$$

$$x = -0.05e^{-t} \cos(4\sqrt{3}t + 2.998) + 0.2 \quad \text{إن}$$

وهذه حركة تذبذبية مخمدة ، ترددها الطبيعي المخمد $\Omega = 4\sqrt{3} \text{rad/s}$ وثابت تخميدها $\lambda = 1$ وزمنها الدوري $T_d = \frac{2\pi}{\Omega} = 0.9 \text{s}$ والتناقص اللوغرتمي لها هو $\lambda T_d = 0.9$. وبالتالي فالنسبة بين سعتين موجبتين متتاليتين للحركة هي $e^{\lambda T_d} = 0.4$ وحيث ان أول سعة هي 0.05m أن فثاني سعة موجبة للتذبذبة هي 0.02m .

ونلاحظ من عبارة $x(t)$ أن الإزاحة تتكون من مركبتين : المركبة الأولى هي حركة تذبذبية مخمدة تتضاءل ثم تتلاشى بمرور الزمن وتسمى هذه المركبة بالمركبة العابرة (Transient camponent) أو المركبة الطبيعية . وهي تعتمد أصلاً على خصائص الجملة المتحركة وعلى أحوال البداية ولا تعتمد على القوة الحافزة إلا لحفزها أو أبدأها فقط . والمركبة الثانية هي 0.2 وهي تعتمد على القوة الحافزة ومن طبيعتها ، حيث القوة الحافزة هنا هي الوزن 8kg المعلق في النابض وتسمى هذه المركبة بالمركبة أو بالمركبة المستقرة (Steady Component) لأنها هي التي تدوم بدوام القوة الحافزة أو بالمركبة القسرية (Forced Component) لأنها تفرض قسراً على الجملة بفعل القوة الحافزة .

2- عندما يتحرك الطرف الأعلى للنايـض حركة توافقية بسيطة $y = 0.2 \cos 7t$ فان معادلة الحركة تصبح :-

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - k(x - y) - \alpha \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 4gx = 9.8 + 9.8 \cos 7t$$

والمعادلة المتجانسة هي نفسها كما في الجزء (i) وعليه :-

$$x_h = Ae^{-t} \cos(4\sqrt{3}t + \varphi_0)$$

أما الحل الخاص يمكن الحصول عليه باستخدام طريقة المعاملات غير المعينة :-

$$x_p = 0.2 + 0.7 \sin 7t$$

ويكون الحل الكامل هو :-

$$x(t) = Ae^{-t} \cos(4\sqrt{3}t + \varphi_0) + 0.2 + 0.7 \sin 7t$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Ae^{-t} [4\sqrt{3} \sin(4\sqrt{3}t + \varphi_0) + \cos(4\sqrt{3}t + \varphi_0)] + 4.9 \cos 7t$$

وحيث عند $t = 0$ نكون $x = 0.05 + y = 0.45$ and $\frac{dx}{dt} = 0$

$$0.45 = A \cos \varphi_0 + 0.2 \quad \text{إذن :}$$

$$0 = -A[4\sqrt{3} \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0] + 4.9 \quad \text{و}$$

ومن هاتين المعادلتين نجد أن : $\varphi_0 = 1.214 \text{ rad}, A = 0.716$

وعليه يكون :

$$x = 0.716e^{-t} \cos(4\sqrt{3}t + 1.214) + 0.7 \sin 7t + 0.2$$

والحد الأول يتخامد مع مرور الزمن ويتلاشى وهو يكون المركبة العابرة للحركة بينما الحد التوسط والحد الأخير يكونان المركبة المستقرة للحركة حيث الحد الأخير يمثل إزاحة ثابتة نتيجة الوزن ، بينما الحد الأوسط يمثل إزاحة مترددة بنفس تردد الحركة التوافقية المفروضة قسراً على الطرف الأعلى للناضض .

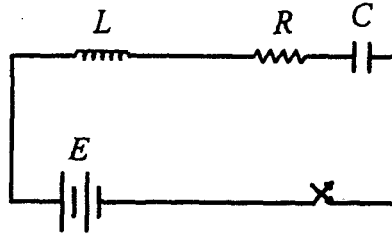
Electrical Applications

3 تطبيقات كهربائية :-

المثال العاشر :-

في الدائرة الكهربائية المبينة في الشكل التالي ، ظل المفتاح مفتوحاً لمدة طويلة ثم قفل فجأة عند $t = 0$. جد معادلة التيار كدالة زمنية . ما هو اقل زمن يكون عنده التيار قيمة عظمى وما هي هذه القيمة العظمى ؟ أعط المقاومة للقيم التالية :

أولاً : $R = 20\sqrt{2}\Omega$ ثانياً : $R = 20\Omega$ ثالثاً : $R = 12\Omega$ رابعاً : $R = 0$



$L = 10 \text{ mH}$
 $C = 100 \mu\text{F}$

شكل-13-

الحل :-

نفرض أن التيار عند أي لحظة t بعد قفل المفتاح هو i . بتطبيق قانون كيرشوف للجهد حول مسار الدائرة نجد :-

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 \quad \text{بمفاضلة الطرفين والقسمة على } L \text{ نحصل على :}$$

حيث أن المفتاح ظل مفتوحا لمدة طويلة فتكون الدائرة في حالة استقرار قبل قفل المفتاح مباشرة ويظل كذلك لحظيا بعد قفل المفتاح بسبب وجود الملف L الذي يمنع التغير المفاجئ في التيار . ولتحقق ذلك يقوم الملف L بتحمل كل القوة الدافعة الكهربائية E لحظيا بعد قفل المفتاح . لكن بعد ذلك يأخذ التيار في النمو وتبدأ القوة الدافعة الكهربائية في التوزع على عناصر الدائرة الأخرى C, R . وفي النهاية حيث تصل الدائرة إلى حالة الاستقرار يكون المكثف C قد شحن وينعدم التيار وتظهر كل القوة الدافعة الكهربائية E بين طرفي المكثف . وما بين قيمته الصفرية الأولى وقيمته الصفرية النهائية قد يكون التيار تذبذبيا او غير تذبذبى حسب قيمة المقاومة .

$$\text{والشروط الابتدائية هي عند } t = 0 \text{ فان : } \frac{di}{dt} = \frac{E}{L} = 5 \times 10^3 \text{ , } i = 0$$

$$\text{المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية السابقة هي : } m^2 + \frac{R}{L}m + \frac{1}{LC} = 0$$

$$m_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad , \quad \Delta = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}$$

$$R = 20\sqrt{2}\Omega \quad \text{أولاً :-}$$

$$\frac{R}{2L} = \sqrt{2} \times 10^3 \text{ , and } \frac{1}{LC} = 10^6 \Rightarrow \Delta = 10^6 > 0$$

أي أن المميز موجب وهذه هي حالة التخميد الزائد ويكون الجذران حقيقيين متمايزين وبالتالي يكون التيار :-

$$i(t) = e^{-\sqrt{2} \times 10^3 t} [A \cosh 10^3 t + B \sinh 10^3 t]$$

وحسب الشروط الابتدائية نجد أن :- $A = 0$, $B = 5$

$$i(t) = 5e^{-10^3 \sqrt{2} t} \sinh 10^3 t \quad \text{:- عليه يكون التيار}$$

واضح أن التيار ينمو بدء من الصفر حتى يصل لقيمته العظمى وبعدها يناقص تدريجاً إلى الصفر . ونلاحظ أن :-

$$\frac{di}{dt} = +5 \times 10^3 e^{-10^3 \sqrt{2} t} [\cosh 10^3 t - \sqrt{2} \sinh 10^3 t]$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_m = 0 \Rightarrow t_m = 10^{-3} \tanh^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.88 \times 10^{-3} s.$$

وتكون قيمة التيار العظمى المقابلة هي :- $i_m = 5e^{-10^3 t_m} \sinh 10^3 t_m = 1.437A$

ثانياً :- $R = 20\Omega$

$$\frac{R}{2L} 10^3 , \frac{1}{LC} = 10^6 \Rightarrow \Delta = 0$$

أي أن المميز منعدم وهذه هي حالة التخميد الحرج (Critical Damping)

$$m_1 = m_2 = -10^3$$

وبالتالي يكون التيار هو :-

$$i = e^{-1000t} (At + B)$$

وحسب الشروط الابتدائية نجد أن $A = 5 \times 10^3$, $B = 0$ وبالتالي :-

$$i(t) = 5 \times 10^3 t e^{-1000t}$$

وواضح من هذه المعادلة أن التيار يصل قيمته العظمى عندما $1 - 10^3 t_m = 0$
 أي عند اللحظة $t_m = 10^{-3} s$ والقيمة العظمى المقابلة هي :-

$$i_m = 5 \times 10^3 (10^{-3}) e^{-1} = 1.8394 A$$

$$R = 12 \Omega \quad \text{ثالثاً :-}$$

$$\frac{R}{2L} = 0.6 \times 10^3, \quad \frac{1}{LC} = 10^6 \Rightarrow \Delta = -0.64 \times 10^6 < 0$$

أي أن المميز سالب وهذه حالة التخميد الناقص (under Damping)
 ويكون الجذران مركبين ومترافقين

$$m_{1,2} = -600 \pm i800$$

وبالتالي يكون التيار :-

$$i(t) = e^{-600t} [A \cos 800t + B \sin 800t]$$

وحسب الشروط الابتدائية نجد أن :- $A = 0, B = 6.25$

$$i(t) = 6.25 e^{-600t} \sin 800t$$

وهذا تيار تذبذبي مخمد تردده الطبيعي المخمد $\Omega = 800 \text{ rad/s}$ وزمنه الدوري
 $T_d = 7.8 \times 10^{-3} s$ وثابت تخميده $\lambda = 600$. وأول قيمة عظمى له تحدث عند t_m
 حيث أن :-

$$\frac{di}{dt} = B e^{-600t} [800 \cos 800t - 600 \sin 800t]$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t_m} = 0 \Rightarrow t_m = 1.159 \times 10^{-3} s$$

والقيمة العظمى المقابلة هي :-

$$i_m = 6.25e^{-600t_m} \sin(800t_m) = 2.494A$$

ولأخذ فكرة عن سرعة تناقص التيار نحسب التناقص اللوغرتمي

$$L.D = \lambda T_d = 4.7124$$

مما يعني أن ثاني قيمة عظمى (موجبة) للتيار هي :-

$$i_{m(2)} = e^{-\lambda T_D} i_{m(1)} = 0.0224A$$

رابعاً :- $R = 0$

في هذه الحالة يكون المميز تخليفاً صرفاً ويكون الجذران تخيليين مترافقين

$m_{1,2} = \pm i10^{-3}$ ويكون التيار هو :-

$$i(t) = A \cos 10^3 t + B \sin 10^3 t$$

وحسب الشروط الابتدائية نجد أن :-

$$A = 0, B = 5$$

وعليه $i(t) = 5 \sin 10^3 t$

وهذا تيار تذبذبي غير مخمد تردده $\Omega = 10^3 \text{ rd/s}$ وزمنه الدوري $T_0 = 6.28 \text{ ms}$

وسعته $5A$ ثابتة غير متناقصة و أول قيمة عظمى تحدث بعد ربع ذبذبة أي عند

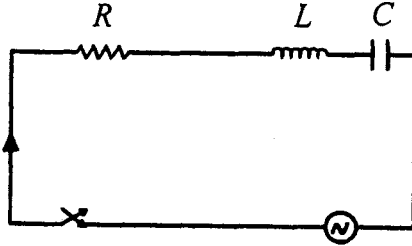
$$t_m = 1.57 \text{ ms}$$

المثال الحادي عشر :-

في دائرة التوالي RLC المبينة في الشكل التالي القوة الدافعة المسلطة تعطي

بالعلاقة $e(t) = E \cos \omega t$. اكتب الصورة العامة للمركبة العابرة للتيار المار في

الدائرة . جد المركبة المستقرة للتيار . ما هو التيار الكلي ؟ وكيف تتحدد ثوابت المركبة العابرة ؟ ناقش الحالة التي يكون فيها تردد القوة الدافعة الكهربائية المسلسلة مساويا للتردد الطبيعي غير المخمد للدائرة معتبرا حالتين الأولى الدائرة لها مقاومة والثانية الدائرة خالية من المقاومة .



شكل -14-

الحل :-

المعادلة التفاضلية للتيار المار في الدائرة هي :-

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \int i dt = ect$$

بالمفضلة والقسمة على ما نحصل على :-

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = -\frac{wE}{L} \sin wt$$

1- المركبة العابرة للتيار هي التيار الذي لا يعتمد على نوع القوة الحافزة بل يعتمد على ثوابت الدائرة فقط R, L, C أي أنها هي الحل المتجانس للمعادلة التفاضلية السابقة أي :-

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{Lc} = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية معادلتها المميزة لها جذران هما
حيث $m_{1,2} = -\lambda \pm \Omega j$

$$\lambda = -\frac{R}{2L}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{w_0^2 - \lambda^2}, \quad w_0^2 = \frac{1}{LC}$$

وسنفرض أن $w_0^2 > \lambda^2$ وعلى ذلك يكون التيار العابر هو :-

$$i_h(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(w_0 t + \varphi_0)$$

حيث A, φ_0 ثابتان اختياريان .

2- المركبة المستقرة للتيار هي التيار الذي يدوم مع انقضاء الزمن ، وهو التيار الذي تدفعه القوة الدافعة الكهربائية قسرا على المرور في الدائرة ، والمركبة المستقرة هي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الأصلية ، ويمكن الحصول عليه باستخدام طريقة المعاملات غير المعينة وعليه :-

$$i_p(t) = A_1 \cos wt + A_2 \sin wt$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل :-

$$A_1 = \frac{RE}{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wc}\right)^2}, \quad A_2 = \frac{(wL - 1/wc)E}{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wc}\right)^2}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + x^2}, \quad x = wL - \frac{1}{wc}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{x}{R} \quad \text{بوضع :}$$

يصبح الحل الخاص من الشكل :-

$$i_p(t) = \frac{E}{Z} \cos(wt - \theta)$$

ونلاحظ أن المركبة المستقرة للتيار توافقية أيضاً وترددها الزاوي w هو نفس تردد القوة الدافعة الكهربائية المسلطة على الدائرة ، لكن سعة القوة الدافعة الكهربائية E وسعة التيار هي E/Z حيث Z نعرف بمعاوقة الدائرة (Impedance).

ويختلف التيار في الطور عن القوة الدافعة الكهربائية بزاوية θ التي تسمى زاوية الطور (Phase Angle).

وواضح أن المعاوقة هي Z النسبة بين سعتي الجهد المسلط والتيار الناتج لذا فهي تقاس بوحدات المقاومة الكهربائية وهي الاوم $(ohms\Omega)$ كما تسمى الكمية $x = wL - \frac{1}{wc}$ بمفاعلة الدائرة (Reactance) وهي تقاس أيضاً بالاوم . وعادة

تعرف المعاوقة المركبة (Complex Impedance) كما يلي :-

$$Z = R + ix = \sqrt{R^2 + x^2} e^{i \tan^{-1} \frac{x}{R}}$$

والتيار الكلي هو مجموع المركبة العابرة والمركبة والمستقرة :-

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) \\ = Ae^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi_0) + \frac{E}{Z} \cos(\omega t - 0)$$

ومرة أخرى نلاحظ أن المركبة العابرة تذبذبية مخمدة ترددها Ω ومصيرها إلى الزوال بسبب العامل الأسّي $e^{-\lambda t}$ بينما المركبة المستقرة دائمة وسعتها ثابتة وترددها يساوي تردد الجهد المسلط .

3- يتعين الثابتان الاختياريان A, φ_0 في عبارة التيار الكلي من الشروط الابتدائية عادة بمعرفة $\frac{di}{dt}$ عن $t = 0$ على سبيل المثال .

4- نعتبر الحالة التي فيها يكون تردد المسلط w مساويا للتردد الطبيعي غير المخمد w_0 والتي تعرف بحالة الرنين (Resonance)

$$w = w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow w^2 LC = 1 \Rightarrow wL - \frac{1}{wc} = 0$$

$$X = w_0 L - \frac{1}{w_0 c} = 0 \quad \text{أو}$$

الحالة الأولى : $R \neq 0$

في هذه الحالة تكون المعاوقة اقل ما يمكن وتساوي R وتتعدم زاوية الطور θ وتكون المركبة المستقرة اكبر يمكن ولها نفس طور القوة الدافعة الكهربائية المسلطة. يكون التيار الكلي هو :

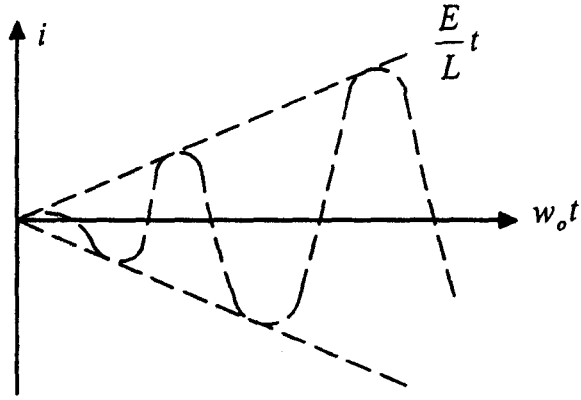
$$i(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi_0) + \frac{E}{R} \cos w_0 t$$

الحالة الثانية : $R = 0$

وفي هذه الحالة ينعدم ثابت التخميد $\left(\lambda = \frac{R}{2L} \right)$ وتكون $\Omega = w_0$ وتصبح المركبة العابرة $A \cos(w_0 t + \varphi_0)$ بتردد زاوي w_0 وسعة ثابتة لا تتخامد . أما المركبة المستقرة فمن أول وهلة يبدو أنها لانهاية لكن في الحقيقة نأخذ في النمو بدءاً من الصفر لكن دونما حدود لهذا النمو وتقترب من ∞ حينها $t \rightarrow \infty$ هذا بفرض انعدام المقاومة تماماً (ذلك الفرض الذي يتعذر تحقيقه تماماً في المسائل العملية) . نعود لحساب المركبة المستقرة تحت شرط $R = 0$ ، $w = w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$:-

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + w_0^2 i = -\frac{wE}{L} \sin w_0 t$$

$$i_p(t) = \frac{E}{2L} t \cos w_0 t \quad \text{الحل الخاص هو :-}$$



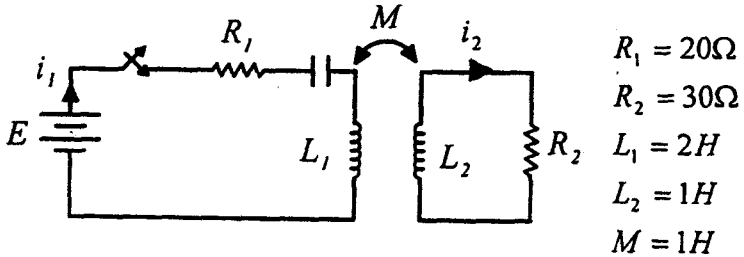
شكل - 15 -

وواضح من المعادلة الأخيرة أن المركبة المستقرة وأن كانت تبدأ منعقدة إلى أنها ستتمو دون حدود بسبب وجود الحد t في سعتها (أي أنها لم تعد لم تعد مستقرة) وحالة الرنين هذه يجب تجنب ظهورها في المنشآت العملية سواء كانت منشآت كهربائية أو ميكانيكية لان ظهور الرنين قد يؤدي إلى انهيار المنشأة بسبب التزايد المستمر في سعة التذبذب .

المثال الثاني عشر :-

في الدائرة المبينة فيما يلي جد المعادلة الزمنية للتيار i_1 المار في الدائرة الابتدائية وللتيار i_2 المار في الدائرة الثانوية . ما هو الزمن الذي عنده يصل تيار الدائرة الثانوية إلى قمته العظمي . ما قيمة هذا التيار ؟

الحل :-



شكل 16- دائرة تقارن مغناطيس

قبل قفل المفتاح كانت الدائرة في حالة استقرار وكان التياران i_2, i_1 منعدمين وهما يبقيان كذلك لحظيا بعد قفل المفتاح نتيجة للحث الموجود في الدائرة . بعد ذلك يأخذ التيار بالابتدائي i_1 في النمو ونتيجة نموه تتولد قوة دافعة كهربائية نتيجة للحث المتبادل M في الدائرة الثانوية مسببه بدورها تيار ثانيا i_2 في الدائرة الثانوية . في هذه الحالة يوجد مجهولان i_2, i_1 بتطبيق قانون كيرشوف للجهد على كلتا الدائرتين الابتدائية والثانوية اخذين الحث المتبادل في الحسبان نحصل على :-

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = E \quad (1)$$

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (2)$$

وبالتعويض بالقيم العددية المعطاة نحصل على :-

$$2 \frac{di_1}{dt} + 20i_1 + \frac{di_2}{dt} = 100 \quad (3)$$

$$\frac{di_2}{dt} + 30i_2 + \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (4)$$

وهاتان معادلتان انياتيان i_2, i_1 بحذف i_2 بينهما نحصل على :-

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + 80 \frac{di_1}{dt} + 600i_1 = 3000 \quad (5)$$

المعادلة المميزة :-

$$m^2 + 80m + 600 = 0 \Rightarrow m_1 = -71.62 \quad , \quad m_2 = -8.38$$

ويكون الحل المتجانس (المركبة العابرة) هو :-

$$i_{1h} = A_1 e^{m_1 t} + A_2 e^{m_2 t}$$

الحل الخاص (المركبة المستقرة) هو :- $i_{1P} = \frac{3000}{600} = 5A$

$$i_1(t) = A_1 e^{-71.62t} + A_2 e^{-8.38t} + 5 \quad (6) \quad \text{إن}$$

نبحث الشروط الابتدائية عند $t = 0$ يكون $i_1 = 0 = i_2$

وبالتعويض في (1), (2) نجد أن :- $2 \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0} + \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0} = 100$

$$\frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0} + \frac{di_2}{dt} \Big|_{t=0} = 0$$

مما يعنى انه عندما $t = 0$ يكون :- $i_1 = 0 = i_2$

$$\frac{di_1}{dt} = 100 = -\frac{di_2}{dt}$$

وبتطبيق الشروط الابتدائية هذه على المعادلة (6) نجد أن :-

$$A_1 = -0.92 \quad \text{and} \quad A_2 = -4.08$$

يكون التيار i_1 هو :-

$$i_1 = -0.92e^{-71.62t} - 4.08e^{-8.38t} + 5$$

ولإيجاد i_2 نعوض بعبارة i_1 في المعادلة (2) فنحصل على :-

$$\frac{di_2}{dt} = 100 - 20i_1 - 2 \frac{di_1}{dt} = -113.38e^{-71.62t} + 13.22e^{-8.38t} \quad (7)$$

$$i_2 = 1.58e^{-71.62t} - 1.58e^{-8.38t} + A_3 \quad \text{إذن}$$

$$i_2 = 0 \quad \text{at } t = 0 \Rightarrow A_3 = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$i_2 = 1.58[e^{-71.62t} - e^{-8.38t}] \quad (8)$$

ويكون i_2 قيمة عظمى إذا انعدم $\frac{di_2}{dt}$ ، من (7) نرى أن ذلك يحدث عند زمن t_m

$$113.38 e^{-71.62t_m} = 13.22 e^{-8.38t_m} \Rightarrow t_m = 0.034s \quad \text{حيث :-}$$

وبالتعويض في (8) نجد أن قيمة i_2 العظمى هي $i_2 m = -1.05A$ والإشارة السالبة تعني أن التيار يمر عكس الاتجاه المفروض في الشكل السابق

structural Applications

4. تطبيقات تركيبية

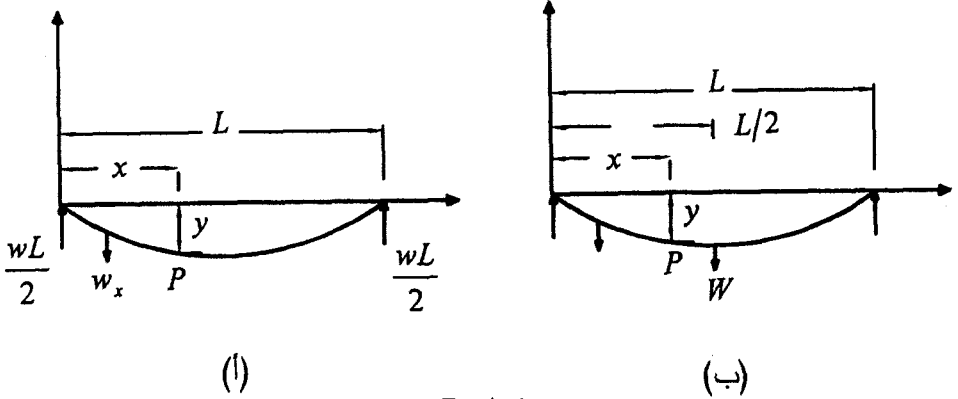
المثال الثالث عشر :-

عارضة أفقية طولها L ترتكز ارتكازاً عند طرفيها ، وتحمل حملاً منتظماً قدرة $w \frac{N}{m}$. جد معادلة المنحني المرن (منحني الترخيم) (Elastic or Deflection curve) لهذه العارضة إذا علمنا أن العلاقة بين الترخم y وعزم الانحناء M (Bending Moment) هي :-

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M \quad (1)$$

حيث E هي معامل المرونة (Modulus of Elasticity) لمادة العارضة . I هي عزم القصور الذاتي (عزم العطالة) (Moment of Inertia) لمقطع العارضة حول محور التعادل . اتجاه M الموجب هو الاتجاه الذي يجعل العارضة تنقعر في الاتجاه الموجب لمحور y . ما هو أكبر ترخم يحدث في العارضة ؟

نفس السؤل إذا أضيف حمل مركز W عند منتصف العارضة .



شكل -17-

الحل :-

يبين الشكل (1) العارضة l مع الترخيم الحادث لها نتيجة الحمل المنتظم الذي كثافته الطولية $w(N/m)$. يوجد رد فعل لاعلى قدرة $wl/2$ عند كل من الارتكازين الحرين . نحسب عزم القوى الخارجية حول النقطة $p(x, y)$ التي تبعد مسافة x عن طرف العارضة o المؤثر على جزء العارضة يسار النقطة p

$$M = x\left(\frac{wl}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}x\right)(wx)$$

حيث جزء الحمل المنتظم المؤثر يسار p هو $w(N)$ إلى اسفل ويعمل عند مسافة مكافئة $\left(\frac{1}{2}x\right)$. باستخدام المعادلة (1)

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} wx - \frac{1}{2} wx^2$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية للتخيم y . وهي من المرتبة الثانية وحلها مباشرة بالمكاملة مرتين :

$$EIy' = \frac{1}{4} \omega lx^2 - \frac{1}{6} \omega x^3 + A_1$$

$$EIy = \frac{1}{12} \omega lx^3 - \frac{1}{24} \omega x^4 + A_1x + A_2$$

ولتعيين الثابتين الاختيارين A_2, A_1 تستخدم الشروط الحدية حيث ينعدم الترخم عند $x=0$ و $x=L$ إذن :-

$$A_2 = 0 \quad , \quad A_1 = -\frac{1}{24} \omega L^3 \quad \text{ومنه}$$

$$y = \frac{w}{24EI} (2Lx^3 - x^4 - L^3x)$$

وهذه معادلة منحنى الترخيم (أو منحنى المرونة) ومن السهل ملاحظة أن أكبر ترخيم يحدث عند منتصف العارضة $x = L/2$ وقيمته هي :-

$$y_{\max} = -\frac{5wL^4}{384EI}$$

2- في حالة وجود حمل مركز W عند منتصف العارضة إضافة للحمل المنتظم في هذه الحالة يكون رد الفعل عند كل من الارتكازين الحرين هو $\frac{1}{2}(wL + w)$ كما في الشكل (ب). ويستلزم الأمر أن نفرق بين وضعين للنقطة P : في نصف العارضة الأيسر أو في نصفها الأيمن.

أ- تقع في نصف العارضة الأيسر $0 < x < L/2$

$$M = \frac{1}{2}(wL + w)x - \frac{1}{2}wx^2$$

$$EIy'' = M = \frac{1}{2}(wL + w)x - \frac{1}{2}wx^2 \quad \text{أذن}$$

$$EIy' = \frac{1}{4}(wL + w)x^2 - \frac{1}{6}wx^3 + A_1$$

$$EIy = \frac{1}{12}(wL + W)x^3 - \frac{1}{24}wx^4 + A_1x + A_2$$

لتعين الثابتين الاختياريين A_2, A_1 ونستخدم الشروط الحدية حيث :-

$$\text{At } x=0, y=0 \quad \text{و} \quad \text{at } x=L/2, y'=0$$

$$A_1 = -\frac{1}{48}(2wL + 2w)L^2, \quad A_2 = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$y = \frac{w}{24EI}(2Lx^3 - x^4 - L^3x) + \frac{w}{48EI}(4x^3 - 3L^2x) \quad (1) \quad \text{إذن}$$

ب- P تقع في نصف العارضة الأيمن ($L/2 < x < L$)

في هذه الحالة يدخل الحمل المركزي W عند منتصف العارضة في حساب العزم .

$$M = \frac{1}{2}(wL + w)(L - x) - \frac{1}{2}w(L - x)^2$$

حيث حسبنا العزم من القوى المؤثرة على يمين النقطة وهو نفس الجواب الذي نحصل عليه من القوى المؤثرة على يسار النقطة .

إذن :

$$EIy'' = \frac{1}{2}(\omega L + W)(L - x) - \frac{1}{2}\omega(L - x)^2$$

$$EIy' = -\frac{1}{4}(\omega L + W)(L-x)^2 + \frac{1}{6}\omega(L-x)^3 + A_3$$

$$EIy = \frac{1}{12}(\omega L + W)(L-x)^3 - \frac{1}{24}\omega(L-x)^4 + A_3x + A_4$$

ومن الشروط الحدية كون : $y' = 0$ عند $x = L/2$ و $y = 0$ عند $x = L$ فإن :

$$A_3 = \frac{1}{48}(2\omega L + 3W)L^2, A_4 = -\frac{1}{48}(2\omega L + 3W)L^3$$

وبالتعويض نحصل على :

$$y = \frac{\omega}{24EI}(2Lx^3 - x^4 - L^3x) + \frac{\omega}{48EI}(L^3 - 9L^2x + 12Lx^2 - 4x^3) \quad (2)$$

وأكبر ترخيم يحدث عند منتصف العارضة وذلك بوضع $x = L/2$ في العبارتين السابقتين (1) و(2) نحصل على :

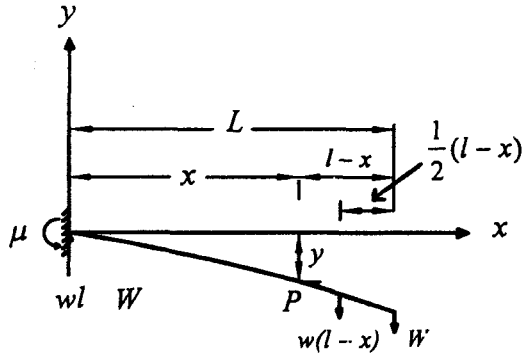
$$y_{\max} = -\frac{5\omega L^4}{384EI} - \frac{WL^3}{48EI}$$

أي أن الزيادة في الترخيم نتيجة للعمل W المركز في المنتصف هو $\frac{WL^3}{84EI}$.

المثال الرابع عشر :-

عارضة أفقية طولها L مثبتة عند أحد طرفيها وطرفها الآخر حر. جد معادلة المنحنى المرن لهذه العارضة إذا كانت تحمل حملا منتظما $\omega N/M$ ويؤثر على مركز $W(N)$ عند طرفها الحر. جد أكبر ترخيم في العارضة. ما هو عزم ازدواج التثبيت عند الطرف المثبت ؟

الحل :-



شكل - 18 -

يبين الشكل السابق العارضة $00'$ المثبتة عند أحد طرفيها 0 والحررة عند الطرف الآخر $0'$. تتزن العارضة تحت تأثير الحمل المركز W عند $0'$ والحمل المنتظم التوزيع $w(N/m)$ على امتداد العارضة، ورد فعل $(W + wL)$ ، وازدواج تثبيت μ عنده 0 يؤثر به الجدار على العارضة. نأخذ نقطة الأصل عند 0 . وتظل العارضة أفقية عند 0 بسبب كونها مثبتة هناك وينتج عن ذلك أن يكون :

$$(1) \quad \text{عند } x=0 \quad \text{فان } \frac{dy}{dx} = 0, \quad y=0$$

حيث y هو الترخيم الحادث في العارضة عند النقطة P نحسب عزم المنحنى عند النقطة P ونعتبر جزء العارضة عن يمين P للتخلص من الازدواج μ المجهول عند 0 .

$$M = -W(L-x) - w(L-x) \left[\frac{1}{2}(L-x) \right]$$

$$= -W(L-x) - \frac{1}{2} w(L-x)^2$$

وبلاحظ أن عزم القوة W يعطي عزما سالبا لأنه يميل لجعل العارضة تنقعر في اتجاه محور y السالب وكذلك الحال بالنسبة للقوة المنتظمة التوزيع $w(L-x)$ بتطبيق المعادلة :

$$EIy'' = M$$

نحصل على :-

$$EIy'' = -W(L-x) - \frac{1}{2} w(L-x)^2$$

$$EIy' = -\frac{1}{2} W(L-x)^2 + \frac{1}{6} w(L-x)^3 + A_1$$

$$EIy = -\frac{1}{6} W(L-x)^3 - \frac{1}{24} w(L-x)^4 + A_1 x + A_2$$

وباستخدام الشروط الحدية (1) نحصل على :

$$A_1 = -\frac{1}{6} (3WL^2 + wL^3) \quad , A_2 = \frac{1}{6} WL^3 + \frac{1}{24} wL^4$$

إذن

$$y = \frac{w}{24EI} [4Lx^3 - x^4 - 6L^2x^2] + \frac{W}{6EI} (x^3 - 3Lx^2)$$

وواضح أن أكبر ترخيم يحدث عند الطرف الحر للعارضة $x = L$ حيث

$$y_{max} = -\frac{WL^3}{3EI} - \frac{WL^4}{8EI} \quad (2)$$

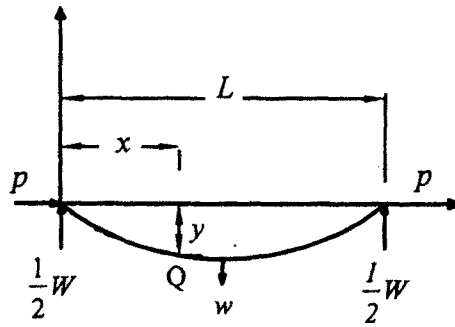
لإيجاد عزم ازدواج التثبيت μ عند 0 نحسب عزم القوى عند أي نقطة معلومة البعد عن 0 مرة عن يمين هذه النقطة ومرة أخرى عن يسارها وتساوي النتيجة. عزم القوى عند 0 محسوباً من يمينها هو $\left(-WL - \frac{1}{2}wL^2\right)$ ومحسوباً من يسارها $(-\mu)$ طبقاً لاتجاه μ المفروض في الشكل السابق وعليه يكون :

$$\mu = WL + \frac{1}{2}\omega L^2 (N.M)$$

المثال الخامس عشر :

ضاغط (strut) أفقي خفيف طوله L يرتكز ارتكازاً مفصلياً حراً عند طرفية ويؤثر عليه حمل مركز W نيوتن عند منتصفه ويتعرض لضغط محوري P عند كل من طرفية . جد معادلة المنحنى الذي ينبعج فيه الضاغط . ما هي أكبر قيمة لعزم القوى وأين تحدث ؟

الحل :-



شكل - 19 -

يبين الشكل السابق الضاغط المعطى OO' والقوى المؤثرة عليه وهي الحمل المركز W رأسياً لأسفل عند منتصفه ، وضغط P أفقياً عند كل طرف ، ورد فعل رأسي

لأعلى $\frac{1}{2}W$ عند كل طرف . ونأخذ نقطة الأصل عند الطرف O ، ونأخذ الاتجاه الموجب لمحور y عكس الترخيم كما هو مبين في الشكل . بأخذ العزوم حول نقطة Q على النصف الأيسر للضاغط نجد أن :

$$EIy'' = -\left(\frac{1}{2}Wx + \rho y\right) \quad 0 < X < L/2 \quad (1)$$

حيث الإشارة السالبة تعنى أنه لقيم y السالبة ، كما هو الحال في حالتنا هذه تكون y'' موجبة أي الضاغط مقعراً ناحية الأتجاه الموجب لمحور y . بالقسمة على EI وإعادة الترتيب نجد أن :

$$y'' + \frac{\rho}{EI} y = -\frac{W}{2EI} x \quad (2)$$

وبإيجاد الحل المتجانس والحل الخاص لهذه المعادلة يكون الحل الكامل :

$$Y = A \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) - \frac{W}{2\rho} x \quad (3)$$

$$\beta = \sqrt{P / EI} \text{ rad / m} \quad \text{بوضع}$$

$$y = A \cos \beta x + C \sin \beta x - \frac{W}{2P} x \quad \text{نصبح}$$

$$A = 0 \quad \text{إذن:} \quad x = 0 \quad \text{ينعدم الترخيم عند}$$

$$y = C \sin Bx - \frac{W}{2P} x \quad \text{ويكون}$$

وواضح من التماثل في الشكل السابق أن $y' = 0$ عند $x = L/2$

$$y' = \left[BC \cos \beta x, \frac{W}{2P} \right]_{x=L/2} = 0 \Rightarrow C = \frac{W}{2BP} \sec \beta \frac{L}{2} \quad \text{إذن}$$

$$y = \frac{W}{2BP} \left[\sec \left(B \frac{L}{2} \right) \sin Bx - Bx \right] \quad \text{ويكون :-}$$

وهذه هي معادلة منحنى الترخيم لقيم $0 < x < \frac{L}{2}$ أي لنصف الضاغط الأيسر وهي تتماثل مع معادلة المنحنى الضاغط الأيمن .

واكبر ترخيم يحدث عند منتصف الضاغط $x = \frac{L}{2}$ وقيمته هي :

$$y_{mex} = \frac{W}{2BP} \left[\tan \beta \frac{L}{2} - \beta \frac{1}{2} \right]$$

كما ينتج من الطرف الأيسر للمعادلة (1) أن اكبر قيمة لعزم القوي تحدث عند $x = L/2$ وقيمته عندها :

$$M_{mex} = \frac{1}{2} W \frac{L}{2} + P y_{mex}$$

$$M_{mex} = \frac{W}{2B} \tan B \frac{1}{2} \quad \text{أو}$$

ويلاحظ من عبارة y أن الترخيم عند منتصف الضاغط يؤول إلى اللانهاية وفي هذه الحالة ينهار الضاغط إذا كان :-

$$B \frac{L}{2} = (2n+1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

وبالتعويض عن β نجد أن قوة الضغط المقابلة هي :-

$$P_c = \frac{(2n+1)^2 \pi^2 EI}{L^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

وتسمى قوى الضغط المحورية هـو بالأعمال المحورية العرجة (critical Axial loads) والقيمة المهمة عمليا هي التي تقابل $n = 0$ أي $P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ وفي الواقع فان الضاغط لا ينتظر حتى يؤول الترخيم إلى اللانهاية ثم ينكسر بل إذا تعدى الترخيم حدا معيناً فان الضاغط يفقد مرونته ثم ينتهي كما يلاحظ أن معادلة المنحنى المرن تصبح تقريبية بازدياد الترخيم .

تمارين

I—عضو من طائفة المنحنيات التي معادلتها التفاضلية : -

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 4$$

يمس محور x عند نقطة الأصل . ما هو نصف قطر انحناء المنحنى عند نقطة الأصل ؟ وما هي معادلة عضو هذه الطائفة هذا ؟

II—جد معادلة طائفة المنحنيات التي لكل عضو فيها يكون نصف قطر الانحناء عند أي نقطة متناسبا وميل المماس عند هذه النقطة ؟

III—بندول طوله l كتلته عند أحد طرفيه m ويدور في مستوى رأسي حول طرفه الآخر

أ - بإهمال كل القوي عدا قوة الجاذبية , جد الصورة العامة لمعادلة الحركة .

ب- كما في (أ) لكن باعتبار الإزاحة عن وضع الاتزان إزاحة صغيرة .

ج- كما في ب- إذا أطلق البندول سرعة زاوية 1 rad/sec مبتعدا عن وضع

الاتزان الراسي من عند إزاحة زاوية $\frac{1}{6} \text{ rad}$ من وضع الاتزان وكان طول

البندول 20 cm .

اعتبر عجلة الجاذبية $g = 10 \text{ m/sec}^2$. ما هي أقصى إزاحة زاوية للبندول ؟ و ما هي أقصى سرعة زاوية له ؟ وأين تحدث ؟

iv—عوامة أسطوانية الشكل قطرها نصف متر وضعت في الماء فانغمر أغلبها في وضع رأسي . عندما دفعت قليلا للأسفل وتركت للتحرك حرة لوحظ أن الزمن الدوري لذبذبتها هو ثابتان ما هي كتلة الطافية ؟

V- جسيم يتحرك في المستوى xy بحيث كان إحداثياته (x, y) عند أي لحظة t يحققان المعادلتين التفاضليتين .

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w \frac{dy}{dt} = w^2 \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = w \frac{dx}{dt}$$

حيث w, a ثابتان . جد مسار هذا الجسم إذا بدا الجسم الحركة من السكون عند نقطة الأصل . ما هي للحظات التي يتحرك فيها الجسم :

أ- موازيا لمحور y

ب- موازيا لمحور x

ج- موازيا للخط المستقيم $y = x$

VI- دائرة نوال تتكون من محاثة $2H$ ومقاومته (4Ω) وسعة $50mF$ فإذا كان التيار منعدما وشحنة السعة $2C$ عند $t = 0$ جد المعادلة الزمنية للتيار وكذلك مركبته المستقرة إذا :

أ- سلطة قوة دافعة كهربية مستمرة $100V$ بين طرفي الدائرة .

ب- سلطة قوة دافعة كهربية مترددة $100 \cos 4t$ بين طرفي الدائرة .

اعد الحل إذا كانت المقاومة 40Ω .

VII- المعادلة الآسية في نظرية الكمرات البسيطة هي :-

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2y}{dx^2} \right) = wx$$

حيث $w(x)$ هو المحمل على وحدة الأطوال ، EI ثابت من ثوابت الكمرة يعرف

بجسادة الشئ (Flexural Rigidity) ، E هي معامل المرونة لمادة الكمرة I

هي عزم القصور لمقطع حول محور التعادل y ، هي الترخيم في الكمرة عند نقطة

x عليها . حل المعادلة إذا كانت EI ثابتة ، $w(x) = 24x$

وأحوال الترخيم هي $y(0) = y''(0) = 0$ ، $y(L) = 0 = y''(L)$

الفصل التاسع

متسلسلات الحلول للمعادلات الخطية من المرتبة الثانية

Series Solutions of Second order linear
Equations

الفصل التاسع

متسلسلات الحلول للمعادلات الخطية من المرتبة الثانية

Series Solutions of Second order linear Equations

Introduction :

IX - 1 مقدمة :

Definitions Concepts :

تعريف ومفاهيم :

في كثير من الحالات يتعذر حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة على صورة مغلقة . وتقدم لنا طريقة الحل على هيئة متسلسلة بديلاً قوياً قد لا يكون هناك مناص منه .

على أن فكرة الحل على هيئة متسلسلة لا تقتصر على المعادلات ذات المعادلات المتغيرة بل تشمل بطبيعة الحال المعادلات ذات المعاملات الثابتة كذلك تشمل المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة .

قبل البدء في برهان وجود الحل وكيفية إيجاده نراجع أهم التعاريف والمفاهيم المتعلقة بالمتسلسلات .

Index of a series :

أ- دليل المتسلسلة :

دليل المتسلسلة هو المتغير الذي تجرى عليه عملية الجمع ويظهر في تعبير المتسلسلة كما يظهر أسفل علامة الجمع \sum . فمثلاً في المتسلسلات التالية :

$$\sum_{n=0}^{n=100} \frac{n^2 + 1}{(n + 1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{inkx}$$

n هو الدليل . ويمكن تغيير الدليل n إلى m أو k دون أن يؤثر على قيمة المتسلسلة
ولذا يسمى الدليل n بالدليل الدمية (Dummy Index) فمثلاً :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m x^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k!}$$

وسنوضح كيف يمكن تغيير الدليل n في الأمثلة المختلفة التالية دون أن يؤثر ذلك
على قيمة المتسلسلة :

-1

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} Q_n x^n &= Q_2 x^2 + Q_3 x^3 + Q_4 x^4 + \dots + Q_n x^n + \dots \\ &= Q_{0+2} x^{0+2} + Q_{1+2} x^{1+2} + Q_{2+2} x^{2+2} + \dots + Q_{m+2} x^{m+2} + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} Q_{m+2} x^{m+2} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+2} x^{n+2} \end{aligned}$$

فقد غيرنا الدليل $n \rightarrow n+2$ حيث أخذنا في عين الاعتبار التخفيض 2 .

-2

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) Q_n (x-Q)^{n-2}$$

أنه يمكن كتابة هذه المتسلسلة على شكل متسلسلة للحد العام $(x-Q)^n$ عوضاً عن
 $(x-Q)^{n-2}$ للحصول على ذلك نغير الدليل $n \rightarrow n+2$ ونبدأ في الأخذ بعين الاعتبار
التخفيض 2 كما هو في المثال السابق .

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3) Q_{n+2} (x-Q)^n$$

-3

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) \cdot Q_n \cdot x^{n+r-1}$$

أولاً ندخل x^2 تحت الجمع فنحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) Q_n x^{n+r+1}$$

ويمكن أن نكتب هذه المتسلسلة على شكل متسلسلة ذات الحد العام x^{n+r} بتغيير الدليل $(n \rightarrow n-1)$ ونبدأ في الأخذ بعين الاعتبار الرفع 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) Q_n x^{n+r+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1) Q_{n-1} x^{n+r}$$

ويمكن التحقق من أن الحدود في المتسلسلتين متطابقة تماماً .

4- في المثال التالي نأخذ المعادلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n Q_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n$$

لمساواة معاملات الحدود من نفس قوة x في طرفي المعادلة فإنه من السهل كتابة المتسلسلتين بالنسبة للحد العام x^n أي يجب أن نغير الدليل n في المتسلسلة الأولى $(n \rightarrow n+1)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) Q_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n$$

نستنتج أن : $(n+1) Q_{n+1} = Q_n$ من أجل $n = 0, 1, 2, \dots$

$$Q_{n+1} = \frac{1}{n+1} Q_n \quad \text{أو}$$

$$Q_1 = \frac{1}{1} Q_0, \quad Q_2 = \frac{1}{2} Q_1 = \frac{1}{2 \cdot 1} Q_0 = \frac{Q_0}{2!} \quad \text{إن}$$

$$Q_3 = \frac{1}{3} Q_2 = \frac{1}{3} \frac{Q_0}{2!} = \frac{Q_0}{3!}, \dots,$$

$$Q_n = \frac{1}{n!} Q_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{وعموماً :}$$

إن العلاقة الجديدة تعين جميع المعاملات بدلالة الحد Q_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} Q_0 \frac{x^n}{n!} = Q_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = Q_0 e^x \quad \text{إن}$$

وفي كتابة المتسلسلة الأخيرة فقد استعملنا المصطلح العام $0! = 1$

Power series

ب- متسلسلة القوى

متسلسلة القوى حول نقطة $x = x_0$ هي متسلسلة لانهاية في قوى $(x - x_0)$

الموجبة على الصورة :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + \dots$$

حيث $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ ثوابت تعرف بمعاملات المتسلسلة (Coefficients) و $x = x_0$

نقطة ثابتة تسمى مركز المتسلسلة (Center) . ونؤكد أن متسلسلة القوى لا تحتوي

على قوى سالبة أو كسرية للمتغير $(x - x_0)$. وإذا كان مركز المتسلسلة هو نقطة

الأصل $(x_0 = 0)$ فإن المتسلسلة تأخذ الصورة :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

وسنعرض في هذا الباب أن المعاملات C_i والمركز x_0 هي كميات حقيقية على وجه

العموم . ويسمى المجموع :

$$S_n(x) = \sum_{n=0}^N c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_N(x - x_0)^N$$

حيث N عدد صحيح موجب بالمجموع الجزئي (partial sum) لمتسلسلة القوى
بينما يسمى مجموع الحدود المتبقية

$$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_{N+1}(x - x_0)^{N+1} + c_{N+2}(x - x_0)^{N+2} + \dots$$

بالمتبقى (Remainder) وواضح أن :

$$R_N(x) = S(x) - S_N(x)$$

ونلخص فيما يلي دون برهان ، بعض النتائج الهامة المتعلقة بالمتسلسلات اللانهائية
وخاصة متسلسلات القوى .

1- يقال عن متسلسلة القوى: $S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ أنها متقاربة أو تقاربيه

(Convergent) عند النقطة x إذا كانت :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N c_n (x - x_0)^n$$

موجودة .

وواضح أن المتسلسلة متقاربة عند مركزها $x = x_0$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} C_0 = C_0 = S(x_0)$$

أي أن النهاية موجودة .

وإذا لم توجد هذه النهاية تكون المتسلسلة متباعدة أو تباعدية (Divergent) عند
النقطة x .

وقد تكون المتسلسلة متقاربة عند كل قيم x وقد تكون متقاربة عند بعض قيم x ومتباعدة عند القيم الأخرى .

2- يقال عن متسلسلة القوى $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ أنها متقاربة مطلقا (Converges absolutely) عند النقطة x إذا كانت المتسلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n (x - x_0)^n|$$

متقاربة و العكس غير صحيح .

3- ولمعرفة التقارب المطلق نستخدم إحدى الاختبارات النافعة لمتسلسلة قوى وهو اختبار النسبة . إذا كانت من أجل قيمة x ثابتة (Ratio Test) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{c_n (x - x_0)^n} \right| = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \ell$$

وتكون متسلسلة القوى متقاربة مطلقا عند قيمة x إذا كان $\ell < 1$ ومتباعدة إذا كان $\ell > 1$. وإذا كان $\ell = 1$ فالاختبار غير حاسم .

مثال - 5

ما هي قيم x التي تكون من أجلها متسلسلة القوى التالية :-

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(x-2)^n$$

متقاربة .

الحل :

لاختبار التقارب نستخدم اختبار النسبة (Ratio test) لدينا :

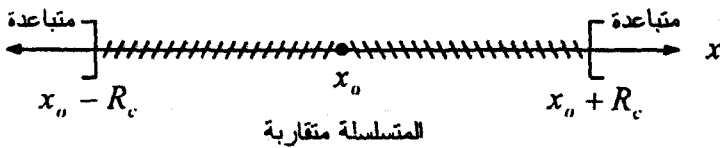
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} (n+1)(x-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1} n(x-2)^n} \right| = |x-2| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = |x-2|$$

ووفق القاعدة -3- تكون المتسلسلة متقاربة مطلقا من اجل $|x-2| < 1$ أي عند $1 < x < 3$. ومتباعدة من اجل $|x-2| > 1$. وفيه x المرافقة لـ $|x-2| = 1$ هي $x=1$ و $x=3$.

والمتسلسلة متباعدة عند هاتين القيمتين للمتغير x لان الحد النوني للمتسلسلة لا يؤول إلى الصفر عندما $n \rightarrow \infty$.

4- إذا كانت متسلسلة القوى $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ متقاربة عند $x = x_1$ فهي متقاربة مطلقا من اجل $|x-x_0| < |x_1-x_0|$. وإذا كانت متباعدة عند $x = x_1$ فهي متباعدة من اجل $|x-x_0| > |x_1-x_0|$.

5- يعرف نصف قطر التقارب R_c (Radius of convergence) بأنه المسافة بين المركز x_0 وأقرب نقطة منه تكون عندها المتسلسلة متباعدة أي $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ متقاربة مطلقا من اجل $|x-x_0| < R_c$ ومتباعدة من اجل $|x-x_0| > R_c$.



فمتسلسلة تتقارب عند $x = x_0$ فقط يكون نصف قطر تقاربها معده ومنسلسلة تتقارب عند كل قيم x يكون نصف قطر تقاربها لا نهائي .

مثال -6-

أوجد نصف قطر تقارب متسلسلة القوى التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n 2^n}$$

الحل : تطبيق اختبار النسبة :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{c_n(x-x_0)^n} \right| = |x-x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \ell$$

وكي تتقارب المتسلسلة يجب أن تكون هذه النسبة دون الواحد الصحيح لجميع قيم x ، إذن :

$$|x-x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1 \Rightarrow |x-x_0| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|} = R_c$$

إذن في هذه الحالة :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1} n 2^2}{(n+1) 2^{n+1} (x+1)^n} \right| = |x+1| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{|x+1|}{2}$$

إذن المتسلسلة متقاربة مطلقا من أجل $|x+1| < 2$

أي $3 < x < 1$

وتتباعد المتسلسلة من اجل $|x+1| > 2$

إذن نصف قطر التقارب $R_c = 2$

في النهاية ، نتعرض لآخر نقطة وهي مجال التقارب (Convergence Interval) عند $x = -3$.

لدينا :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

وهي متقاربة ولكن ليست متقاربة مطلقا ، إذن المتسلسلة متقاربة عند النقطة $x = -3$.

عند $x = 1$ المتسلسلة تصبح : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

وهي متباعدة .

إذن المتسلسلة متقاربة على المجال : $-3 \leq x < 1$

ومتقاربة مطلقاً على المجال : $-3 < x < 1$

ونصف قطر التقارب $R_c = 2$.

ملاحظة :

كذلك يمكن استخدام صيغة كوشي - هادامار (Cauchy)

(Hadamard Formula) لحساب نصف قطر التقارب وهي :

$$\frac{1}{R_c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n}$$

وذلك بغرض وجود هذه النهاية .

في متسلسلة القوى $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ يكون نصف قطر التقارب هو :

$$\frac{1}{R_c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/(n+1)!}{1/n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R_c = \infty$$

وعلى ذلك فنصف قطر تقارب الدالة الأساسية e^x لا نهائي بمعنى أنها تتقارب عند جميع قيم x الموجبة أو السالبة .

بينما في المتسلسلة $\sum (n!)(x-a)^2$ يعطي نصف التقارب بـ:

$$\frac{1}{R_c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty \Rightarrow R_c = 0$$

مما يعني أن المتسلسلة لا تتقارب إلا عند النقطة $x = a$ فقط .

كذلك فنصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum \frac{1}{3^n} (x-1)^n$ هو :

$$\frac{1}{R_c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow R_c = 3$$

وبالتالي فنصف قطر التقارب حول النقطة $x=1$ هو $R_c = 3$ أي أنها تتقارب لقيم

x التي تحقق المتباينة $-2 < x < 4$.

ونذكر الآن بعض العمليات التي تجرى على متسلسلات القوى والتي تهتمنا في حل

المعادلات التفاضلية على هيئة متسلسلة قوى :

إذا كانت: $S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ و $S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ متسلسلتين

مقاربيتين على مجال التقارب $|x - x_0| < R_c$ حيث $R_c > 0$ إذن لدينا ما يلي :

6- يمكن جمع وطرح المتسلسلتين المقاربيتين حداً حداً لنحصل على المجموع على

هيئة متسلسلة قوى تتقارب على المجال $|x - x_0| < R_c$:

$$S_1(x) \pm S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x - x_0)^n$$

7- يمكن ضرب المتسلسلتين حيث بضرب كل حد من حدود إحدى المتسلسلتين في

جميع حدود المتسلسلة الأخرى ثم نجمع قوى $(x - x_0)$ المتشابهة لنحصل على

حاصل الضرب على هيئة متسلسلة قوى متقارب على المجال $|x - x_0| < R_c$:

$$S_1(x)S_2(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n \right]$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)(x - x_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^n a_i \cdot b_{n-i} \right] (x - x_0)^n$$

وتعرف هذه الصيغة بحاصل ضرب كوشي (Cauchy Product) وكذلك إذا كانت

$S_2(x_0) \neq 0$ فيمكن قسمة المتسلسلتين حيث :

$$\frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x - x_0)^n$$

ويكون حساب المعامل d_n في بعض الأحيان معقد . كذلك في حالة القسمة يكون

نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى الحاصلة أقل من R_c .

مثال -8-

$$e^x = \sum \frac{1}{n!} x^n , e^{-x} = \sum \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

$$e^x + e^{-x} = \sum \frac{1}{n!} x^n + \sum \frac{(-1)^n}{n!} x^n = \sum \frac{1}{n!} [1 + (-1)^n] x^n \quad \text{إذن}$$

$$= 2 \sum_{n=0,2,4} \frac{1}{n!} x^n = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} x^{2m} = 2 \cosh x$$

وذلك بتغيير الدليل الدمية من n إلى $2m$ أي بوضع $m = n/2$.

مثال -9-

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x \cos x = \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right] \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right] \quad \text{إذن}$$

$$= 0 \times 1 + [0 \times 0 + 1(1)]x + \left[0 \left(-\frac{1}{2!} \right) + 1(0) + 0(1) \right] x^2$$

$$+ \left[0 \times 0 + 1 \left(-\frac{1}{2!} \right) + 0(0) + \left(-\frac{1}{3!} \right) (1) \right] x^3 + \dots$$

$$= x - \frac{2}{3} x^3 + \dots = \frac{1}{2} \left[(2x) - \frac{(2x)^3}{3!} + \dots \right] = \frac{1}{2} \sin 2x$$

8- إذا كان $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ من أجل كل قيم x إذن

$$a_n = b_n , n = 0,1,2,\dots$$

وعلى الخصوص إذا انعدمت متسلسلة قوى متقاربة على مجال ما انعداما تطابقياً ، انعدم كل معاملاتها .

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n (x-x_0)^n = 0 \quad \text{إذا كانت :}$$

$$Q_0 = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = \dots = 0 \quad \text{إذن :}$$

9- يمكن مفاضلة متسلسلة قوى في مجال ما حداً حداً لنحصل على متسلسلة قوى جديدة متقاربة أيضاً في نفس المجال وتمثل مشتقة المتسلسلة الأصلية .

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n (x-x_0)^n \quad |x-x_0| < R_c$$

$$S_1'(x) = Q_1 + 2Q_2(x-x_0) + \dots + nQ_n(x-x_0)^{n-1} + \dots \quad \text{إذن}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nQ_n(x-x_0)^{n-1} , \quad |x-x_0| < R_c$$

Taylor Series

10- متسلسلة تيلور (1685-1731)

تمثل أي دالة $f(x)$ قابلة للتفاضل عند $x = x_0$ (أي توجد جميع مشتقاتها عن $x = x_0$) بمتسلسلة قوى حول $x = x_0$ تسمى متسلسلة تيلور على الصورة :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots \quad (I)$$

وواضح أن المعاملات هنا تمثل خصائص الدالة $f(x)$ عند مركز المتسلسلة $x = x_0$ وهذه الخصائص هي قيمة الدالة ومعدلات تغيرها .
ولا يمكن تمثيل دالة بمتسلسلة تيلور حول نقطة تكون عندها الدالة أو إحدى مشتقاتها لا نهائية القيمة .

(Analytic Function)

11- الدالة التحليلية

يقال عن الدالة $f(x)$ انها تحليلية (Analytic) عند نقطة ما $x = x_0$ إذا أمكن تمثيلها بمتسلسلة قوى (متسلسلة تيلور) في قوى $(x - x_0)$ صالحة في جوار مباشر للنقطة $x = x_0$ أي تتقارب في فترة $0 < |x - x_0| < R_c$ حيث R_c هو نصف قطر التقارب .

مثال -10-

لنكن لدينا الدالة $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ هي دالة تحليلية عند جميع النقط عدا النقطة $x = 2$ فمثلا تكون تحليلية عند $x = 1$ لانه يمكن تمثيلها بمتسلسلة تيلور في قوى $x - 1$:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{[1-(x-1)]^2} = [1-(x-1)]^{-2} = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \dots$$

ونصف قطر تقاربها هو $R_c = 1$ أي ان هذه المتسلسلة متقاربة في المجال

$$0 < x - 1 < 1$$

كذلك فالدالة $f(x) = \ln x$ تحليلية عند جميع قيم x عدا عند القيمة $x = 0$.

والدالة $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ تحليلية عند جميع قيم x عدا عند النقط $(2m+1)\pi/2$.

حيث m عدد صحيح . وعموماً لا تكون الدالة تحليلية عند النقط التي تكون عندها الدالة أو إحدى مشتقاتها لا نهائية القيمة .

جـ- النقطة العادية والنقطة المنفردة لمعادلة تفاضلية :

Ordinary and Singular Point of Differential Equation:

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية :

$$(2) \quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

تكون النقطة $x = x_0$ نقطة عادية (Ordinary Point) لهذه المعادلة التفاضلية اذا كانت كل من الدالتين $Q(x)$, $P(x)$ دالتان تحليليتان عند $x = x_0$.
 أما إذا كانت إحدى أو كلتا الدالتين غير تحليلية عند $x = x_0$ كانت النقطة $x = x_0$ نقطة منفردة (Singular Point) للمعادلة . وتكون النقطة $x = x_0$ نقطة منفردة منتظمة (Regular Singular Point) إذا كانت $P(x)$ و $Q(x)$ غير تحليلية عند $x = x_0$ ولكن كلا من $(x = x_0)P(x)$ و $(x = x_0)^2 Q(x)$ دالة تحليلية عند $x = x_0$.

وإلا كانت $x = x_0$ نقطة منفردة غير منتظمة (Irregular Singular Point)

أمثلة -11-

1- لتكن لدينا المعادلة التفاضلية : $y'' + 3y' + xy = 0$

تكون النقطة $x = 1$ نقطة عادية وكذلك جميع النقاط الأخرى على محورة .

2- لتكن لدينا المعادلة التفاضلية :

$$x^2 y'' - xy' + y = 0 \Rightarrow y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$$

فالنقطة $x=0$ هي نقطة مفردة لأن $P(x)=-\frac{1}{x}$ ، $Q(x)=\frac{1}{x^2}$ غير تحليليتين

عند $x=0$ ومع ذلك فالدالتان $xP(x)=-1$ ، $x^2Q(x)=1$ تحليليتان عند $x=0$ وعليه فالنقطة $x=0$ نقطة منتظمة . أما جميع النقط الأخرى فهي نقط عادية .

3- لنكن لدينا المعادلة التفاضلية :

$$x^3y'' + y = 0 \Rightarrow y'' - y' + \frac{1}{x^2}y = 0$$

فالنقطة $x=0$ نقطة مفردة لان $Q(x)=\frac{1}{x^3}$ غير تحليلية عندها .

وبما أن الدالة $x^2Q(x)=\frac{1}{x}$ تظل غير تحليلية عند $x=0$ إذن فالنقطة $x=0$ هي نقطة مفردة غير منتظمة . أما باقي النقط فهي نقط عادية .

$$4- \text{في المعادلة التفاضلية : } y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{3}{x(x-1)^3}y = 0$$

النقطتان $x=0$ ، $x=1$ نقطتان مفردتان حيث عند النقطة الأولى $x=0$ تكون

$$Q(x)=\frac{3}{x(x-1)^3} ، P(x)=\frac{2}{x}$$

$x=1$ تكون إحدهما $Q(x)$ غير تحليلية بينما $P(x)$ تحليلية .

كذلك نلاحظ أن $xP(x)=2$ ، $x^2Q(x)=\frac{3x}{(x-1)^3}$ كلاهما تحليليتان عند $x=0$.

وعلى ذلك فالنقطة $x=0$ نقطة مفردة منتظمة . وبالعكس عند النقطة $x=1$ تكون

$$(x-1)P(x)=2\left(\frac{x-1}{x}\right) \text{ دالة تحليلية بينما تكون } (x-1)^2Q(x)=\frac{3}{x(x-1)} \text{ دالة}$$

غير تحليلية عند $x=1$ وعلى ذلك فالنقطة $x=1$ نقطة مفردة غير منتظمة .

2.IX الحلول في متسلسلة قوى بجوار نقطة عادية

Power - Series Solutions Near an Ordinary Point

نتناول الآن مسألة إيجاد حلول المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية ذوات المعاملات المتغيرة أو الثابتة بطبيعة الحال حول إحدى النقط العادية لهذه المعادلات . وفي هذا الصدد نذكر النظرية التالية :

أ- نظرية -1-

إذا كانت $x = x_0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

وإذا كانت $P(x)$ و $Q(x)$ دالتين تحليليتين عند $x = x_0$ فإن الحل العام لهذه المعادلة هو :

$$(3) \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n (x - x_0)^n = Q_0 y_1(x) + Q_1 y_2(x)$$

حيث Q_0 ، Q_1 ثابتان اختياريان و $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ متسلسلتان تحليليتان عند $x = x_0$ ومستقلتان خطياً . ونصف قطر تقارب كل منهما أقل من أصغر نصفي قطر في تقارب متسلسلة $P(x)$ و $Q(x)$.

وتفيد هذه النظرية في إيجاد الحل حول نقطة عادية فقط $x = x_0$ على هيئة متسلسلة قوى في $(x = x_0)$ ، وتحدد جميع معاملاتها $Q(n)$ بدلالة المعاملتين Q_0 ، Q_1 البرهان :

لدينا حسب الفرض أن النقطة x_0 نقطة عادية للمعادلة التفاضلية إذن كل من الدالتين $P(x)$ و $Q(x)$ قابلة للنشر على صورة متسلسلة تيلور بجوار $x = x_0$ والمتسلسلتين متقاربتين على المجال : $0 < |x - x_0| < R_c$ حيث R_c موجب وهو اصغر نصف قطر تقارب .

أذن

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n \quad (i)$$

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n \quad (ii)$$

نفرض أن حل المعادلة من الشكل :

$$y = Q_0 + Q_1(x - x_0) + Q_2(x - x_0)^2 + \dots + Q_n(x - x_0)^n + \dots$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n (x - x_0)^n$$

بالمفاضلة نجد :

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n Q_n (x - x_0)^{n-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) Q_n (x - x_0)^{n-2}$$

حيث المعاملات $\{Q_n\}^{\infty}$ يجب تعيينها بحيث يكون y حلاً للمعادلة . ولتعيين هذه المعاملات نعوض y, y', y'' بعباراتها في المعادلة التفاضلية

ف نجد :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) Q_n (x - x_0)^{n-2} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \right] + \left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n (x - x_0)^n \right] \quad (iii)$$

وبفك الأقواس والمطابقة بين معاملات $(x - x_0)^k$ نجد العلاقات التالية :

$$-2Q_2 = Q_1\rho_0 + Q_0q_1$$

$$-2.3Q_3 = 2Q_2\rho_0 + Q_1\rho_1 + Q_1q_0 + Q_0q_1$$

وبصورة عامة :

$$-(n-1)nQ_n = (n-1)Q_{n-1}\rho_0 + (n-2)a_{n-2}\rho_1 + \dots + a_1\rho_{n-2} + a_{n-2}q_0 + a_{n-3}q_1 + \dots + a_1q_{n-3} + a_0q_{n-2} \quad (\text{iv})$$

هذه العلاقات بين المعاملات Q_n, \dots, Q_2, Q_1 علاقات خطية . وبالتالي نعين لنا كل المعاملات بصورة وحيدة بدلالة اثنتين اختياريين منها وهي Q_1, Q_0 وبالتالي فهناك حل من الشكل :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n (x - x_0)^x \quad (\text{V})$$

حيث Q_n, \dots, Q_2, Q_1 تتعين من العلاقات السابقة . ويكفي الآن أن نبرهن أن المتسلسلة الناتجة متقاربة ليكون الحل قابلاً للنشر .

لقد وجدنا أن الدالتين Q, P يمكن وضعهما على شكل متسلسلتين قوى من الصورة:

$$P(x) = \rho_0 + \rho_1(x - x_0) + \dots + \rho_n(x - x_0)^x + \dots$$

$$Q(x) = q_0 + q_1(x - x_0) + \dots + q_n(x - x_0)^n + \dots$$

لنضرب المتسلسلة الثانية في $(x - x_0)$ ولنأخذ القيم المطلقة لحدود المتسلسلتين فنجد :

$$|P| \leq |p_0| + |p_1||x - x_0| + \dots + |p_n||x - x_0|^n + \dots$$

$$|x - x_0|Q \leq |q_0||x - x_0| + |q_1||x - x_0|^2 + \dots + |q_n||x - x_0|^{n+1} + \dots$$

ومن اجل $|x - x_0| = r$ حيث $R_c > r$

فان لكل من الدالتين $|P|$ و $|Q|$ قيمة محدودة وذلك لأن متسلسلتها متقاربة في المجال $|x - x_0| < R_c$. ولتكن k أكبر هاتين القيمتين . فعندها نكتب :

$$\begin{aligned} |P_0| + |\rho_1||x - x_0| + \dots + |\rho_n||x - x_0|^n + \dots &\leq k \\ |q_0||x - x_0| + |q_1||x - x_0|^2 + \dots + |q_n||x - x_0|^{n+1} + \dots &\leq k \end{aligned} \quad (\text{vi})$$

ولكن مجموع أعداد موجبة أصغر من عدد موجب يعني أن كلاً من هذه الأعداد اصغر من المجموع . وبالتالي نكتب :-

$$\rho_n \leq \frac{k}{r^n} \quad , \quad q_n \leq \frac{k}{r^{n+1}} \quad (\text{vii})$$

وإذا سمينا العددين b_1, b_0 من اجل $|Q_1|, |Q_0|$ نجد العلاقات بين المعاملات Q_2, Q_3, \dots, Q_x تصبح: $2|Q_2| \leq b_1|P_0| + b_0|q_0| \leq b_1k + b_0k/r \leq 2b_1k + b_0k/r$

$$|Q_2| \leq b_2 \quad \text{أو :}$$

$$2b_2 = (2b_1 + b_0/r)k \quad \text{حيث :}$$

وبصورة مشابهة نجد :

$$2.3|Q_3| \leq 2|Q_2||P_0| + b_1|P_1| + b_1|q_0| + b_0|q_1|$$

$$\leq (2b_2 + 2\frac{b_1}{r} + \frac{b_0}{r^2})k$$

$$\leq (3b_2 + 2\frac{b_1}{r} + \frac{b_0}{r^2})k$$

$$|Q_3| \leq b_3 \quad \text{أو :}$$

$$2.3b_3 = (3b_2 + 2\frac{b_1}{r} + \frac{b_0}{r^2})k \quad \text{حيث :}$$

$$|Q_n| \leq b_n \quad \text{وإذا تابعنا بصورة مشابهة نجد:}$$

حيث :

$$(n-1)nb_n = \left[nb_{n-1} + \frac{(n-1)bn-2}{r} + \dots + \frac{bo}{r^{n+1}} \right]k \quad \text{(viii)}$$

ومن العلاقة الأخيرة نجد :

$$(n-2)(n-1)b_{n-1} = \left[(n-1)b_{n-2} + \frac{(n-2)bn-3}{r} + \dots + \frac{bo}{r^n} \right]k \quad \text{(ix)}$$

ويضرب العلاقة الأخيرة بـ $\frac{1}{r}$ - وجمعها لما قبلها نجد العلاقة التكرارية التالية :

$$(n-1)nb_n - \frac{(n-2)(n-1)b_{n-1}}{r} = nb_{n-1}k$$

وهذا يعطينا :

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{n-2}{nr} + \frac{k}{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{r} \quad \text{عندما تنتهي } n \text{ إلى اللانهاية نجد (x)}$$

وبذلك نكون قد برهنا بأن متسلسلة القوى متقاربة .

ونصف قطر تقاربها r . ولكن بما أن $|Q_n| \leq b_n$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} |Q_n| |x - n_0|^n \quad \text{فالمتسلسلة:}$$

مقاربة لأن معاملاتها أصغر من متسلسلة مقاربة . وكذلك الأمر ، بما أن المتسلسلة المطلقة مقاربة . فالمتسلسلة الأصلية مقاربة ونصف قطر تقاربها على الأقل r . وبما أن r ، فرضاً ، أصغر أو تساوي R_c فيمكن اعتبارها تساوي R_c . وعندها نقول انه يوجد للمعادلة التفاضلية حل وحيد يمكن أن يوضع على شكل متسلسلة قوى بجوار النقطة العادية $x = x_0$.

ب. طريقة إيجاد الحل بجوار نقطة عادية :

لتبسيط الخطوات الجبرية نفرض أن $x_0 = 0$. أما إذا كانت $x_0 \neq 0$ فإنه يمكن استخدام التعويض $z = x - x_0$ لنقل نقطة الأصل إلى النقطة $x = x_0$ ثم إيجاد الحل على صورة متسلسلة حول نقطة الأصل الجديدة على الصورة :

$$y(z) = \sum a_n z^n = a_0 y_1(z) + a_1 y_2(z)$$

وعموماً يمكن سرد خطوات إيجاد الحل حول نقطة عادية $x = x_0$ كما يلي:
1. نفرض حلاً حول النقطة العادية $x = x_0$ على صورة متسلسلة قوى:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

2. نفاضل متسلسلة القوى حداً حداً مرتين للحصول على y'' , y' :

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

3. نفاك كل من الدالتين المعاملين $P(x)$ و $Q(x)$ التحليليين عند $x = x_0$ على صورة متسلسلة قوى حول $x = x_0$. ويوفر من هذه الخطوة كونهما عادة على صورة كثيرة حدود.

4. نعوض من الخطوات 1، 2، 3 في المعادلة التفاضلية. ثم نجمع قوى $(x - x_0)$ المتشابهة فنحصل على متسلسلة من الشكل:

$$\lambda_0 + \lambda_1(x - x_0)^2 + \dots + \lambda_n(x - x_0)^n + \dots = 0$$

حيث $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ دوال خطية للثوابت a_0, a_1, \dots, a_n وبالمطابقة نجد العلاقات:

$$\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$$

وهي $n+1$ علاقة بين الثوابت تعين لنا الثوابت بدلالة اثنين منها.

5. نعوض الناتج في الحل المتسلسلة ثم نعيد كتابة الحل بحيث نجمع الحدود التي

تحتوي على a_0 لنحصل على $a_0 y_1(x)$ ونجمع الحدود التي تحتوي على a_1

لنحصل $a_1 y_2(x)$.

ونوضع ذلك بالأمثلة التالية.

المثال -12-

حل المعادلة التفاضلية على هيئة متسلسلة قوى :

$$y'' + y = 0$$

الحل :

المعادلة المعطاة ذات معاملات ثابتة وحلها بطبيعة الحال معروف وهو :

$$y(x) = A \sin x + B \cos x$$

وسنحلها الآن بطريقة متسلسلة القوى . بحيث: $Q(x)=1$, $P(x)=0$, وكلتاهما تحليلتان عند $x=0$ وهي نقطة عادية وكذلك الحال نقطة محور x . وعلى ذلك ستكون متسلسلة الحل متقاربة عند جميع قيم x . بمعنى آخر سيكون نصف قطر التقارب $R_c = \infty$.

نفرض الحل على صورة متسلسلة القوى:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{و} \quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad : \text{ بالمفاضلة نحصل على}$$

بالتعويض عن y'' , y' , y في المعادلة نحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n] x^n = 0 \quad : \text{ ويمكن كتابتها على الشكل}$$

وهذه متطابقة تتحقق فقط بانعدام معاملات قوى x المختلفة على الطرف الأيسر .
ف نحصل على :

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n = 0 \quad \text{و} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

(Recurrence relation)

وهذه الصيغة تسمى الصيغة التكرارية

وواضح من هذه العلاقة أن المعاملات ذات الدليل الزوجي تعين بدلالة a_0 والمعاملات ذات الدليل الفردي تعين بدلالة a_1 . إذن :

$$a_2 = -\frac{a_0}{2.1} = -\frac{a_0}{2!} , \quad a_4 = -\frac{a_2}{4.3} = +\frac{a_0}{4!} , \quad a_6 = -\frac{a_4}{6.5} = -\frac{a_0}{6!}$$

$$a_n = a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0 \quad k=1,2,3,\dots \quad \text{فإن } n=2k \text{ إذا كان}$$

بالمثل:

$$a_3 = -\frac{a_1}{2.3} = -\frac{a_1}{3!} , \quad a_5 = -\frac{a_3}{5.4} = +\frac{a_1}{5!} , \quad a_7 = -\frac{a_5}{7.6} = -\frac{a_1}{7!}$$

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1 \quad k=1,2,3,\dots \quad \text{فإن } n=2k+1 \text{ إذا كان}$$

وبالتالي نأخذ المتسلسلة الصورة :

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0 x^{2n} + \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots$$

$$= a_0 \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \dots \right] + a_1 \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots \right]$$

$$= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

المتسلسلة الأولى هي متسلسلة تيلور للدالة $\cos x$ ، والمتسلسلة الثانية هي متسلسلة تيلور $\sin x$. إذن كما هو متوقع:

$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

ونلاحظ أن الثابتين a_1, a_0 اختياريان .

المثال -13-

جد متسلسلة الحل في قوى x لمعادلة آيري (Airy's Equation)

$$y'' = xy \quad , \quad \infty < x < \infty$$

الحل : -

في هذه المعادلة لدينا $P(x) = 0$ ، $Q = -x$ ، إذن $x=0$ هي نقطة عادية .

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad . \quad \text{نفرض الحل على الصورة .}$$

بالمفاضلة نحصل على :

$$y'' = \sum n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$$

بالتعويض من ذلك في المعادلة قيد الحل نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^2 = x \sum a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

أو :

$$2.1a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

وهذه المتطابقة تتحقق إذا تساوى معاملي كل من قوى x في الطرفين

$$\text{إذن : } a_2 = 0$$

ونحصل على العلاقة التكرارية : $(n+1)(n+2)a_{n+2} = a_{n-1}$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$

إذن المعامل a_{n+2} يعطي بدلالة المعامل a_{n-1} وواضح أن المعاملات يمكن أن تعين

في ثلاث خطوات . حيث :

..... a_6 يعين a_3 والذي هو بدورة يعين
 a_7 يعين a_4 والذي هو بدورة يعين
 a_8 يعين a_5 والذي هو بدورة يعين

وبما أن $a_2 = 0$ إذن نستنتج مباشرة أن $a_5 = a_8 = a_{11} = \dots = 0$

بالنسبة للمعاملات $a_0, a_3, a_6, a_9, \dots$ نأخذ $n = 1, 4, 7, 10, \dots$ في العلاقة التكرارية فنجد أن:

$$a_3 = \frac{a_0}{3.2}, \quad a_6 = \frac{a_3}{6.5} = \frac{a_0}{(6.5)(3.2)}, \quad a_9 = \frac{a_6}{(9.8)} = \frac{a_0}{(9.8)(6.5)(3.2)}, \dots$$

ومن الأفضل يمكن كتابة علاقة a_{3n} ، حيث $n = 1, 2, 3, \dots$

$$a_{3n} = \frac{1}{[(3n)(3n-1)][(3n-3)(3n-4)] \dots [6.5][3.2]} a_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

بالنسبة للمعاملات : $a_1, a_4, a_7, a_{10}, \dots$ نأخذ $n = 2, 5, 8, 11, \dots$ في العلاقة التكرارية فنجد أن :

$$a_4 = \frac{a_1}{4.3}, \quad a_7 = \frac{a_4}{7.6} = \frac{a_1}{(7.6)(4.3)}, \quad a_{10} = \frac{a_7}{10.9} = \frac{a_1}{(10.9)(7.6)(4.3)}, \dots$$

ونجد أن :

$$a_{3n+1} = \frac{1}{[(3n+1)(3n)][(3n-2)(3n-3)] \dots [7.6][4.3]} a_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ويكون حل المعادلة التفاضلية (معادلة آيري) من الصورة :

$$\begin{aligned}
y &= a_0 \left[1 + \frac{x^3}{3.2} + \frac{x^6}{6.5.3.2} + \dots + \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)\dots 3.2} + \dots \right] \\
&+ a_1 \left[x + \frac{x^4}{4.3} + \frac{x^7}{7.6.4.3} + \dots + \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)\dots 4.3} + \dots \right] \\
&= a_n \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4)\dots 3.2} \right] + a_o \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)\dots 4.3} \right]
\end{aligned}$$

إن الحل العام لمعادلة آيري هو : $y = a_o y_1 + a_1 y_2$

حيث : $W(y_1, y_2) = 1 \neq 0$

وهذه متسلسلة متقاربة من أجل قيم x .

المثال -14-

جد حل معادلة آيري في قوى $(x-1)$.

الحل :-

النقطة $x=1$ هي نقطة عادية لمعادلة آيري . فنفرض الحل من الصورة :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-1)^n \quad \text{إذن :}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n-2)(n-1) a_{n+2} (x-1)^n$$

بالتعويض عن y, y^n في المعادلة نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$$

ويمكن كتابة x معامل y في المعادلة على صورة $(x-1)$ أي :

$$x = 1 + (x-1)$$

وهذه متسلسلة تيلور للدالة x حول النقطة $x=1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = [1 + (x-1)] \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n \quad \text{إذن :}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+1}$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-1)^n$$

بمساواة معاملات نفس قوى $(x-1)$ نحصل على:

$$2a_2 = a_0, \quad ,$$

$$(3.2)a_3 = a_1 + a_0,$$

$$(4.3)a_4 = a_2 + a_1,$$

$$(5.4)a_5 = a_3 + a_2$$

والعلاقة العامة التكرارية هي : $n \geq 1$, $(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n + a_{n-1}$

وحلها بالنسبة للمعامل a_n بدلالة a_1, a_0

$$a_2 = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = \frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{6}, \quad a_4 = \frac{a_2}{12} + \frac{a_1}{12} = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12}$$

$$a_5 = \frac{a_3}{20} + \frac{a_2}{20} = \frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120}, \dots$$

إذن :

$$y = a_0 \left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \dots \right] \\ + a_1 \left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \dots \right]$$

ونلاحظ في هذا المثال أن العلاقة التكرارية التي تعطي a_n بدلالة a_0 و a_1 غير واضحة . في مثل هذه الحالات يمكن أن نثبت أن المتسلسلة متقاربة من أجل كل قيم x . أما y_1, y_2 فهما حلان مستقلان خطيا لمعادلة آيري . إذن :

$$y = a_0 y_1 + a_2 y_2$$

هو الحل العام للمعادلة آيري من أجل : $-\infty < x < \infty$.

المثال -15-

معادلة هرميت (Hermit Eq.) هي :

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

حيث λ ثابت موجب.

جد متسلسلة الحل لهذه المعادلة :

الحل:-

لإيجاد حل هذه المعادلة على صورة متسلسلة قوى حول النقطة العادية $x=0$ نفرض
الحل على الصورة :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

بالتعويض من ذلك في المعادلة قيد الحل نحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n = 0$$

$$(2a_2 + \lambda a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - 2n a_n + \lambda a_n] x^n = 0 \quad \text{أو}$$

إذن : $a_2 = -\frac{\lambda a_0}{2}$ والعلاقة التكرارية العامة هي:

$$a_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n \quad n \geq 1$$

وواضح من هذه العلاقة أن a_0 يعين a_2 الذي هو بدوره يعين a_4 وهكذا دواليك..
بالمثل بالنسبة للمعاملات لقوى x الفردية التي تعين بدلالة a_1 .
وتكون متسلسلة الحل لمعادلة هرميت على الصورة :

$$y = a_0 \left[1 - \frac{\lambda}{2!} x^2 - \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!} x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!} x^6 - \dots \right] \\ + a_1 \left[x + \frac{2-\lambda}{3!} x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!} x^5 + \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!} x^7 + \dots \right]$$

$$= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x).$$

كذلك يمكن أن نثبت أن المتسلسلة متقاربة من أجل جميع قيم x .
إذا كان λ عدداً زوجياً غير سالب فتكون إحدى هاتين المتسلسلتين منتهية وعلى
الخصوص من أجل $\lambda = 0, 2, 4, 6, \dots$ فإن إحدى حلول معادلة هرميت :

$$1, x, 1-2x^2, x-\frac{2}{3}x^3.$$

الحل على صورة كثير حدود يقابل $\lambda = 2n$. وبعد ضربه في عدد ثابت يصبح
يسمى كثير حدود هرميت : $H_n(x)$.

المثال -16-

جد مجال تقارب متسلسلة الحل حول $x = 0$ لمعادلة ليجندر :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

حيث α ثابت.

الحل:-

نلاحظ أن المعادلة تكتب على الصورة $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ حيث
 $P(x) = 1-x^2$ ، $Q(x) = -2x$ ، $R(x) = \alpha(\alpha+1)$. وصفاً الدالة P هما ± 1
أي أن المسافة بينهما والمركز $x = 0$ هي 1 إذن المتسلسلة :

$$y = \sum_n a_n x^n$$

متقاربة من أجل $|x| < 1$ على الأقل كما هو محتمل من أجل قيم x الكبرى ويمكن أن
نثبت أيضاً في حالة α عدد موجب وصحيح أن إحدى متسلسلتي الحل منتهية
وبالتالي فهي متقاربة من أجل جميع قيم x .

مثال : في حالة $\alpha=1$ ، الحل : هو $y = x$.
سنعود فيما بعد لدراسة هذه المعادلة .

المثال -17-

جد مجال تقارب متسلسلة الحل للمعادلة التفاضلية :

$$(1+x^2)y'' + 2xy' + 4x^2y = 0$$

حول النقطة $x=0$ وحول النقطة $x=-1/2$.

الحل :

لدينا $P(x)=1+x^2$ ، $Q(x)=2x$ ، $R(x)=4x^2$ وتتعدم الدالة P من أجل

$$. x = i, -i$$

المسافة في المستوى المركب من 0 إلى $\pm i$ هي 1 ومن $-1/2$ إلى $\pm i$ هي :

$$. \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

إن في الحالة الأولى المتسلسلة $\sum a_n x^n$ متقاربة على الأقل من أجل $|x| < 1$. وفي

الحالة الثانية المتسلسلة $\sum b_n (x+1/2)^n$ متقاربة على الأقل من أجل

$$. |x+1/2| < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ملاحظة :

إذا فرضنا أن للمعادلة التفاضلية السابقة شروط ابتدائية :

$$y(0) = y_0 , \quad y'(0) = y'_0$$

وبما أن $1+x^2 \neq 0$. من أجل جميع قيم x .

بناء على نظرية وجود ووحدانية الحل فإن لهذه المعادلة حل واحد يحقق الشروط الابتدائية على المجال $-\infty < x < \infty$.

من جهة أخرى النظرية السابقة تضمن لنا حلا على صورة متسلسلة قوى $\sum a_n x^n$ من أجل : $-1 < x < 1$.

إن الحل الوحيد على المجال $-\infty < x < \infty$. ليس له متسلسلة قوى حول $x = 0$ التي تتقارب من أجل جميع قيم x .

المثال -18-

هل يمكن تعيين متسلسلة الحل حول $x = 0$. للمعادلة التفاضلية :

$$y'' + (\sin x)y' + (1+x^2)y = 0$$

وإذا كان ممكنا فما هو نصف قطر التقارب.

الحل:

في هذه المعادلة لدينا $Q(x) = 1+x^2$, $P(x) = \sin x$, وبما أن الدالة $P(x) = \sin x$ يمكن أن نكتب على شكل متسلسلة تيلور حول النقطة $x = 0$ وهي متقاربة من أجل جميع قيم x .

أيضا : الدالة $Q(x) = 1+x^2$ يمكن أن نكتب على شكل متسلسلة تيلور حول النقطة $x = 0$ وهي متقاربة من أجل جميع قيم x .

إن وفق النظرية السابقة فإن للمعادلة متسلسلة حل من الصورة :

$$y = \sum a_n x^n$$

حيث a_1, a_0 ثابتان اختياريان والمتسلسلة متقاربة من أجل جميع قيم x .

Successive Differentiation

ج. طريقة التفاضل المتعاقب :-

يمكن أيضاً حل مسألة القيم الابتدائية.

$$(4) \quad y'' + P(x)y' = Q(x)y = 0$$

$$y(x_0) = a \quad y'(x_0) = b$$

حول النقطة العادية $x = x_0$ بنفس طريقة متسلسلة القوى فنحصل على الحل العام من الصورة :

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

ثم نعوض من أحوال البداية لتعيين الثابتين الاختياريين a_1, a_0 بدلالة أحوال البداية a, b .

على أنه يمكن الحل بطريقة أخرى قد تكون أبسط في بعض الأحوال خصوصاً لتعيين المعاملات الأولى . وتعرف هذه الطريقة الأخرى بطريقة التفاضل المتعاقب (Successive Differentiation) نوجزها فيما يلي:

بما أن النقطة $x = x_0$ نقطة عادية إذن يمكن فرض الحل على هيئة متسلسلة تيلور (وهي متسلسلة قوى) على الصورة :

$$(5) \quad y(x) = \sum \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$$= y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots$$

حيث $y(x_0)$ و $y'(x_0)$ معروفتان من أحوال البداية. أما $y''(x_0)$ فنحصل عليها من المعادلة المعطاة بعد كتابتها على الصورة :

$$(6) \quad y'' = -P(x)y' - Q(x)y$$

وعلية عند نقطة البداية يكون $y''(x_0) = -P(x_0)y'(x_0) - Q(x_0)y(x_0)$
 نفاضل مرة أخرى لنحصل على المشتقة الثالثة ثم نعوض عند $x = x_0$
 إذن :

$$y'''(x_0) = -P(x_0)y''(x_0) - [P'(x_0) + Q(x_0)]y'(x_0) - Q'(x_0)y(x_0)$$

وهكذا يمكن الحصول على المشتقات العليا عند $x = x_0$ ويوضح المثال التالي هذين
 الطريقتين :

مثال -19-

حل مسألة القيم الابتدائية التالية على هيئة متسلسلة قوى حول النقطة $x = 1$. وأوجد
 نصف قطر تقارب هذا الحل :

$$(x^2 - 2x + 2)y'' + 2(x-1)y' = 0$$

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = \frac{4}{\pi}$$

الحل :

$$P(x) = \frac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 2} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + 1}, \quad Q(x) = 0 \quad \text{لدينا.}$$

وواضح أن $P(x)$ ، $Q(x)$ تحليليتان عند $x = 1$. وبالتالي فالنقطة $x = 1$ هي
 نقطة عادية ويمكن الحل على هيئة متسلسلة قوى $x = 1$. ولحساب نصف قطر
 التقارب نوجد أقرب نقطة منفردة للنقطة العادية $x = 1$. وواضح أن $P(x) = \infty$ إذا
 كان $(x-1)^2 = -1$ أي إذا كان $x = 1 \pm i$ وهاتان النقطتان المنفردتان متساويتا البعد
 عند النقطة $x = 1$. حيث هذا البعد يساوي الوحدة . وعلى ذلك يكون $R_c = 1$

مما يعني أن متسلسلة الحل تتقارب في المجال $|x-1| < 1$. وسنستخدم طريقتين للحصول على هذا الحل :

الطريقة الأولى :

ننقل المحاور إلى النقطة $x = 1$. عن طريق التعويض $x = t + 1$ وعلى ذلك تصبح:

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{dt^2} \quad , \quad \frac{d}{dx} = \frac{d}{dt}$$

وتؤول المعادلة قيد الحل إلى :

$$[(t+1)^2 - 2(t+1) + 2]y'' + 2ty' = 0$$

$$(t^2 + 1)y'' + 2ty' = 0 \quad \text{أو}$$

حيث الاشتقاق الآن بالنسبة إلى t . نفرض الحل على صورة متسلسلة قوى:

$$y(t) = \sum_n a_n t^n \Rightarrow y'(t) = \sum_n n a_n t^{n-1} \Rightarrow y''(t) = \sum_n n(n-1) a_n t^{n-2}$$

بالتعويض في المعادلة وتجميع الحدود المتشابهة نحصل على :

$$\sum n(n+1) a_n t^n + \sum n(n-1) a_n t^{n-2} = 0$$

لحساب معامل t^n نغير في المجموع الثاني $n \rightarrow n+2$ ثم نساوي هذا المعامل بالصفر لنحصل على الصيغة التكرارية:

$$n(n+1) a_n + (n+1)(n+2) a_{n+2} = 0$$

$$a_{n+2} = -\frac{n}{n+2} a_n \quad , n \geq 0 \quad \text{إذن :}$$

ومنه:

$$n=0 : a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = a_6 = a_8 = \dots = 0$$

$$n=1 : a_3 = -\frac{1}{3}a_1$$

$$n=3 : a_5 = -\frac{3}{5}a_3 = +\frac{1}{5}a_1$$

$$n=5 : a_7 = -\frac{5}{7}a_5 = -\frac{1}{7}a_1$$

$$y(t) = a_0 + a_1 \left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \dots \right) \quad \text{إذن :}$$

أو

$$y(x) = a_0 + a_1 \left[(x-1) - \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{5}(x-1)^5 - \frac{1}{7}(x-1)^7 + \dots \right]$$

لتعيين الثابتين الاختياريين a_1, a_0 نستدعي أحوال البداية :

$$y(1) = a_0 + a_1 [0] = a_0 \equiv 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$y'(x)|_{x=1} = a_1 \left[1 - (x-1)^2 + (x-1)^4 - (x-1)^6 + \dots \right]_{x=1} = a_1 \equiv \frac{4}{\pi} \Rightarrow a_1 = \frac{4}{\pi}$$

إذن

$$y(x) = 1 + \frac{4}{\pi} \left[(x-1) - \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{5}(x-1)^5 - \frac{1}{7}(x-1)^7 + \dots \right]$$

الطريقة الثانية :

بما أن $x = 1$ نقطة عادية. إذن نفرض حلاً للمعادلة التفاضلية على هيئة متسلسلة
تيلور حول نقطة البداية $x = 1$.

$$y(x) = \sum \frac{y^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n$$

حيث من أحوال البداية $y(1) = 1$, $y'(1) = \frac{4}{\pi}$. أما الثابت الأخر $y^{(n)}(1)$ فنحصل

عليها كما يلي: نعوض من أحوال البداية في المعادلة المعطاة حيث : $y(1) = 1$,
 $y'(1) = \frac{4}{\pi}$

$$(1 - 2 \times 1 + 2)y''(1) = 2(1-1)\frac{4}{\pi} \Rightarrow y''(1) = 0$$

نفاضل المعادلة المعطاة :

$$(x^2 - 2x + 2)y''' + (2x - 2)y'' + 2(x-1)y' + 2y = 0$$

$$(1 - 2 + 2)y'''(1) + (2 - 2)y''(1) + 2(1 - 1)y'(1) + 2y(1) = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$y'''(1) = -2y'(1) = -8/\pi \quad \text{إذن :}$$

نفاضل مرة أخرى بغية الحصول على المشتقة الرابعة فنجد أن $y^{(4)}(1) = 0$ ومرة أخرى للحصول على المشتقة الخامسة فنجد أن $y^{(5)}(1) = 96/\pi$ وهكذا لتكون متسلسلة تيلور الحل هي:

$$y(x) = 1 + \frac{4}{\pi}(x-1) - \frac{8}{3!\pi}(x-1)^3 + \frac{96}{5!\pi}(x-1)^5 - \dots$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi} \left[(x-1) - \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{5}(x-1)^5 - \dots \right]$$

وواضح أن طريقة متسلسلة تيلور تكون أبسط إذا أردنا الحصول فقط على الحدود الأولى من المتسلسلة لكنها تطول إذا أردنا حساب الحدود العليا.

ملاحظة:

المعادلة التفاضلية قيد الحل هي معادلة خطية من المرتبة الأولى في y' ويمكن حلها بالطرق المعتادة لنحصل على :

$$y(x) = A + B \tan^{-1}(x-1)$$

والتي تصبح تحت أحوال البداية:

$$y(x) = 1 + \frac{4}{\pi} \tan^{-1}(x-1)$$

ومعروف أن مفكوك تيلور للدالة $\tan^{-1}(x-1)$ حول $x = 1$. أي مفكوك تيلور للدالة $\tan^{-1} t$ حول $t = 0$. هو :

$$\tan^{-1} t = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \dots, \quad |t| < 1$$

5- ويمكن توسيع النظرية السابقة لتشمل المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad (i)$$

نظرية -2-

إذا كانت الدوال $P(x)$ ، $Q(x)$ ، $R(x)$. دوال تحليلية عند النقطة $x = x_0$ فإن كل حل للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (i) يكون تحليليا عند $x = x_0$ ، و يمكن بالتالي تمثيله بمتسلسلة قوى في $(x - x_0)$ على الصورة :

$$(7) \quad y = \sum_n a_n (x - x_0)^n$$

بنصف قطر تقارب $R_c > 0$ يساوي المسافة بين النقطة العادية $x = x_0$ وأقرب نقطة منفردة تكون عندها أي من الدوال $R(x)$, $Q(x)$, $P(x)$ غير تحليلية . وتتبع نفس الخطوات المتعلقة بحل المعادلة المتجانسة مع تعديل بسيط هو فك الدالة التحليلية $R(x)$ في الطرف الأيمن على هيئة متسلسلة قوى في $(x = x_0)$ ثم مساواة معاملات القوى $(x - x_0)$ المتشابهة على الطرفين . ويكون الحل العام على الصورة :

$$(8) \quad y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) + y_3(x)$$

حيث $y_h(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$ هو الحل المتجانس ؛ $y_3(x)$ هو حل خاص . ويوضح ذلك المثال التالي :

مثال -20-

حل المعادلة التفاضلية التالية حول $x = 0$ على هيئة متسلسلة قوى :

$$y'' - xy' = e^{-x}$$

الحل :-

$$P(x) = -x , Q(x) = 0 , R(x) = e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad \text{لدينا :}$$

وكلها دوال تحليلية عند جميع قيم x بما فيها $x = 0$. وعلى ذلك يكون الحل على هيئة متسلسلة قوى تتقارب لجميع قيم x . إذن :

$$y(x) = \sum a_n x^n \Rightarrow y' = \sum n a_n x^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum n(n-1) a_n x^{n-2}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على :

$$\sum n(n-1)a_n x^{n-2} - x \sum na_n x^{n-1} = \sum \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

$$\sum n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum na_n x^n = \sum \frac{(-1)^n}{n!} x^n \quad \text{أو}$$

ويلاحظ أننا مثلنا الدالة e^{-x} بمتسلسلة تيلور حول $x=0$.

بمساواة معامل x^n على الطرفين وذلك بعد تغيير $n \rightarrow n+2$ في المجموع الأول في الطرف الأيسر فنحصل على :

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

وتكون الصيغة التكرارية من الشكل :

$$a_{n+2} = \frac{n}{(n+2)(n+1)} a_n + \frac{(-1)^n}{(n+2)(n+1)(n!)} , \quad n \geq 0$$

ومن هنا :

$$n=0 , \quad a_2 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$n=1 , \quad a_3 = \frac{1}{2.3} a_1 - \frac{1}{2.3} = \frac{a_1}{6} - \frac{1}{6}$$

$$n=2 , \quad a_4 = \frac{2}{3.4} a_2 + \frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{8}$$

$$n=3 , \quad a_5 = \frac{3}{4.5} a_3 - \frac{1}{6.5.4} = \frac{a_1}{40} - \frac{1}{30}$$

ويكون الحل كمايلي :

$$y = a_0 + a_1x + \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{a_1}{6} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \left(\frac{a_1}{40} - \frac{1}{30}\right)x^5 + \dots$$

$$= \left\{ a_0 + a_1 \left[x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{40}x^5 + \dots \right] \right\} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \dots$$

المقدار بين قوسين {...} هو الحل المتجانس بينما المتسلسلة الأخيرة تمثل حلاً خاصاً

IX. 3- الحل في متسلسلة فروبنوس بجوار نقطة منفردة منتظمة :

Solutions in Frobenius series about a Regular Singular Point

لا تصلح متسلسلة القوى حلاً للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة حول إحدى نقطها المنفردة المنتظمة حيث لا تحقق هذه المتسلسلة هذه المعادلة حول أمثال هذه النقط ، وستقتصر دراستنا على إيجاد الحل على هيئة متسلسلة وهي تعديل لمتسلسلة القوى بإتاحة إمكانية وجود قوى سالبة أو غير صحيحة بحيث تصلح حلاً للمعادلة التفاضلية حول النقطة المنفردة المنتظمة وتعرف متسلسلة القوى المعدلة بتسلسله فروبنوس (Frobenius Series) .

نظرية -3-

إذا كانت $x = x_0$ نقطة منفردة منتظمة للمعادلة التفاضلية الخطية :

$$(9) \quad L[y] = y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

فأنه يوجد على الأقل حل واحد على صورة متسلسلة فروبنوس لهذه المعادلة :

$$(10) \quad y(x) = (x - x_0)^\alpha \sum a_n (x - x_n)^n$$

حيث أن $\sum a_n(x-x_0)^n$ متقاربة على المجال $0 < |x-x_0| < R_c$
البرهان :

لإثبات النظرية فإنه يستلزم تعيين :

1- قيم ∞ التي من أجلها يكون للمعادلة (9) حلاً من الصورة (10)

2- الصيغة التكرارية للمعاملات a_n

3- نصف تقارب المتسلسلة $\sum a_n(x-x_0)^n$

سنفرض للسهولة فقط ؛ أن النقطة المنفردة هي $x = x_0 = 0$ وإذا لم يكن مبدأ الإحداثيات النقطة المنفردة ننقل المحاور إليها بعملية الانسحاب وذلك بأخذ :

$$X = x - x_0 \quad (i)$$

فتكون النقطة المنفردة $X = 0$

من الفرض لدينا النقطة $x_0 = 0$ نقطة منفردة منتظمة . إذن الدالتان

$xP(x)$ ، $x^2Q(x)$ تحليلتان عند $x = 0$ وبالتالي يمكن تمثيلهما بمتسلسلتين قويتين على الصورة :

$$xP(x) = \sum \rho_n x^n \quad , \quad x^2Q(x) = \sum q_n x^n \quad (ii)$$

وهاتان المتسلسلتان متقاربتان في مجال ما . وليكن R_c أصغر مجالي التقارب . لنفرض أن للمعادلة حلاً من الشكل :

$$y(x) = x^\alpha \sum a_n x^n \quad (iii)$$

حيث $a_0 \neq 0$ ، α ، a_1 ، a_2 ، ... ، a_n ثوابت .

يمكن وضع الحل على الشكل :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}$$

وبالاشتقاق نجد :

$$y' = \sum (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1}$$

$$y'' = \sum (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha-2}$$

بالتعويض في المعادلة نجد :

$$L[y] = \sum (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha-2} + x^{-1} \left[\sum \rho_n x^n \right] \left[\sum (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-2} \right] \\ + x^{-2} \left[\sum q_n x^n \right] \left[\sum a_n x^{n+\alpha} \right] = 0$$

بإجراء عمليتي ضرب المتسلسلات ثم تجميع حدود قوي x المتشابهة نحصل على :

$$[\alpha(\alpha-1) + \alpha \rho_0 + q_0] a_0 x^{\alpha-2} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n + \sum_{m=0}^n [(\alpha+m)\rho_{n-m} + q_{n-m}] a_m \right\} x^{n+\alpha-2} = 0 \quad (\text{iv})$$

وهذه تتحقق عندما تتعدم معاملات القوى المختلفة لـ x وبالتالي نجد العلاقاتين :

$$[\alpha(\alpha-1) + \alpha \rho_0 + q_0] a_0 = 0 \quad (\text{v})$$

$$(n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n = - \sum_{m=0}^n [(\alpha+m)\rho_{n-m} + q_{n-m}] a_m \quad (\text{vi})$$

وحيث أن $a_0 \neq 0$ فرضاً . إذن العلاقة (v) تصبح :
أو

$$\alpha (\alpha - 1) + \alpha \rho_0 + q_0 = 0 \quad (\text{vii})$$

$$\alpha^2 - (1 - \rho_0) \alpha + q_0 = 0$$

وتسمى هذه العلاقة بالمعادلة الآسية (Indicial Equation) للمعادلة التفاضلية المعطاة وهي علاقة من الدرجة الثانية في الأس α ، وعموماً لهذه المعادلة جذران α_2, α_1 يمكن تعيينهما بدلالة q_0, ρ_0 أي بدلالة خصائص الدالتين $Q(x)$ ، $P(x)$ وسنعتبر دائماً أن الجذر الآسي الأكبر هو α_1 أي $\alpha_1 \geq \alpha_2$.
أما العلاقة (vii) فتعطي الصيغة التكرارية التالية :

$$[(n + \alpha)(n + \alpha - 1) + (n + \alpha)p_0 + q_0]a_n + \sum_{m=0}^{n-1} a_m [(\alpha + m)p_{n-m} + q_{n-m}] = 0$$

$$; n \geq 1 \quad (\text{viii})$$

ولتبسيط هذه الصيغة نرى أن معامل a_n يمكن كتابته على الصورة :

$$(n + \alpha)(n + \alpha - 1) + (n + \alpha)p_0 + q_0 = n[n + 2\alpha - (1 - \beta)]$$

وذلك يأخذ بعين الاعتبار المعادلة الآسية ولدينا من المعادلة الآسية أيضاً:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \rho_0$$

إذن معامل a_n يكتب على الشكل :

$$n(n + 2\alpha - \alpha_1 - \alpha_2)$$

وبالتالي تصبح الصيغة التكرارية على الصورة :

$$n(n+2\alpha-\alpha_1-\alpha_2)a_n + \sum_{m=0}^{n-1} a_m [(\alpha+m)p_{n-m} + q_{n-m}] = 0 \quad (\text{viii})$$

وللحصول على معاملات الحل الأول للمعادلة نضع كل α_1 بدل α لنجد الصيغة التكرارية :

$$n(n+\alpha_1-\alpha_2)a_n + \sum_{m=0}^{n-1} a_m [(\alpha_1+m)p_{n-m} + q_{n-m}] = 0 \quad (\text{ix})$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \delta \quad (\text{x})$$

تصبح الصيغة التكرارية للحل الأول:

$$n(n+\delta)a_n + \sum_{m=0}^{n-1} a_m [(\alpha_1+m)p_{n-m} + q_{n-m}] = 0 \quad (\text{xi})$$

وهي علاقة خطية بين المعاملات $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ وتعين هذه المعاملات بدلالة a_0 ، ثم بالتعويض في الحل المفروض نحصل على متسلسلة الحل الأول. ولكن هذه المتسلسلة لا تمثل شيئا إلا إذا كانت متقاربة. ولنبرهن الآن أنها متقاربة.

بما أن المتسلسلة $|x|P(x)$ ، $|x^2\phi(x)|$ متقاربتان من أجل $|x| < R_c$. فإن لكل من هاتين المتسلسلتين قيمة محدودة في هذا المجال. لنكن K قيمة محدودة وأكبر من هاتين القيمتين في المجال $|x| < r$ حيث $r \leq R_c$:

لنأخذ المتسلسلتين :

$$\begin{aligned} xP(x) &= p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots \\ x^2Q(x) &= q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{xii})$$

وبأخذ القيم المطلقة للحدود نجد :

$$|x|P(x) \leq |p_0| + |p_1||x| + |p_2||x^2| + \dots + |p_n||x^n| + \dots$$

$$|x|Q(x) \leq |q_0| + |q_1||x| + |q_2||x^2| + \dots + |q_n||x^n| + \dots$$

ومن أجل $|x| = r$ نجد أن :

$$\begin{aligned} \sum |p_n| r^n &\leq K \\ \sum |q_n| r^n &\leq K \end{aligned} \quad \text{(xiii)}$$

$$|p_n| \leq \frac{K}{r^n} \quad , \quad |q_n| \leq \frac{K}{r^n} \quad \text{وبالتالي :}$$

وبأخذ القيم المطلقة لحدود الصيغة التكرارية والتعويض بالعلاقة (xiii) نجد :

$$n(n + \delta)|a_n| \leq \sum_{m=0}^{n-1} |a_m| (\alpha_1 + m + 1) \frac{K}{r^{n-m}} \quad \text{(xiv)}$$

وإذا أخذنا متسلسلة معاملاتها b_n تحقق العلاقة :

$$n(n + \delta)b_n = \sum_{m=0}^{n-1} b_m (\alpha_1 + m + 1) \frac{K}{r^{n-m}} \quad \text{(xv)}$$

ويكون :

$$b_n \geq |a_n|$$

حيث الصيغة التكرارية لمعاملات b_n هي :

$$n(n + \delta)b_n = \frac{(n-1)(n-1 + \delta)b_{n-1}}{r} + \frac{K(n + \alpha_1)b_{n-1}}{r}$$

والذي يعطى :

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{(n-1)(n-1+\delta)}{n(n+\delta)r} + \frac{K(n+\alpha_1)}{n(n+\delta)r}$$

إذن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{r} \quad (\text{xvi})$$

أي أن نصف قطر تقارب المتسلسلة S حيث :

$$S = \sum b_n x^n$$

هو r .

وبما أن $|a_n| \leq b_n$ إذن المتسلسلة $\sum a_n x^n$ متقاربة أيضاً ونصف قطر تقاربها ليس أصغر من r . وبما أن r هي أصغر أو تساوي R_c إذن المتسلسلة متقاربة من أجل $|x| < R_c$ وبهذا نكون قد عينا إحدى حلي المعادلة المعطاة.

$$y_1(x) = x^{\alpha_1} \sum a_n(\alpha_1) x^n \quad (\text{xvii})$$

أما لتعيين الحل الثاني نعوض في الصيغة التكرارية كل α_2 بدل α :

$$n(n-\delta)a_n + \sum_{m=0}^{n-1} a_m [(m+\alpha_2)p_{n-m} + q_{n-m}] = 0 \quad (\text{xviii})$$

وهنا نميز ثلاث حالات رئيسية الأولى كون δ عدداً غير صحيح. والثانية كون δ عدداً صحيحاً والثالثة كون δ معدوماً .

الحالة الأولى: δ عدد غير صحيح Positive Integer $\neq \alpha_1 - \alpha_2 = \delta$:

هي هذه الحالة ، يختلف جذرا المعادلة الأسية بقيمة لا تساوي عدداً صحيحاً أي أن $\alpha_1 - \alpha_2 = \delta \neq \text{Positive Integer}$.

في هذه الحالة يناظر الجذر الآسي α_2 متسلسلة الحل على نمط متسلسلة الحل الأول:

$$y_2(x) = x^{\alpha_2} \sum a_n(\alpha_2)x^n \quad (\text{xix})$$

وواضح أن الحل $y_2(x)$ مستقل خطيا عن الحل $y_1(x)$ لأن النسبة بينها لا يمكن أن تساوي ثابتا بأي حال من الأحوال طالما تحقق الشرط $\alpha_1 - \alpha_2 = \delta \neq \text{Integer}$.

الحالة الثانية: - δ عدد صحيح $\alpha_1 - \alpha_2 = \delta = N$

في هذه الحالة لا ينعدم معامل a_n في الصيغة التكرارية (xviii) طالما $n < \delta$. ولكن عندما $n = \delta$ نميز حالتين:

أولاهما:

أن يكون الحد الثاني في الصيغة التكرارية معدوما. وعندها تصبح a_δ غير معينة فنختارها صفرا ونوجد بقية الثوابت بدالاتها وبذلك نحصل على الحل الثاني للمعادلة.

ثانيتها:

أن يكون الحد الثاني للصيغة التكرارية غير معدوم وعندها تصبح a_δ مساوية للانهاية. وبالتالي تصبح بقية المعاملات a_n من أجل $n > \delta$ مساوية للانهاية أيضا. وهذا يعني بأن فرضنا للحل على شكل متسلسلة من النوع $y = x^\alpha \sum a_n x^n$ خاطئ. ولا يوجد حل ثاني من هذا الشكل.

ولمعرفة الحل الثاني نلجأ لتخفيض مرتبة المعادلة بعد معرفة حل خاص لها وهو:

$$y_1 = x^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha_1)x^n$$

وبإجراء تغيير في الدالة كما يلي:

$$y = y_1 Z$$

تصبح المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \left[2 \frac{y_1'}{y_1} + P(x) \right] \frac{dZ}{dx} = 0$$

والتي حلها كما وجدنا في الفصل السابع هو :

$$Z = A + B \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} dx$$

وبالتالي فالحل العام للمعادلة هو :

$$y = Ay_1(x) + By_2(x)$$

حيث :

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} dx$$

ولإجراء هذا التكامل ومعرفة شكل هذا الحل نتبع الخطوات التالية :
بما أن α_2, α_1 جذرا للمعادلة الآسية إذن:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - p_0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \delta$$

$$p_0 = 1 + \delta - 2\alpha_1$$

ومنه إذن :

$$e^{-\int P(x) dx} = e^{-\int (p_0 + p_1 x + \dots) \frac{dx}{x}}$$

ولدينا :

$$e^{-\int P(x) dx} = e^{-\int (2\alpha_1 - 1 - \delta) \frac{dx}{x}} e^{-\int (p_1 + p_2 x + \dots) dx}$$

أو :

$$x^{2\alpha_1-1-\delta} \cdot e^{-\int(p_1+p_2x+\dots)dx}$$

والحل الثاني يصبح على الشكل:

$$y_2 = y_1 \frac{\int x^{2\alpha_1-1-\delta} e^{-\int(p_1+p_2x+\dots)dx}}{x^{2\alpha_1} \left[\sum a_n(\alpha_1)x^n \right]^2}$$

واختصارا نكتبه على الشكل :

$$y_2 = y_1 \int \frac{g(x)}{x^{1+\delta}} dx$$

حيث :

$$g(x) = \frac{e^{-\int(p_1+p_2x+\dots)dx}}{(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)^2}$$

وهي دالة تحليلية عند النقطة $x = 0$ لأن $a_0 \neq 0$ فرضاً . وبالتالي يمكن كتابتها على شكل متسلسلة قوى:

$$g(x) = \sum g_n x^n$$

$$g_0 = \frac{1}{a_0^2} \neq 0$$

حيث

وبالتعويض نجد الحل الثاني:

$$y_2 = y_1 \int x^{-1-\delta} \sum_n g_n x^n dx$$

$$= y_1 \int \sum_n g_n x^{n-1-\delta} dx$$

إذا لاحظنا أن معاملات g_n عندما $n = \delta$ هي $\frac{1}{x}$ وتكاملها $\ln x$ فإن y_2 يكتب على الشكل :

$$y_2 = y_1 \left[\sum_{n=0}^{\delta-1} \frac{g_n}{n-\delta} x^{n-\delta} + g_n \ln|x| + \sum_{n=\delta+1}^{\infty} \frac{g_n}{n-\delta} x^{n-\delta} \right]$$

$$y_2 = g_\delta y_1(x) \ln|x| + x^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\alpha_2) x^n \quad (\text{xx})$$

وهنا كما نرى فإن الحل الثاني يحتوي على الحد $\ln|x|$ وهو غير قابل للنشر بجوار $x = 0$.

ونستنتج من ذلك أن الحل الثاني يحتوي على $\ln|x|$ إذا كانت $g_\delta \neq 0$ ، أما إذا كانت $g_\delta = 0$ فالحل لا يحتوي على $\ln|x|$ وعندها يكون الحل على شكل متسلسلة نحصل عليها بتعويض α_2 بدل α في الصيغة التكرارية .

أما إذا كانت g_δ غير معدومة فالحل لا يعطى بشكل المتسلسلة المفروضة لاحتوائه على $\ln|x|$. وعندها نبحث عن الحل الخاص الثاني بطريقة التخفيض .

الحالة الثالثة : $\alpha_1 = \alpha_2$ أي $\alpha_1 - \alpha_2 = \delta = 0$

في حالة تساوي جذرا المعادلة الأسية يكون : $(p_0 - 1)^2 - 4q_0^2 = 0$ وعندئذ يكون الجذر المزدوج هو :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}(1 - p_0)$$

في هذه الحالة لا يؤدي الجذر الثاني $\alpha_1 = \alpha_2$ إلى حل جديد يختلف عن $y_1(x)$. ولا بد من تعديل تقنية الحل بحيث نحصل على حل جديد $y_2(x)$ مستقل خطياً عن $y_1(x)$.

ونعود مرة أخرى إلى المتطابقة (iv).

$$L[y] = [\alpha(\alpha-1) + \alpha p_0 + q_0] a_0 x^{\alpha-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n + \sum_{m=0}^{\infty} [(\alpha+m)p_{n-m} + q_{n-m}] a_m \right\} x^{n+\alpha-2} = 0$$

نرجئ إلى حين مساواة معامل أدنى قوة $x^{\alpha-2}$ بالصفر [تلك المساواة التي تؤدي إلى المعادلة الآسية] نبدأ بمساواة القوة التالية $x^{\alpha-1}$ فنحصل على :

$$a_1 = -\frac{p_1 \alpha + q_1}{\alpha(\alpha+1) + p_0(\alpha+1) + q_0} a_0 = F_1(\alpha) a_0$$

بمساواة معامل القوة x^α بالصفر نحصل على a_2 بدلالة a_1, a_0, α ثم بالتعويض عن a_1 بدلالة a_0 من العلاقة السابقة يمكن كتابة العلاقة a_2, a_0, α على الصورة :

$$a_2 = F_2(\alpha) a_0$$

وعموماً يمكن كتابة العلاقة بين المعامل a_m والمعامل a_0 على الصورة :

$$a_m = F_m(\alpha) a_0$$

ويمكن كتابة متسلسلة الحل (متسلسلة فروبنوس) على الصورة :

$$y(x, \alpha) = a_0 x^\alpha [1 + F_1(\alpha)x + F_2(\alpha)x^2 + \dots]$$

$$= a_0 x^\alpha \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} F_m(x) x^m \right]$$

وعند التعويض بهذه الدالة $y(x, \alpha)$ ومشتقاتها في المعادلة التفاضلية فإن كل الحدود في الطرف الأيسر ستتعدم إلا الحد الذي يحتوي على $x^{\alpha-2}$ (أدنى قوة). وبالتالي نحصل على :

$$L(y) = L[y(x, \alpha)] = a_0 [\alpha(\alpha - 1) + \alpha p_0 + q_0] x^{\alpha+2}$$

$$L[y(x, \alpha)] = a_0 (\alpha^2 + (p_0 - 1)\alpha + q_0) x^{\alpha-2} \quad \text{أو}$$

ونفس الشيء نحصل عليه من المتطابقة السابقة (XX) بمساواة جميع معاملات قوى x بالصفر عدا معامل أدنى قوة $x^{\alpha-2}$.
وحيث أننا بصدد جذر مزدوج للمعادلة الآسية فإنه يمكن كتابة الطرف الأيمن للمعادلة (xxi) على الصورة :

$$L[y(x, \alpha)] = (\alpha - \alpha_1)^2 a_0 x^{\alpha-2} \quad \text{(xxii)}$$

حيث α_1 هو الجذر المزدوج للمعادلة الآسية ويعطى بالعلاقة :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 - \rho_0)$$

والآن نريد أن نبحث عن الدالة $y(x)$ التي تحقق المعادلة التفاضلية :

$$L[y] = 0$$

واضح أن الدالة $y_1 = y(x, \alpha_1)$ التي نحصل عليها من العلاقة :

$$y(x, \alpha) = a_0 x^\alpha \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} F_m(\alpha) x^m \right] \quad \text{(xxiii)}$$

وبوضع $\alpha = \alpha_1$ نجعل الطرف الأيمن في العلاقة (xxii) منعدمًا وبالتالي تتحقق المعادلة التفاضلية $L[y] = 0$.

فيكون الحل الأول لهذه المعادلة التفاضلية هو $y_1 = y(x, \alpha_1)$.

$$a_0 = 1 \quad \text{حيث} \quad y_1(x) = x^{\alpha_1} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} F_m(\alpha_1) x^m \right]$$

نبحث الآن عن حل آخر $y_2(x)$ يحقق المعادلة $L[y] = 0$. بوضع $a_0 = 1$ في المعادلة (xxii) ثم نفاضل الطرفين جزئياً بالنسبة إلى α على اعتبار أن $y(x, \alpha)$ دالة من متغيرين مستقلين α, x وبالتالي فتبادل التفاضل بينهما قائم أي أن :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} L[y(x, \alpha)] &= \frac{\partial}{\partial x} [y'' + p(x)y' + q(x)y] = L \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} [(\alpha - \alpha_1)^2 x^{\alpha-2}] = 2(\alpha - \alpha_1) x^{\alpha-2} + (\alpha - \alpha_1)^2 x^{\alpha-2} \ln|x| \end{aligned}$$

وواضح أن الطرف الأيمن لهذه المعادلة ينعدم أيضاً بوضع $\alpha = \alpha_1$ مما يعني أن

$$y_2(x) = \left. \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha = \alpha_1} \quad \text{الدالة } y_2(x) \text{ حيث :}$$

$$= y_1(x) \ln|x| + x^{\alpha_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\alpha_1) x^n \quad \text{(xxv)}$$

هي أيضاً حل للمعادلة التفاضلية $L[y] = 0$.

2- الطريقة العملية لإيجاد الحل بجوار نقطة متغيرة منتظمة.

لقد أثبتنا فيما سبق وجود حلين مستقلين خطيا للمعادلة التفاضلية بجوار نقطة مفردة منتظمة ونلخص خطوات العمل لإيجاد هذين الحلين فيما يلي:

$$1- \text{ نفرض أن للمعادلة حلا من الشكل: } y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}$$

حيث $\alpha \neq 0$ ونعوض في المعادلة التفاضلية، ثم نوجد المعادلة الآسية والصيغة التكرارية .

2- نحل المعادلة الآسية ونوجد الجذرين α_1, α_2 حيث $\alpha_1 \geq \alpha_2$ ، ثم نعوض الجذر الأكبر α_1 في الصيغة التكرارية ونوجد الحل الأول بدلالة ثابت اختياري.

3- إذا كان الفرق بين α_1, α_2 عددا غير صحيح ، نعوض α_2 بالصيغة التكرارية ونستنتج الحل الثاني.

4- إذا كان الفرق بين α_1, α_2 عددا صحيحا، نعوض α_2 بالصيغة التكرارية ونوجد المعاملات a_1, a_2, \dots حتى a_δ فإذا كانت جميعها معينة حتى a_δ فإن $a_{\delta+1}, a_{\delta+2}, \dots$ تصبح معينة وبالتالي نستنتج الحل الثاني.

إما إذا كانت a_δ غير محددة نلجأ إلى طريقة تخفيض المعادلة بعد معرفة الحل الأول أو نستخدم الطريقة المبينة في المثال -22-.

5- إذا كانت $\alpha_1 = \alpha_2$: في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية:

$$أ- \text{ نحسب قيمة الجذر المزدوج } (\alpha_1 = \alpha_2) = \frac{1}{2}(1 - \rho_0).$$

ب- نستخدم طريقة فروينيتوس لإيجاد الدالة $y(x, \alpha)$ (xxiii).

ج- نضع $\alpha = \alpha_1$ في $y(x, \alpha)$ لنحصل على الحل الأول $y_1(x)$:

$$y_1(x) = y(x, \alpha) \Big|_{\alpha = \alpha_1}$$

د- نفاضل $y(x, \alpha)$ جزئياً بالنسبة إلى α ثم نحسب قيمة هذه المشتقة الجزئية عند $\alpha = \alpha_1$ فنكون هي الحل الثاني $y_2(x)$:

$$y_2(x) = \left. \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha = \alpha_1}$$

ويكون الحل العام للمعادلة $L[y] = 0$ من الصورة :

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

ملاحظات :-

1- الحلان $y_1(x), y_2(x)$ مستقلان خطياً لان النسبة بينهما ليست ثابتة بل تعتمد على x ويمكن التحقق من عدم انعدام الرونسيكان لها تطابقاً .

2- يمكن وضع الحل الثاني $y_2(x)$ على الصورة :-

$$y_2(x) = y_1(x) \ln|x| + x^\alpha \sum b_n(\alpha_1) x^n$$

حيث المعاملات b_n تختلف عموماً عن المعاملات a_n التي تقابل $\alpha = \alpha_1$

3- يمكن بالتعويض عن هذا الحل الثاني ومشتقاته في المعادلة التفاضلية ، تعيين المعاملات b_n . ونلاحظ أن الحدود المضروبة في $\ln|x|$ تلاشي بعضها البعض .

4- لحل المعادلة التفاضلية غير المتجانسة $L(y) = y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$

حول نقطة متفردة منتظمة للمعادلة $L[y] = 0$ نوجد الحل المتجانس $y_h(x)$ باستخدام طريقة فروبنوس حسب طبيعة جذري المعادلة الآسية ثم نستخدم طريقة لاغرانج لتغير البارومترا لحساب الحل الخاص $y_p(x)$.

5- لقد وجدنا انه عندما تكون $x_0 = 0$ نقطة متفردة منتظمة فان المعادلة التفاضلية

تكتب على الصورة :-

$$y'' + \frac{1}{x} \left(\sum_n \rho_n x^n \right) y' + \frac{1}{x^2} \left(\sum_n q_n x^n \right) y = 0$$

وبضرب الطرفين في x^2 نجد :-

$$(11) \quad x^2 y'' + x \left[\sum_n \rho_n x^n \right] y' + \left[\sum_n q_n x^n \right] y = 0$$

وهي تشبه معادلة اويلر Euler ، أوان معادلة حالة خاصة منها وذلك عندما تكون:

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_n = 0, q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$$

$$(12) \quad x^2 y'' + \rho_0 x y' + q_0 y = 0 \quad \text{أي :}$$

6- من شكل حل المعادلة نلاحظ انه إذا كانت α_2, α_1 عددين صحيحين موجبيين ، وكان الحل لا يحتوي علي $\ln|x|$ فالنقطة $x = 0$ تكون نقطة عادية للحل العام رغم كونها منفردة بالنسبة للمعادلة التفاضلية .

بينما إذا كان كل من α_2, α_1 أو كليهما عددا غير صحيح أو كان الحل العام يحتوي على $\ln|x|$ فالنقطة $x_0 = 0$ هي نقطة منفردة للحل العام ، علماً بأنها أيضاً منفردة للمعادلة التفاضلية .

نستنتج من ذلك مايلي :-

إذا كانت النقطة x_0 نقطة منفردة للحل العام فهي أيضاً منفردة للمعادلة التفاضلية ، أما إذا كانت النقطة منفردة بالنسبة للمعادلة التفاضلية فليست بالضرورة أن تكون منفردة للحل العام .

7- لا يمكن الحصول على الحل العام للمعادلة التفاضلية بجوار نقطة منفردة غير منتظمة بطريقة المتسلسلات .

3- أمثلة مختلفة محلولة

مثال -21- : الحالة الأولى :-

حل المعادلة التفاضلية التالية :-

$$2x^2 y'' - xy' + (1 - x^2)y = 0$$

$$P(x) = -\frac{x}{2x^2} = -\frac{1}{2x}, Q(x) = \frac{1-x^2}{2x^2} \quad \text{لدينا :}$$

واضح أن $x = 0$ نقطة مفردة منتظمة لان كل من $xP(x) = -\frac{1}{2}$ و

$x^2 Q(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)$ دالة تحليلية عند $x = 0$ نفرض حلا على الصورة :

$$y = x^\alpha \sum Q_n x^n = \sum Q_n x^{n+\alpha}, \quad Q_0 \neq 0$$

إذن :

$$y' = \sum (n+\alpha) Q_n x^{n+\alpha-1}, \quad y'' = \sum (n+\alpha)(n+\alpha-1) Q_n x^{n+\alpha-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على :-

$$2x^2 \sum (n+\alpha)(n+\alpha-1) Q_n x^{n+\alpha-2} - x \sum (n+\alpha) Q_n x^{n+\alpha-1} + (1-x^2) \sum Q_n x^{n+\alpha} = 0 \quad (i)$$

بتجميع حدود القوى المتشابهة والقسمة على x^α نحصل على :-

$$\sum [2(n+\alpha)(n+\alpha-1) - (n+\alpha) + 1] Q_n x^n - \sum Q_n x^{n+2} = 0$$

للحصول على المعادلة الآسية نسائي معامل اصغر قوة (x^0) بالصفر ونذكر أن $Q_0 \neq 0$

$$2(\alpha - 1) - \alpha + 1 = 0 \quad (ii)$$

بمساواة معامل x^n بالصفر :-

$$[2(n + \alpha)(n + \alpha - 1) - (n + \alpha) + 1]Q_n - Q_{n-2} = 0$$

$$Q_n = \frac{1}{(n + \alpha - 1)(2n + 2\alpha - 1)} Q_{n-2} \quad ; \quad n \geq 0 \quad \text{أو}$$

$$Q_{n+2} = \frac{1}{(n + \alpha + 1)(2n + 2\alpha + 3)} Q_n \quad n \geq 0 \quad (iii) \quad \text{أو}$$

وهذه هي الصيغة التكرارية والتي تعطي المعاملات الزوجية Q_2, Q_4, \dots بدلالة المعامل $Q_0 \neq 0$ كما تعطي المعاملات الفردية Q_3, Q_5, \dots بدلالة المعامل Q_1 الذي هو غير معرف لذلك نسائي معامل x بالصفر في المتطابقة (i)

$$[2(1 + \alpha)(1 + \alpha - 1) - (1 + \alpha) + 1]Q_1 = 0 \quad \text{-: فنجد أن}$$

$$(2\alpha^2 + \alpha + 1)Q_1 = 0 \quad (iv) \quad \text{أي}$$

نحل المعادلة الآسية للحصول على الجذرين الآسين فنجد أن :-

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

حيث أن الجذرين يختلفان بقيمة غير صحيحة " الحالة الأولى " إذن فـ كلا الجذرين يعطي حلا مستقلا خطيا عن الآخر . وواضح قبل كل شيء أن قيمتي α تحققان المتطابقة (iv) وبالتالي يكون $Q_1 = 0$ ومنه تكون جميع المعاملات الفردية معدومة حسب الصيغة التكرارية (iii) .

الحل الأول $y_1(x)$:-

نعوض عن $\alpha=1$ في الصيغة التكرارية للحصول على المعاملات الزوجية بدلالة Q_0 .

$$Q_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(2n+5)} Q_n$$

$$n=0 \quad Q_2 = \frac{1}{2.5} Q_0$$

$$n=2 \quad Q_4 = \frac{1}{4.9} Q_2 = \frac{1}{2.4.5.9} Q_0$$

$$n=4 \quad Q_0 = \frac{1}{6.13} Q_4 = \frac{1}{2.4.6.5.9.13} Q_0$$

وهكذا يكون الحل الأول هو :-

$$y_1(x) = x \sum Q_n x^n = Q_0 x \left[1 + \frac{x^2}{2.5} + \frac{x^4}{2.4.5.9} + \frac{x^6}{2.4.6.5.9.13} + \dots \right] \quad (v)$$

الحل الثاني $y_2(x)$

نعوض عن $\alpha = \frac{1}{2}$ فتصبح الصيغة التكرارية من الصورة :-

$$Q_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(2n+3)} Q_n$$

$$n=0 \quad Q_2 = \frac{1}{2.3} Q_0$$

$$n=1 \quad Q_4 = \frac{1}{4.7} Q_2 = \frac{1}{2.4.3.7} Q_0$$

$$n=2 \quad Q_6 = \frac{1}{6.11} Q_4 = \frac{1}{2.4.6.3.7.11} Q_0$$

وهكذا يكون الحل الثاني هو :-

$$y_2(x) = Q_0 x^{1/2} \left[1 + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.4.3.7} + \frac{x^6}{2.4.3.7.11} + \dots \right] \quad (\text{vi})$$

ويكون الحل العام للمعادلة المعطاة من الصورة :-

$$y = Ay_1(x) + By_2(x) = Ax \left[1 + \frac{x^2}{2.5} + \frac{x^4}{2.4.3.9} + \dots \right] + Bx^{1/2} \left[1 + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.4.3.7} + \dots \right] \quad (\text{vii})$$

حيث ادمج المعامل Q_0 في الثابتين الاختياريين B, A ويكون هذا الحل متقارب من اجل جميع قيم حيث $|x| > 0$ لان $R_c = \infty$.

مثال -22- الحالة الثانية :-

حل على هيئة متسلسلة كل من المعادلات التفاضلية التالية حول $x = 0$:

$$x^2 y'' + x(1-x)y' - y = 0 \quad -1-$$

$$4x^2 y'' + 2x(2+x)y' + (3x-1)y = 0 \quad -2-$$

الحل :-

واضح أن $x = 0$ نقطة متفردة منتظمة لكل من المعادلتين السابقتين وبالتالي نفرض
حلا من الصورة :-
$$y(x) = x^\alpha \sum Q_n x^n$$

$$y' = \sum (n + \alpha) Q_n x^{n+\alpha-1} \quad , \quad y'' = \sum (n + \alpha)(n + \alpha - 1) Q_n x^{n+\alpha-2}$$

1- بالتعويض عن y, y', y'' في المعادلة المعطاة وتجميع حدود قوي x المتشابهة
والقسمة على x^α نجد أن :-

$$\sum [(n + \alpha)(n + \alpha - 1) + (n + \alpha) - 1] Q_n x^n - \sum (n + \alpha) Q_n x^{n+1} = 0$$

بمساواة معامل أدنى قوة (x^0) بالصفر على المعادلة الآسية :

$$[\alpha(\alpha - 1) + \alpha - 1] Q_0 = 0 \quad , \quad Q_0 \neq 0 \Rightarrow \alpha^2 - 1 = 0$$

$$\alpha_1 = 1 \quad , \quad \alpha_2 = -1 \quad : \text{ أي}$$

وهو عدد صحيح موجب $\alpha_1 - \alpha_2 = 2 = \text{Positive integer}$

لذلك نحسب أولاً $y(x, \alpha)$ حيث نرجئ إلى حين التعويض بجذور α . بمساواة
معامل x^n بالصفر نحصل على الصيغة التكرارية :

$$Q_n = \frac{1}{n + \alpha + 1} Q_{n-1}$$

إذن :

$$Q_1 = \frac{1}{\alpha + 2} Q_0 \quad , \quad Q_2 = \frac{1}{(\alpha + 3)(\alpha + 1)} Q_0, \quad Q_3 = \frac{1}{(\alpha + 4)(\alpha + 3)(\alpha + 2)} Q_0, \dots$$

ومنه تكون الدالة :-

$$y(x, \alpha) = x^\alpha \sum_n a_n x^n = a_0 x^\alpha \left[1 + \frac{x}{\alpha+2} + \frac{x^2}{(\alpha+2)(\alpha+3)} + \dots \right]$$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y(x, \alpha) \Big|_{\alpha=1} = x \left[1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3.4} + \frac{x^3}{3.4.5} + \dots \right] \\ &= 2x \left[\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \dots \right] \\ &= \frac{2}{x} [e^x - x - 1] \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y(x, \alpha) \Big|_{\alpha=1} = \frac{1}{x} \left[1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{x} \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right] = \frac{1}{x} e^x \end{aligned}$$

وواضح انه لا توجد مشكلة في حساب $y_2(x)$ على نمط $y_1(x)$ ويكون الحل العام

$$y(x) = \frac{2A_1}{x} (e^x - x - 1) + \frac{A_2}{x} e^x \quad \text{من الصورة}$$

والذي يمكن وضعه على الصورة :-

$$y(x) = \frac{1}{x} [A_3 e^x + A_4 (x+1)]$$

2- نقوم بنفس الخطوات بالنسبة للمعادلة الثانية فنحصل على :-

$$\sum \{4(n+\alpha)(n+\alpha-1) + 4(n+\alpha) - 1\} a_n x^n + \sum \{2(n+\alpha) + 3\} a_n x^{n+1} = 0$$

بمساواة معامل أدني قوة (x^0) بالصفر نحصل على المعادلة الآسية :-

$$[4\alpha(\alpha-1)+4\alpha-1]a_0=0, a_0 \neq 0$$

$$4\alpha^2-1=0 \Rightarrow \alpha_1=\frac{1}{2}, \alpha_2=-\frac{1}{2}$$

ويكون لدينا عدد صحيح موجب $\delta = \alpha_1 - \alpha_2 = 1$

إذن نحن بصدد الحالة الثانية أيضا .

بمساواة معامل x^0 بالصفر نحصل على الصيغة التكرارية :-

$$a_n = -\frac{2(n+\alpha)+1}{4(n+\alpha)^2-1} a_{n-1} = -\frac{1}{2(n+\alpha)} a_{n-1}$$

إذن :

$$a_1 = -\frac{1}{2(\alpha+1)-1} a_0 = -\frac{1}{2\alpha+1} a_0$$

$$a_2 = -\frac{1}{2(\alpha+2)-1} a_1 = \frac{1}{(2\alpha+3)(2\alpha+1)} a_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{2(\alpha+3)-1} a_2 = -\frac{1}{(2\alpha+5)(2\alpha+3)(2\alpha+1)} a_0$$

وهكذا . وعليه يكون :

$$y(x, \alpha) = a_0 x^\alpha \left[1 - \frac{x}{2\alpha+1} + \frac{x^2}{(2\alpha+3)(2\alpha+1)} - \dots \right]$$

والحل الأول $y_1(x)$ يقابل $\alpha = \frac{1}{2}$ نأخذ $a_0 = 1$

$$y_1(x) = y(x, \alpha) \Big|_{\alpha=\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2.4} - \frac{x^3}{2.4.6} + \dots \right]$$

هنا لا يمكن الحصول على $y_2(x)$ بنفس الطريقة . لأنه هناك صعوبة في معامل x حيث يصبح لانهاثيا لو وضعنا $\alpha = -\frac{1}{2}$ وللتغلب على هذه الصعوبة نلجأ إلى

الطريقة التالية :-

نضرب $y(x, \alpha)$ في $(\alpha - \alpha_2)$ ثم نوجد قيمة المشتقة الجزئية لحاصل الضرب بالنسبة إلى α فيكون ذلك هو الحل الثاني $y_2(x)$ عندما $\alpha = \alpha_2$

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [(\alpha - \alpha_2)y(x, \alpha)]_{\alpha=\alpha_2} \quad \text{أي أن :}$$

كما يمكن فرض الحل الثاني من الصورة التالية :-

$$y_2(x) = y_1(x)g \ln x + x^{\alpha_2} \sum \bar{a}_n x^n \quad (I)$$

حيث المعاملات \bar{a}_n والثابت g تعتمد على طبيعة المعادلة التفاضلية المعطاة . ولتعينهم نعوض بهذه الصورة في المعادلة التفاضلية .

لنحسب أولاً لدالة :-

$$\begin{aligned} (\alpha - \alpha_2)y(x, \alpha) &= \frac{1}{2}(2\alpha + 1)y(x, \alpha) \\ &= \frac{1}{2}a_0 \left[(2\alpha + 1)x^\alpha - x^{\alpha+1} + \frac{x^{\alpha+2}}{2\alpha + 3} - \frac{x^{\alpha+3}}{(2\alpha + 5)(2\alpha + 3)} + \dots \right] \end{aligned}$$

وواضح أننا تخلصنا من العامل المربك $(2\alpha + 1)$ من المقام . وبالتالي :-

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\left(\alpha + \frac{1}{2} \right) y(x, \alpha) \right] = \frac{1}{2} a_0 \left[2x^\alpha + (2\alpha + 1)x \ln x - x^{\alpha+1} \ln x \right]$$

$$- \frac{2}{(2\alpha + 3)^2} x^{\alpha+2} + \frac{1}{2\alpha + 3} x^{\alpha+2} \ln x$$

$$+ \frac{8(\alpha + 2)}{(2\alpha + 5)^2 (2\alpha + 3)^2} x^{\alpha+3} - \frac{1}{(2\alpha + 5)(2\alpha + 3)} x^{\alpha+3} \ln x \dots \left. \right]$$

بوضع $\alpha = -\frac{1}{2}$ نحصل على $y_2(x)$ على الصورة :

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\left(\alpha + \frac{1}{2} \right) y(x, \alpha) \right]_{\alpha = -\frac{1}{2}} = a_0 x^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{3}{32} x^3 - \dots \right]$$

$$- \frac{1}{2} a_0 x^{\frac{1}{2}} \ln x \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2.4} x^2 \dots \right]$$

بأخذ $a_0 = 1$ نجد أن

$$y_2(x) = -\frac{1}{2} (\ln x) y_1(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} \left[1 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{3}{3.2} x^3 \dots \right]$$

ويكون الحل العام للعادلة المعطاة هو :-

$$y(x) = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) = \left[A_1 - \frac{1}{2} A_2 \ln x \right] \sqrt{x} \left[1 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2.4} x^2 - \dots \right]$$

$$+ \frac{A_2}{\sqrt{x}} \left[1 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{3}{32} x^3 - \dots \right]$$

مثال -23- الحالة الثالثة :-

حل على هيئة متسلسلة كل من المعادلات التالية :-

$$x^2 y'' - xy' + y = 0 \quad -1$$

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0 \quad -2$$

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad -3$$

الحل :-

$$P(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow xP(x) = -1 \Rightarrow \rho_0 = 1, \rho_n = 0 : n \geq 1$$

$$Q(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 Q(x) = 1 \Rightarrow q_0 = 1, q_n = 0 : n \geq 1$$

واضح أن $x=0$ هي نقطة منفردة منتظمة ولا توجد نقطة منفردة محددة أخرى وبالتالي يمكن الحصول على حل متسلسلة يصلح لجميع قيم $|x| > 0$ على الصورة:-

$$y(x) = x^\alpha \sum a_n x^n = \sum a_n x^{n+\alpha}, a_0 \neq 0 \quad (i)$$

بالتعويض عن y ومشتقاتها في المعادلة قيد الحل نحصل على :-

$$x^2 \sum (n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha-2} - x \sum (n+\alpha)a_n x^{n+\alpha-1} + \sum a_n x^{n+\alpha} = 0$$

$$\sum [(n+\alpha)(n+\alpha-1) - (n+\alpha) + 1] a_n x^{n+\alpha} = 0 \quad (ii) \quad \text{أو}$$

بمساواة معامل ادني قوة بالصفر نحصل على المعادلة الآسية :-

$$[\alpha(\alpha-1) - \alpha + 1] a_0 = 0, \quad a_0 \neq 0$$

أي أن الجذرين الآسين متساويان . وبالتالي نؤجل إلى حين مساواة معامل أدنى قوة بالصفر . ونبدأ بإيجاد الصيغة التكرارية بمساواة معامل x^n بالصفر :

$$[(n+\alpha)(n+\alpha-1)-(n+\alpha)+1]a_n = 0 \quad (iv)$$

$$(n+\alpha-1)^2 a_n = 0 \quad , n \geq 0 \quad \text{أو}$$

وواضح أن جميع المعاملات a_n محدودة من أجل $n \geq 1$. نأخذ $a_0 = 1$ وعلى ذلك يكون الحل هو :-

$$y(x, \alpha) = a_0 x^\alpha = x^\alpha$$

نحصل على الحل الأول بوضع $\alpha = 1$

$$y_1(x) = y(x, \alpha) \Big|_{\alpha=1} = x$$

للحصول على الحل الثاني نفاضل (v) بالنسبة إلى α ثم نضع $\alpha = 1$

$$y_2(x) = \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=1} = x^\alpha \ln|x| \Big|_{\alpha=1} = x \ln|x|$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة من الصورة :-

$$y(x) = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) = A_1 x + A_2 x \ln|x|$$

ملاحظات :-

أ- يمكن أيضا فرض الحل الثاني من الصورة :-

$$y_2(x) = x \ln x + \sum \overline{a_n} x^{n+\alpha}$$

ثم بالتعويض عنه في المعادلة التفاضلية يمكن تعيين المعاملات $\overline{a_n}$

ب- يمكن أيضا الحصول على الحل الثاني باستعمال طريقة تخفيض المرتبة :

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0 \quad -2$$

$$P(x) = \frac{3x-1}{x(x-1)}, \quad Q(x) = \frac{1}{x(x-1)}$$

حيث $xP(x)$ و $x^2Q(x)$ دالتان تحليليتان إذن فالنقطة $x_0 = 0$ هي نقطة مفردة منتظمة . ويمكن الحصول على الحل على هيئة متسلسلة حول $x_0 = 0$ ويكون على الصورة :-

$$y(x) = \sum a_n x^{n+\alpha}, \quad 0 < |x| < 1$$

بالتعويض عن $y(x)$ ومشتقاتها في المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$(x^2 - x) \sum (n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha-2} + (3x-1) \sum (n+\alpha)a_n x^{n+\alpha-2} + \sum a_n x^{n+\alpha} = 0$$

بعد جمع الحدود المتشابهة والقسمة على x^α نجد :

$$\sum [(n+\alpha)(n+\alpha-1) + 3(n+\alpha) + 1] a_n x^n - \sum [(n+\alpha)(n+\alpha-1) + (n+\alpha)] a_n x^{n-1} = 0$$

بمساواة معامل أدنى قوة (x^{-1}) بالصفر (بوضع $n=0$ في المجموع الثاني) نحصل على :

$$[\alpha(\alpha-1) + \alpha] a_0 = 0, \quad a_0 \neq 0$$

$$\alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \text{إذن}$$

أي أن الجذرين الآسين متساويان . وبالتالي نرجئ إلى حين مساواة معامل أدنى قوة بالصفر وبدلاً من ذلك نوجد الصيغة التكرارية . نساوي معامل x^n بالصفر وذلك بعد تغيير الدليل في المجموع الثاني :

$$[(n+\infty)(n+\infty-1)+3(n+\infty)+1]a_n - [(n+\infty-1)(n+\infty)+(n+\infty+1)]a_{n+1} = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+\infty)(n+\infty+2)+1}{(n+\infty+1)^2} a_n = a_n \quad \text{إن}$$

أي أن جميع المعاملات متساوية وتساوي a_0 . بأخذ $a_0 = 1$ يكون :

$$y(x, \infty) = x^\infty \sum a_n x^n = x^\infty [1 + x + x^2 + \dots]$$

$$y(x, \infty) = x^\infty \frac{1}{1-x}, \quad 0 < |x| < 1 \quad \text{أو}$$

للحصول على الحل الأول $y_1(x)$ نضع $\infty = 0$ في عبارة $y(x, \infty)$

$$y_1(x) = y(x, \infty)|_{\infty=0} = \frac{1}{1-x}$$

للحصول على الحل الثاني $y_2(x)$ نفاضل $y(x, \infty)$ جزئياً بالنسبة إلى ∞ ثم نضع

$\infty = 0$:

$$y_2(x) = \frac{\partial y(x, \infty)}{\partial \infty} \Big|_{\infty=0} = \frac{x^\infty}{1-x} \ln x \Big|_{\infty=0} \frac{\ln x}{1-x}$$

ويكون الحل العام من الصورة :

$$y(x) = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) = \frac{1}{1-x} [A_1 + A_2 \ln x], \quad 0 < |x| < 1$$

و A_1, A_2 ثابتان اختياريان .

$$-3 \text{ لدينا } xy'' + y' + xy = 0$$

$$P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = 1$$

واضح أن $x_0 = 0$ نقطة متفردة منتظمة ولا توجد نقاط متفردة أخرى محدودة وعلى ذلك يمكن الحصول على متسلسلة الحل حول $x_0 = 0$ التي تتقارب من أجل $|x| > 0$:

$$y(x) = x^\alpha \sum a_n x^n = \sum a_n x^{n+\alpha}$$

بالتعويض من $y(x)$ ومشتقها في المعادلة قيد الحل وتجميع الحدود المتشابهة والقسمة على x^α نحصل على :

$$\sum [(n+\alpha)(n+\alpha-1) + (n+\alpha)] a_n x^{n-1} + \sum a_n x^{n+1} = 0$$

بمساواة معامل أدنى قوة (x^{-1}) بالصفر وذلك بوضع $n=0$ في المجموع الأول نحصل على المعادلة الآتية :

$$[\alpha(\alpha-1) + \alpha] a_0 = 0, \quad a_0 \neq 0$$

$$\alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \text{أو}$$

أي أن هناك جذراً مزدوجاً . نرجئ إلى حين مساواة معامل أدنى قوة بالصفر . وبدلاً من ذلك نوجد الصيغة التكرارية . بمساواة معامل x^n بالصفر وذلك بعد تغيير الدليل في المجموع الأول والمجموع الثاني فنحصل على :

$$[(n+\alpha+1)(n+\alpha) + (n+\alpha+1)] a_{n+1} + a_{n-1} = 0$$

أو

$$a_{n+1} = -\frac{1}{(n+\alpha+1)^2} a_{n-1} \Leftrightarrow a_n = -\frac{1}{(n+\alpha)^2} a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

ومن هذه الصيغة التكرارية نحصل على a_6, a_4, a_2, \dots بدلالة a_0 بينما a_7, a_5, a_3, \dots بدلالة a_1 . لتعيين a_1 نساوي معامل (x^0) بالصفر فنجد :

$$[\alpha(\alpha+1)+\alpha+1]a_1 = 0$$

والمقدار الذي هو بين قوسين لا يعدم من أجل $\alpha=0$ وبالتالي يكون $a_1 = 0$ ومنه تكون جميع المعاملات ذات الدليل الفردي معدومة .

إذن :

$$a_{2n} = -\frac{1}{(2n+\alpha)^2} a_{2n-2} = (-1)^n \frac{1}{(2n+\alpha)^2(2n+\alpha-2)^2 \dots (2+\alpha)^2} a_0$$

ومنه يكون :

$$y(x, \alpha) = x^\alpha \sum a_n x^n = a_0 x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+\alpha)^2(2n+\alpha-2)^2 \dots (2+\alpha)^2} x^{2n}$$
$$= a_0 x^\alpha \left[1 - \frac{x^2}{(2+\alpha)^2} + \frac{x^4}{(2+\alpha)^2(4+\alpha)^2} - \frac{x^6}{(2+\alpha)^2(4+\alpha)^2(6+\alpha)^2} + \dots \right]$$

بأخذ $a_0 = 1$ يكون الحل الأول :

$$y_1(x) = y(x, \alpha)|_{\alpha=0} = \left[1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right]$$

وللحصول على الحل الثاني تفاضل عبارة $y(x, \alpha)$ جزئياً بالنسبة إلى α ثم نضع

: $\alpha = 0$

$$\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} = a_0 \left[x^\alpha \ln x - \left\{ \frac{x^{\alpha+2} \ln x}{(2+\alpha)^2} - \frac{2x^{\alpha+2}}{(2+\alpha)^3} \right\} + \dots \right]$$

$$y_2(x) = \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \ln x \left[1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right]$$

$$+ \left[\frac{x^2}{2^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} - \dots \right]$$

ويكون الحل العام من الصورة :

$$y(x) = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x)$$

حيث A_2, A_1 ثابتان اختياريان .

IX-4. متسلسلة الحل حول نقطة منفردة عند اللانهاية :

Series Solution About an Infinite Regular Singular Point:

يمكن الحصول على متسلسلة الحل بجوار نقطة منفردة منتظمة عند اللانهاية للمعادلة التفاضلية التالية :

$$(13) \quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

باستخدام التعويض $z = \frac{1}{x}$ تصبح النقطة المنفردة عند اللانهاية هي نقطة الأصل .

ومنه يكون :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = -z^2 \frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = z^4 \frac{d^2 y}{dz^2} + 2z^3 \frac{dy}{dz}$$

و

وتصبح المعادلة التفاضلية من الصورة :

$$(14) \quad z^4 \frac{d^2 y}{dz^2} + \left[2z^3 - z^2 P\left(\frac{1}{z}\right) \right] \frac{dy}{dz} + Q\left(\frac{1}{z}\right)y = 0$$

والتي يمكن حلها بطريقة متسلسلة فروبيثيوس حول النقطة $z = 0$ ثم نعوض في عبارة الحل عن $z = \frac{1}{x}$ لنحصل على $y(x)$ من اجل قيم x الكبيرة .

مثال -24-

حل المعادلة التفاضلية التالية بالقرب من $x = \infty$

$$2x^3 y'' + x^2 y' + y = 0 \quad (i)$$

الحل :

$$z = \frac{1}{x} \quad \text{باستخدام التعويض}$$

تصبح المعادلة التفاضلية من الصورة :

$$2z \frac{d^2 y}{dz^2} + 3 \frac{dy}{dz} + y = 0 \quad (ii)$$

وواضح أن $z = 0$ نقطة مفردة منتظمة .

وبالتالي نفرض متسلسلة الحل من الصورة :

$$y = \sum a_n z^{n+\alpha} \quad , \quad a_0 \neq 0 \quad (iii)$$

التي تتقارب من اجل $|z| > 0$

بالتعويض عن y ومشتقاتها في المعادلة التفاضلية (ii) نجد :

$$\sum (n + \alpha)(2n + 2\alpha + 1)a_n z^{n+\alpha-1} + \sum a_n z^n = 0$$

بمساواة معامل أدنى قوة ($z^{\alpha-1}$) بالصفر نحصل على المعادلة الآتية :

$$\alpha(2\alpha + 1)a_0 = 0 \quad , \quad a_0 \neq 0$$

$$\alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{1}{2} = \text{noninteger} \quad \text{ومنه}$$

إذن نحن بصدد الحالة الأولى :

أما الصيغة التكرارية فنحصل عليها بمساواة معامل ($x^{n+\alpha}$) بالصفر أي :

$$a_{n+1} = -\frac{1}{(n + \alpha + 1)(2n + 2\alpha + 2z)} a_n \quad , \quad n \geq 0$$

من أجل $\alpha = 0$ نحصل على :

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{(n+1)(2n+3)}$$

$$a_{n+1} = (-1)^n \frac{a_0}{(n+1)!(2n+3)(2n+1)\dots(3)}$$

ويكون الحل الأول : ($a_0 = 1$)

$$y_1(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!(3)(5)\dots(2n+1)}$$

ومن أجل $\alpha = -\frac{1}{2}$ نحصل على :

$$a_{n+1} = -\frac{an}{(n+1)(2n+1)} = (-1)^n \frac{a_0}{(n+1)!(3)(5)\dots(2n+1)}$$

ويكون الحل الثاني :

$$y_2(z) = z^{-1/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!(3)(5)\dots(2n+1)} \right]$$

وبالتالي يكون الحل العام بعد وضع $z = \frac{1}{x}$ من الصورة :

$$y(x) = A_1 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!3,5,\dots(2n+1)} \left(\frac{1}{x}\right)^n \right] +$$

$$+ A_2 x^{1/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!3,5,\dots(2n+1)} \left(\frac{1}{x}\right)^n \right]$$

وهذه المتسلسلة متقاربة من أجل $x > 0$.

تمارين

I- جد نصف قطر تقارب المتسلسلات التالية :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} , \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

II- جد متسلسلة تيلور حول النقطة x_0 للدوال التالية :

$$e^x , \quad x_0 = 0 \quad (2) \qquad \sin x , \quad x_0 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{1+x} , \quad x_0 = 0 \quad (4) \qquad x , \quad x_0 = 1 \quad (3)$$

III- جد المشتقة الأولى y' والمشتقة الثانية y'' للمتسلسلة :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

IV- تحقق مما يلي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x-1)^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_{n+m} x^{n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m+k} x^{n+p+k}$$

V- جد المعاملات a_n في المعادلة :

$$\sum_{n=1} na_n x^{n-1} + 2 \sum a_n x^n = 0$$

ثم جد المتسلسلة $\sum a_n x^n$

VI- جد متسلسلة الحل في قوى $(x - x_0)$ للمعادلات التفاضلية التالية :

$$y'' - y = 0 , \quad x_0 = 0 \quad -1$$

$$y'' - xy' - y = 0 , \quad x_0 = 0 \quad -2$$

$$y'' - xy' - y = 0 , \quad x_0 = 1 \quad -3$$

$$y'' + k^2 x^2 y = 0 , \quad x_0 = 0 , \quad k = \text{ثابت} \quad -4$$

VII- احسب $y''(x_0)$, $y'''(x_0)$, $y^{(4)}(x_0)$ إذا كانت $y(x)$ هي حل مسألة القيم الحدية التالية :

$$y'' + xy' + y = 0 , \quad y(0) = 1 , \quad y'(0) = 0 \quad -1$$

$$y'' + (\sin x)y' + (\cos x)y = 0 , \quad y(0) = 0 , \quad y'(0) = 1 \quad -2$$

$$x^2 y'' + (1+x)y' + 3(\ln x)y = 0 , \quad y(1) = 2 , \quad y'(1) = 0 \quad -3$$

VIII- اثبت أن لكل من المعادلات التفاضلية التالية نقطة مفردة منتظمة عند $x_0 = 0$. ثم جد المعادلة الآسية ؛ ثم جذري هذه المعادلة ثم الصيغة التكرارية ، ثم جد متسلسلة الحل المرافق لأكبر جذر للمعادلة الآسية . وإذا كان الجذران مختلفين والفرق بينهما عدد غير صحيح . فجد متسلسلة الحل المرافقة للجذر الثاني للمعادلة الآسية :

$$2xy'' + y + xy = 0 \quad -1$$

$$xy'' + y = 0 \quad -2$$

$$3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0 \quad -3$$

IX- اثبت أن لكل من المعادلات التفاضلية التالية نقطة مفردة منتظمة عند $x_0 = 0$ ثم جد جذري المعادلة الآسية ثم جد الحلين المستقلين خطياً من أجل $x > 0$:

$$x^2y'' + 2xy' + xy = 0 \quad -1$$

$$x^2y'' + 3xy' + (1+x)y = 0 \quad -2$$

$$x^2y'' + xy' + 2xy = 0 \quad -3$$

$$x^2y'' + 4xy' + (2+x)y = 0 \quad -4$$

X- جد على صورة متسلسلات بجوار النقطة اللانهائية $x = \infty$ حلول المعادلات التفاضلية التالية :

$$x^2(x^2 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} + x(2x^2 - 3)\frac{dy}{dx} - y = 0 \quad -1$$

$$x^2(x+2)\frac{d^2y}{dx^2} - x(x-4)\frac{dy}{dx} - 4y = 0 \quad -2$$

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{3dy}{dx} + (1-n^2x^2)y = 0 \quad -3$$

$$x^2(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + x[\alpha + \beta - 1 + (1-\theta)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0 \quad -4$$

-XI بين أن $x = \infty$ هي نقطة عادية للمعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = f(x)$$

إذا كانت الدوال $x^4f(x)$, $x^4a_2(x)$, $x^2a_1(x) - 2x$ تحليلية عند $x = \infty$.

-XII بين أن $x = \infty$ هي نقطة منفردة منتظمة للمعادلة التفاضلية التالية :

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

إذا كانت الدالتان $x^2a_2(x)$, $xa_1(x)$ تحليليتان بجوار $x = \infty$.

الفصل العاشر

متسلسلات الحلول لبعض المعادلات التفاضلية الخطية الشهيرة

Series Solutions of some Famous Linear

Differential Equations

الفصل العاشر

متسلسلات الحل لبعض المعادلات التفاضلية الخطية الشهيرة

Series Solutions of some Famous Linear Differential Equations

Legendre's Equation

-1-x معادلة ليجندر

معادلة ليجندر التفاضلية هي معادلة من الصورة :

$$(1) \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

ثابت $\alpha =$

$$P(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad Q(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2} \quad \text{حيث :}$$

واضح أن كل $P(x)$ ، $Q(x)$ غير معرفة عند $x = \pm 1$ ولكن $(x \pm 1)P(x)$ و $(x \pm 1)^2 Q(x)$ تحليليتان عند هاتين النقطتين، ولهذا $x = \pm 1$ نقطتان منفردتان منتظمتان. أما النقطة $x = 0$ فهي نقطة عادية للمعادلة. والمسافة بين هذه النقطة العادية $x = 0$ وأقرب نقطة منفردة $x = \pm 1$ هي 1؛ إذن فنصف قطر تقارب متسلسلة الحل بجوار $x = 0$ هو $R_c = 1$ أي أن المتسلسلة متقاربة من أجل $|x| < 1$.

ويجب اعتبار $\alpha > -1$ لأن إذا كانت $\alpha \leq -1$ فإنه يمكن كتابتها من الصورة

$$\alpha = -(1 + \delta) \quad \text{حيث } \delta > 0 \text{ وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد :}$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \delta(\delta+1)y = 0$$

وهي نفس صورة معادلة ليجندر

مسألة -1-

1- برهن أن متسلسلتي الحلين المستقلين خطياً لمعادلة ليجندر من أجل $|x| < 1$ هما:

$$(2) \quad y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\dots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\dots(\alpha+2m-1)}{(2m)!} x^{2m}$$

$$(3) \quad y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} (\alpha-1)(\alpha-3)\dots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\dots(\alpha+2m) x^{2m+1}$$

2- برهن أنه إذا كانت α معدومة أو عدد صحيح زوجي موجب $2n$ فإن المتسلسلة y_1 تختزل إلى كثير حدود من الدرجة $2n$ ؛ يحتوي على القوى الزوجية لـ x فقط. ثم عين كثيرات الحدود المرفقة لـ $\alpha = 0, 2, 4$.

3- برهن أنه إذا كانت α عدد صحيح فردي موجب $\alpha = 2n+1$ فإن المتسلسلة y_2 تختزل إلى كثير حدود من الدرجة $2n+1$ يحتوي على القوى الفردية لـ x . ثم عين كثيرات الحدود المرفقة لـ $\alpha = 1, 3, 5$.

4- كثير حدود ليجندر P_n هو حل لمعادلة ليجندر من أجل $\alpha = n$ والذي يحقق $P_n(1) = 1$.

باستعمال نتائج السؤالين السابقين نجد: $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$

5- لنعتبر معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية (r, θ, ϕ) :

$$(4) \quad \frac{d^2 f(\phi)}{d\phi^2} + c \tan \phi \frac{df(\phi)}{d\phi} + n(n+1)F(\phi) = 0$$

حيث $0 < \phi < \pi$ و n عدد صحيح.

أثبت باستخدام التعويض لـ $x = \cos \phi$ و $y = F(\cos^{-1}(x))$ أن المعادلة (4) تصبح من صورة معادلة ليجندر (1) من أجل $\alpha = x$

6- أستنتج أن كثير حدود ليجندر $P_n(x)$ يمكن أن يوضع على الصورة :

$$(5) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

7- أثبت أن $\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0$ إذا كانت $n \neq m$

8- إذا كان لدينا $f(x) = \sum a_k P_k(x)$ ؛ فأثبت أن :

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx$$

الحل :-

1- نفرض حلاً من الصورة $y = \sum a_n x^n$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية (1) وبعد تجميع الحدود المتشابهة نجد :

$$\sum [-n(n-1) - 2n + \alpha(\alpha+1)] a_n x^n + \sum n(n-1) a_n x^{n-2} = 0$$

ولحساب معامل (x^n) نغير في المجموع الثاني الدليل $n \rightarrow n+2$ فنجد :

$$\sum [\alpha(\alpha+1) - n(n+1)] a_n x^n + \sum (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n = 0$$

بمساواة معامل (x^n) بالصفر نحصل على الصيغة التكرارية :

$$a_{n+2} = -\frac{\alpha(\alpha+1) - n(n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n = -\frac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n$$

وواضح أن المعاملات ذات الدليل الزوجي a_2, a_4, a_6, \dots تعطى بدلالة المعامل a_0 . كما تعطى المعاملات ذات الدليل الفردي بدلالة المعامل a_1 .

$$a_2 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}a_0$$

$$a_4 = -\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{3.4}a_2 = \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{1.2.3.4}a_0$$

$$a_6 = -\frac{(\alpha-4)(\alpha+5)}{5.6}a_4 = \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{1.2.3.4.5.6}a_0$$

وهكذا من أجل $n = 2m$

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\dots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\dots(\alpha+2m-1)}{(2m)!}a_0$$

وكذلك بالنسبة للمعاملات ذات الدليل الفردي :

$$a_3 = -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{2.3}a_1$$

$$a_5 = -\frac{(\alpha-3)(\alpha+4)}{4.5}a_3 = \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{2.3.4.5}a_1$$

$$a_7 = -\frac{(\alpha-5)(\alpha+6)}{6.7}a_5 = -\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha-5)(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha+6)}{7!}a_1$$

وهكذا من أجل $n = 2m + 1$

$$a_{2m+1} = (-1)^m \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 3) \dots (\alpha - 2m + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 4) \dots (\alpha + 2m)}{(2m + 1)!} a_1$$

ويكون الحل العام من الصورة :

$$y_{(x)} = a_0 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \alpha(\alpha - 2)(\alpha - 4) \dots (\alpha - 2m + 2)(\alpha + 1)(\alpha + 3) \dots (\alpha + 2m - 1) x^{2m} \right]$$

$$+ a_1 \left[x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m + 1)!} (\alpha - 1)(\alpha - 3) \dots (\alpha - 2m + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 4) \dots (\alpha + 2m) x^{2m+1} \right]$$

$$= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

2- إذا كانت $\alpha = 0$ في هذه الحالة تصبح المعادلة من الصورة :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0$$

وتصبح الصيغة التكرارية من الشكل : $a_{n+2} = + \frac{n}{n+2} a_n$

ونلاحظ أن المعاملات ذات الدليل الزوجي معدومة عدا a_0 . فتصبح المتسلسلة $y_1(x)$ عبارة عن كثير حدود من الدرجة صفر .

$$y_1(x) = 1$$

إذا كانت عدد زوجي صحيح $\alpha = 2n$:

نلاحظ من عبارة $y_1(x)$ أن الحدود تصبح معدومة من أجل $m \geq n + 1$ وتكتب في هذه الحالة من الشكل :

$$y_1(n) = 1 + \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m}{(2m)!} \alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\dots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\dots(\alpha+2m-1)x^{2m}$$

وهي عبارة عن كثير حدود من الدرجة $2n$ ويحتوى على القوى الزوجية فقط لـ x

$$y_1(x) = 1 - \frac{2}{2!} \cdot 3 \cdot x^2 = 1 - 3x^2 \quad \text{و} \quad \alpha = 2 \quad \text{فإن} \quad m \leq 1$$

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2!} \cdot 4 \cdot 5x^2 + \frac{1}{4!} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7x^4 \quad \text{و} \quad \alpha = 4 \quad \text{فإن} \quad m \leq 2$$

$$= 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$$

3- إذا كانت عدد فردي صحيح $\alpha = 2n + 1$:

نلاحظ من عبارة $y_2(x)$ أن الحدود تصبح معدومة من أجل $m \geq n + 1$ وتكتب في هذه الحالة من الشكل :

$$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} (\alpha-1)(\alpha-3)\dots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\dots(\alpha+2m)x^{2m+1}$$

وهي عبارة عن كثير حدود من الدرجة $2n+1$ يحتوى على القوى الفردية بالنسبة لـ x .

$$y_2(x) = x \quad \text{في حالة} \quad \alpha = 1 \quad \text{فإن}$$

$$y_2(x) = x - \frac{5}{3}x^3 \quad \text{في حالة} \quad \alpha = 3 \quad \text{فإن}$$

$$y_2(x) = x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5 \quad \text{في حالة} \quad \alpha = 5 \quad \text{فإن}$$

4- نعرف كثير حدود ليجندر بأنه هو حل على صورة كثير حدود لمعادلة ليجندر
 بحيث $\alpha = n$ والذي يحقق الشرط $P_n(1) = 1$ أي انه لا يحتوي على المتسلسلة
 المتباعدة عند $x = 1$ أي :

$$P_n(x) = \begin{cases} a_0 y_1(x) & : \alpha = \text{صفر أو عدد زوجي صحيح} \\ a_1 y_2(x) & : \alpha = \text{عدد فردي صحيح} \end{cases}$$

حيث y_2, y_1 هما عبارة عن كثير حدود كما رأينا في (2و3)

$$y_1(x) = 1 \Rightarrow P_0(n) = a_0 \Rightarrow P_0(x) = 1 \quad : \alpha = 0 \text{ في حالة}$$

$$y_2(x) = x \Rightarrow P_1(x) = a_1 x \Rightarrow P_1(x) = x \quad : \alpha = 1 \text{ في حالة}$$

$$: \alpha = 2 \text{ في حالة}$$

$$y_1(x) = 1 - 3x^2 \Rightarrow P_2(x) = a_0(1 - 3x^2) \Rightarrow P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$: \alpha = 3 \text{ في حالة}$$

$$y_2(x) = x - \frac{5}{3}x^2 \Rightarrow P_3(x) = a_1(x - \frac{5}{3}x^2) \Rightarrow P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^2 - 3x)$$

ويمكن إثبات أن العلاقة العامة هي :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n - 2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

حيث $[n/2]$ برمز لأكبر عدد صحيح أقل أو يساوي $n/2$

ومن ملاحظة عبارة $P_n(x)$ من أجل n زوجي أو فردي يمكن أن نثبت أن
 $P_n(-1) = (-1)^n$. ونترك ذلك للطالب .

5- يلعب كثير حدود ليجنندر دوراً هاماً في الفيزياء الرياضية وعلى سبيل المثال عند حل معادلة لابلاس (معادلة الجهد) في الإحداثيات الكروية نجد المعادلة :

$$\frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} + \cot \varphi \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} + n(n+1)F(\varphi) = 0$$

حيث $0 < \varphi < \pi$ عدد صحيح موجب .

باستخدام التغيير $x = \cos \varphi$ و $y = f(x) = F(\cos^{-1} x)$ نجد :

$$\frac{dF}{d\varphi} = \frac{dFdk}{dx d\varphi} = -y' \cdot \sin \varphi , \quad \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = -y'' \sin^2 \varphi - y' \cos \varphi$$

بالتعويض في المعادلة نحصل على معادلة ليجنندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 , \quad a = n$$

6 - ليكن كثير حدود ليجنندر الملحق المعطى بالعلاقة التالية :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 0!} \frac{d^0}{dx^0} (x^2 - 1)^0 = 1 \quad \text{من أجل } n = 0 \text{ فإن}$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 1!} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = x \quad \text{من أجل } n = 1 \text{ فإن}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^2 = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \quad \text{من أجل } n = 2 \text{ فإن}$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2^3 3!} \frac{d^3}{dx^3} (x^2 - 1)^3 = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \quad \text{من أجل } n = 3 \text{ فإن}$$

إذن نلاحظ أن كثير حدود ليجنדר يمكن أن يوضع على الصورة :

$$P_n(n) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (n^2 - 1)^n$$

ونسمي هذه العبارة بعبارة رودركز (Rodrigues) من أجل n عدد صحيح موجب .

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0 \quad : \text{ لدينا معادلة ليجنדר}$$

ونلاحظ أن الحدين الأولين يمكن كتابتها على الصورة .

$$\left[(1-x^2)y' \right]' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

وفي حالة α عدد صحيح فإن حل هذه المعادلة هو كثير حدود ليجنדר $P_n(n)$

$$\left[(1-x^2)P_n'(x) \right]' = -n(n+1)P_n(x) \quad (i)$$

$$\left[(1-x^2)P_m'(x) \right]' = m(m+1)P_m(x) \quad (ii)$$

بضرب المعادلة الأولى في $P_m(x)$ والثانية في $P_n(x)$ ثم تكامل بالتجزئة فنحصل على :

$$n \neq m \quad \text{إذا كان} \quad \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

ونسمي هذه الخاصية لكثير حدود ليجنדר بخاصية التعامد .

أما إذا كان $m = n$ فإنه يمكن إثبات أن قيمة التكامل هي $2/(2n+1)$

8- ليكن لدينا كثير حدود f في الدرجة n فإنه من الممكن كتابته على صورة توافقية خطية من كثيرات حدود ليجندر : $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ أي :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n Q_k P_k(x)$$

باستخدام نتيجة 7- يمكن تعيين المعاملات Q_k حيث :
نضرب المعادلة السابقة في $P_n(x)$ فنجد :

$$f(x)P_n(x) = \sum_{k=0}^n Q_k P_k(x)P_n(x)$$

$$\int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx = \sum_{k=0}^n Q_k \int_{-1}^1 P_k P_n dx$$

ثم نكامل الطرفين

$$\int_{-1}^1 P_k P_n dx = \frac{2}{(2k+1)} \delta_{nk}$$

وحيث

$$\int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx = \sum_{k=0}^n Q_k \frac{2}{(2k+1)} \delta_{nk} = \frac{2Q_n}{2n+1}$$

إذن

$$Q_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_k(x)dx.$$

أي

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & n = k & \text{إذا كان} \\ 0 & n \neq k & \text{إذا كان} \end{cases}$$

حيث

[Kronecker index] ويدعى بدليل كرونكر

Bessel's Equation

2-x- معادلة بيسل

معادلة بيسل هي معادلة تفاضلية من الصورة :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (i)$$

حيث ν ثابت ، وتسمى أيضاً بمعادلة بيسل من الدرجة ν وواضح أن كل من الدالتين $P(x) = 1/x$ ، $Q(x) = \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}$ غير معروفة عند النقطة $x=0$ ولكن $xP(x)$ ، $x^2Q(x)$ تحليليتان ، إذن فالنقطة $x=0$ نقطة مفردة منتظمة . ولتبسيط المسألة التالية نعتبر الحالة $x > 0$.

مسألة -2-

وجد حل المعادلة بيسل على صورة متسلسلة بجوار النقطة $x=0$ في الحالات التالية:

$$\nu = 0 \quad -1 \quad \nu = 2 \quad \text{نصف عدد صحيح} \quad \nu = -3 \quad \text{عدد صحيح}$$

الحل :-

1- هذه الحالة تمثل حالة تساوي الجذرين . بوضع $\nu = 0$ تصبح المعادلة من

الصورة:

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0 \quad (ii)$$

نفرض الحل على الشكل التالي :- $Q_n \neq 0$ و $y = x^\alpha \sum Q_n x^n$

بالتعويض عن y ومشتقتها في المعادلة (ii) نجد :

$$\sum [(n + \alpha)(n + \alpha - 1) + n + \alpha] Q_n x^{n+\alpha} + \sum Q_n x^{n+\alpha+2} = 0$$

$$\sum (n + \alpha)^2 Q_n x^{n+\alpha} + \sum Q_n x^{n+\alpha} = 0$$

بمساواة معامل أدنى قوة (x^α) بالصفير نحصل على المعادلة الآتية :

$$Q_0 \cdot \alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

أي أن الجذرين الآسيين متساويان وبالتالي نؤجل إلى حين مساواة معامل أدنى قوة بالصفير ونبدأ بإيجاد الصيغة التكرارية بمساواة معامل ($x^{n+\alpha}$) بالصفير بعد تغيير الدليل في المجموع الثاني ، فنحصل على :

$$Q_n(\alpha) = -\frac{1}{(n + \alpha)^2} Q_{n-2} \quad ; \quad n \geq 2$$

وهذه الصيغة التكرارية تعطي Q_2, Q_4, Q_6, \dots بدلالة Q_0 بينما تعطي Q_3, Q_5, Q_7, \dots بدلالة a_1 لمعرفة Q_1 نساوي معامل ($x^{\alpha+1}$) بالصفير فنجد أن :

$$(\alpha + 1)^2 Q_1 = 0$$

والمقدار الذي هو بين قوسين لا يعدم لقيم $\alpha = 0$ وبالتالي يكون $Q_1 = 0$ ويتبع ذلك انعدام كل المعاملات ذات الدليل الفردي وتبقى المعاملات ذات الدليل الزوجي :

$$Q_{2n} = -\frac{1}{(2n + \alpha)^2} Q_{2n-2} = (-1)^n \frac{1}{(2n + \alpha)^2 (2n + \alpha - 2)^2 \dots (2 + \alpha)^2} Q_0$$

وعلى ذلك يكون

$$y(x, \alpha) = x^\alpha \sum Q_n x^n = Q_0 x^\alpha \sum_{n:2,4}^2 \frac{(-1)^n}{(n + \alpha)^2 (n + \alpha - 2)^2 + \dots + (2\alpha)^2} x^n$$

بأخذه $\alpha=0$ يكون الحل الأول :

$$y_1(x) = y(x, \alpha)_{\alpha=0} = Q_0 \left[1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2^4} - \frac{x^6}{2^6 (3 \cdot 2)^2} + \dots \right]$$

$$= Q_0 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} \right] \quad C \quad x > 0$$

وتسمى الدالة التي هي بين قوسين بدالة ببسل ذات المرتبة صفر ويرمز لها بالرمز $J_0(x)$ ذات الصنف الأول . وواضح أن هذه المتسلسلة متقاربة من أجل $x > 0$ وأن $J_0(x)$ دالة تحليلية عند $x=0$. وللحصول على الحل الثاني نفاضل عبارة $y(x, \alpha)$ جزئيا بالنسبة إلى α ثم نضع $\alpha=0$ و $Q_0=1$

$$\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} = Q_0 \left[x^\alpha \ln x - \left\{ \frac{x^{\alpha+2} \ln x}{(2+\alpha)^2} - \frac{2x^{\alpha+2}}{(2+\alpha)^3} \right\} + \dots \right]$$

$$y_2(x) = \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \ln x \left[1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 2^2} + \frac{x^6}{2^6 (3 \cdot 2)^2} + \dots \right]$$

$$+ \left[\frac{x^2}{2^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{x^4}{2^4 \cdot 2^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{x^6}{2^6 (3 \cdot 2)^2} + \dots \right]$$

$$y_2(x) = J_0(x) \cdot \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m}, \quad x > 0 \quad (\text{iv})$$

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \quad \text{حيث}$$

وعوض الدالة y_2 ، نأخذ عموماً الحل الثاني عبارة عن توافقية خطية لـ J_0 ، y_2 .
 ويسمى بدالة بيسل ذات المرتبة صفر وذات الصنف الثاني ويرمز لها بالرمز Y_0 ،
 وفق كوبسن Copson نعرفها كما يلي :

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} [y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)] \quad (v)$$

حيث γ ثابت ويدعى بثابت أولر. ماشروني Euler-Mascheroni والمعرفة فيمايلي:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln(n)) \cong 0.577$$

وبالتعويض عن y_2 في عبارة Y_0 تحصل على :-

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[(\gamma + \ln \frac{x}{2})J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m} (m!)} x^{2m} \right] \quad (vi)$$

ويكون الحل العام لمعادلة بيسل ذات الدرجة صفر من أجل $x > 0$ هو :

$$y(x) = A_1 J_0(x) + A_2 Y_0(x) \quad (vii)$$

ونلاحظ أن: $J_0(x) \rightarrow 1$ عندما $x \rightarrow 0$

و $Y_0(x)$ لا تحتوي على الحد اللوغارتمي المنفرد عند $x = 0$ وتكون من

الصورة $\frac{2}{\pi} \ln x$ عندما $x \rightarrow 0^+$.

وإذا أردنا الحصول على حل معادلة بيسل من الدرجة صفر، المنتهي عند المبدأ والذي نصادفه في معظم الحالات يجب أن نحذف Y_0 من الحل العام.

ملاحظة :

يمكن كتابة معادلة بيسل في الدرجة ν على الصورة :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \quad \text{(viii)}$$

ومن أجل x كبير جدا فإنه واضح أن الحدين $\frac{\nu^2 y}{x^2}$ ، $\frac{y'}{x}$ صغيران جدا ويمكن إهمالهما أمام الحدود الأخرى وتصبح المعادلة في هذه الحالة من الصورة :

$$y'' + y = 0$$

وحلي هذه المعادلة هما $\sin x$ ، $\cos x$ ونستنتج أن كل من J_0, Y_0 من أجل x كبير، دالة جيبية، ويمكن إثبات أن :

$$x \rightarrow \infty \text{ عندما } J_0(n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \pi/4)$$

-2 نصف عدد صحيح $\nu =$:

في هذه الحالة يكون الفرق بين الجذرين الآسيين عددا صحيحا موجبا ويظهر الحد $\ln x$ في الحل الثاني . نضع $\nu = 1/2$ فتصبح المعادلة من الصورة .

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \quad \text{(ix)}$$

بالتعويض عن y ومشتقاتها في هذه المعادلة نحصل على :

$$\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)Q_0 x^\alpha + \left[\left(\alpha + 1\right)^2 - \frac{1}{4}\right]Q_1 x^{\alpha+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(\alpha + n\right)^2 - \frac{1}{4}\right\} Q_n + Q_{n-2} \right\} x^{\alpha+n} = 0$$

جذرا المعادلة الآسية هما : $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ ، $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$ $(\alpha^2 - \frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 1 \text{ و}$$

والفرق بينهما هو عدد صحيح موجب.

بمساواة معامل $x^{n+\alpha}$ بالصفر نحصل على الصيغة التكرارية:

$$Q_n = -\frac{1}{(n+\alpha)^2 - \frac{1}{4}} Q_{n-2} , n \geq 2$$

وبمساواة معامل $x^{\alpha+1}$ بالصفر نجد أن $Q_1 = 0$ $(\alpha+1)^2 - \frac{1}{4}$

وبما أن المقدار بين قوسين لا يندم من أجل قيمة $\alpha = 1/2$ فإن $Q_1 = 0$

ويتبع ذلك أن $Q_3 = Q_5 = \dots = Q_{2n+1} = \dots = 0$

والمعاملات ذات الدليل الزوجي تعطى بالعلاقة

$$Q_n = -\frac{Q_{n-2}}{n(n+1)} \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

بوضع $n = 2m$ نجد:

$$Q_{2m} = -\frac{Q_{2m-2}}{2m(2m+1)} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$Q_2 = -\frac{Q_0}{2.3} = -\frac{Q_0}{3!} \quad \text{إن}$$

$$Q_4 = -\frac{Q_2}{4.5} = \frac{Q_0}{5!}$$

$$Q_{2m} = \frac{(-1)^m Q_0}{(2m+1)!}$$

ويكون الحل الأول : $(Q_0 = 1)$

$$y_1(x) = x^x \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!} \right] \quad (\text{x})$$

$$y_1(x) = x^{-x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad , \quad x > 0 \quad \text{أو أيضا}$$

ومتسلسلة القوة في هذه العبارة هي متسلسلة تيلور لدالة $\sin x$. إذن الحل الأول لمعادلة بيسل ذات الدرجة نصف هي $x^{-1/2} \sin x$ وتعرف دالة بيسل ذات الرتبة

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x \quad , \quad x > 0 \quad : \quad \text{نصف وذات الصنف الأول بـ}$$

إذا أخذنا $\alpha = -1/2$ فإن معامل كل من $Q_0 x^\alpha$ و $Q_1 x^{\alpha+1}$ يكون معدوماً ولهذا نعتبر Q_0 ، Q_1 ثابتين اختياريين . وبالتالي يمكن تعيين المعاملات Q_2, Q_4, Q_6, \dots بدلالة Q_0 والمعاملات Q_3, Q_5, Q_7, \dots بدلالة المعامل به Q_1 .
لدينا

$$Q_n = -\frac{1}{(n+\alpha)^2 - 1/4} Q_{n-2}$$

من أجل $\alpha = -1/2$ نجد

$$Q_n = -\frac{1}{n(n-1)} Q_{n-2}$$

$$Q_{2n+1} = \frac{(-1)^n Q_0}{(2n)!} \quad \text{ومنه } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$Q_{2n} = \frac{(-1)^n Q_1}{(2n+1)!} \quad \text{و}$$

$$y_2(x) = x^{-1/2} \left[Q_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + Q_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \quad \text{إذن}$$

$$= Q_0 \frac{\cos x}{x^{1/2}} + Q_1 \frac{\sin x}{x} \quad \text{(xii)}$$

ويكون الحل الثاني المستقل خطياً لمعادلة ببسل ذات الدرجة نصف كما يلي :

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x \quad \text{(xiii)}$$

ويكون الحل العام :

$$y(x) = A_1 J_{1/2}(x) + A_2 J_{-1/2}(x) \quad \text{(xiv)}$$

3- عدد صحيح = 3

في هذه الحالة ، يكون الفرق بين الجذرين الآسيين عدداً صحيحاً موجباً ، ولكن الحل الثاني يحتوى على الحد اللوغارتمي : بوضع $\nu = 1$ تصبح المعادلة من الصورة :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0 \quad \text{(xv)}$$

بالتعويض عن y ومشتقتها في المعادلة (xv) نجد :

$$(\alpha^2 - 1)Q_0 x^\alpha + [(\alpha+1)^2 - 1]Q_1 x^{\alpha+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \{(\alpha+n)^2 - 1\} [Q_n + Q_{n-2}] x^{\alpha+n} = 0$$

المعادلة الآسية نحصل عليها بمساواة معامل أدنى قوة (x^α) بالصفر حيث $Q_0 \neq 0$

$$\alpha_1 = 1 , \quad \alpha_2 = -1$$

حيث عدد صحيح $\alpha_1 - \alpha_2 = 2$ الصيغة التكرارية نحصل عليها بمساواة معامل $(x^{\alpha+n})$ بالصفر.

$$[(n+\alpha)^2 - 1]Q_n(\alpha) = -Q_{n-2}(\alpha) \quad n \geq 0$$

أو أيضاً :

$$Q_n(\alpha) = -\frac{1}{(n+\alpha)^2 - 1} Q_{n-2}(\alpha)$$

وبمساواة معامل $(x^{\alpha+1})$ بالصفر نجد أن :

$$[(\alpha+1)^2 - 1]Q_1 = 0$$

وحيث أن المقدار بين قوسين لا يندم من أجل قيم $\alpha = 1, -1$.

إذن $Q_1 = 0$

ويتبع هذا كون المعاملات $[Q_3, Q_5, \dots, Q_{2n+1}, \dots]$ معدومة ومن أجل القيم

الزوجية لـ n ($n = 2m$) تصبح الصيغة التكرارية كما يلي :

$$Q_{2m} = -\frac{1}{(2m+\alpha)^2 - 1} Q_{2m-2} \quad , \quad m = 1, 2, \dots$$

$$Q_2 = -\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+3)} Q_0$$

$$Q_4 = -\frac{1}{(\alpha+3)(\alpha+5)} Q_2 = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+3)^2(\alpha+5)} Q_0$$

$$Q_6 = -\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+3)^2(\alpha+5)^2(\alpha+7)} Q_0$$

ويكون الحل :

$$y(x, \alpha) = Q_0 x^\alpha \left[1 - \frac{x^2}{(\alpha+1)(\alpha+3)} + \frac{x^4}{(\alpha+1)(\alpha+3)^2(\alpha+5)} - \frac{x^6}{(\alpha+1)(\alpha+3)^2(\alpha+5)^2(\alpha+7)} + \dots \right]$$

الحل الأول يقابل $\alpha=1$ وبوضع $Q_0=1$ نجد :

$$y_1(x) = y(x, \alpha)_{\alpha=1} = x \left[1 - \frac{x^2}{2.4} + \frac{x^4}{2.4^2.6} - \frac{x^6}{2.4^2.6^2.8} + \dots \right]$$

$$= x \left[1 - \frac{x^2}{2^2(2)(1)} + \frac{x^4}{2^4(3.2)(2)} - \frac{x^6}{2^6(4.3.2)(3.2)} + \dots \right]$$

أي

$$y_1(x) = x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m+1)! m!} \quad \text{(XVI)}$$

وتكون دالة ببيل ذات الرتبة واحد وذات الصنف واحد هي .

$$J_1(x) = \frac{1}{2} y_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m+1)! m!}$$

والمتسلسلة متقاربة مطلقاً من أجل كل قيم x . والدالة الـ $J_1(x)$ معرفة من أجل

جميع قيم x .

هنا لا يمكن الحصول على $y_2(x)$ بنفس الطريقة . لأنه هناك صعوبة في معامل x^2 حيث يصبح لا نهائياً لو وضعنا $\alpha = -1$. للتغلب على هذه الصعوبة نلجأ إلى الطريقة التي ذكرناها في الفصل السابق في المثال -22- (الحالة الثانية) :

نبحث أولاً عن الدالة :

$$(\alpha - \alpha_2)y(x_1, \alpha) = (\alpha + 1)y(x_1, \alpha)$$

$$= Q_0 x^\alpha \left[(\alpha + 1) - \frac{x^2}{\alpha + 3} + \frac{x^4}{(\alpha + 3)^2(\alpha + 5)} - \frac{x^6}{(\alpha + 3)^2(\alpha + 5)^2(\alpha + 7)} + \dots \right]$$

وواضح أننا تخلصنا من العامل الحرج $(\alpha + 1)$ في المقام إذن :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [(\alpha + 1)y(x_1, \alpha)] = Q_0 \left[x^\alpha + (\alpha + 1)x^\alpha \ln x + \frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha + 3)^2} - \frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha + 3)} \ln x + \right.$$

$$\left. - \frac{3\alpha + 13}{(\alpha + 3)^3(\alpha + 5)^2} x^{\alpha+4} + \frac{x^{\alpha+4}}{(\alpha + 3)^2(\alpha + 5)} \ln x + \right.$$

$$\left. + \frac{2(\alpha + 7)(2\alpha + 8) + (\alpha + 3)(\alpha + 5)}{(\alpha + 3)^3(\alpha + 5)^3(\alpha + 7)^2} x^{\alpha+6} - \frac{x^{\alpha+6}}{(\alpha + 3)^2(\alpha + 5)^2(\alpha + 7)} \ln x + \dots \right]$$

يوضع $\alpha = 1$ و $Q_0 = 1$ نحصل على الحل الثاني :

$$y_2(x) = x^{-1} \ln x \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{(2^2 \cdot (2))} - \frac{1}{2} \frac{x^4}{2^4 (2 \cdot 3)(2)} + \dots \right] +$$

$$x^{-1} \left[1 + \frac{x^2}{2^2} - \frac{10}{2^3 4^2} x^4 + \frac{20}{2 \cdot 4^3 6^2} x^6 - \dots \right]$$

$$y_2(x) = -J_1(x) \ln x + x^{-1} \left[1 + \frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{2^4 2!} \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1 \right] x^4 \right. \\ \left. + \frac{1}{2^6 3! 2!} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \right] x^6 + \dots \right]$$

أو

$$y_2(x) = -J_1(x) \ln x + x^{-1} \left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (H_m + H_{m-1})}{2^{2m} m! (m-1)!} x^{2m} \right] \quad (\text{xvii})$$

ويكون الحل الثاني لمعادلة بيسل من الدرجة واحدة عبارة عن دالة بيسل من الرتبة واحدة وذات الصنف واحد والتي نرسم لها بالرمز y_1 والتي تعرف كما يلي :

$$y_1(x) = \frac{2}{\pi} [-y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_1(x)]$$

ويكون الحل العام للمعادلة (xv) من أجل $x > 0$ هو :

$$y(x) = A_1 J_1(x) + A_2 y_1(x) \quad (\text{xviii})$$

ونشير إلى أن $J_1(x)$ تحليلية عند $x=0$ والحل الثاني y_1 لا يكون غير منتهى ويكون من الشكل $\frac{1}{x}$ عندما $x \rightarrow 0$.

ملاحظة :

إذا كان ν عدد حقيقي أكبر من الصفر وكان العدد $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$ يختلف عن الصفر وغير عدد صحيح . في هذه الحالة بعد التعويض عن y ومشتقاتها نحصل على :

$$\sum [(n + \alpha)^2 - \nu^2] P_n x^{n+\alpha} + \sum Q_n x^{n+\alpha+2} = 0$$

$$\text{أي : } (\alpha^2 - \nu^2)Qx^\alpha + [(\alpha+1)^2 - \nu^2]x^{\alpha+1} + \sum [(n+\alpha)^2 - \nu^2]Q_n + Q_{n-2}x^{n+\alpha} = 0$$

ونحصل على المعادلة الآتية بمساواة معامل أدنى قوة (x^α) بالصفر حيث

$$Q_0 \neq 0$$

$$\alpha^2 - \nu^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \nu \quad \alpha_2 = -\nu \quad \text{أي}$$

أما الصيغة التكرارية فتعطى بالعلاقة :

$$Q_n = -\frac{Q_{n-2}}{(n+\alpha)^2 - \nu^2} \quad n \geq 2$$

وبمساواة معامل $x^{\alpha+1}$ بالصفر نجد $[(\alpha+1)^2 - \nu^2]Q_1 = 0$

والمقدار بين قوسين لا يعدم من أجل قيم $-\nu$ ، $\alpha = \nu$ إذن $Q_1 = 0$

وبالتالي فالمعاملات $Q_3 = Q_5 = Q_7 = \dots = Q_{2n+1} = \dots = 0$

ولإيجاد الحل الأول نضع $\alpha = \nu$ فنجد :

$$Q_n = -\frac{Q_{n-2}}{n(n+2\nu)} \quad n \geq 2$$

وللحصول على المعاملات ذات الدليل الزوجي نضع في الصيغة التكرارية

$$Q_{2m} = -\frac{Q_{2m-2}}{2m(2m+2\nu)} = \frac{-Q_{2n-2}}{4m(m+\nu)}$$

وبالتالي :

$$Q_{2m} = (-1)^m \frac{\nu!}{2^{2m} m!(m + \tau)!} Q_0$$

والحل الأول يصبح :

$$y_1(x) = Q_0 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \nu!}{2^{2m} m!(m + \tau)!} x^{2m} \right]$$

ويأخذ $Q_0 = \frac{1}{2^\nu \nu!}$ نحصل على الحل الخاص الأول

$$J_\tau(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m + \nu)!} x^{2m}$$

وهي دالة بيسل من النوع الأول والرتبة ν .

أما لإيجاد الحل الثاني نضع $\alpha = -\nu$ في الصيغة التكرارية فنحصل على :

$$J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m - \nu)!} x^{2m}$$

وهي دالة بيسل من النوع الأول والرتبة $(-\nu)$ ونلاحظ أن الدالة $J_{-\nu}(x)$ ليس لها معنى من أجل ν عدد صحيح . لأن إذا كانت $n = \nu$ فإن أحد حدود المتسلسلة يصبح لا نهائياً . كذلك إذا كانت $\nu = 0$ فإن الحل الأول والثاني ينطبقان .

EULER'S EQUATION

3- معادلة أولر

إحدى الأمثلة البسيطة للمعادلة التفاضلية التي لها نقطة مفردة منتظمة هي معادلات أولر أو المعادلة المتساوية الأبعاد وهي من الصورة :

$$x^2 y'' + \beta x y' + \rho y = 0 \quad (i)$$

حيث β , ρ ثابتان حقيقيان . وواضح أن النقطة $x = 0$ نقطة منفردة منتظمة لهذه المعادلة لأن كل من التاليين $P(x) = \frac{\beta}{x}$ و $Q(x) = \frac{\rho}{x^2}$ غير تحليلية عند $x = 0$ ولكن $xP(x) = \beta$ و $x^2Q(x) = \rho$ تحليليتان عند $x = 0$. وسنبحث الآن الحل العام من أجل قيم $x > 0$ ثم نعمم النتائج من أجل $x < 0$

مسألة -3-

جد الحل العام لمعادلة أولر (i) حسب قيم β , ρ

الحل :

نفرض حلا على صورة متسلسلة : $y = x^\alpha \sum Q_n x^n$, $Q_0 \neq 0$ بالتعويض عن y ومشتقاتها في المعادلة (i) نجد :

$$\sum [(n+\alpha)(n+\alpha-1) + \beta(n+\alpha) + \rho] Q_n x^{n+\alpha} = 0$$

بمساواة معامل أدنى قوة (x^α) بالصفر نجد المعادلة الآسية :

$$\alpha(\alpha-1) + \beta\alpha + \rho = 0$$

$$\alpha^2 + (\beta-1)\alpha + \rho = 0$$

أو

وجذراهما هما :

$$\alpha_1 = \frac{-(\beta-1) + \sqrt{(\beta-1)^2 - 4\rho}}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{-(\beta-1) - \sqrt{(\beta-1)^2 - 4\rho}}{2}$$

ويمكن أن يكون الجذران حقيقيين متمايزين أو متساويين أو مركبين مترافقين حسب قيمة المميز $\Delta = (\beta - 1)^2 - 4\phi$ إذا كان موجبا أو معدوما أو سالبا . أما الصيغة التكرارية فنحصل عليها بمساواة معامل $(x^{\alpha+n})$ بالصفر

$$[(n+\alpha)(n+\alpha-1) + \beta(n+\alpha) + \phi]Q_n = 0, \quad n \geq 1$$

وواضح أن المقدار بين قوسين لاينعدم من أجل قيم $\alpha = \alpha_1, \alpha_2$

إذن

$$Q_0 \neq 0, \quad Q_n = 0 \quad n \geq 1 \quad (ii)$$

الحالة الأولى : الجذران حقيقيان متمايزان : $(\beta - 1)^2 - 4\phi > 0$
في هذه الحالة نحصل على الحل الأول بوضع $\alpha = \alpha_1$ ويكون على الصورة :

$$y_1(x) = x^{\alpha_1}, \quad Q_0 = 1 : x > 0 \quad (iii)$$

والحل الثاني نحصل عليه بوضع $\alpha = \alpha_2$

$$y_2 = x^{\alpha_2}, \quad Q_0 = 1 : x > 0 \quad (iv)$$

ويكون الحل العام للمعادلة (i) من الصورة :

$$y(x) = A_1 x^{\alpha_1} + A_2 x^{\alpha_2} : x > 0$$

ونلاحظ أن إذا كانت α_1 عدد غير أصم فإن x^{α_1} يمكن كتابته على الصورة:

$$x^{\alpha_1} = e^{\alpha_1 \ln x}$$

مثال -1-

$$2x^2 y'' + 3xy' - y = 0 \quad \text{حل المعادلة :}$$

في هذه الحالة لدينا $\beta = 3$, $\rho = -1$ ويكون الجذران الأسيان هما $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = -1$ ونلاحظ أن $\alpha_1 - \alpha_2 = 3/2$ وهو يختلف عن الصفر وعن عدد صحيح موجب . إذن الحل العام يكون من الصورة :

$$y = A_1 x^{1/2} + A_2 x^{-1} , \quad x > 0$$

$$(\beta - 1)^2 - 4\rho = 0 \quad \text{الحالة الثانية : جذر مضعف :}$$

في هذه الحالة الجذران الأسيان متساويان $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{(\beta - 1)}{2}$ و

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

ولدينا $Q_0 \neq 0$, $Q_n = 0$, $n \geq 1$

إذن يكون الحل من الصورة :

$$y(x, \alpha) = Q_0 x^\alpha \quad (\text{v})$$

بوضع $\alpha = \alpha_1$ نحصل على الحل الأول :

$$y_1(x) = Q_0 x^{\alpha_1}$$

نأخذ $Q_0 = 1$ فيكون

$$y_1(x) = x^{\alpha_1} \quad (\text{vi})$$

وللحصول على الحل الثاني نحسب الدالة $\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) =$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) = Q_0 x^\alpha \cdot \ln x = x^\alpha \ln x \quad , \quad Q_0 = 1$$

بوضع $\alpha = \alpha_1$ نحصل على الحل التالي :

$$y_2(x) = x^{\alpha_1} \ln x \quad (\text{vii})$$

ويكون الحل العام من الصورة :

$$y(x) = A_1 x^{\alpha_1} + A_2 x^{\alpha_1} \ln x$$

$$= (A_1 + A_2 \ln x) x^{\alpha_1} \quad : \quad x > 0 \quad (\text{viii})$$

مثال -2-

حل المعادلة : $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$ حيث $x > 0$

في هذا المثال لدينا $\Delta = (\beta - 1)^2 - 4\beta = 0$ ، $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{-4}{2} = -2$ ،

فيكون الحل العام من الصورة :

$$y(x) = x^{-2} [A_1 + A_2 \ln x] : x > 0$$

الحالة الثالثة : الجذران مركبان مترافقان $(\beta - 1)^2 - 4\beta < 0$

في هذه الحالة يمكن وضع الجذرين على الصورة :

$$\alpha_1 = \lambda + i\mu \quad , \quad \alpha_2 = \lambda - i\mu$$

ولدينا $\alpha_1 - \alpha_2 = 2i\mu$ فهو عدد مركب .

إنه يكون الحل العام من الصورة :

$$y(x) = A_1 x^{\lambda+i\mu} + A_2 x^{\lambda-i\mu}$$

ويمكن كتابة الحد x^∞ على الصورة التالية :

$$x^{\lambda+i\mu} = e^{(\lambda+i\mu)\ln x} = e^{\lambda \ln x} \cdot e^{i\mu \ln x}$$

$$= x^\lambda e^{i\mu \ln x}$$

$$= x^\lambda [\cos(\mu \ln x) + i \sin(\mu \ln x)]$$

ويمكن كتابة الحل العام على الصورة :

$$y(x) = x^\lambda [\beta_1 \cos(\mu \ln x) + \beta_2 \sin(\mu \ln x)] \quad x > 0 \quad (ix)$$

مثال -3-

$$x^2 y'' + xy' + y = 0 \quad \text{جد حل المعادلة :}$$

$$\Delta = (\beta - 1)^2 - 4\gamma = -4 \quad \text{في هذه الحالة لدينا}$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2i, \quad \alpha_1 = +i, \quad \alpha_2 = -i \quad \text{وبالتالي}$$

ويكون الحل العام من الصورة (حيث $\lambda = 0$, $\mu = 1$)

$$y(x) = A_1 \cos(\ln x) + A_2 \sin(\ln x) : x > 0$$

حالة $x < 0$:

في هذه الحالة الحد x^∞ غير معرف من أجل $x < 0$, ∞ عدد غير صحيح . كذلك الحد $\ln x$ غير معرف من أجل $x < 0$. ولكن يمكن أيضا الحصول على حلول معادلة أولر في هذه الحالة وذلك باستخدام التعويض التالي :

$$\text{بوضع : } x = -\xi , \quad \xi > 0$$

$$y = U(\xi) \quad \text{و}$$

تصبح المعادلة (i) من الصورة :

$$\xi^2 \frac{d^2 U}{d\xi^2} + \beta \xi \frac{dU}{d\xi} + \gamma U = 0 , \quad \xi > 0 \quad (\mathbf{x})$$

وهي نفس صورة معادلة أولر (i) ويكون حلها من الصورة :

$$U(\xi) = \begin{cases} A_1 \xi^{\alpha_1} + A_2 \xi^{\alpha_2} & : \quad (\beta^2 - 1)^2 - 4\gamma > 0 \\ (A_1 + A_2 \ln \xi) \xi^{\alpha_1} & : \quad (\beta^2 - 1)^2 - 4\gamma = 0 \\ [A_1 \cos(\mu \ln \xi) + A_2 \sin(\mu \ln \xi)] \xi^{\alpha_1} & : \quad (\beta^2 - 1)^2 - 4\gamma < 0 \end{cases}$$

ثم نعوض ξ بـ $-x$ للحصول على $y(x)$.

ونخلص إلى النظرية التالية :

نظرية -1-

$$x^2 y'' + \beta x y' + \gamma y = 0 \quad \text{(I) حل معادلة أولر}$$

في مجال ما يحتوي على نقطة الأصل .

$$\alpha^2 + (\beta - 1) \alpha + \gamma = 0 \quad \text{فإن للمعادلة الآسية}$$

جذران α_1 , α_2

إذا كان الجذران حقيقيين متمايزين فإن الحل العام يكون من الصورة :

$$y = A_1 |x|^{\alpha_1} + A_2 |x|^{\alpha_2}$$

إذا كان الجذران متساويان فإن الحل العام يكون من الصورة :

$$y = [A_1 + A_2 \ln|x|] |x|^{\alpha_1}$$

إذا كان الجذران مركبين مترافقين فإن الحل العام يكون من الصورة :

$$y = |x|^{\lambda} [A_1 \cos(\mu \ln|x|) + A_2 \sin(\mu \ln|x|)] , \alpha_{1,2} = \lambda \pm i\mu$$

Gauss's Equation

4- معادلة جاوس

كل معادلة تفاضلية من الشكل :

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$$

تسمى معادلة جاوس أو المعادلة فوق الهندسية hyper geometric حيث a, b, c ثوابت معلومة . كما يلاحظ أن لهذه المعادلة ثلاث نقاط منفردة إحداهن عند اللانهاية $x = \infty$ والاثنين الأخرتين هما $x = 0$, $x = 1$ وهما نقطتان منفردتان منتظمتان حيث :

$$P_{(x)} = \frac{c}{x(1-x)} - \frac{a+b+1}{x-1}$$

$$Q_{(x)} = -\frac{ab}{x(1-x)}$$

وواضح أن $xP(x)$ ، $x^2Q(x)$ دالتان تحليليتان كما هو الحال بالنسبة للدالتين
 $(x-1)P_{(x)}$ ، $(x-1)^2Q_{(x)}$

مسألة -4-

جد الحل العام لمعادلة جاوس حول النقطة المنفردة المنتظمة $x = 0$.

الحل :

نفرض حلا من الشكل $y = \sum Q_n x^{n+\alpha}$ حيث $Q_0 \neq 0$

وبعد الاشتقاق والتعويض والتجميع نجد :

$$\alpha(\alpha+c-1)Q_0 x^{\alpha-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha+c-1)Q_n - [(n+\alpha-1)(n+\alpha+a+b-1) + ab]Q_{n-1} x^{n+\alpha-1} = 0$$

وبمساواة معاملات $x^{n+\alpha}$ بالصفر نجد :

$$\alpha(\alpha+c-1)Q_0 = 0 \quad * \text{ المعادلة الآسية}$$

$$\alpha(\alpha+c-1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 , \alpha_2 = 1-c \quad \text{أو}$$

• والصيغة التكرارية :

$$Q_n = \frac{(n+\alpha-1)(n+\alpha+a+b-1) + ab}{(n+\alpha)(n+\alpha+c-1)} Q_{n-1}$$

من اجل $n \geq 1$

$$Q_n = \frac{(n+\alpha-1+a)(n+\alpha-1+b)}{(n+\alpha)(n+\alpha+c-1)} Q_{n-1} , \quad \text{أو } n \geq 1$$

1- من أجل $\alpha = 0$ نجد :

$$Q_n = \frac{(n+a-1)(n+b-1)}{n(n+c-1)} Q_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

$$Q_n = \frac{(n+a-1)(n+b-1)}{n(n+c-1)} \cdot \frac{(n+a-2)(n+b-2)}{(n-1)(n+c-2)} Q_{n-2} = \dots \quad \text{أو}$$

وهكذا يمكن الحصول على :

$$Q_n = \frac{(n+a-1)(n+a-2)\dots(a)(n+b-1)(n+b-2)\dots(b)}{n!(n+c-1)(n+c-2)\dots(c)} Q_0 \quad n \geq 1$$

$$Q_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)} Q_0 \quad \text{أو أيضا}$$

ويمكن اختصارها على الشكل التالي :

$$Q_n = \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} Q_0$$

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad \text{حيث}$$

$$= \frac{(a+n)!}{a!}$$

$$(b)_n = \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} = \frac{(b+n)!}{b!} \quad , \quad (c)_n = \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)} = \frac{(c+n)!}{c!}$$

ونسمي كل من $(a)_n$, $(b)_n$, $(c)_n$ بمعاملي الدالة (مضروب الدالة) وتسمى Γ دالة كما حيث : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ من أجل $x > 0$ ويكون الحل الأول :
 $(Q_0 = 1)$

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} x^n \quad (ii)$$

وتسمى هذه المتسلسلة بالمتسلسلة فوق الهندسية (hypergeometric series)

$$y_1(x) = F(a, b, c, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} x^n$$
 ويرمز لها بالرمز :

2- لإيجاد الحل الثاني نضع $\alpha = 1 - c$ ومنه :

$$Q_n = \frac{(n+a-c)(n+b-c)}{(n+1-c)(n)} Q_{n-1} \quad n \geq 1$$

$$Q_n = \frac{(a+1-c)(a+2-c)\dots(a+n-c) \cdot (b+1-c)(b+2-c)\dots(b+n-c)}{n!(2-c)(3-c)\dots(n+1-c)} Q_0$$
 أي

حيث $n \geq 1$

ويكون الحل الثاني من الشكل : $(Q_0 = 1)$

$$y_2(x) = x^{1-c} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1-c)_n (b+1-c)_n}{n! (2-c)_n} x^n \right] \quad (ii)$$

ويمكن كتابته على الصورة :

$$y_2(x) = x^{1-c} F(a+1-c, b+1-c, 2-c, x) \quad (iv)$$

وواضح أن الحلين y_1, y_2 ساريان المفعول على المجال $0 < x < 1$ ويكون الحل العام في الشكل :

$$y = A_1 F(a, b, c, x) + A_2 x^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)$$

ملاحظة :

1- إذا كان c عدد صحيح فإن إحدى الحلين يكون تاما والآخر يحتوي في المقام على صفر . وعلى سبيل المثال إذا كان $c = 5$ فإن الحد $(2-c)_n$ في المعادلة (iii) يصبح معدوما من اجل $n \geq 4$ أي :

$$(2-c)_4 = (-3)_4 = (-3)(-2)(-1)(0) = 0$$

2- إذا كان c عدد صحيح ولكن a, b غير عددين صحيحين فإن إحدى حلول معادلة جاوس حول النقطة $x = 0$ يكون من النوع اللوغارتمي .

3- إذا كان c عدد صحيح وكان a و b عددا صحيحا ، فإن الحل يمكن أن يحتوي على الحد اللوغارتمي . ونترك إثبات ذلك للطالب .

Laguerre's Equation:

X-5 معادلة لاكير

كل معادلة تفاضلية من الشكل :

$$xy'' + (1-x)y' + ky = 0 \quad (i)$$

تسمى معادلة لاكير حيث k عدد صحيح موجب أو سالب . وواضح أن نقطة المبدأ هي نقطة منفردة منتظمة .

مسألة -5-

جد الحل العام لمعادلة لاكير حول النقطة $x = 0$

الحل :

$$y = \sum Q_n x^{n+\alpha}, \quad Q_0 \neq 0$$

نفرض حلا على الصورة :

بعد الاشتقاق والتعويض والتجميع نجد :

$$\alpha^2 Q_0 x^{\alpha-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+\alpha)^2 Q_n + (k-n-\alpha+1) Q_{n-1}] x^{n+\alpha-1} = 0$$

بمساواة معاملات $x^{n+\alpha}$ بالصفر نجد :

$$\alpha^2 Q_0 = 0 \quad \text{المعادلة الآسية}$$

وجزراها هما $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ أي الجذران متساويان . والصيغة التكرارية :

$$Q_n = \frac{n+\alpha-1-k}{(n+\alpha)^2} Q_{n-1}, \quad n \geq 1$$

ويمكن الحصول على Q_n بدلالة Q_0 حيث :

$$Q_n = \frac{(n+\alpha-1-k)(n+\alpha-2-k)\dots(\alpha-k)}{(n+\alpha)^2(n-1+\alpha)^2\dots(1+\alpha)^2} Q_0, \quad n \geq 1$$

$$= \frac{(\alpha-k)_n}{[(\alpha+1)_n]^2} Q_0$$

ويكون الحل كمايلي :

$$y(x, \alpha) = Q_0 x^\alpha \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha-k)_n}{[(\alpha+1)_n]^2} x^n \right] \quad \text{(ii)}$$

وللحصول على الحل الأول نأخذ $\alpha = 0$ ، $Q_0 = 1$ نجد :

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-k)_n x^n}{(n!)^2} \quad (\text{iii})$$

ونلاحظ أن إذا كان k عدداً صحيحاً غير سالب فإن $(-k)_n = 0$ من أجل $n > k$ ويصبح الحل الأول للمعادلة من الشكل :

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n x^n}{(n!)^2} \quad (\text{iv})$$

وهو عبارة عن كثير حدود من الدرجة n ويسمى بكثير حدود لاكير ونرمز له بالرمز :

$$L_n(x) = y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)_n x^n}{(n!)^2}$$

ويمكن كتابته على الشكل :

$$L_n(x) = \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n k!}{(n!)^2 (l-n)!} x^n \quad (\text{v})$$

للحصول على الحل الثاني نحسب :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) = Q_0 x^\alpha \ln x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha - k)_n}{[(\alpha + 1)_n]^2} x^n \right] + Q_0 x^\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha - k)_n}{[(\alpha + 1)_n]^2} x^n \right\}$$

ويكون الحل الثاني هو $(Q_0 = 1) =$

$$\begin{aligned}
 y_2(x) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) \Big|_{\alpha=0} = \\
 &= L_n(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-k)_n (H_{k-n} - H_k - 2H_n) x^k}{(n!)^2} \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k!(n-1)! x^{n+k}}{[(n+k)!]^2} \quad \text{(vi)}
 \end{aligned}$$

ونلاحظ أن الحل الأول معرف من أجل جميع كل قيم x بينما الحل الثاني معرف من أجل قيم $x > 0$.

تمارين

I- حل على صورة كثيرات حدود ليجنر المعادلات التالية :-

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 12y = 0 \quad -1$$

$$(a^2-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \quad , \quad a \neq 0 \quad -2$$

$$\frac{d}{dx} \left[(x^2 + ax + b) \frac{dy}{dx} \right] - n(n+1)y = 0 \quad , \quad a^2 - 4b > 0 \quad -3$$

بالنسبة للمعادلة -3- استخدم التعويض : $x = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - b}X - \frac{1}{2}a$

II- اثبت أن :

$$P_{2m+1}(0) = 0 \quad , \quad P_{2m}(0) = (-1)^m \frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{2^m.m!}$$

$$y(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad : \quad \text{III - اثبت أن}$$

هي حل لمعادلة ليجنر .

IV- بين أن المعادلة :

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dy}{d\theta} \right) + n(n+1) \sin \theta Y = 0$$

تتحقق من اجل $y(\theta) = P_n(\cos \theta)$ ومن اجل $Y(\theta) = Q_n(\cos \theta)$

$$P_n(n) = x^n F\left(\frac{-n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1-2n}{2}, x^{-2}\right) \quad \text{حيث}$$

$$Q_n(x) = x^{-n-1} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{2n+3}{2}, x^{-2}\right) \quad \text{و}$$

و $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ هي الدالة فور الهندسية (Hypergeometric Function)

V-جد على صورة دوال بيسل من الصنف الأول حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0 \quad -1$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (a^2 x^2 - n^2)y = 0, \quad a \neq 0 \quad -2$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x-s} \frac{dy}{dx} + \left[a^2 - \frac{n^2}{(x-s)^2} \right] y = 0, \quad a \neq 0 \quad -3$$

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1+2n) \frac{dy}{dx} + xy = 0 \quad (y = x^{-n} y \text{ استخدم التعويض:}) \quad -4$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 xy = 0, \quad a \neq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \left[\frac{3}{2a} X \right]^{2/3} \text{ استخدم التعويض} \\ y = x^{1/2} Y \end{array} \right\} \quad -5$$

VI - حل معادلات أويلر التالية :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 6y = 0 \quad -1$$

$$2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 5x \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad -2$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad -3$$

VII - حل بدلالة الدوال فوق الهندسية ، المعادلات التفاضلية التالية :

$$4x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + 2(1-4x) \frac{dy}{dx} - y = 0 \quad -1$$

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (cx+d) \frac{dy}{dx} + ey = 0 \quad -2$$

$$x(a+x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (cx+d) \frac{dy}{dx} + ey = 0 , \quad a \neq 0 \quad -3$$

$$(x^2 + ax + b) \frac{d^2 y}{dx^2} + (cx+d) \frac{dy}{dx} + ey = 0 , \quad a^2 > 4b \quad -4$$

في هذه الحالة نعتبر $x^2 + ax + b = \frac{x-s_1}{x-s_2}$ واستخدام التعويض $X = \frac{x-s_1}{x-s_2}$

VIII - حل المعادلات التفاضلية التالية بدلالة كثيرات حدود لاكبير :

$$xy'' + (1-x)y + y = 0 \quad -1$$

$$xy'' + (1-x)y - 2y = 0 \quad -2$$

$$xy'' + (a-x)y - 5y = 0 \quad , \quad a \neq 0 \quad -3$$

الفصل الحادي عشر

المعادلات التفاضلية الخطية من المراتب العالية

Higher Order Linear Differential Equations

الفصل الحادي عشر

المعادلات التفاضلية الخطية من المراتب العالية

Higher Order Linear Differential Equations

Concepts and Theorems

IX. 1. مفاهيم ونظريات

سبق أن درسنا في الفصل السابع المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية وفي هذا الفصل ستوسع هذه الدراسة لتشمل المعادلات ذات المراتب العالية. والمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n هي معادلة من الصورة :

$$(1) \quad p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = R(x)$$

حيث المتغير التابع y وجميع مشتقاته مرفوعة للقوة 1 ولا توجد حواصل ضرب مشتركة فيما بينهما. والدوال المعاملات $p_i(x)$ هي دوال في المتغير المستقل x وكذلك الحال بالنسبة للدالة $R(x)$.

بما أن المعادلة (1) من المرتبة n يجب إلا يندم معامل $y^{(n)}$ تطابقياً $p_n(x) \neq 0$ على امتداد المجال $\alpha < x < \beta$ ، وسنفرض أن الدوال p_0, p_1, \dots, p_n و R مستمرة وذات قيم حقيقية على المجال $\alpha < x < \beta$ وبالقسمة على $p_n(x)$ نجد أن :

$$(2) \quad L[y] = y^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \underline{p}_1(x)y' + \underline{p}_0(x)y = g(x)$$

حيث $\underline{p}_i(x) = \frac{p_i(x)}{p_n(x)}$ ، $g(x) = \frac{R(x)}{p_n(x)}$ و L مؤثر تفاضلي خطي . إذا لم

تتدم $g(x)$ تطابقياً ، قيل عن المعادلة (2) أنها غير متجانسة أما إذا اندمت $g(x)$ تطابقياً أي $R(x) = 0$ على امتداد المجال $\alpha < x < \beta$ قيل أنها معادلة متجانسة.

أما الدراسة الرياضية الملحقة بالمعادلة (2) فهي شبيهة بدراسة المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية وبالتالي سنعطي النتائج المتعلقة بالمعادلة من المرتبة n . أما الإثباتات فهي مشابهة للإثباتات المقدمة في حالة المعادلات من المرتبة الثانية .
 نلاحظ أن المعادلة (2) تحتوي على المشتقة n بالنسبة للمتغير x وبالتالي يظهر بالحل العام n ثابتاً اختيارياً.
 ولتعيين هذه الثوابت الاختيارية يجب معرفة الشروط الابتدائية التالية:-

$$(3) \quad y(x_0) = Q_0, y'(x_0) = Q_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = Q_{n-1}$$

حيث x_0 نقطة من المجال $\alpha < x < \beta$, Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1} مجموعة من الأعداد الحقيقية.

نظرية -1-

إذا كان $y_1(x)$ حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية المتجانسة:

$$(4) \quad L[y] = y^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + \underline{p}_0 y = 0$$

فإن الدالة $y_2 = \ell_1 y_1(x)$ هي أيضاً حل للمعادلة (4) حيث ℓ_1 ثابت اختياري :

البرهان:-

بما أن $y_1(x)$ حل خاص بالمعادلة (4) فهو يحقق المعادلة ويحولها إلى متطابقة أي:

$$L[y_1] = y_1^{(n)} + \underline{p}_{n-1} y_1^{(n-1)} + \dots + \underline{p}_0(x) y_1 = 0$$

وإذا عوضنا $y_2 = \ell_2 y_1$ في الطرف الأول للمعادلة (4) نجد أن :

$$L[y_2] = y_2^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x) y_2^{(n-1)} + \dots + \underline{p}_0(x) y_2$$

وبما أن : $y_2 = \ell_2 y_1(x)$ فإن $y_2^{(n)} = \ell_1 y_1^{(n)}(x)$
 إذن :

$$L[\ell_1 y_1] = \ell_1 y_1^{(n)} + \ell_1 \underline{p}_{n-1}(x) y_1^{(n-1)} + \dots + \ell_1 \underline{p}_0(x) y_1(x)$$

$$= \ell_1 L[y_1] = 0$$

وهو المطلوب

نظرية -2-

إذا كان $y_1(x)$ و $y_2(x)$ حلين خاصين للمعادلة (4) فإن الدالة

$$y_3 = \ell_1 y_1 + \ell_2 y_2$$

حيث ℓ_2, ℓ_1 ثابتين اختياريان , هي أيضاً حل للمعادلة (4).

البرهان :

إذا كان y_1 حلاً للمعادلة (4) فهو يحولها إلى متطابقة من أجل جميع قيم x
 أي :

$$L[y_1] = y_1^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x) y_1^{(n-1)} + \dots + \underline{p}_0(x) y_1 = 0$$

وكذلك بالنسبة إلى y_2 أي :

$$L[y_2] = y_2^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x) y_2^{(n-1)} + \dots + \underline{p}_0(x) y_2 = 0$$

وإذا عوضنا y_3 في الطرف الأول للمعادلة (4) نجد أن :

$$L[y_3] = (\ell_1 y_1 + \ell_2 y_2)^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x) (\ell_1 y_1 + \ell_2 y_2)^{(n-1)} + \dots + \underline{p}_0(x) (\ell_1 y_1 + \ell_2 y_2)$$

$$(\ell_1 y_1 + \ell_2 y_2)^{(n)} = \ell_1 y_1^{(n)} + \ell_2 y_2^{(n)}$$

وحيث

إذن :

$$L[y_3] = \ell_1 [y_1^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \dots + \underline{p}_0(x)y_1(x)].$$

$$+ \ell_2 [y_2^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + \dots + \underline{p}_0(x)y_2(x)].$$

$$= \ell_1 L[y_1] + \ell_2 L[y_2] = 0$$

وبالتالي $y_3 = \ell_1 y_1 + \ell_2 y_2$ فهو حل المعادلة. وهو المطلوب.

ملاحظة:

وبصورة عامة إذا كان لدينا y_1, y_2, \dots, y_n حلولاً خاصة للمعادلة (4) فإن

$$y = \ell_1 y_1 + \ell_2 y_2 + \dots + \ell_n y_n$$

هو أيضاً حل للمعادلة حيث $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ ثوابت اختيارية . ونخلص إلى النظرية العامة التالية .

نظرية -3-

كل توافقية خطية من الحلول الخاصة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة هي أيضاً حل لنفس المعادلة .

نظرية -4-

نظرية وجود انفراد الحل:-

سبق أن تكلمنا عن نظرية وجود انفراد الحل بالنسبة للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والثانية، وسنذكر الآن برهان نفس النظرية بالنسبة للمعادلات بالنسبة للمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة n .

إذا كانت الدوال $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ و $g(x)$ مستمرة على مجال ما $\alpha < x < \beta$ وكانت x_0 نقطة من هذا المجال Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1} ثوابت حقيقية فإنه يوجد حل واحد وواحد فقط معرف على المجال $\alpha < x < \beta$ لمسألة القيم الحدية التالية :-

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y = 0$$

$$y(x_0) = Q_0, y'(x_0) = Q_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = Q_{n-1}$$

2.XI: المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة n :

Homogenous Linear Differential Equations of order

The Wronskian

أ- الرونسكيان

سبق أن رأينا إذا كانت y_1, y_2, \dots, y_n حلولاً خاصة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة n :

$$(5) \quad L[y] = y^n + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y = 0$$

فإن التوافقية الخطية

$$(6) \quad y = \ell_1 y_1(x) + \ell_2 y_2(x) + \dots + \ell_n y_n(x)$$

هي أيضاً حل للمعادلة حيث $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ ثوابت اختيارية .

إذا كانت لدينا الشروط الابتدائية التالية:

$$(7) \quad y(x_0) = Q_0, \quad y'(x_0) = Q_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = Q_{n-1}$$

فإنه من الممكن اختيار الثوابت $l_{11}, l_{21}, \dots, l_n$ حيث أن التوافقية الخطية (6) تحقق الشروط الابتدائية (7) . وعلى وجه التخصيص من أجل أي نقطة x_0 من المجال $\alpha < x < \beta$ ومن أجل أي اختيار للثوابت Q_0, Q_1, \dots, Q_n فإنه يمكن تعيين المعاملات l_1, l_2, \dots, l_n إذا تحقق النظام التالي:-

$$y(x_0) = l_1 y_1(x_0) + l_2 y_2(x_0) + \dots + l_n y_n(x_0) = Q_0$$

$$(8) \quad y'(x_0) = l_1 y'_1(x_0) + l_2 y'_2(x_0) + \dots + l_n y'_n(x_0) = Q_1$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = l_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + l_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + l_n y_n^{(n-1)}(x_0) = Q_{n-1}$$

الذي يمكن حله بالنسبة للثوابت l_1, l_2, \dots, l_n ، ويستلزم هذا أن لا ينعدم محدد المعاملات. من جهة أخرى إذا كان محدد المعاملات معدوماً فإنه من الممكن دائماً اختيار الثوابت Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1} بحيث لا يقبل النظام حلاً. إذن الشرط اللازم والكافي لإيجاد حل للنظام (8) من أجل قيم اختيارية للثوابت Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1} هو أن يكون الرونسكيان $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ غير معدوم عند النقطة $x = x_0$. وبما أن x_0 هي نقطة مكن المجال $\alpha < x < \beta$ فإن الشرط يصبح أن $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ غير معدوم على طول المجال $\alpha < x < \beta$.

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1, y_2, \dots, y_n \\ y'_1, y'_2, \dots, y'_n \\ \dots \\ y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)}, \dots, y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in]\alpha, \beta[$$

وكما هو الحال بالنسبة للمعادلة من المرتبة الثانية، تكون لدينا النظرية التالية:

ب- نظرية - 5 -

إذا كانت الدوال $\underline{p}_0, \underline{p}_1, \dots, \underline{p}_n$ مستمرة على المجال المفتوح $\alpha < x < \beta$ وكانت $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ وكان (5) حلاً خاصاً للمعادلة (5) وعلى الأقل عند نقطة من المجال $\alpha < x < \beta$ فإن الحل العام للمعادلة (5) هو عبارة عن توافقية للحلول y_1, y_2, \dots, y_n .

ملاحظة:-

تسمى مجموعة الحلول $\{y_1(n)\}_{i=1}^n$ بالمنظومة الأساسية للحلول أو قاعدة الحلول للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة $L[y] = 0$ على المجال $\alpha < x < \beta$. والحل العام لهذه المعادلة هو توافقية خطية من دوال قاعدة الحلول. ويمكن تعميم مفهوم الإستقلالية الخطية الذي ذكرناه في الفصل السابع. نقول عن الدوال y_1, y_2, \dots, y_n أنها مستقلة خطية على المجال $\alpha < x < \beta$ إذا وجدت مجموعة من الثوابت l_1, l_2, \dots, l_n غير معدومة حيث :

$$l_1 y_1(x) + l_2 y_2(x) + \dots + l_n y_n(x) = 0$$

على المجال $\alpha < x < \beta$.

ومنه إذا كانت y_1, y_2, \dots, y_n حلاً للمعادلة (5) فإنه يمكن إثبات أن الشرط اللازم والكافي حتى تكون هذه الحلول مستقلة خطياً هو أن $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ على المجال $\alpha < x < \beta$.

وبالتالي دوال قاعدة الحلول للمعادلة (5) مستقلة خطياً، وأن مجموعة n الحلول للمعادلة (5) المستقلة خطياً تكون قاعدة الحلول للمعادلة (5).

جـ. المعادلة المتجانسة ذات المعاملات الثابتة:

Homogenous Equations with Constant Coefficients.

نطبق في هذه الفقرة ما قدمناه من مفاهيم ونظريات بغية الحصول على حلول المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة. والصورة العامة لهذه المعادلة هي :-

$$(5) \quad y^n + Q_{n-1}y^{(n-1)} + Q_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + Q_1y' + Q_0y = 0$$

حيث Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1} ثوابت اختيارية والتي سنفرضها حقيقية. ولإيجاد n من الحلول المستقلة خطياً لهذه المعادلة نلاحظ أولاً أن هذه المعادلة هي علاقة خطية بين $y(x)$ ومشتقتها، والدالة التي يمكن أن تحقق مثل هذه الدالة هي الدالة الأسية e^{mx} . لكن لقيم خاصة أو مميزة للثابت m . لهذا نفرض حلاً للمعادلة (5) على الصورة :-

$$y = e^{mx} \Rightarrow y' = me^{mx}, \dots, y^{(n)} = m^n e^{mx}$$

وبالتعويض عن y ومشتقتها في المعادلة (5) نجد أن .

$$L[e^{mx}] = [m^n + Q_{n-1}m^{n-1} + \dots + Q_1m + Q_0]e^{mx} \\ = Z(m)e^{mx} = 0$$

ومنه يكون لدينا :-

$$(10) \quad Z(m) = m^n + Q_{n-1}m^{n-1} + \dots + a m + Q_0 = 0$$

وهذه المعادلة جبرية من الدرجة n في m وتسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة n ذات المعاملات الثابتة.

ويسمى كثير حدود $Z(m)$ بكثير الحدود المميز وهو من الدرجة n وله n صفر ،
 لتكن هذه الجذور هي m_1, m_2, \dots, m_n .
 وبالتالي يمكن كتابة كثير الحدود المميز من الصورة :

$$Z(m) = (m - m_1)(m - m_2) \dots (m - m_n)$$

1- جذور حقيقية ومتمايزة . Real and Unequal Roots

إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة حقيقية ومختلفة عن بعضها البعض فإن
 المعادلة المميزة تأخذ الصورة :

$$Z(m) = \prod_{i=1}^n (m - m_i) = (m - m_1)(m - m_2) \dots (m - m_n) = 0$$

وتكون قاعدة الحلول المرفقة للمعادلة التفاضلية هي : $\{y_i = e^{m_i x}\}_{i=1}^n$ ويكون الحل
 العام الوحيد للمعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة في الصورة :

$$y(x) = \sum_{i=1}^n A_i y_i(x) = \sum_{i=1}^n A_i e^{m_i x}$$

$$y(x) = A_1 e^{m_1 x} + A_2 e^{m_2 x} + \dots + A_n e^{m_n x}.$$

ويبقى إثبات أن دوال قاعدة الحلول مستقلة خطياً على المجال $\alpha < x < \beta$.
 لنفرض أن هذه الدوال $\{y_i = e^{m_i x}\}_{i=1}^n$ مرتبطة خطياً ونبرهن أن هذا يؤدي إلى
 تناقض. إذن فإنه يوجد n ثابت c_1, c_2, \dots, c_n ليست معدومة كلياً حيث :

$$c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x} = 0 \quad -\infty < x < \infty$$

بضرب المعادلة السابقة في $e^{-m_1 x}$ تصبح في الصورة :

$$c_1 + c_2 e^{(m_2 - m_1)x} + \dots + c_n e^{(m_n - m_1)x} = 0$$

باشتقاقها بالنسبة إلى x نجد أن :

$$(m_2 - m_1)c_2 e^{(m_2 - m_1)x} + (m_3 - m_1)c_3 e^{(m_3 - m_1)x} + \dots + (m_n - m_1)c_n e^{(m_n - m_1)x} = 0$$

من أجل $-\infty < x < \infty$.

بضرب هذه المعادلة في $e^{-(m_2 - m_1)x}$ ثم اشتقاقها بالنسبة إلى x نجد أن :

$$(m_3 - m_2)(m_3 - m_2)c_3 e^{(m_3 - m_2)x} + \dots + (m_n - m_2)(m_n - m_1)c_n e^{(m_n - m_{n-1})x} = 0$$

من أجل $-\infty < x < \infty$. ونستمر بنفس الطريق فنحدد في النهاية أن :-

$$(m_n - m_{n-1})(m_n - m_{n-2}) \dots (m_n - m_2)(m_n - m_1)c_n e^{(m_n - m_{n-1})x} = 0$$

من أجل $-\infty < x < \infty$. وبما أن الدالة الأسية غير معدومة والجنور مختلفة عن

بعضها البعض إذن $c_n = 0$ ومنه يكون لدينا :

$$c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_{n-1} e^{m_{n-1} x} = 0$$

وبإعادة نفس الطريقة نحصل على $c_{n-1} = 0$ وهكذا نجد أن :

$$c_{n-2} = \dots = c_1 = 0$$

وهذا يتناقض مع الفرض حيث أن $e^{m_1 x}, \dots, e^{m_n x}$ مرتبطة خطياً.

مثال :-

$$y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0 \quad \text{جد الحل العام للمعادلة التفاضلية :}$$

الحل :-

المعادلة التفاضلية المعطاة هي معادلة خطية متجانسة ذات معاملات ثابتة وتكون المعادلة المميزة من الصورة :-

$$Z(m) = m^3 + 2m^2 - 5m - 6 = 0$$

ومنه :

$$Z(m) = (m + 1)(m - 2)(m + 3) = 0$$

إذن فجذور المعادلة المميزة هي $\{-1, 2, 3\}$ وعليه تكون مجموعة الحلول المقابلة هي :-

$$\{y_1, y_2, y_3\} = \{e^{-x}, e^{2x}, e^{-3x}\}$$

ويكون الحل العام كما يلي :-

$$y(x) = A_1 e^{-x} + A_2 e^{2x} + A_3 e^{-3x}$$

Complex Roots

-2 جذور مركبة :

قد يكون للمعادلة المميزة بعض الجذور المركبة . لكننا نعلم أنه إذا كانت معاملات المعادلة المميزة حقيقية فإن جذورها المركبة ، إن وجدت ، توجد ترافقيا ، ليكن m_s ، m_{s+1} جذرين مترافقين :

$$m_s = \alpha + i\beta \quad , \quad m_{s+1} = \alpha - i\beta$$

حيث α و β ثابتان حقيقيان ، ويظهر الحلان المقابلان لهذين الجذرين المتوافقين في الحل العام على الصورة: $A_s e^{m_s x} + A_{s+1} e^{m_{s+1} x}$ حيث A_s, A_{s+1} ثابتان اختياريان، وكنا سبق أن رأينا في حالة المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية أنه يمكن التعبير عن

الدوال المركبة $e^{(\alpha+i\beta)x}$ بدلالة الدوال ذات القيم الحقيقية التالية:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$B_s e^{\alpha x} \cos \beta x + B_{s+1} e^{\alpha x} \sin \beta x \quad : \text{أي}$$

ويلاحظ أن هناك دائما ثابتين اختياريين B_s, B_{s+1} أو A_s, A_{s+1} .
 إذن إذا كان للمعادلة المميزية بعض الجذور المركبة فإنه من الممكن التعبير عن
 الحل العام بتوافقية خطية لحلول ذات قيم حقيقية.

مثال -2-

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$y^{iv} - y = 0$$

الحل :-

المعادلة المعطاة خطية متجانسة من المرتبة الرابعة ومعاملاتها ثابتة :
 بوضع $y = e^{mx}$ نحصل على المعادلة المميزة :

$$m^4 - 1 = (m^2 - 1)(m^2 + 1) = 0$$

وواضح أن جذورها هي : $m_1 = 1, m_2 = -1, m_3 = i, m_4 = -i$
 ويكون الحل العام من الصورة :

$$y(x) = A_1 e^x + A_2 e^{-x} + A_3 \cos x + A_4 \sin x$$

قد يحدث أن يتكرر أحد الجذور لمعادلة المميزة ℓ من المرات ، بمعنى أن يكون هناك عدد ℓ من الجذور المتساوية من بين العدد الكلي n لجذر المعادلة المميزة :
 $Z(m) = 0$

إذا كان هذا الجذر هو m_1 فما هي مجموعة الحلول المقابلة لهذا الجذر المتكرر، لقد سبق أن رأينا في حالة المعادلة من المرتبة الثانية إذا كان الجذر مضعف فإن الحلين المستقلين خطياً هما xe^{m_1x} و e^{m_1x} إذن فإنه يبدو من المعقول أن نتوقع إذا كان أحد جذور المعادلة $Z(m) = 0$ وليكن m_1 متكرر ℓ مرة ($\ell < n$) فإن :

$$e^{m_1x}, xe^{m_1x}, x^2e^{m_1x}, \dots, x^{\ell}e^{m_1x}$$

هي حلول للمعادلة قيد الحل. ولإثبات هذا نلاحظ إذا كان m_1 جذراً لامي من التعددية لكثير الحدود $Z(m)$ (أو جذراً إذا ℓ من الطيات) (أو جذراً من المرتبة ℓ) فإن :

$$\begin{aligned} L[e^{mx}] &= e^{mx} (m - m_1)^{\ell} (m - m_{\ell+1}) \dots (m - m_n) \\ &= e^{mx} (m - m_1)^{\ell} H(m) \end{aligned} \quad (ii)$$

من أجل جميع قيم m حيث $H(m_1) \neq 0$

وفيما يلي نستعمل الخاصية التالية $\frac{\partial}{\partial m} e^{mx} = xe^{mx}$ وأن اشتقاق الدالة e^{mx} بالنسبة إلى x و m يمكن استبدالهما . إذن باشتقاق المعادلة (ii) بالنسبة إلى m نحصل على:

$$L[xe^{mx}] = e^{mx} [x(m - m_1)^{\ell} H(m) + \ell(m - m_1)^{\ell-1} H(m) + (m - m_1)^{\ell} H'(m)]$$

من أجل $\ell \geq 2$ فإن الطرف الثاني للمعادلة (12) ينعدم من أجل $m = m_1$ ومنه فإن $x e^{m_1 x}$ هو حل للمعادلة قيد الحل .

إذا كان $\ell \geq 3$ فنشتق المعادلة (12) مرة أخرى بالنسبة إلى m ثم نعوض $m = m_1$ فنجد أن $x^2 e^{m_1 x}$ هو أيضاً حل للمعادلة .

ويمكن الاستمرار في هذه الطريقة إلى غاية الاشتقاق من الرتبة $(\ell - 1)$ ، الذي يعطي النتيجة المرادة ، ونلاحظ أن المشتقة ℓ الطرف الثاني للمعادلة (ii) لا ينعدم من أجل $m = m_1$ لأن المشتقة ℓ للحد $(m - m_1)^\ell$ هي ثابت و $H(m_1) \neq 0$. ومن المعقول أن نتوقع أن الحلول التالية :

$$e^{m_1 x}, x e^{m_1 x}, x^2 e^{m_1 x}, \dots, x^{\ell-1} e^{m_1 x}$$

مستقلة خطياً ونترك إثبات ذلك للقارئ .

وفي النهاية إذا كان أحد الجذور المركبة $\lambda + i\mu$ متكرراً ℓ مرة فإن الجذر المرافق $\lambda - i\mu$ يكون متكرراً ℓ مرة. ومن الحلول ذات القيم المركبة المرفقة يمكن إيجاد 2ℓ حلاً ذا قيم حقيقية بأخذ الأجزاء الحقيقية والتحليلية للحلول .

$$e^{(\lambda+i\mu)x}, x e^{(\lambda+i\mu)x}, x^2 e^{(\lambda+i\mu)x}, \dots, x^{\ell-1} e^{(\lambda+i\mu)x}$$

وهي عبارة عن دوال مستقلة خطياً وتكون من الصورة :

$$e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x, x e^{\lambda x} \cos \mu x, x e^{\lambda x} \sin \mu x, \dots,$$

$$x^{\ell-1} e^{\lambda x} \cos \mu x, x^{\ell-1} e^{\lambda x} \sin \mu x$$

ومنه فإن الحل العام يمكن التعبير عنه بتوافقية خطية من n حلاً ذا قيم حقيقية .

مثال -3-

حل المعادلات التفاضلية التالية:-

$$y''' - y'' - y' + y = 0 \quad -1$$

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \quad -2$$

$$y^{(4)} + y = 0 \quad -3$$

الحل:-

1- هذه معادلة تفاضلية من المرتبة الثالثة معادلتها المميزة هي:-

$$m^3 - m^2 - m + 1 = 0$$

وجذورها هي : $m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = -1$

أي أن لها جذر ثنائي (1) وجذر آخر (-1) وبالتالي فالحل العام هو:

$$y = e^x(A_1 + A_2x) + A_3e^{-x}$$

2- هذه معادلة تفاضلية من المرتبة الرابعة معادلتها المميزة هي:-

$$m^4 + 2m^2 + 1 = 0$$

وجذورها هي: $m_1 = i, m_2 = i, m_3 = -i, m_4 = -i$

ويكون الحل العام من الصورة :

$$y = A_1 \cos x + A_2 \sin x + A_3 x \cos x + A_4 x \sin x$$

3- هذه المعادلة تفاضلية من المرتبة الرابعة ومعادلتها المميزة هي:-

$$m^4 + 1 = 0$$

ونلاحظ أنه يمكن كتابة العدد -1 على الصورة التالية :-

$$-1 = -1 + i0 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi} = e^{i(\pi+2n\pi)}$$

حيث n عدد صحيح موجب أو سالب .

$$(-1)^{\frac{1}{4}} = e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2})} = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2})$$

ونحصل على الجذور الأربعة بوضع $n = 0, 1, 2, 3$ وهم :

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

ويمكن التأكد أنه من أجل قيم أخرى لـ n نحصل على نفس الجذر.

ويكون الحل العام من الشكل التالي :-

$$y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[A_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + A_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right] + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[A_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + A_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right]$$

3- XI المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من المرتبة n .

Nonhomogenous Linear Differential Equations of n order

General Solution

أ- الحل العام

نبحث الآن عن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من المرتبة

n والتي تكون من الصورة :

$$(13) \quad L[y] = y^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \underline{p}_1(x)y' + \underline{p}_0(x)y = g(x)$$

إذا كان y_{p_2}, y_{p_1} حلين خاصين للمعادلة (13) فإنه يكون لدينا بنسبة على خطية المؤثر L أن :

$$(14) \quad L[y_{p_1} - y_{p_2}] = g(x) - g(x) = 0$$

إذن الفرق بين حلين خاصين للمعادلة غير المتجانسة (13) هو حل للمعادلة المتجانسة والتي نحصل عليها من (13) باختزال الطرف الأيمن $g(x)$ إلى الصفر . وبما أن الحل للمعادلة المتجانسة هو عبارة عن توافقية خطية من دوال قاعدة الحل $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ فإن أي حل للمعادلة (13) يمكن أن يكتب على الصورة :-

$$y = y_h(x) + y_p(x)$$

$$(15) \quad = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) + \dots + A_n y_n(x) + y_p(x)$$

حيث y_p هو حل خاص للمعادلة غير المتجانسة (13) وتسمى التوافقية الخطية (15) بالحل العام للمعادلة غير المتجانسة (13).

تتمثل المسألة أولاً في إيجاد قاعدة الحل $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ثم إذا كانت المعاملات في المعادلة التفاضلية ثابتة فالمسألة على الوجه البسيط الملائم ويتم تعيين قاعدة الحل كما بينا ذلك في الفترة السابقة ، وإذا كانت المعاملات غير ثابتة أي أنها دوال في المتغير المستقل x فإنه من الممكن استعمال طريقة المتسلسلات كما هو الحال بالنسبة للمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة .

Reduction of order

ب- تخفيض المرتبة لمعادلة تفاضلية خطية

يمكن استعمال طريقة تخفيض مرتبة المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n .

لنبحث عن قاعدة الحل $\{y_i\}_{i=1}^n$ للمعادلة (13).

ويمكن اختزالها إلى معادلة متجانسة بوضع $g(x) = 0$ حيث نحن بصدد البحث عن قاعدة الحل أي عن الحل المتجانس للمعادلة (13).

ليكن y_1 الحل الخاص للمعادلة (13) بدون طرف ثاني:-

$$(16) \quad y^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \underline{p}_1(x)y' + \underline{p}_0(x)y = 0$$

نضع الحل العام (المتجانس) على الصورة : $y = y_1 \cdot \mathcal{G}(n)$

$$y' = y_1' \mathcal{G} + y_1 \mathcal{G}' \quad \text{ومنه}$$

$$y'' = y_1'' \mathcal{G} + 2y_1' \mathcal{G}' + y_1 \mathcal{G}''$$

$$y^{(n)} = y_1^{(n)} \mathcal{G} + n y_1^{(n-1)} \mathcal{G}' + \dots + y_1 \mathcal{G}^{(n)}$$

بالتعويض في المعادلة (16) نجد أن :

$$(17) \quad \mathcal{G}^{(n)} + q_{n-1}(x)\mathcal{G}^{(n-1)} + \dots + q_1(x)\mathcal{G}' = 0$$

حيث q_1, q_2, \dots, q_{n-1} دوال جديدة في المتغير x وهي معادلة لا تحتوي على \mathcal{G} .

$$\mathcal{G}' = Y(x) \quad \text{ولحلها نفرض:}$$

فتصبح المعادلة من الصورة التالية :

$$Y^{(n-1)} + q_{n-1}Y^{(n-2)} + \dots + q_1Y = 0$$

وهي من المرتبة $(n-1)$ ليكن حلها هو: $Y = Y(x)$

وبالرجوع إلى الدالة \mathcal{G} نجد أن :

$$\mathcal{G}(x) = \int Y(x) dx + c$$

ومنه فإن الحل العام هو:-

$$y = cy_1 + \int Y(x)dx$$

حيث $Y(x)$ دالة في المتغير x وتحتوي على $(n-1)$ ثابت اختياري .

وبالمثل بالنسبة إلى y_1 و $(n-1)$ حل مستقل خطياً $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1}$ للمعادلة المختزلة نجد قاعدة الحل للمعادلة. (13)

$$y_1, y_1\vartheta_1, \dots, y_1\vartheta_{n-1}$$

وإذا كان أحد حلول المعادلة المختزلة (17) معروفاً يمكن أيضاً استخدام طريقة تخصيص المرتبة مرة أخرى للحصول على معادلة من المرتبة $(n-2)$ وهكذا إلى غاية الحصول على المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى .

ومن جهة أخرى ، في الواقع أن طريقة تخفيض المرتبة نادراً ما تكون نافعة بالنسبة للمعادلات ذات المرتبة أكبر من الثانية. فإذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة المختزلة تكون على الأقل من المرتبة الثانية ونادراً ما تكون هذه المعادلة أسهل حل من المعادلة الأصلية .

ج. طريقة المعاملات غير المعينة

The Method of Undetermined Coefficients

يمكن الحصول على الحل الخاص للمعادلة الخطية غير المتجانسة من المرتبة n ذات المعاملات الثانية بطريقة المعاملات غير المعينة ويعتمد شكل هذا الحل على شكل الدالة : $g(x)$.

$$(18) \quad L[y] = y^{(n)} + Q_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + Q_1y' + Q_0y = g(x)$$

وتمتاز هذه الطريقة ببسرها وبساطتها مقارنة بطريقة تغيير البارامترات التي سنناقشها فيما بعد. لكن يعيبها محدوديتها حيث لا تتجح عموماً إلا لأنماط محدودة للدالة $g(x)$ من جانب وللمعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة من جانب آخر، واقتراح شكل ما للحل الخاص ليس عملية تخمينية صرفة بل يعتمد على مجموعة قواعد محددة تعتمد بدورها على شكل الدالة $g(x)$. على أنه في بعض الحالات قد لا ينجح هذا الحل التجريبي تماماً في الحصول على حل خاص لكن بقليل من التمعن والتحصيص يمكن تعديل أو تحويل هذا الحل التجريبي ليؤدي إلى حل خاص نافع.

1- نأخذ أولاً الحالة التي يكون $g(x)$ عبارة عن كثير حدود من الدرجة m :

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$

حيث b_0, b_1, \dots, b_m ثوابت معلومة. فإنه من الطبيعي أن نبحث عن الحل الخاص من الصورة :

$$y_p = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_0$$

بالتعويض عن y_p في المعادلة (18) ومساواة معاملات قوى x^m على الطرفين .

$$Q_0 A_m = b_m \quad \text{نجد أن :-}$$

$$A_m = b_m / Q_0 \quad \text{وبفرض أن } Q_0 \neq 0 \text{ نجد أن :}$$

الثوابت A_1, A_2, \dots, A_{m-1} يمكن الحصول عليها من معاملات الحدود :-

$$x^0, x^1, \dots, x^{m-1}$$

أما إذا كان $Q_0 = 0$ وكان حل المعادلة المتجانسة ثابتاً فإننا لا نستطيع الحصول على A_m ، في هذه فإنه من اللازم فرض y_p على صورة كثير حدود من الدرجة $m+1$. وفي هذه الحالة فإنه ليس من اللازم أن يحتوي y_p على الحد الثابت.

وعموماً إنه من السهل التحقق إذا كان $1, x, x^2, \dots, x^{s-1}$ حلولاً للمعادلة المتجانسة فإن الصورة الملائمة للحل الخاص هي:-

$$y_p(x) = x^s (A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_0)$$

2- لנأخذ الآن الحالة الثانية وهي إذا كان $g(x)$ على الصورة :

$$g(x) = e^{\alpha x} [b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0]$$

فإن الحل الخاص يكون من الشكل:

$$y_p = e^{\alpha x} [A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_0]$$

إذا لم يكن $e^{\alpha x}$ حلاً للمعادلة المتجانسة. أما إذا كان α جزءاً من الدرجة s للمعادلة المميزة فإن الصورة الملائمة للحل الخاص هي :

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x} [A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_0]$$

وهذه النتيجة يمكن إثباتها. كما هو الحال بالنسبة للمعادلة الخطية غير المتجانسة، بوضع $y = e^{\alpha x} U(x)$ تصبح U حلاً للمعادلة الخطية غير المتجانسة من المرتبة n ذات معاملات ثابتة فيها الحد غير المتجانس عبارة عن كثير حدود ونترك إثبات ذلك للقارئ.

3- بالمثل إذا كان $g(x)$ على الصورة :

$$y(x) = e^{\alpha x} (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0) \begin{cases} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{cases}$$

فإن الصورة الملائمة للحل الخاص $y_p(x)$ هي :-

$$y_p(x) = e^{\alpha x} [A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_0] \cos \beta x \\ + e^{\alpha x} [B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \dots + B_0] \sin \beta x$$

هذا إذا لم يكن $\alpha + i\beta$ جذرا للمعادلة المميزة أما إذا كان $\alpha + i\beta$ جذرا للمعادلة المميزة من الدرجة s فإنه من الضروري ضرب الطرف الثاني للمعادلة (19) في x^s .

ونلخص النتائج السابقة في الجدول التالي :-

$g(x)$	$y_p(x)$
$\underline{p}_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$	$x^s [A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_0]$
$\underline{p}_m(x) e^{\alpha x}$	$x^s [A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_0] e^{\alpha x}$
$\underline{p}_m(x) e^{\alpha x} \begin{cases} \cos \beta x \\ \sin \beta x \end{cases}$	$x^s [(A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_0) e^{\alpha x} \cos \beta x \\ + (B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \dots + B_0) e^{\alpha x} \sin \beta x]$

جدول -1-

حيث S هو اصغر عدد صحيح موجب بحيث أن كل حد في y_p يختلف عن جميع حدود الحل المتجانس $y_h(x)$.

ملاحظة :-

إذا كان $g(x)$ عبارة عن مجموع الحالات الثلاثة السابقة فإن من السهل دائماً في العملي حساب الحل الخاص المقابل لكل حد على حده، وبناءً على مبدأ التركيب للمعادلة التفاضلية الخطية يكون الحل الخاص الكلي عبارة عن مجموع الحلول الخاصة لكل حد على حده.

مثال 4-

جد الحل الخاص للمعادلة التالية:-

$$y''' - 4y' = x + 3 \cos x + e^{-2x}$$

الحل :-

أولاً يجب البحث عن الحل المتجانس للمعادلة المتجانسة :

$$y''' - 4y' = 0$$

وهي معادلة من المرتبة الثالثة ذات معاملات ثابتة.

$$m^3 - 4m = m(m^2 - 4) = 0 \quad \text{المعادلة المميزة هي :-}$$

$$m_1 = 0, m_2 = 2, m_3 = -2 \quad \text{وجنورها هي :}$$

ويكون الحل المتجانس من الصورة :

$$y_h = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$$

باستعمال مبدأ التراكيب يمكن كتابة الحل الخاص للمعادلة قيد الحل على صورة
مجموع الحلول الخاصة للمعادلات التالية:-

$$y''' - 4y' = x, \quad y''' - 4y' = 3\cos x, \quad y''' - 4y' = e^{-2x}$$

بالنسبة للمعادلة الأولى نفرض الحل من الصورة $y_{p_1} = A_1 x + A_0$

وبما أن الثابت هو حل للمعادلة المتجانسة إذن نضرب في x :

$$y_{p_1} = x(A_1 x + A_0)$$

بالنسبة للمعادلة الثانية نفرض الحل الخاص من الصورة :

$$y_{p_2}(x) = B \cos x + C \sin x$$

ولا تغير هذه الصيغة لأن $\cos x$ و $\sin x$ ليست حلول للمعادلة المتجانسة .

أما بالنسبة للمعادلة الأخيرة نلاحظ أن e^{-2x} هو حل للمعادلة المتجانسة لهذا نفرض
الحل الخاص من الصورة

$$y_{p_3} = D x e^{-2x}$$

ويتم تعيين الثوابت بالتعويض عن هذه الحلول الخاصة في المعادلة المقابلة لهما.
فيكون لدينا:-

$$A_1 = -\frac{1}{8}, \quad A_0 = 0, \quad B = 0, \quad C = -\frac{3}{5}, \quad D = \frac{1}{8}$$

إذن الحل الخاص للمعادلة قيد الحل هو:-

$$y_p(x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{5}\sin x + \frac{1}{8}xe^{-2x}$$

د. طريقة تغيير البارامترات: The Method of Variation of Parameters

تمتاز طريقة تغيير البارامترات بعموميتها حيث يمكن تطبيقها على جميع أنواع المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة سواء كانت ذات معاملات ثابتة أو متغيرة (أي دوال في المتغير x) وبصرف النظر عن نوع الطرف الأيمن $g(x)$ ، بعكس الحال في طريقة المعاملات غير المعينة التي تطبق فقط في الحالات التي تكون فيها المعاملات ثابتة لأنماط معينة من الدوال $g(x)$. لكن يعيب طريقة تغيير البارامترات أنها :-

1- أكثر مشقة خصوصاً في حالة علو مرتبة المعادلة التفاضلية .

2- اعتمادها على معرفة الحل المتجانس والذي قد يكون معتزراً فسي حالة كون المعاملات متغيرة.

2- تضمنها تكاملات قد يتعذر الحصول عليها على صورة مغلقة.

تكتب المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة على الصورة :-

$$(20) \quad L[y] = y^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \underline{p}_1(x)y' + \underline{p}_0(x)y = g(x)$$

لنفرض أننا نعرف قاعدة الحلول y_1, y_2, \dots, y_n للمعادلة المتجانسة

$$(21) \quad y_p(x) = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) + \dots + A_n y_n(x) \quad \text{إذن:}$$

وتتلخص طريقة تغيير البارامترات في فرض حل خاص للمعادلة الخطية غير المتجانسة (20) على الصورة (21) لكن بعد تغيير الثوابت أو البارامترات $\{A_i\}$ إلى

دوال $\{\mu_i(x)\}$ ليكون الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة على الصورة :-

$$(22) \quad y_p(x) = \mu_1(x) y_1(x) + \mu_2(x) y_2(x) + \dots + \mu_n(x) y_n(x)$$

ويبقى تعيين الدوال $\{\mu_i(x)\}$ بحيث يحقق هذا الحل $y_p(x)$ المعادلة غير المتجانسة $L[y] = g(x)$. ولتعيين هذه الـ n من الدوال الاختيارية يلزم فرض n من الشروط. وأحد هذه الشروط هي بالطبع أن يحقق الحل المفروض (22) المعادلة التفاضلية المعطاة (20) أي $L[y] = g(x)$ أما باقي الشروط $(n-1)$ فيمكن اختيارها بحيث يتيسر حساب الحل.

من المعادلة (22) نجد أن :

$$(23) \quad y' = \sum_{i=1}^n \mu_i(x) y_i'(x) + \sum_{i=1}^n \mu_i'(x) y_i(x)$$

ونختار الشرط الأول من الصورة :

$$(24) \quad \sum_{i=1}^n \mu_i' y_i = \mu_1' y_1 + \mu_2' y_2 + \dots + \mu_n' y_n = 0$$

وبالتالي تصبح المعادلة (23) من الصورة :

$$y' = \sum_{i=1}^n \mu_i(x) y_i'(x) = \mu_1 y_1' + \mu_2 y_2' + \dots + \mu_n y_n'$$

ونستمر بنفس الطريقة فتكون المشتقة من المرتبة (m) للحل y_p من الصورة:

$$(24) \quad y_p^{(m)} = \sum_{i=1}^n \mu_i(x) y_i^{(m)}(x) = \mu_1 y_1^{(m)} + \mu_2 y_2^{(m)} + \dots + \mu_n y_n^{(m)}$$

حيث $m = 0, 1, \dots, n-1$

وتكون الشروط $(n-1)$ المتوالية بالنسبة للدوال $\{\mu_i\}$ هي:

$$(25) \quad \sum_{i=1}^n \mu_i' y_i^{(m-1)} = \mu_1' y_1^{(m-1)} + \mu_2' y_2^{(m-1)} + \dots + \mu_n' y_n^{(m-1)}$$

حيث $m = 0, 1, \dots, n-1$

والمشتقة n للدالة y_p هي:

$$(26) \quad y_p^{(n)} = (\mu_1 y_1^{(n)} + \dots + \mu_n y_n^{(n)}) + (\mu_1' y_1^{(n-1)} + \dots + \mu_n' y_n^{(n-1)})$$

في النهاية ، نفرض الشرط أن y_p يحقق المعادلة (21) . بالتعويض عن مشتقات

y_p من المعادلة (24) و (26) في (21) ثم نجمع الحدود المتشابهة وباستعمال

العلاقة $L[y_i] = 0$ حيث $i = 1, 2, \dots, n$

ونجد أن :

$$(27) \quad \sum_{i=1}^n \mu'_i y_i^{(n-1)} = \mu'_1 y_1^{(n-1)} + \mu'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + \mu'_n y_n^{(n-1)} = g(x)$$

وبإضافة هذه المعادلة إلى النظام (25) نحصل على n من المعادلات الخطية غير

المتجانسة بالنسبة إلى $\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_n$:

$$(28) \quad \left. \begin{array}{l} y_1 \mu'_1 + y_2 \mu'_2 + \dots + y_n \mu'_n = 0 \\ y'_1 \mu'_1 + y'_2 \mu'_2 + \dots + y'_n \mu'_n = 0 \\ y''_1 \mu'_1 + y''_2 \mu'_2 + \dots + y''_n \mu'_n = 0 \\ \dots \\ y_1^{(n-1)} \mu'_1 + y_2^{(n-1)} \mu'_2 + \dots + y_n^{(n-1)} \mu'_n = g(x) \end{array} \right\}$$

والشرط الكافي لوجود حل لجملة المعادلات (28) هو أن محدد المعاملات يكون غير معدوم من أجل قيم x . وفي هذه الحالة محدد المعاملات هو $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ الذي يختلف عن الصفر لأن y_1, y_2, \dots, y_n حلول مستقلة خطياً للمعادلة المتجانسة.

إنه فإنه من الممكن تعيين الدوال $\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_n$.

باستعمال قاعدة كرامير (Cramer) يمكن الحصول على حل المعادلات فنجد أن :

$$(29) \quad \mu'_m(x) = \frac{g(x)W_m(x)}{W(x)}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

حيث $W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ و W_m هو المحدد الذي نحصل عليه في المحدد $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ باستبدال العمود m بالعمود $(0, 0, \dots, 0, 1)^+$ باستعمال هذه الصيغة يكون الحل الخاص من الصورة التالية:

$$(30) \quad y_p(x) = \sum_{m=1}^n y_m(x) \int \frac{g(x)W_m(x)}{W(x)} dx$$

ويمكن اختصار الحسابات في عبارة y_p باستعمال متطابقة أبيل :

$$(31) \quad W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n) = ce^{-\int p_{n-1}(x) dx}$$

والثابت c يمكن تعيينه بحساب $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ عند نقطة مختارة ونترك إثبات ذلك للقارئ .

مثال -5-

باستعمال طريقة تغيير البارامترات ، جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التالية:-

$$y''' - y' = x$$

الحل :

نبحث أولاً عن الحل المتجانس للمعادلة المتجانسة $y''' - y' = 0$ معادلتها المميزة هي $m^3 - m = 0$.

وجذورها هي : $m_1 = 0, m_2 = 1, m_3 = -1$

ويكون الحل المتجانس :

$$y_h = A_1 + A_2 e^x + A_3 e^{-x} \quad (i)$$

نفرض الحل الخاص للمعادلة قيد الحل على الصورة :

$$y_p = \mu_1(x) + \mu_2(x)e^x + \mu_3(x)e^{-x}$$

$$y_1 = 1, y_2 = e^x, y_3 = e^{-x} \quad \text{حيث}$$

وتكون الشروط الثلاثة (28) في الصورة التالية :

$$1\mu_1' + e^x\mu_2' + e^{-x}\mu_3' = 0$$

$$0\mu_1' + e^x\mu_2' - e^{-x}\mu_3' = 0 \quad \text{(iii)}$$

$$0\mu_1' + e^x\mu_2' + e^{-x}\mu_3' = x$$

ويكون محدد هذا النظام كالتالي:

$$W(1, e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad \forall x$$

إذن محصلة المعادلات السابقة تقبل حلاً غير الحل الصفري.

أي

$$\mu_1' = \frac{x}{W} \begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 1 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{x}{2}(-2) \Rightarrow \mu_1 = -\frac{x^2}{2}$$

$$\mu_2' = \frac{x}{W} \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-x} \\ 0 & 0 & -e^{-x} \\ 0 & 1 & e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{x}{2}e^{-x} \Rightarrow \mu_2 = -\frac{1}{2}(x-1)e^{-x}$$

$$\mu_3' = \frac{x}{W} \begin{vmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \end{vmatrix} = \frac{x}{2} e^x \Rightarrow \mu_3 = -\frac{1}{2}(x-1)e^x$$

ويكون الحل الخاص من الصورة :

$$y_p = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(x-1)e^{-x}e^x + \frac{1}{2}(x-1)e^xe^{-x}$$

$$y_p = -\frac{x^2}{2}$$

تمارين

I - هل تكون مجموعة الدوال المرفقة لكل معادلة تفاضلية الحل العام للمعادلة المعطاة، ثم عين مجال صلاحية الحلول ثم اكتب صورة الحل العام:

$$y''' - y'' - 10y' - 8y = 0 \quad \{e^{-x}, e^{-2x}, e^{4x}\}$$

$$y^4 - y = 0 \quad \{e^x, e^{-x}, \cos x, \sin x\}$$

$$y''' - y'' - y' + y = 0 \quad \{e^x, e^{-x}, \cosh x\}$$

$$y''' - y'' - y' + y = 0 \quad \{e^x, e^{-x}, xe^x\}$$

$$y''' - y' = x \quad \left\{ -\frac{1}{2}x^2, e^{-x}, 1, e^x \right\}$$

$$y^{(4)} - y = e^{-x} \quad \left\{ \cos x, \sin x, e^x, -\frac{1}{2}xe^{-x}, e^{-x} \right\}$$

II - لنعتبر المعادلة الخطية الثابتة من المرتبة n :

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

حيث $a_i (i=1,2,\dots,n)$ دوال مستمرة على المجال I .

لنفرض أن $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ هي n حل للمعادلة التفاضلية على المجال I .

أ- أثبت أن من أجل $n=3$

$$W(\phi_1, \dots, \phi_n)(x) = W(\phi_1, \dots, \phi_n)(x_0) \exp\left[-\int_{x_0}^x a_1(s) ds\right]$$

من أجل $x_0 \in I$

ب- اثبت هذه العلاقة في الحالة العامة n

ج- بين أنه إذا كانت المعاملات a_i ثوابت حقيقية فإن :

$$W(\phi_1, \dots, \phi_n)(x) = W(\phi_1, \dots, \phi_n)(x_0) \exp[-a_i(x - x_0)]$$

III- نعتبر المعادلة :

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$$

حيث a_3, a_2, a_1 ثوابت حقيقية. نفرض أن $\{m_1, m_2, m_3\}$ هي مجموعة حلول المعادلة الجبرية:-

$$m^3 + a_1 m^2 + a_2 m + a_3 = 0$$

أ- إذا كانت $m_1 \neq m_2 \neq m_3$ فأثبت أن الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية هو:

$$y(x) = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x} + ce^{m_3 x} \quad \text{حيث } -\infty < x < \infty$$

ب- إذا كان $m_1 = m_2 \neq m_3$ فأثبت أن الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية:

$$y(x) = Ae^{m_1 x} + Bxe^{m_1 x} + ce^{m_3 x} \quad \text{حيث } -\infty < x < \infty$$

ج- إذا كان $m_1 = m_2 = m_3$ فأثبت أن الحل العام هو:

$$y(x) = Ae^{m_1 x} + Bxe^{m_1 x} + cx^2 e^{m_1 x} \quad \text{حيث } -\infty < x < \infty$$

د- في حالة $m_1 = m_2 = m_3$ جد a_3, a_2, a_1 بدلالة m_1

IV - جد الحل العام لكل من المعادلات التالية:

$$y''' - 5y'' - y' + 5y = 0 \quad -1$$

$$2y''' + y'' - y' = 0 \quad -2$$

$$y^{(4)} - 10y''' + 35y'' - 50y' + 24y = 0 \quad -3$$

$$y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0 \quad -4$$

$$y^{(5)} - y''' = 0 \quad -5$$

$$y^{(5)} + 6y''' + 9y'' = 0 \quad -6$$

V - باستخدام طريقة المعاملات غير المعينة . جد الحل الخاص لكل من المعادلات

التفاضلية التالية:-

$$y^{(4)} + 4y'' - 3y' + 10y = 7 \quad -1$$

$$2y^{(6)} + 5y^{(5)} - 4y''' = 9 \quad -2$$

$$y''' + y'' - 3y' = 5e^{4x} \quad -3$$

$$y^{(4)} - 8y' = xe^x \quad -4$$

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + y''' = 2x^2 \quad -5$$

VI- باستخدام طريقة تغيير البارامترات جد الحل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية التالية:-

$$y''' - y' = \cos x \quad -1$$

$$y''' - y'' - y' + y = 2xe^x \quad -2$$

$$y^{(4)} - y = \sin 2x \quad -3$$

$$y''' + y' = \tan x \quad -4$$

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 2x^2 e^x \quad -5$$

VII- نعتبر المعادلة التالية:

$$L[y] = y''' + Q_1(x)y'' + Q_2(x)y' + Q_3(x)y = 0 \quad (1)$$

حيث Q_1, Q_2, Q_3 دوال مستمرة على المجال I.

نفرض أن $\{y_1(x), y_2(x)\}$ مجموعة دوال مستقلة خطياً وحلول للمعادلة (1). على المجال I.

أ- بين أن $L[\mu y_1] = 0$ يعطي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية بالنسبة إلى μ'

ب- ليكن $\mathfrak{I} = \mathcal{G}(y_2 / y_1)'$. خفض مرتبة المعادلة الخطية من المرتبة الثانية إلى معادلة من المرتبة الأولى.

ج- تطبيق :

$$y''' - \frac{3}{x^3}y' + \frac{3}{x^3}y = 0$$

$$x > 0$$

$$y_2 = x, \quad y_1 = \frac{1}{x}$$

و

الفصل الثاني عشر.

تحويل لابلاس

The Laplace Transform

الفصل الثاني عشر

تحويل لابلاس

The Laplace Transform

Introduction

XII. 1. مقدمة

سننترق في هذا الباب إلى دراسة إحدى الطرق الناجحة لحل المعادلات التفاضلية الخطية وتسمى هذه الطريقة بطريقة التحويلات التكاملية. يعرف التحويل التكامل بالعلاقة التالية:-

$$(1) \quad F(s) = \int_{\infty}^{\beta} K(s, x) f(x) dx$$

حيث يتم تحويل الدالة $f(x)$ إلى دالة أخرى $F(s)$ بواسطة هذا التكامل وتسمى $F(s)$ تحويل الدالة $f(x)$ ، أما الدالة $K(s, x)$ تسمى نواة التحويل. تتمثل الفكرة العامة في استعمال هذه العلاقة (1) لتحويل المسألة بالنسبة للدالة $f(x)$ إلى مسألة أخرى بسيطة إلى $F(s)$ التي يمكن حلها بسهولة ثم يمكن الحصول على الدالة المطلوبة $f(x)$ من خلال تحويلها إلى $F(s)$ ، وباختيار مرفق للنواة $K(s, x)$ ونهايتي التكامل β, ∞ فإنه من الممكن جوهرياً اختزال مسألة المعادلة التفاضلية الخطية إلى مسألة معادلة جبرية .

وسنقتصر على دراسة نوع خاص من هذه التحويلات التكاملية وبعض تطبيقاتها في حل المعادلات التفاضلية الخطية، وهذا النوع هو تحويل لابلاس ، ويعرف تحويل لابلاس كما يلي:

$$(2) \quad L\{f(x)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

حيث أن نواة التحويل هي :

$$K(s, x) = \begin{cases} e^{-sx}, & x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

وينفع هذا النوع من التحويلات لإيجاد الحال الخاص للمعادلات التفاضلية غير المتجانسة وخاصة في حالة أن الحد المتجانس دالة غير مستقرة . ومن الملائم تعريف التحويل بالصورة التالية :-

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(x)e^{-sx} dx$$

حيث A عدد حقيقي موجب. إذا كان التكامل \int_0^A موجوداً وكانت نهايته عندما

$A \rightarrow \infty$ موجودة فنقول أن التكامل \int_0^{∞} متقارب وما عدا ذلك فنقول أن التكامل

متباعد. وتلخص الأمثلة التالية هاتين الحالتين :

مثال (1):

إذا كانت $f(x) = e^{cx}$ من أجل $x \geq 0$, c ثابت حقيقي غير معدوم أحسب:

$$\int_0^{\infty} e^{cx} dx$$

الحل:-

$$\int_0^{\infty} e^{cx} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{cx} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{cx}}{c} \Big|_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{c} [e^{cA} - 1]$$

وبالتالي فالتكامل متقارب إذا كان $c < 0$ ومتباعد إذا كان $c > 0$ أما إذا كان $c = 0$ فإن $f(x) = 1$ والتكامل متباعد أيضاً.

مثال (2):

إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ من أجل $x \geq 1$ أحسب $\int_1^{\infty} f(x) dx$

الحل :

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A$$

وبما أن $\lim_{A \rightarrow \infty} \ln A = \infty$ إذن فالتكامل متباعد .

مثال (3):

إذا كانت $f(x) = x^{-p}$ من أجل $x \geq 1$ و P ثابت حقيقي و $P \neq 1$

أحسب $\int_1^{\infty} f(x) dx$

الحل :

$$\int_1^{\infty} x^{-p} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A x^{-p} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} (A^{1-p} - 1)$$

عندما $A \rightarrow \infty$ ، $A^{1-p} \rightarrow 0$ إذا كان $p > 1$ و $A^{1-p} \rightarrow \infty$ إذا كان $p < 1$ إذن فالتكامل متقارب من أجل $p > 1$ ومتباعد من أجل $p \leq 1$ وهذه النتائج مماثلة

لنتائج المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Definitions and Theorems

XII - 2 تعاريف ونظريات

يجب وضع شروط على الدالة $f(x)$ لنضمن أن يكون التكامل المعرف بالعلاقة (2) متقارباً ، لهذا نعتبر الدوال $f(x)$ المعرفة من أجل $0 < x < \infty$ والتي تتزايد تدريجياً بجوار $x = 0$ حتى يكون التكامل متقارباً بجوار الصفر، ونعتبر أيضاً الدوال

التي تتزايد تدريجياً من أجل قيم x الكبرى حتى يكون التكامل متقارباً أيضاً عند اللانهاية ، كما يجب اعتبار الدوال القابلة للتكامل على جميع المجالات الجزئية للمجال $0 < x < \infty$ ، ويؤدي بنا هذا إلى التعاريف التالية:

تعريف -1-

نقول أن الدالة $f(x)$ المعرفة من أجل $0 < x < \infty$ متزايدة أسياً عند اللانهاية إذا تحققت المتراجحه التالية:

$$|f(x) \leq Me^{cx}|$$

من أجل قيم x الكبرى.

حيث $M > 0$ و c ثابتان حقيقيان.

تعريف -2-

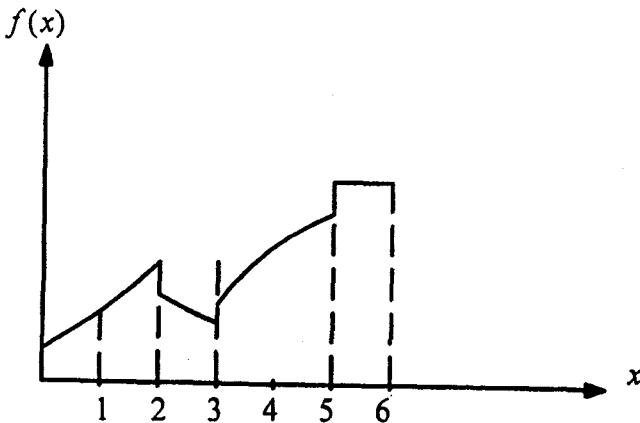
نقول أن الدالة $f(x)$ مستمرة بالقطع على المجال المغلق $a \leq x \leq b$ إذا كان من الممكن تجزئة هذا المجال إلى عدد محدود من المجالات الجزئية $c_i \leq x \leq d_i$ بحيث :

1- تكون الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال المفتوح $c_i < x < d_i$

2- تكون كل من النهايتين $\lim_{x \rightarrow c_i^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow d_i^-} f(x)$ موجودتان.

مثال -4-

الدالة الموضحة في الشكل -1- هي دالة مستمرة بالقطع على المجال $0 \leq x \leq 6$



شكل - 1 -

تعريف -3-

نقول أن الدالة $f(x)$ من الصنف Δ إذا تحققت الشروط التالية:-

- 1- يجب أن تكون الدالة معرفة على المجال $0 < x < \infty$.
- 2- يجب أن تكون الدالة قابلة للتكامل مطلقاً عند الصفر أي أن للتكامل

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^a |f(x)| dx$$

موجود من أجل كل عدد صغير a موجب .

- 3- يجب أن تكون الدالة مستمرة أو مستمرة بالقطع على المجال $0 < x < \infty$.
- 4- يجب أن تكون الدالة متزايدة أسياً عند اللانهاية.

مثال - 5 -

بين أن كل من الدوال: $1, x, x^n$ (n عدد صحيح موجب)، $\sin x$ ، $\cos x$ ، e^{3x} .
(حيث 3 عدد موجب).

هي دوال من الصنف Δ .

وأن الدالة e^{x^2} ليست من الصنف Δ .

الحل:-

واضح أن كل من هذه الدوال محققة للشروط الثلاثة الأولى المذكورة في التعريف 4-

ويبقى تحقيق الشرط الرابع:-

لنحسب:-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [e^{-cx} \cdot x^n] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{cx}}$$

إذا كان $c > 0$ فإنه يمكن حساب هذه النهاية بطريقة هوبنال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{cx}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{ce^{cx}} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{c^n e^{cx}} = 0$$

c إذن الدالة x^n من أجل n عدد صحيح موجب متزايدة أسياً عند اللانهاية من أجل ثابت موجب.

يمكن التأكد بنفس الطريقة أن كل من الدوال :

$$\sin x, \cos x, e^{3x}$$

هي دوال من الصنف Δ ،

أما بالنسبة للدالة e^{x^2} فهي ليست متزايدة أسياً عند اللانهاية لأن :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [e^{-cx} \cdot e^{x^2}] = \infty , \quad \forall C$$

وبالتالي فهي ليست من الصنف Δ .

نظرية -1-

إذا كانت $f(x)$ دالة من الصنف Δ فإن تحويل لابلاس $L\{f(x)\} = F(s)$ المعروف بالعلاقة (2) موجود.

البرهان:

يعطي تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ بالعلاقة (2):

$$L\{f(x)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

ويمكن تجزئة هذا التكامل إلى عدة أجزاء:

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^{\delta} e^{-sx} f(x) dx + \int_{\delta}^{x_0} e^{-sx} f(x) dx + \int_{x_0}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

حيث $\delta > 0$ و $x_0 < \infty$.

- من أجل $x < \delta$ ، الدالة $|e^{-sx}|$ محدودة وبما أن $f(x)$ من الصنف Δ فهي إذن قابلة للتكامل مطلقاً عند الصفر إذن التكامل:

$$\int_0^{\delta} |e^{-sx} f(x)| dx$$

متقارب من أجل $\delta > 0$.

وبما أن $f(x)$ دالة متزايدة أسياً عند اللانهاية فإن :

$$|e^{-sx} f(x)| \leq M e^{-(s-c)x}$$

وبالتالي من أجل $s > c$ يكون لدينا:

$$\left| \int_{x_0}^x e^{-sx} f(x) dx \right| \leq \int_{x_0}^{\infty} |e^{-sx} f(x)| dx \leq M \int_{x_0}^{\infty} e^{-(s-c)x} dx \leq \frac{M}{s-c} e^{-(s-c)x_0}$$

إذن فالتكامل $\int_0^s |e^{-sx} f(x)| dx$ متقارب.

- بما أن الدالة $f(x)$ مستمرة بالقطع على المجال $\delta < x < x_0$ فإن التكامل

$$\int_{x_0}^x |e^{-sx} f(x)| dx$$

متقارب .

وهكذا يكتمل برهان النظرية .

ملاحظات:-

1- إذا كان s عدداً مركباً فإن تكامل تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ من الصنف Δ يكون

متقارباً من أجل $\text{Re}(s) > 0$.

2- نلاحظ أن تحويل لابلاس هو عبارة عن مؤثر يلحق الدالة $F(s)$ بالدالة $f(x)$

أي:

$$F(s) = L\{f(x)\}$$

وهو مؤثر خطي أي:-

$$\forall c_1, c_2, \in \mathfrak{R} , L\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\} = c_1 L\{f_1(x)\} + c_2 L\{f_2(x)\}$$

ونترك إثبات هذا للقارئ.

XII.3 تحويل بعض الدوال البسيطة Transforms of Elementary Functions

يمكن حساب تحويلات لابلاس لبعض الدوال البسيطة كالدوال الأسية والمثلثية وكثيرات الحدود.

مثال -6-

لتكن $f(x)$ دالة ذات قيم مركبة ومن الصنف Δ .

$$f(x) = \mu(x) + i\vartheta(x)$$

حيث μ, ϑ دالتين حقيقيتين.

جد تحويل لابلاس للدالة $f(x) = e^{3x}$ حيث $\mathfrak{I} = \alpha + i\beta$ و $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ و $i^2 = -1$

الحل:

بما أن L مؤثر خطي فإن :

$$L\{f(x)\} = L\{\mu(x) + i\vartheta(x)\} = L\{\mu(x)\} + iL\{\vartheta(x)\}$$

ومنه:

$$L\{e^{3x}\} = L\{e^{\alpha x} e^{i\beta x}\} = L\{e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x\}$$

$$L\{e^{3x}\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{3x} dx = \frac{-e^{-(s-3)x}}{s-3} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-3}$$

$$= \frac{1}{s - \alpha - i\beta} = \frac{s - \alpha + i\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$$

إذا كان s حقيقياً فإن :

$$L(e^{\alpha x} \cos \beta x) = \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$$

($\text{Re } s > \alpha$)

$$L(e^{\alpha x} \sin \beta x) = \frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$$

- إذا كان $\alpha = 0$ فإن :

$$L\{\cos \beta x\} = \frac{s}{s^2 + \beta^2}, \quad L\{\sin \beta x\} = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}, \quad (\text{Re } s > \alpha)$$

إذا كان $\beta = 0$ فإن :

$$L\{e^{\alpha x}\} = \frac{1}{s - \alpha}, \quad s > \alpha$$

إذا كان $\beta = 0, \alpha = 0$ فإن :

$$L\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

مثال -7-

جد $L\{x^n\}$ حيث n عدد صحيح موجب.

الحل :-

يكون لدينا من تعريف لابلاس ما يلي :-

$$L\{x^n\} = \int_0^{\infty} x^n e^{-sx} dx$$

بإجراء التكامل بالتجزئة نجد أن:

$$L\{x^n\} = \frac{-x^n e^{-sx}}{s} \Big|_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-sx} dx$$

من أجل $s > 0$ و $n > 0$ فإن :-

$$L\{x^n\} = \frac{n}{s} L\{x^{n-1}\}, \quad s > 0$$

ومن هذه العلاقة يمكن استنتاج من أجل $n-1$ ما يلي :-

$$L\{x^{n-1}\} = \frac{n-1}{s} L\{x^{n-2}\}$$

$$L\{x^n\} = \frac{n(n-1)}{s^2} L\{x^{n-2}\} \quad \text{إن}$$

وبإعادة العملية ينتج :

$$L\{x^n\} = \frac{n(n-1)}{s^2} L\{x^{n-2}\}$$

وبإعادة العملية ينتج :

$$L\{x^n\} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots 2.1}{s^n} L\{x^0\}$$

ولدينا من المثال -6- أن :

$$L\{x^0\} = L\{1\} = s^{-1}$$

إذن :

$$L\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$$

مثال -8-

جد تحويل لابلاس للدالة :

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 4 \\ 5 & x > 4 \end{cases}$$

الحل:

نلاحظ أن الدالة $f(x)$ غير معرفة عند $x = 0$ ، $x = 4$ ولكن :

$$L\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^4 e^{-sx} x dx + \int_4^{\infty} e^{-sx} 5 dx$$

$$= \left[-\frac{x}{s} e^{-sx} - \frac{1}{s^2} e^{-sx} \right]_0^4 + \left[-\frac{5}{s} e^{-sx} \right]_4^{\infty}$$

إذن :

$$Z\{f(x)\} = \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-4s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s^2}$$

Derivatives of Transforms

XII 4 مشتقات التحويلات

بناءً على نظرية التفاضل فإنه من الممكن الاشتقاق تحت تكامل تحويل لابلاس لأن

الدالة $f(x)$ دالة من الصنف Δ أي يمكن اشتقاق الدالة $F(s)$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

ومنه يكون:

$$(3) \quad F'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} [-xf(x)] dx$$

وبما أن الدالة $f(x)$ هي دالة من الصنف Δ فإنها تتزايد أسياً عند اللانهاية أي

$$|f(x)| \leq Me^{cx}, \quad M > 0, x \geq x_0$$

إذن :

$$|xe^{-sx} f(x)| \leq Mxe^{-(s-c)x}$$

ومنه يكون التكامل في العبارة (3) متقارباً من أجل $s > c$ وهي تمثل تحويل لابلاس $-xf(x)$. وبهذا نكون قد قدمنا برهان النظرية التالية:-

نظرية -3-

إذا كانت الدالة $f(x)$ من الصنف Δ و $F(s) = L\{f(x)\}$ فإن الدالة $xf(x)$ من الصنف Δ ويكون .

$$(4) \quad F'(s) = L\{-xf(x)\}$$

نتيجة (1)

في الواقع يمكن إعادة نفس الطريقة ونفس التحليل للأشتقاق تحت التكامل فنحصل على:

$$(5) \quad F^{(k)}(s) = (-1)^k \int_0^{\infty} e^{-sx} x^k f(x) dx$$

أي إذا كانت $f(x)$ من الصنف Δ فإن الدالة $(-1)^k x^k f(x)$ من الصنف Δ وتحويل لابلاس لهذه الدالة يعطي بالعبارة التالية :

$$(6) \quad L\{x^k f(x)\} = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} L\{f(x)\} \quad , \quad k=1,2,\dots$$

ملاحظات:

1- يمكن استعمال هذه النتيجة لتبسيط حساب بعض التحويلات وإحدى تطبيقاتها هي:
 أ- إذا أخذنا $f(x) = 1$ فإن :

$$L\{x^k\} = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \left[\frac{1}{s} \right] = \frac{k!}{s^{k+1}} \quad , \quad s > 0 \quad , \quad k=1,2,\dots$$

ب- إذا أخذنا $f(x) = e^{\alpha x}$ حيث $\Im = \alpha + i\beta$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ فإن :

$$\begin{aligned} L\{x^k e^{\alpha x}\} &= (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} L\{e^{\alpha x}\} = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \left[\frac{1}{s - \Im} \right] \\ &= \frac{k!}{(s - \Im)^{k+1}} \quad , \quad \Re s > \Re \Im, \quad k=1,2,\dots \end{aligned}$$

ويمكن استنتاج من هذه العبارة العلاقات التالية:-

$$L\{x^k e^{\alpha x} \cos \beta x\} = \frac{k! \Re[(s - \alpha) + i\beta]^{k+1}}{[(s - \alpha)^2 + \beta^2]^{k+1}} \quad \rightarrow$$

$$L\{x^k e^{\alpha x} \sin \beta x\} = \frac{k! \Im[(s - \alpha) + i\beta]^{k+1}}{[(s - \alpha)^2 + \beta^2]^{k+1}} \quad \rightarrow$$

$$L\{x^k \cos \beta x\} = \frac{k! \Re(s + i\beta)^{k+1}}{(s^2 + \beta^2)^{k+1}} \quad \rightarrow$$

$$L\{x^k \sin \beta x\} = \frac{k! \Im(s + i\beta)^{k+1}}{(s^2 + \beta^2)^{k+1}} \quad \rightarrow$$

2- نلاحظ من العبارتين التاليتين:

$$L\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

$$L\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a}, \quad \Re s > \Re a$$

أنه من الممكن الحصول على تحويل لابلاس لحاصل ضرب دالة ما في دالة أسية وذلك بإجراء انسحاب في المتغير s ، وفي الواقع هذه خاصية عامة نلخصها في النظرية التالية:

نظرية -4-

إذا كانت الدالة $f(x)$ من الصنف Δ و $F(s) = L\{f(x)\}$ فإن :

$$(7) \quad L\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a), \quad a \in \mathbb{C}$$

البرهان :-

نبدأ أولاً بإثبات أن الدالة $e^{ax} f(x)$ من الصنف Δ . ويكفي إثبات أن $e^{ax} f(x)$ دالة متزايدة أسياً عند اللانهاية. بما أن $f(x)$ من الصنف Δ فإن :

$$|f(x)| \leq Me^{cx}, \quad M > 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

إذا كان $\alpha = \Re a$ فإن :

$$|e^{ax} f(x)| \leq Me^{(\alpha+c)x} = Me^{bx}, \quad b \in \mathbb{R}$$

إذن $e^{ax} f(x)$ دالة في الصنف Δ ، وتحويل لابلاس هذه الدالة يمكن حسابه مباشرة من :-

$$L\{e^{ax} f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)x} f(x) dx$$

$$= F(s-a)$$

وهو المطلوب .

مثال -9-

باستعمال نتيجة هذه النظرية جد :-

$$L\{e^{\alpha x} \cos \beta x\} , Z\{e^{\alpha x} \sin \beta x\}$$

الحل :-

$$L\{\sin \beta x\} = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2} \quad \text{لدينا:}$$

$$L\{\cos \beta x\} = \frac{s}{s^2 + \beta^2} \quad \text{و:}$$

$$L\{e^{\alpha x} \sin \beta x\} = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} \quad \text{إن: } \Re s > \alpha$$

$$L\{e^{\alpha x} \sin \beta x\} = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} \quad \text{و } \Re s > \alpha$$

Transforms of Derivatives

XII تحويلات المشتقات

تكم أهمية تحويل لابلاس في إيجاد حلول المعادلات التفاضلية الخطية، وتتعلق هذه المسألة بمعرفة تحويل لابلاس لمشتقة المتغير التابع، الذي يمكن تعيينه بدلالة تحويل لابلاس للمتغير التابع.

نظرية -5-

لتكن f دالة من الصنف Δ ومشتقتها هي أيضا من الصنف Δ ، وليكن تحويل لابلاس للدالة f هو $F(s) = L\{f(x)\}$ إذن:

$$(8) \quad L\{f'(x)\} = sF(s) - f(0)$$

البرهان:

نطبق ببساطة تعريف تحويل لابلاس والتكامل بالتجزئة فنجد أن :

$$\begin{aligned} L\{f'(x)\} &= \int_0^{\infty} e^{-sx} f'(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-sx} f'(x) dx \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ e^{-sx} f(x) \Big|_0^A + \int_0^A s e^{-sx} f(x) dx \right\} \\ &= -f(0) + s \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

حيث قد استعملنا في الواقع أن $\lim_{A \rightarrow \infty} e^{-sA} f(A) = 0$ حيث $\Re s > 0$.

ملاحظة:-

يمكن تعميم نتيجة النظرية (5) بسهولة لتشمل المشتقات ذات الرتب العليا، لهذا نعتبر Δ^k صنف من الدوال بحيث تكون هذه الدوال ومشتقاتها حتى الرتبة k مستمرة على المجال $0 < x < \infty$ وحتى الصنف Δ (حيث k عدد صحيح موجب). وبالتالي تكون فرضية النظرية (5) هي أن $f(x)$ دالة من الصنف Δ^1 .

نظرية -6-

إذا كانت الدالة f من الصنف Δ^k حيث k عدد صحيح موجب ، وإذا كان تحويل لابلاس للدالة f هو $F(s)$ إذن :

$$(9) \quad L\{f^{(n)}(x)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

حيث $n = 1, 2, \dots, k$

البرهان :

تثبت هذه النظرية باستعمال البرهان بالتراجع على n من أجل k ثابت ، وتذكر أن طريقة التراجع لا يمكن تنفيذها من أجل $n > k$ لأن الفرضيات لا تتضمن وجود تحويلات لابلاس للمشتقات ذات الرتب أعلى من الرتبة k .

في حالة $n = 1$ نحصل على نتيجة النظرية -5- .

فإذا فرضنا أن المعادلة صحيحة من أجل n أي بالنسبة $f^{(n)}(x)$ فإنه يمكن كتابة $f^{(n+1)}(x)$ التي هي المشتقة الأولى للدالة $f^{(n)}(x)$ بتطبيق النظرية -5- نجد أن :

$$\begin{aligned} L\{f^{(n+1)}(x)\} &= sL\{f^{(n)}(x)\} - f^{(n)}(0) \\ &= s[s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)] - f^{(n)}(0) \\ &= s^{n+1} F(s) - s^n f(0) - \dots - s f^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0) \end{aligned}$$

وهذه هي المعادلة قيد الإثبات مع تغيير n إلى $n+1$ إذن النظرية -6- قد تم إثباتها بطريقة التراجع.

وتعتبر هذه النظرية -6- هي القاعدة في استعمال تحويل لابلاس لحل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعادلات الثابتة وفي ما يلي سنعطي بعض الأمثلة البسيطة لتوضيح هذه الفكرة.

مثال -10-

جد الحل $\phi_o(x)$ للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى الثابتة:

$$y' + ay = 0$$

الذي يحقق الشرط الابتدائي التالي: $\phi_o(0) = y_o$ حيث a, y_o ثابتان اختياريان.

الحل :-

حل هذه المعادلة هو : $y = y_o e^{-ax}$ حيث y_o ثابت اختياري ، ونلاحظ أن هذه الدالة من الصنف Δ^1 . لنبحث عن هذا الحل بطريقة تحويل لابلاس.

$$Y_o(s) = L\{\phi_o\} \quad \text{ليكن :}$$

$$L\{\phi'_o\} = sY_o(s) - \phi_o(0) \quad \text{إنن :}$$

وبما أن L مؤثر خطي فإن :

$$L\{\phi'_o + a\phi_o\} + aL\{\phi_o\} = 0$$

$$sY_o(s) - \phi_o(0) + aY_o(s) = 0 \quad \text{أي :}$$

$$Y_o(s) = \frac{y_o}{s+a} \quad \text{أو :}$$

وتبقى المشكلة الوحيدة هي إيجاد الدالة $\phi_o(x)$ التي تحويلها هو $Y_o(s)$ ولقد سبق أن رأينا في الأمثلة السابقة أن :

$$L\{e^{-ax}\} = \frac{1}{s+a}, \quad s > 0$$

$$\phi_o(x) = y_o e^{-ax} \quad \text{إذن :}$$

ونلاحظ أن الدالة $\phi_o(x)$ هي من الصنف Δ^1 .

مثال-11-

باستخدام طريقة تحويل لابلاس ، جد حل المعادلة التفاضلية غير المتجانسة التالية:

$$y' + ay = f(x)$$

والذي يحقق الشرط التالي :

$$y(0) = y_o$$

الحل :-

لنفرض أن الدالة $f(x)$ هي من الصنف Δ وبالتالي يمكن حل هذه المعادلة بطريقة تحويل لابلاس حيث أن y هي دالة أيضا من الصنف Δ^1 ، وليكن :

$$L\{y\} = Y(s)$$

$$L\{f(x)\} = F(s) \quad \text{و}$$

وتتحول المعادلة التفاضلية السابقة إلى معادلة جبرية من الصورة :

$$Y(s) = \frac{y_o}{s+a} + \frac{F(s)}{s+a}$$

ويبقى الآن معرفة الدالة $y(x)$ انطلاقاً من معرفة تحويلها $y(s)$ ، وليس لدينا طريقة واضحة إلى الآن لإيجاد التحويل العكسي، وسندرس هذه المسألة في الفقرات الموالية . كما سنثبت بعدها أن الحل يكون من الصورة التالية:

$$y(x) = -y_0 e^{-ax} + \int_0^x e^{-a(x-\mu)} f(\mu) d\mu.$$

$$L \left\{ \int_0^x e^{-a(x-\mu)} f(\mu) d\mu \right\} = \frac{F(s)}{s+a} \quad \text{حيث أن :}$$

مثال -12-

جد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' + 2xy = \sin x \quad , \quad y(0) = y_0$$

الحل:-

نلاحظ أن في المثالين السابقين ، كان لدينا معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة. ولكن في هذه الحالة المعادلة التفاضلية خطية ولكن ذات معاملات متغيرة. باستعمال طريقة الفصل الثاني يمكن الحصول على حل لهذه المعادلة من الصورة التالية:-

$$y(x) = y_0 e^{-x^2} + e^{-x^2} \int_0^x e^{s^2} \sin s ds$$

أما باستخدام طريقة تحويل لابلاس فإنه يمكن تحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلة أخرى من الصورة :

$$sZ(s) - y(0) - 2Z'(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

حيث : $Z(s) = L\{y(x)\}$

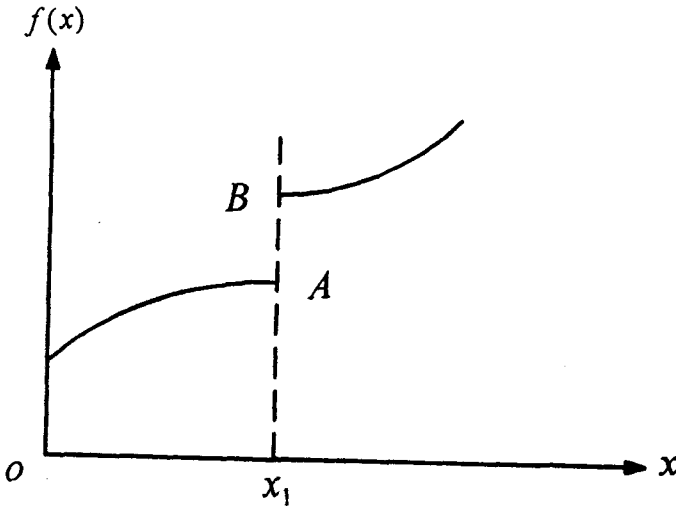
وهي عبارة عن معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى وليست أبسط من المعادلة الأصلية.

إذن يوضح هذا المثال أن طريقة لابلاس لا تجدي نفعاً في حالة المعادلات التفاضلية غير الخطية أو الخطية ذات المعاملات المتغيرة.

ملاحظة :

إذا كانت الدالة $f(x)$ غير مستمرة فإنه لا يمكن الحصول على تحويل لابلاس للدالة $f'(x)$ من العبارة (8) . ويجب الأخذ بعين الاعتبار إضافة بعض الحدود في هذه العبارة .

على سبيل المثال نأخذ الدالة $f(x)$ المبينة في الشكل التالي:-



شكل -2-

إذا كانت $f(x)$ دالة من الصنف Δ^1 فإنه يمكن حساب تحويل لابلاس بالصورة التالية:-

$$L\{f'(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f'(x) dx = \int_0^{x_1} e^{-sx} f'(x) dx + \int_{x_1}^{\infty} e^{-sx} f'(x) dx$$

وبعد إجراء التكامل بالتجزئة نجد أن :

$$L\{f'(x)\} = e^{-sx} f(x) \Big|_0^{x_1} + s \int_0^{x_1} e^{-sx} f(x) dx + e^{-sx} f(x) \Big|_{x_1}^{\infty} + s \int_{x_1}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

$$= s \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx + e^{-sx_1} f(x_1^-) - f(0) - e^{-sx_1} f(x_1^+)$$

$$= sL\{f(x)\} - f(0) - e^{-sx_1} [f(x_1^+) - f(x_1^-)]$$

$$f(x_1^+) - f(x_1^-) = AB$$

حيث :

وبهذا نكون قد أثبتنا النظرية التالية :-

نظرية -7-

إذا كانت الدالة $f(x)$ من الصنف Δ^1 ومستمرة من أجل $x \geq 0$ عدا عند النقطة $x = x_1$ وإذا كان تحويل لابلاس لهذه الدالة $f(x)$ هو :

$$L\{f(x)\} = F(s)$$

فإن :

$$(10) \quad L\{f'(x)\} = sF(s) - f(0) - e^{-sx_1} [f(x_1^+) - f(x_1^-)]$$

ملاحظة :-

إذا كان للدالة $f(x)$ عدة نقطة اتصال فإنه يجب إضافة حدود مشابهة للحدود التي أضفناها في العبارة (10).

يمكن الحصول على تحويل لابلاس لقوى x غير الصحيحة وذلك باستعمال دالة ما ليست معرفة في الرياضيات الأولية تسمى دالة جاما .
تعرف الدالة جاما بالعلاقة التالية :

$$(11) \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-\beta} \beta^{x-1} d\beta \quad , \quad x > 0$$

وبتعويض $(x+1)$ بدل x في العبارة (11) نجد أن :

$$(12) \quad \Gamma(x+1) = \int_0^x e^{-\beta} \beta^x d\beta$$

ويُجرى التكامل بالتجزئة نجد ما يلي :

$$(13) \quad \Gamma(x+1) = -e^{-\beta} \beta^x \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-\beta} \beta^{x-1} d\beta$$

وبما أن $x > 0$ إذن $\beta^x \rightarrow 0$ عندما $\beta \rightarrow 0$ ومنه يكون:

$$\beta \rightarrow \infty \quad e^{-\beta} \beta^x \rightarrow 0$$

ونستنتج أن :

$$(14) \quad \Gamma(x+1) = x \int_0^{\infty} e^{-\beta} \beta^{x-1} d\beta = x\Gamma(x)$$

نظرية -8-

من أجل $x > 0$ فإن $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

ملاحظة :-

في حالة n عدد صحيح يمكن استعمال عبارة النظرية -8- فيكون لدينا:

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &\text{-----} \\ &= n(n-1)(n-2)\dots 2\Gamma(2) \\ &= n!\Gamma(1)\end{aligned}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-\beta} \beta^0! \beta = -e^{-\beta} \int_0^{\infty} = 1 \quad \text{ولكن:}$$

وهكذا نكون قد أثبتنا النظرية التالية:

نظرية -9-

من أجل n عدد صحيح موجب فإن $\Gamma(n+1) = n!$

ملاحظة:

بوضع $\beta = st$ حيث $s > 0$ في عبارة التكامل (14) نحصل على :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-st} s^x t^x s dt = s^{x-1} \int_0^{\infty} e^{-st} t^x dt$$

حيث $x+1 > 0$ ومنه يكون:

$$\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^x dt \quad , \quad s > 0 \quad , \quad x > -1$$

وواضح أن الطرف الثاني هو عبارة تحويل لابلاس للدالة t^x ومنه فإن :

$$(15) \quad L\{t^x\} = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$$

وإذا أخذنا $x = -1/2$ نجد أن:

$$L\{t^{-1/2}\} = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}}$$

ومنه نستنتج أن :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = s^{1/2} L\{t^{-1/2}\} = s^{1/2} \sqrt{\frac{\pi}{s}} = \sqrt{\pi}$$

Periodic Functions

XII.7 الدالة الدورية

نعتبر الدالة $f(x)$ دالة دورية ودورها x :

$$(16) \quad f(x+X) = f(x)$$

وتكون الدالة معرفة تماماً إذا كانت معرفة خلال دور واحد $0 \leq x < X$. وإذا كانت

$f(x)$ دالة من الصنف Δ فإن :-

$$L\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

ويمكن كتابة التكامل على شكل مجموع متكاملات:

$$L\{f(x)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nX}^{(n+1)X} e^{-sx} f(x) dx$$

ويوضع $x = nX + \beta$ تصبح العلاقة السابقة من الصورة :

$$L\{f(x)\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsX} \int_0^X e^{-s\beta} f(\beta) d\beta$$

ونلاحظ أن التكامل في الطرف الثاني في هذه العبارة لا يتعلق بـ n وبالتالي يمكن جمع المتسلسلة الهندسية على حدة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsX} = \sum_{n=0}^{\infty} [e^{-sX}]^n = \frac{1}{1 - e^{-sX}}$$

ونكون قد أثبتنا النظرية التالية:-

نظرية -10-

إذا كانت الدالة $f(x)$ من الصنف Δ وكانت $f(x+X) = f(x)$ فإن :

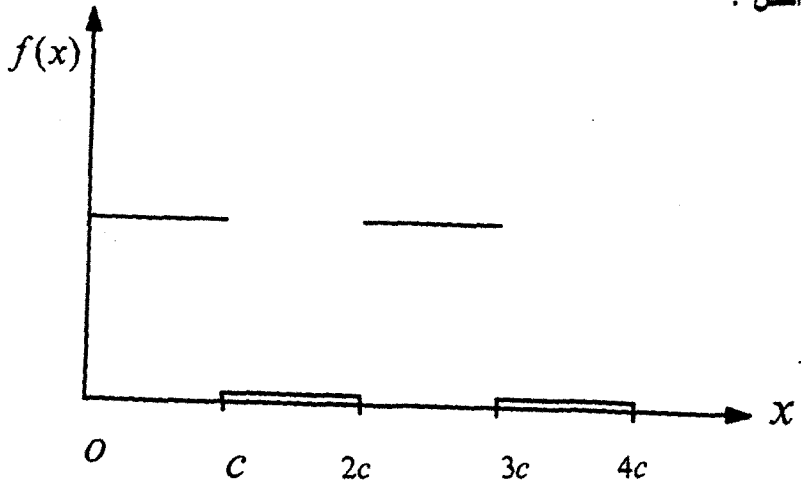
$$(17) \quad L\{f(x)\} = \frac{\int_0^X e^{-s\beta} f(\beta) d\beta}{1 - e^{-sX}}$$

مثال -12-

جد تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 & 0 < x < c \\ f(x) &= 0 & 0 < x < 2c \\ f(x+2c) &= f(x) \end{aligned}$$

الحل :



شكل-3-

يعطي تحويل لابلاس لهذه الدالة بالعلاقة (17) أي :

$$L\{f(x)\} = \frac{\int_0^x e^{-s\beta} f(\beta) d\beta}{1 - e^{-sx}}$$

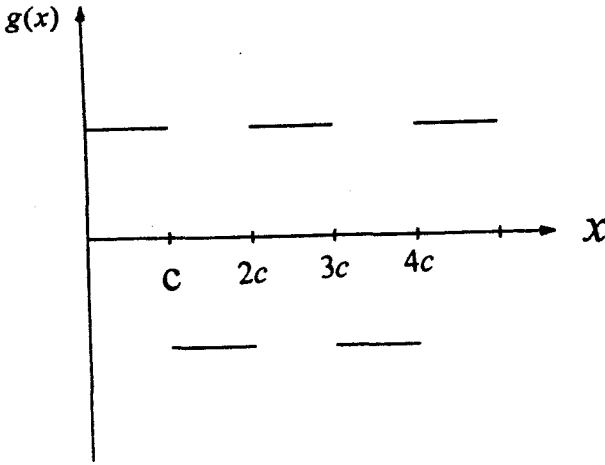
$$L\{f(x)\} = \frac{\int_0^c e^{-s\beta} 1 d\beta}{1 - e^{-2cs}} = \frac{1 - e^{-cs}}{s[1 - e^{-2cs}]}$$

$$L\{f(x)\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + e^{-cs}}$$

مثال -13-

جد تحويل لابلاس للدالة $g(x)$ المعرفة كما يلي :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < c \\ -1 & c < x < 2c \end{cases}$$



شكل -4-

نلاحظ أن : $g(x) = 2f(x) - 1$

حيث $f(x)$ هي الدالة المعرفة في المثال -12-

إذن : $L\{g(x)\} = L\{2f(x) - 1\}$

$$= \frac{1}{s} \left[\frac{2}{1 + e^{-cs}} - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{S} \cdot \frac{1 - e^{-CS}}{1 + e^{-CS}}$$

ويمكن كتابة هذه العبارة من الصورة :

$$L\{g(x)\} = \frac{1}{S} \tanh \frac{CS}{2}$$

The Inverse Transform

XII - 8 - التحويل العكسي

نلاحظ من خلال أمثلة الفقرة (XII - 5) أن مسألة حل المعادلات التفاضلية تكمن في معرفة الدالة التي يكون تحويلها معروفاً. فالدالة $f(x)$ حيث $L\{f(x)\} = F(s)$ تسمى بتحويل لابلاس العكسي للدالة $F(s)$ ويمكن أن نكتب:

$$(18) \quad L^{-1}\{F(s)\} = f(x).$$

حيث L^{-1} هو مؤثر لابلاس العكسي وهو أيضاً مؤثر خطي كما سنرى ذلك فيما بعد. وسنحاول الإجابة على السؤالين التاليين:

- 1- كيف يمكن معرفة التحويل العكسي $f(x)$ من خلال معرفة التحويل $F(s)$ ؟
- 2- هل التحويل العكسي لدالة معطاة F وحيد ؟.

نناقش في البداية السؤال الأول حيث يمكن الحصول على التحويل العكسي بطريقة تحليلية وبواسطة استعمال عبارة التحويل المركب . ويتطلب اشتقاق وتطبيق هذه العبارة معرفة نظريات التحليل الحقيقي المتعلقة بحساب التكاملات المحدودة . وقد تكون بعض هذه النظريات غير معروفة للقارئ لهذا نلجأ إلى طريقة أخرى يمكن من خلالها معرفة التحويل العكسي :

ليكن : $f(x)$ و $g(x)$ دالتين من الصنف Δ حيث:

$$L\{f(x)\} = F(s) \quad , \quad \Re s > \alpha$$

$$L\{g(x)\} = G(s) \quad , \quad \Re s > \beta$$

ولنبحث عن الدالة $h(x)$ التي تحويلها هو عبارة عن حاصل ضرب التحويلين $F(s)$ ، $G(s)$ أي:

$$(19) \quad L\{h(x)\} = H(s) = F(s).G(s) \quad , \quad \Re s > \sigma$$

$$\sigma = \max(\alpha, \beta) \quad \text{حيث}$$

ومنه:

$$L\{h(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \int_0^{\infty} e^{-sy} g(y) dy, \quad \Re s > \sigma$$

والتي يمكن كتابتها من الصورة:

$$L\{h(x)\} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s(x+y)} f(x)g(y) dx dy, \quad \Re s > \sigma$$

أو:

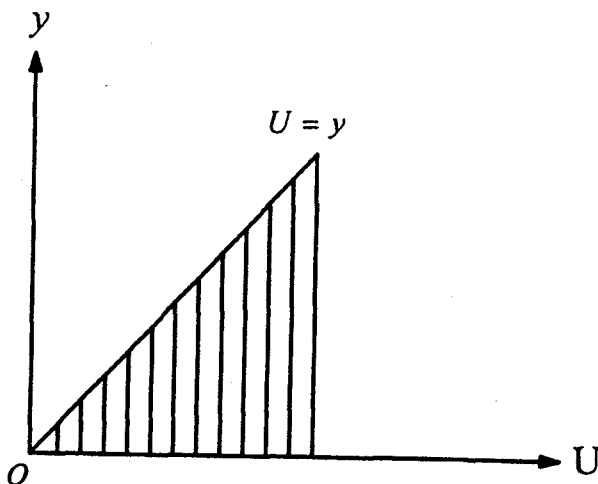
$$L\{h(x)\} = \int_0^{\infty} g(y) \left[\int_0^{\infty} e^{-s(x+y)} f(x) dx \right] dy$$

وبوضع $U = x + y$ نجد أن:

$$L\{h(x)\} = \int_0^{\infty} g(y) \left[\int_0^{\infty} e^{-sU} f(U-y) dU \right] dy$$

$$(20) \quad = \int_0^{\infty} e^{-sU} \left[\int_0^U f(U-y)g(y) dy \right] dU, \quad \Re s > \sigma$$

حيث تم تغيير تركيب التكاملات مع المحافظة على نفس منطقة التكامل الثنائي:-
 في الحالة الأولى:- يتغير y من الصفر إلى ∞ و U من y إلى ∞ .
 في الحالة الثانية:- يتغير U من الصفر إلى ∞ و y من الصفر إلى U .



شكل - 5

ونستنتج من العبارة (20) أن :

$$(21) \quad L\{h(x)\} = L\left\{\int_0^x f(x-y)g(y)dy\right\}$$

وبالتالي نفرض أن :

$$(22) \quad h(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy$$

هكذا نكون قد أثبتنا النظرية التالية:

نظرية -11-

إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ من الصنف Δ ،

$$L\{f(x)\} = F(s) \quad , \quad L\{g(x)\} = G(s)$$

فإن :

$$(23) \quad L\left\{\int_0^x f(x-y)g(y)dy\right\} = F(s).G(s)$$

ملاحظات:-

1- تسمى الدالة h المعرفة بالعلاقة (22) بالتفافعية الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ ويرمز لها في بعض الأحيان بالرمز:

$$h = f * g$$

$$2- \text{ إذا كان : } L\{f(x)\} = F(s) \quad \text{أو} \quad f(x) = L^{-1}\{F(s)\}$$

فنعقول أن $f(x)$ هو تحويل لابلاس العكسي أو اختصارا التحويل العكسي.

3- يمكن كتابة العبارة (23) باستعمال الملاحظة -2- على الصورة التالية :

$$(24) \quad L^{-1}\{F(s).G(s)\} = \int_0^x f(x-y)g(y)dy$$

4- نذكر فيما يلي بعض خصائص الالتفافعية ونترك إثباتها للقارئ :

$$1- \quad f * g = g * f$$

$$2- \quad f * (cg) = (cf) * g$$

$$3- \quad f * (g * h) = (f * g) * h$$

$$4- \quad f * (g + h) = f * g + f * h$$

$$5- \quad f * 0 = 0$$

مثال -14-

جد تحويل لابلاس العكسي للدالة :

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s+1}$$

الحل:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^x \quad \text{و} \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-x} \quad \text{لدينا:}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\} = \int_0^x e^{x-u} e^{-u} du = e^x \int_0^x e^{-2u} du \quad \text{ويكون:}$$

$$= e^x \left[\frac{e^{-2u}}{-2} \right]_0^x = \frac{1}{2} e^x (1 - e^{-2x}) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

كما يمكن الحصول على نفس النتيجة باستعمال الطريقة التالية.

نلاحظ أنه يمكن كتابة الحد $\frac{1}{s^2-1}$ من الصورة التالية:

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right]$$

وبما أن L^{-1} مؤثر خطي كما سئرى ذلك فيما يلي .

إذن :

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\} = \frac{1}{2} \left[L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \right]$$

$$= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

مثال -15-

جد تحويل لابلاس العكسي للدالة $\frac{1}{s^2(s^2+1)}$

الحل:

لقد سبق أن رأينا أن :

$$L\{x\} = \frac{1}{s^2} \quad , \quad L\{\sin x\} = \frac{1}{s^2+1}$$

إن بناءً على النظرية (11) فإن : $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}$ هو عبارة عن التفاضلية الدالتين

: $\sin x$, x

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^x (x-y) \sin y \, dy = x \int_0^x \sin y \, dy - \int_0^x y \sin y \, dy$$

$$= x - x \cos x + x \cos x - \sin x$$

$$= x - \sin x.$$

كما يمكن أيضاً الحصول على هذه النتيجة بالطريقة التالية:

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$$

وبما أن L^{-1} مؤثر خطي فإن :

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= x - \sin x.$$

ملاحظة:

سنقدم في آخر الفصل جدولاً لبعض تحويلات لابلاس وذلك للاستعانة بها واستخدامها للحصول على تحويلات لابلاس العكسية :
نعود الآن إلى السؤال الثاني الذي سبق أن طرحناه والمتعلق بوحداية التحويل العكسي، وسنقدم القاعدة الأساسية التالية دون إثبات، ويمكن الحصول على برهانها في كتب الرياضيات المتقدمة.

نظرية -12-

إذا كانت f_1, f_2 دالتين مستمرتين على المجال $0 < x < \infty$ ومن الصنف Δ و

$$\begin{aligned} L\{f_1(x)\} &= F_1(s) & , \Re s \geq \sigma \\ L\{f_2(x)\} &= F_2(s) & , \Re s \geq \sigma \end{aligned}$$

فإذا كان $F_1(s) = F_2(s)$ من أجل $\Re s \geq \sigma$ فإن $f_1(x) = f_2(x)$ من أجل كل قيم x .

نتيجة:

إحدى نتائج هذه النظرية هي خطية مؤثر تحويل لابلاس العكسي حيث إذا كانت f_1, f_2 دالتين مستمرتين ومن الصنف Δ وكان :

$$\begin{aligned} L\{f_1(x)\} &= F_1(s) & , \Re s \geq \sigma \\ L\{f_2(x)\} &= F_2(s) & , \Re s \geq \sigma \end{aligned}$$

فإن التحويل العكسي للدالة $aF_1(s) + bF_2(s)$ هو $af_1(x) + bf_2(x)$ حيث a, b ثابتان.

ولإثبات هذه النتيجة يكفي ملاحظة أن :

$$(25) \quad L\{af_1(x) + bf_2(x)\} = aF_1(s) + bF_2(s)$$

وبناءً على النظرية السابقة فإن الدالة المستمرة الوحيدة من الصنف Δ التي تحويلها هو $aF_1(s) + bF_2(s)$ وبالتالي :

$$(26) \quad L^{-1}\{aF_1(s) + bF_2(s)\} = af_1(x) + bf_2(x)$$

وهذا يعني أن L^{-1} مؤثر خطي.

ملاحظة :

تدخل مسألة تحويل لابلاس العكسي في عدة مسائل رياضية أخرى وكأبسط مثال النظرية التالية:

نظرية -13-

إذا كانت f دالة من الصنف Δ و $F(s)$ تحويل لابلاس لهذه الدالة فإن :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$$

البرهان:-

بما أن f دالة من الصنف Δ فإنها تحقق المترابحة التالية :

$$|f(x)| \leq Me^{cx}$$

حيث c عدد حقيقي

إن بوضع $\Re s = \sigma$ نجد أن :

$$|F(s)| \leq M \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{cx} dx = M \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} e^{-cx} dx = \frac{M}{\sigma - 2} \quad (\Re s > c)$$

وواضح أن :

$$(27) \quad \lim_{\Re s \rightarrow \infty} |F(s)| = 0$$

وهو المطلوب .

وهكذا نكون قد أثبتنا ما يمكن أن نحتاجه، ليس فقط $F(s)$ تؤول إلى الصفر عندما يؤول S إلى ∞ ولكن في الواقع أن $|sF(s)|$ تبقى محدودة عندما $\Re s \rightarrow \infty$. ونكتفي بهذا القدر فيما يخص مناقشة السؤال الثاني المتعلق بوحداية تحويل لابلاس العكسي، لأننا لا نستطيع أن نقدم كل التفاصيل في هذه الدراسة البسيطة والمختصرة، ولكن يبقى السؤال مهماً لأن في كثير من الحالات لا يمكن الحصول على التحويل العكسي في صورة صريحة.

تمرين :

أثبت أنه إذا كانت $f(x)$ دالة من الصنف Δ^1 وتحويلها هو $F(s)$ فإن :

$$(28) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0)$$

ثم أثبت أنه يمكن تعميم هذه النتيجة بالنسبة للدوال من الصنف Δ^k .

XII -9- تطبيقات على المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة.

Applications to Linear Equations with Constant Coefficients.

رأينا في الفقرة -5- أن مؤثر لابلاس يحول المعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة إلى معادلة جبرية بالنسبة لدالة التحويل، وقد تناولنا بعض المعادلات من المرتبة الأولى، ويمكن تعميم الفكرة بالنسبة للمعادلات ذات المرتبة العليا، ويمكن الآن دراسة بعض الأمثلة الإضافية بالتفصيل لمعرفة إيجابيات وسلبيات هذه الطريقة.

مثال -16-

جد حل مسألة القيم الحدية التالية باستخدام طريقة التحويل :

$$y'' + \beta^2 y = A \sin \omega t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

حيث ω, β, A ثوابت اختيارية.

الحل:-

نضع : $L\{y(x)\} = U(s)$ فيكون لدينا :

$$L\{y'(x)\} = sU(s) - y(0) = sU(s) - 1$$

و

$$L\{y''(x)\} = s^2U(s) - sy(0) - s^0 y'(0) = s^2U(s) - s$$

بتطبيق المؤثر L على المعادلة قيد الحل نجد أن :

$$s^2U(s) - s + \beta^2U(s) = \frac{A\omega}{(s^2 + \omega^2)}$$

$$U(s) = \frac{A\omega}{(s^2 + \beta^2)(s^2 + \omega^2)} + \frac{s}{s^2 + \beta^2} \quad \text{ومنه}$$

ولحساب التحويل العكسي نميز حالتين :

الحالة الأولى : $\omega \neq \beta$ إذن في هذه الحالة يمكن كتابة عبارة $U(s)$ على الصورة:

$$U(s) = \frac{s}{s^2 + \beta^2} + \frac{A\omega}{\beta^2 - \omega^2} \left[\frac{1}{s^2 + \omega^2} - \frac{1}{s^2 + \beta^2} \right]$$

$$= \frac{s}{s^2 + \beta^2} + \frac{A}{\beta(\beta^2 - \omega^2)} \left[\frac{\beta\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{\beta\omega}{s^2 + \beta^2} \right]$$

وكون $y(x) = L^{-1}\{U(s)\}$ من أجل $\omega \neq \beta$ فإن :

$$y(x) = L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \beta^2} \right\} + \frac{A\beta}{\beta(\beta^2 - \omega^2)} L^{-1} \left\{ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right\} - \frac{A\omega}{\beta(\beta^2 - \omega^2)} L^{-1} \left\{ \frac{\beta}{s^2 + \beta^2} \right\}$$

$$y(x) = \cos \beta x + \frac{A}{\beta(\beta^2 - \omega^2)} [\beta \sin \omega x - \omega \sin \beta x] \quad \text{أو}$$

الحالة الثانية:

في هذه الحالة يمكن كتابة عبارة $U(s)$ على الصورة :

$$U(s) = \frac{s}{s^2 + \beta^2} + \frac{A\beta}{(s^2 + \beta^2)^2}$$

وباستعمال العلاقة :

$$L\{x^k f(x)\} = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} L\{f(x)\}$$

$$\frac{1}{(s^2 + \beta^2)^2} = L\left\{\frac{1}{2\beta^3}(\sin \beta x - \beta x \cos \beta x)\right\} \quad \text{يكون:}$$

$$y(x) = \cos \beta x + \frac{A}{2\beta^2}(\sin \beta x - \beta x \cos \beta x) \quad \text{ومنه:}$$

وهذه المسألة بسيطة تبين أن هذه الدالة هي بالفعل الحل لمسألة القيم الحدية المعطاة.

مثال -17-

جد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 3x e^{-x} \quad , \quad y(0) = 4 \quad , \quad y'(0) = 2$$

الحل :-

ليكن $L\{y(x)\} = U(s)$ إذن المؤثر L يحول المعادلة قيد الحل إلى معادلة جبرية من الصورة:

$$s^2 U(s) - 4s - 2 + 2[sU(s) - 4] + U(s) = \frac{3}{(s+1)^2}$$

$$U(s) = \frac{4s+10}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^4} \quad \text{أو}$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة :

$$U(s) = \frac{4(s+1)+6}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^4}$$

$$= \frac{4}{s+1} + \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^4}$$

وباستخدام التحويل العكسي نجد :

$$y(x) = 4e^{-x} + 6xe^{-x} + \frac{1}{2}te^{2-x}$$

$$y(x) = (4 + 6x + \frac{1}{2}x^2)e^{-x} \quad \text{أو}$$

ونرى مرة أخرى أن معرفة الشروط الابتدائية تسهم في فعالية الطريقة المستعملة .

مثال -18-

أوجد حل المعادلة التالية:

$$y'' + k^2y = f(x) \quad , \quad y(0) = A, y'(0) = B$$

حيث k, B, A ثوابت معلومة ، $f(x)$ هي دالة معلومة كيفية.

الحل:-

نفرض أن $L\{y(x)\} = U(s)$ و $L\{f(x)\} = F(s)$ وبالتالي فإن مؤثر تحويل لابلاس يحول المعادلة قيد الحل إلى معادلة جبرية من الصورة:

$$s^2U(s) - As - B + k^2U(s) = F(s)$$

$$U(s) = \frac{As + B}{s^2 + k^2} + \frac{F(s)}{s^2 + k^2} \quad \text{ومنه :}$$

وبأخذ التحويل العكسي لهذه الحدود وباستعمال نظرية الالتفافية نجد أن:

$$y(x) = A \cos kx + \frac{B}{k} \sin kx + \frac{1}{k} \int_0^x f(x - \beta) \sin k\beta d\beta$$

$$y(x) = A \cos kx + \frac{B}{k} \sin kx + \frac{1}{k} \int_0^x f(\beta) \sin k(x - \beta) d\beta. \quad \text{أو:}$$

مثال -19-

جد حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x \quad , \quad y(0) = -3, \quad y(1) = -1$$

الحل:

في هذه الحالة الشروط الحدية ليست معطاة عند نفس النقطة .

$$L\{y(x)\} = U(s) \quad \text{ليكن :}$$

ونعلم أن $y(0) = -3$ ولكن نحتاج أيضاً إلى $y'(0)$ من أجل كتابة تحويل y'' ليكن

إذن $y'(0) = B$ ونأمل تعيين B فيما بعد باستعمال الشرط $y(1) = -1$.

تحويل المعادلة يعطي :

$$s^2U(s) - s(-3) - B + 2[sU(s) - (-3)] + U(s) = \frac{1}{s^2}$$

وبالتالي:

$$U(s) = \frac{-3(s+1) + B - 3}{(s+1)^2} + \frac{1}{s^2(s+1)^2}$$

وباستعمال الكسور التجزيئية نجد أن:

$$\frac{1}{s^2(s+1)^2} = -\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

ومنه :

$$U(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{B-2}{(s+1)^2}$$

وباستعمال التحويل العكسي نجد أن:

$$y(x) = x - 2 - e^{-x} + (B-2)xe^{-x}$$

والآن نفرض أن هذا الحل يحقق الشرط $y(1) = -1$

$$-1 = 1 - 2 - e^{-1} + (B-2)e^{-1} \quad \text{أي}$$

ومنه نجد $B = 3$

وتكون النتيجة الأخيرة هي :

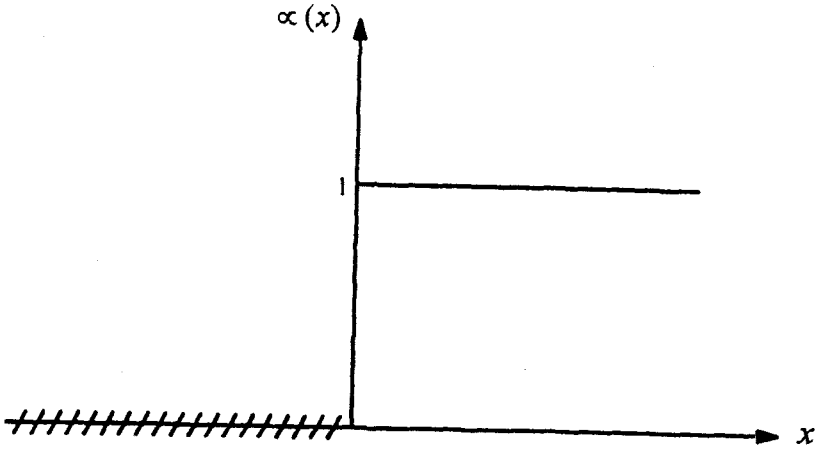
$$y(x) = x - 2 - e^{-x} + xe^{-x}$$

مثال -20-

نعرف الدالة السلمية $\alpha(x)$ بأنها :

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

والتي يكون معطاة من الشكل:



شكل - 6 -

في هذا التعريف نلاحظ أن الدالة $\alpha(x)$ معدومة من أجل طور سالب وتساوي الوحدة من أجل طور موجب أو معدوم. وبالتالي:

$$\begin{aligned} \alpha(x-c) &= 0 & x < c \\ &= 1 & x \geq c \end{aligned} \quad (29)$$

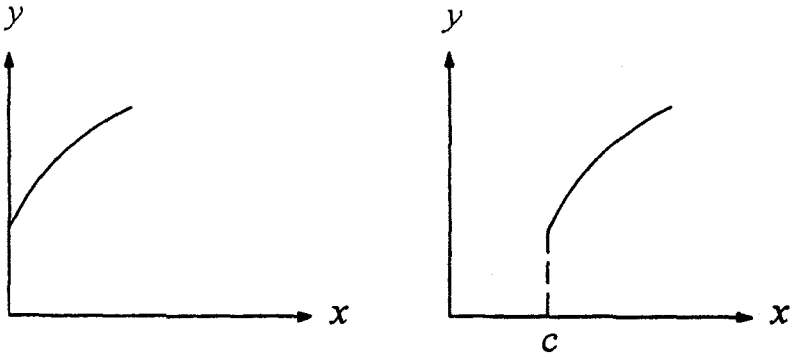
وتمسح الدالة α بسهولة بانسحاب منحني الدالة $f(x)$ إذا كان منحني الدالة :

$$y = f(x) \quad x \geq 0$$

المبين في الشكل -1- ومنحني الدالة

$$y = \alpha(x-c)f(x-c) \quad x \geq c$$

المبين في الشكل -2-



شكل - 7 -

ويتعلق تحويل لابلاس للدالة $\alpha(x-c)f(x-c)$ بتحويل الدالة $f(x)$.
لنعتبر التحويل التالي:

$$L\{\alpha(x-c)f(x-c)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} \alpha(x-c)f(x-c)dx$$

وبما أن $\alpha(x-c) = 0$ من أجل $0 \leq x < c$ و $\alpha(x-c) = 1$ من أجل $x \geq c$

$$L\{\alpha(x-c)f(x-c)\} = \int_c^{\infty} e^{-sx} f(x-c)dx \quad \text{إنن:}$$

وبوضع $\vartheta = x - c$ نجد أن:

$$\begin{aligned} L\{\alpha(x-c)f(x-c)\} &= \int_c^{\infty} e^{-s(c+\vartheta)} f(\vartheta)d\vartheta \\ &= e^{-cs} \int_0^{\infty} e^{-s\vartheta} f(\vartheta)d\vartheta \\ &= e^{-cs} L\{f(x)\}. \\ &= e^{-cs} F(s) \end{aligned}$$

ونخلص إلى النظرية التالية:

نظرية -14-

إذا كان $L^{-1}\{F(s)\} = f(x)$ و $c \geq 0$ حيث $f(x)$ معرفة من أجل $-c < x < 0$ فإن :

$$L^{-1}\{e^{-cs} F(s)\} = f(x-c) \text{ } \infty (x-c).$$

مثال -21-

جد حل المعادلة التفاضلية التالية:-

$$y'' + 4y = g(x) \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

حيث الدالة $g(x)$ معرفة كما يلي:

$$g(x) = \begin{cases} 4x & 0 \leq x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

الحل:

واضح أن الحل يكون معرفاً من أجل $x \geq 0$ أين تكون الدالة $g(x)$ معرفة. في هذه المسألة نلاحظ أيضاً صفحة أخرى من قوة طريقة تحويل لابلاس. في الواقع أن الدالة $g(x)$ في المعادلة التفاضلية دالة متقطعة:

$$L\{g(x)\} = U(s) \quad \text{لهذا نفرض أن :}$$

ونحتاج إلى حساب $L\{g(x)\}$ بدلالة الدالة السلمية ∞ .

ويمكن كتابة الدالة $g(x)$ على الصورة :

$$g(x) = 4x - 4(x-1) \text{ } \infty (x-1) \quad , x \geq 0$$

$$L\{g(x)\} = \frac{4}{s^2} - \frac{4e^{-s}}{s^2} \quad \text{وبالتالي :}$$

وينطبق مؤثر تحويل لابلاس على المعادلة قيد الحل نحصل على :

$$s^2 U(s) - s - 0 + 4U(s) = \frac{4}{s^2} - \frac{4e^{-s}}{s^2}$$

وبالتالي :

$$U(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{4}{s^2(s^2 + 4)} - \frac{4e^{-s}}{s^2(s^2 + 4)}$$

وحيث

$$\frac{4}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 4}$$

إذن تصبح $U(s)$ من الشكل :

$$U(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 4} - \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 4} \right) e^{-s}$$

وبتطبيق التحويل العكسي نجد :

$$y(x) = \cos 2x + x - \frac{1}{2} \sin 2x - \left[(x-1) - \frac{1}{2} \sin 2(x-1) \right] \propto (x-1)$$

ويمكن التحقق من أن هذا الحل هو حل المعادلة قيد الحل ونترك ذلك للطالب.

نقدم هنا جدولاً مختصراً لتحويلات لابلاس. وواضح أن $F(s)$ ترمز لتحويل لابلاس للدالة $f(x)$ وأن $G(s)$ ترمز لتحويل لابلاس للدالة $g(x)$.

الدالة	التحويل
$e^{\alpha x}$	$\frac{s}{s - \alpha}$
$\cos \beta x$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$
$\sin \beta x$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$
$e^{\alpha x} \cos \beta x$	$\frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$
$e^{\alpha x} \sin \beta x$	$\frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$
x^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$
$x^k e^{\alpha x}$	$\frac{k!}{(s - \alpha)^{k+1}}$
$x^k f(x)$	$(-1)^k F^{(k)}(s)$
$x^k \cos \beta x$	$\frac{k!(s + i\beta)^{k+1}}{[(s - \alpha)^2 + \beta^2]^{k+1}}$
$x^k \sin \beta x$	$\frac{k!(s + i\beta)^{k+1}}{[(s - \alpha)^2 + \beta^2]^{k+1}}$
$x^k e^{\alpha x} \cos \beta x$	$\frac{k![(s - \alpha) + i\beta]^{k+1}}{[(s - \alpha)^2 + \beta^2]^{k+1}}$
$x^k e^{\alpha x} \sin \beta x$	$\frac{k![(s - \alpha) + i\beta]^{k+1}}{[(s - \alpha)^2 + \beta^2]^{k+1}}$

الدالة	التحويل
$f(x-c) \propto (x-c)$	$e^{-cs} F(s) \quad c > 0$
$e^{ax} f(x)$	$F(s-a)$
$f'(x)$	$sF(s) - f(0)$
$f^{(k)}(x)$	$s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - \dots - f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^x f(x-U)g(U)dU$	$F(s) \cdot G(s)$
$\int_0^x f(U)dU$	$F(s)/s$
$\cosh kx$	$s/(s^2 - k^2)$
$\sinh kx$	$k/(s^2 - k^2)$

تمارين

-I جد تحويل لابلاس للدوال التالية:

1- $\cos kx$

, 2- $\sin kh$

3- $x^2 + 4x - 5$

, 4- $x^3 - k^2 + 4x$

5- xe^x

, 6- $e^{-2x} + 4e^{-3x}$

7- $\cosh kx$

, 8- $\sinh kx$

9- $\cos^2 kx$

, 10- $\sin^2 kx$

11- $\sin \alpha x \cos \beta x$

, 12- $x^n e^{at} \cos bt$

13- $x^n e^{at} \sin \beta x$

$$14- f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ x & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

$$, 15- f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

-II بين أن كل من الدوال التالية هي من الصنف Δ .

1- x^n , (عدد صحيح n)

2- xe^{ax}

3- $x^n e^{ax}$

4- $x^n e^{ax} \cos bx$

5- \sqrt{x}

6- $\ln(1+x)$

-III أثبت أن : إذا كانت $f(x)$ دالة من الصنف Δ فإن :

$$L\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a); \quad s > a$$

$$L\{f(x)\} = F(s) : \text{حيث}$$

-IV باستعمال عبارة المسألة III أحسب تحويل لابلاس للدوال التالية:

1- $e^x \sin 2x$

2- $e^{-2x} \cos 3x$

3- $e^{-3x} x^2$

4- $e^{4x} x^4$

5- $e^{ax} \sinh bx$

6- $e^{ax} \cosh bx$

-V أثبت أنه إذا كان $L\{f(x)\} = F(s)$ حيث $s > 0$ فإن :

$$L\{f(ax)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad s > 0, \quad a > 0$$

-VI أثبت أنه : إذا كانت $L\{f(x)\} = F(s)$ فإن :

$$L\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

-VII باستعمال عبارة المسألة VI أحسب ما يلي:

1- $L\{x \sin x\}$

2- $L\{x^2 \cos x\}$

3- $L\{x^3 e^{2x}\}$

4- $L\{x^n\}$

VIII- باستعمال عبارة المسألة IV وعبارة المسألة VI احسب تحويل لابلاس للدوال التالية :

1- $x e^{-x} \sin 2x$

2- $x^2 e^x \cos 3x$

3- $x e^{-x} \frac{d}{dx} (\cos 2x)$

4- $x^2 e^x f'(x)$

IX- جد تحويل لابلاس لحل كل من المعادلات التفاضلية التالية:

1- $y'' + 4y = 0$

$y(0) = 0, y'(0) = 1$

2- $y'' - 2y' + y = 0$

$y(0) = 1, y'(0) = 0$

3- $y'' + y = \cos 2x,$

$y(0) = 0, y'(0) = 0$

4- $y''' - y = e^{2x}$

$y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = -1$

5- $y''' + y = x e^x \sin x$

$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1$

X- جد الدالة $f(x)$ المستمرة على المجال $[0, \infty[$ التي تحويلها هو :

1- $\frac{1}{(s-2)^2}$

2- $\frac{3}{s^3}$

3- $\frac{4}{s^2+1}$

4- $\frac{s}{(s^2+g)^2}$

5- $\frac{1}{s(s+3)}$

6- $\frac{s+1}{(s-2)(s+3)}$

XI- اثبت أن التفاضلية دالتين هو مؤثر تبديلي أي:

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy = \int_0^x f(y)g(x-y)dy = (g * f)(x)$$

XII- باستعمال نظرية الالتفافية . جد الدالة المستمرة على المجال $[0, \infty[$ التي تحويلها هو :

1- $\frac{2}{s(s^2 + 4)}$

2- $\frac{1}{(s-1)(s+s)}$

3- $\frac{1}{s^3(s^2 - 9)}$

4- $\frac{s}{(s+3)(s^2 + 1)}$

5- $\frac{2s^2}{(s^2 + 9)^2}$

6- $\frac{s^2 + 3}{(s-1)^2(s^2 + 1)^2}$

XIII- احسب مايلي :

1- $e^{2x} * e^{-x}$

2- $e^{ax} * 1$

3- $x * e^{ax}$

4- $\sin ax * 1$

5- $x * \sin ax$

6- $x * \cos ax$

XIV- إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[0, \infty[$ و $F(s) = L\{f(x)\}$ فاثبت أن :

1- $L^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$, $a > 0$

$$2- L^{-1}\{F(as+6)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right) e^{-b/a x}, \quad a > 0$$

XV- باستخدام طريقة تحويل لابلاس . جد حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$1- y'' + 3y' + 2y = e^x \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$$

$$2- y'' + y = e^x \sin x \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$3- y'' + 2y' + y = xe^{-x} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

$$4- y''' - y'' + 4y' - 4y = x^2 e^{3x} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0$$

$$5- y''' + 4y' = -3x^4 \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$$

$$6- y(x) + \int_0^x y(t) dt = \cos x$$

$$7- y(x) - 2 \int_0^x y(t) dt = e^x$$

$$8- y' + y = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad y(0) = 0$$

$$9- y'' + y = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ x+3 & x > 1 \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$10- y'' + y = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi/2 \\ 0 & x \geq \pi/2 \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$11- y'' + y = \begin{cases} 4x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

الفصل الثالث عشر

دراسة وجود ووحدانية حلول المعادلات التفاضلية

**Theory of Existence and Uniqueness of
Solutions of the Differential Equations**

الفصل الثالث عشر

دراسة وجود وانفراد حلول المعادلات التفاضلية

Theory of Existence and Uniqueness of Solutions of the Differential Equations

Preliminary Remarks

XIII.1. ملاحظات أولية

لقد وضعنا في الفصول السابقة نماذج رياضية لمختلف المسائل الفيزيائية ، وكل هذه النماذج عبارة عن معادلات تفاضلية عادية مع شروط ابتدائية وقد رأينا أن كل نموذج يستخدم كتمثيل نافع لمسألة فيزيائية ، بمعنى أن يكون له حل واحد تام . وسبق أن ذكرنا في الفصول السابقة أيضاً نظريات متعلقة بوجود انفراد حلول المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والثانية ومن المرتبات العليا وسنحاول إثبات هذه النظرية خلال هذا الفصل .

XIII.2. نظرية وجود وانفراد الحل

An Existence and Uniqueness Theorem

سنقدم برهان نظرية وجود وانفراد الحل بالنسبة للمعادلات التفاضلية ذات المرتبة الأولى على أنه من الممكن تعميم هذا البرهان بالنسبة للمعادلات ذات المرتبات العليا كما سنوضح ذلك فيما بعد .
لنعتبر المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى التالية :

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ولتكن T منطقة مستطيلة معرفة كما يلي :

$$|x - x_0| \leq a \quad \text{و} \quad |y - y_0| \leq b$$

والنقطة (x_0, y_0) هي مركز المنطقة T. إذا كانت كل من الدالتين f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ مستمرتين عند جميع نقاط المنطقة T. فإنه يوجد مجال ما : $|x - x_0| \leq h$ ودالة $\phi(x)$ لها الخواص التالية :

$$(أ) \quad y = \phi(x) \text{ هي حل للمعادلة (1) على المجال } |x - x_0| \leq h$$

(ب) على المجال $|x - x_0| \leq h$ ؛ الدالة $\phi(x)$ تحقق المتراجحة :

$$|\phi(x) - y_0| \leq b$$

$$\phi(x_0) = y_0 \quad (\rightarrow)$$

(د) $\phi(x)$ دالة وحيدة على المجال $|x - x_0| \leq h$ بمعنى هي الدالة الوحيدة التي لها الخواص (أ) ، (ب) ، (ج) .

المجال $|x - x_0| \leq h$ ليس من الضروري أن يكون أصغر من المجال $|x - x_0| \leq a$ حيث تبقى الشروط مفروضة على الدالة f والدالة $\partial f / \partial y$.

وسنقدم برهان هذه النظرية الأساسية في الفقرات التالية . وفي الجوهر يعتمد البرهان على إثبات أن متتالية ما من الدوال لها نهاية وأن الدالة النهائية هي الحل المراد تعيينه .

وفي هذه الحالة يمكن تعريف هذه المتتالية كما يلي :

$$y_0(x) = y_0$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt$$

$$(2) \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

وهكذا يمكن أن يظهر البرهان منطقيا ، وسنعطى أولا بعض الأمثلة من المعادلات التفاضلية الخاصة قبل البدء في البرهان .

مثال -1-

اثبت أن متتالية الدوال المعرفة بالمعادلات (2) تتقارب الى حل مسألة القيم

الحدية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = y \quad , \quad x_0 = 0 \quad , \quad y_0 = 1$$

الحل :-

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x (1+t+\frac{t^2}{2}) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

ومن هذه الصورة المتسلسلة فإنه من الممكن وضع :

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

وهذا من السهل إثباته بالتراجع . علاوة على ذلك فإن نهاية هذه المتتالية موجودة من أجل جميع قيم x الحقيقية لأن النهاية ليست إلا متسلسلة ماكلوران Maclaurin للدالة e^x التي هي متقاربة من أجل جميع قيم x .
أذن :

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

وأنه من السهل التحقق أن e^x هو الحل لمسألة القيم الحدية المعطاة .

مثال -2-

جد حل مسألة القيم الحدية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \quad , \quad x_0 = 2 \quad , \quad y_0 = 1$$

الحل :-

المتتالية المعرفة في (2) تصبح من الشكل :

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_2^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$$

$$y_2(x) = 1 + \int_2^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$$

$$y_n(x) = 1 + \int_2^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$$

وواضح أن نهاية هذه المتتالية هي $\frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$ وهذه الدالة هي حل مسألة القيم الحدية المعطاة .

A lipschitz Condition

XIII - 3 شرط ليبشيتز

لقد اعتبرنا في فرضيات نظرية وجود وانفراد الحل أن الدالة f ومشقتها

$\frac{\partial f}{\partial y}$ مستمرتان في المنطقة T . إذن إذا كانت (x, y_1) و (x, y_2) نقطتين في T بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدالة f بالنسبة لـ y ، فإنه يوجد عدد y^* بين y_1 و y_2 حيث :

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*)(y_1 - y_2)$$

وبما أن $\frac{\partial f}{\partial y}$ مستمرة في المنطقة T فهي محدودة في هذه المنطقة ، أي أنه يوجد عدد k موجب حيث :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq k$$

من أجل كل نقطة في T . وبما أن (x, y^*) نقطة في T فبالتالي :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{\partial f(x, y^*)}{\partial y} \right| |y_1 - y_2|$$

$$(3) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|$$

من أجل كل زوج من النقط (x, y_1) و (x, y_2) في المنطقة T .
وتسمى المترابحة (3) بشرط ليبشيتز للدالة f .

وواضح أن تحت فرضيات نظرية وجود وانفراد الحل ، يظل شرط ليبشيتز عالقاً من أجل كل زوجي من النقط (x, y_1) و (x, y_2) في المنطقة T . وسنستعمل شرط ليبشيتز في برهان هذه النظرية بدل من فرضية استمرار الدالة $\frac{\partial f}{\partial y}$. ويمكن إعادة نص هذه النظرية ، بدلالة الشرط (3) بدل من فرضية استمرار الدالة $\frac{\partial f}{\partial y}$ في المنطقة T .

مثال -3-

إذا كانت $f(x, y) = y^{1/3}$ في المنطقة $T = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$ بين أن هذه الدالة لا تحقق شرط ليبشيتز في هذه المنطقة .

الحل :-

لإثبات هذا ، يكفي إيجاد زوج من النقط الذي من أجله لا تتحقق المتراجحة (3) من أجل أي ثابت موجب k .
لنعتبر النقطتين التاليتين :

$$(x, y_1) , (x, 0) : -1 \leq x \leq 1 , y_1 > 0$$

إنن :

$$\frac{f(x, y_1) - f(x, 0)}{y_1 - 0} = \frac{y_1^{1/3} - 0}{y_1} = y_1^{-2/3}$$

وإذا اخترنا y_1 أصغر ما يمكن فواضح أن $k = y_1^{-2/3}$ يصبح أكبر ما يمكن إنن فالمتراجحه (3) لا تتحقق من أجل أي ثابت موجب k .

XIII-4. برهان نظرية وجود الحل

A proof of the Existence Theorem.

إحدى فرضيات نظرية وجود وانفراد الحل هي أن الدالة f دالة مستمرة في المنطقة T وبالتالي فالدالة f محدودة في المنطقة T .
أي :

$$\forall (x, y) \in T, \exists M > 0 : |f(x, y)| \leq M$$

$$h = \min(a, \frac{b}{M}) \quad \text{وليكن العدد } h \text{ حيث :}$$

وبالتالي يمكن تعريف المنطقة الجزئية R بما يلي :

$$R = \{(x, y) \in R : |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq b\}$$

ونعتبر الآن متتالية الدوال التالية :

$$y_0(x) = y_0$$

$$(4) \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \quad n \geq 1$$

وقبل البدء في البرهان نثبت أولاً التمهيدات التالية :

Lemma 1-

تمهيدية -1

من أجل $|x - x_0| \leq h$ فإن :

$$|y_n(x) - y_0| \leq b : n = 1, 2, 3, \dots$$

البرهان :

سنثبت هذه التمهيدية بالبرهان بالتراجع .

أولاً : إذا كان $|x - x_0| \leq h$ و $n = 1$ فإنه :

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right| \\ &\leq M \left| \int_{x_0}^x dt \right| = M|x - x_0| \leq Mh \leq b \end{aligned}$$

لنفرض أن المتراجحة متحققة من أجل $n = k$ أي :

$$|x - x_0| \leq h \quad \text{من أجل} \quad |y_k(x) - y_0| \leq b$$

وهذا يعني أن النقطة $(x, y_k(x))$ هي نقطة من المنطقة T أي :

$$|f(x, y_k(x))| \leq M$$

وبالتالي يكون لدينا :

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt \right| \\ &\leq M \left| \int_{x_0}^x dt \right| \\ &\leq M|x - x_0| \leq Mb \leq b \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

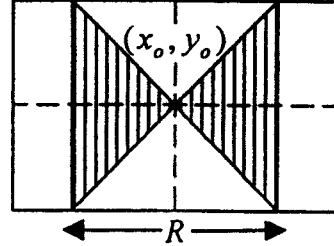
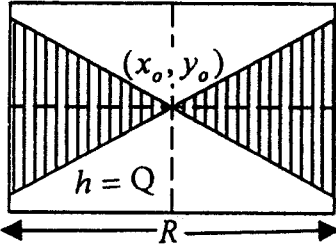
ويمكن أن تصاغ هذه التمهيدية بشكل أبسط :

إذا كان $|x - x_0| \leq h$ فإن مجموعة النقط $(x, y_k(x))$ حيث $n = 0, 1, 2, \dots$ هي نقطة من المنطقة T .

ملاحظة :

يوضح الشكلان التاليان المنطقة T في حالة اختيار الثابت h حيث :

$$h = \min\left(a, \frac{b}{m}\right)$$



Lemma -2-

تمهيدية -2-

إذا كان $|x - x_0| \leq h$ فإن :

$$|f(x, y_n(x)) - f(x, y_{n-1}(x))| \leq K |y_n(x) - y_{n-1}(x)|, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

وتمثل هذه التمهيدية شرط ليبشيتز ونترك إثباتها للقارئ .

Lemma -3-

تمهيدية -3-

إذا كان $|x - x_0| \leq h$ فإن :

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{MK^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n \leq \frac{MK^{n-1} h^n}{n!} : n = 1, 2, \dots$$

البرهان :

في الحالة $n=1$ يكون لدينا من برهان القضية - 1 :

$$|y_1(x) - y_0| \leq M(x - x_0)$$

نفرض أن المتراجحة متحققة من أجل $n-1$ أي :

$$(5) \quad |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| \leq \frac{MK^{n-2}}{(n-1)!} |x - x_0|^{n-1}$$

ولنثبت الآن أن :

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{MK^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n$$

لنعتبر الحالة $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ فيكون لدينا من التمهيدية -2:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| = \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-2}(t))] dt \right|$$

$$\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-2}(t))| dt$$

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq K \int_{x_0}^x |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| dt \quad \text{أو}$$

وباستعمال الفرضية (5) نستنتج أن :

$$(6) \quad |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq K \frac{MK^{n-2}}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (t - x_0)^{n-1} dt$$

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{MK^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n, \quad x_0 \leq x \leq x_0 + h \quad \text{أو}$$

في الحالة $x_0 - h \leq x < x_0$ تتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل على نفس النتيجة
وهكذا يكتمل برهان التمهيدية -3-

ونعود الآن إلى إثبات نظرية وجود الحل للمعادلة التفاضلية .

البرهان :

من التمهيدية -3- يمكننا مقارنة المتسلسلتين التاليتين :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)] \quad (7, a)$$

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{MK^{n-1}h^n}{n!} \quad (7, b) \quad \text{و}$$

وواضح أن المتسلسلة (b) متقاربة لأن :

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{MK^{n-1}h^n}{n!} = \frac{M}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Kh)^n}{n!} = \frac{M}{K} (e^{Kh} - 1)$$

وبما أن : $|U(x)| \geq |s(x)|$

ومن اختبار المقارنة اختبار (Weierstrass) فإن المتسلسلة $S(x)$ متقاربة مطلقاً

وبانتظام على المجال $|x - x_0| \leq h$.

إذا أخذنا المجموع الجزئي حتى الحد l للمتسلسلة (7, a) نجد أن :

$$\sum_{n=1}^l [y_n(x) - y_{n-1}(x)] = [y_1(x) - y_0(x)] + [y_2(x) - y_1(x)] + \dots$$

$$+ [y_{\ell-1}(x) - y_{\ell-2}(x)] + [y_{\ell}(x) - y_{\ell-1}(x)]$$

$$y_k(x) = y_0(x) + \sum_{n=1}^{\ell} [y_n(x) - y_{n-1}(x)] \quad : \text{ومنه يكون}$$

وهذه الصورة تبين أيضاً أن المتتالية $\{y_n(x)\}$ متقاربة على المجال $|x - x_0| \leq h$ وتؤول إلى دالة ما في المتغير x ولتكن $\phi(x)$ أي أن :

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$$

ويبقى الآن أن نثبت أن هذه الدالة $\phi(x)$ مستمرة وتحقق المعادلة التفاضلية .
لدينا من تعريف الدالة $\phi(x)$:

$$\phi(x) = y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)]$$

أو أيضاً :

$$\phi(x) - y_{\ell}(x) = \sum_{n=\ell+1}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)]$$

وباستعمال التمهيدية -3- نجد أن :

$$|\phi(x) - y_{\ell}(x)| \leq \sum_{n=\ell+1}^{\infty} |y_n(x) - y_{n-1}(x)|$$

$$\leq \frac{M}{K} \sum_{n=\ell+1}^{\infty} \frac{(Kh)^n}{n!}$$

$$\leq \frac{M}{K} \cdot \frac{(Kh)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Kh)^n}{n!}$$

$$(8) \quad \leq \frac{M}{K} \cdot \frac{(Kh)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} e^{Kh}, \quad |x - x_0| < h$$

وهذا الحد يؤول إلى الصفر عندما $\ell \rightarrow \infty$ من أجل $|x - x_0| \leq h$ ويعني هذا أن :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt = \int_{x_0}^x f(t, \phi(t)) dt$$

وتكون $\phi(x)$ هي حل المعادلة التكاملية التالية :-

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi(t)) dt$$

ولاستكمال برهان نظرية Picard يجب أن نبين أخيراً أن $y(x)$ هي حل وحيد لمسألة القيم الابتدائية المعطاة على المجال $[x_0 - a, x_0 + a]$. لهذا نعتبر $\phi(x)$ حلاً للمعادلة :

$$y' = f(x, y)$$

على المجال $|x - x_0| < a$

بحيث $\phi(x_0) = y_0$

إذن استمرارية الدالتين $\phi(x)$ تستوجب أن يكون مجالاً حول النقطة x_0 ، ليكن $|x - x_0| < \delta$ هذا المجال والذي بداخله يكون $|\phi(x) - y_0| < b$. إذا كان الفرق بين $\phi(x)$ و y_0 يكون دوماً مساوياً b ، فليكن x_1 قيمة x قريبة من x_0 والتي يكون من اجلها يكون هذا صحيحاً .

إذن $|\phi(x_1) - y_0| = b$ و $|\phi(x) - y_0| < b$ for $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$

$$(9-a) \quad \left| \frac{\phi(x_1) - y_0}{x_1 - x_0} \right| = \frac{b}{|x_1 - x_0|} = \frac{b}{h} \cdot \frac{h}{|x_1 - x_0|} \geq M \frac{h}{|x_1 - x_0|} : \text{ إذن :}$$

ومع ذلك ، باستخدام نظرية القيمة المتوسطة . فإنه توجد قيمة $x = \xi$ بين x_0 و x_1 بحيث :

$$(9-b) \quad \left| \frac{\phi(x_1) - y_0}{x_1 - x_0} \right| = \left| \frac{\phi(x_1) - \phi(x_0)}{x_1 - x_0} \right| = |\phi'(\xi)| = |f(\xi, \phi(\xi))| \leq M$$

من هنا يكون لدينا تناقض مع (g_a) ما لم يكون $|x_1 - x_0| \geq h$.

بمعنى آخر ، لكل حل $\phi(x)$ لمسألة القيم الابتدائية ، فإن المتراجحه $|\phi(x) - y_0| < b$ تبقى ثابتة من اجل جميع قيم x_0 في المجال $|x - x_0| < a$ بشكل شامل .
من العلاقاتين :

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi(t)) dt$$

والتي تبقى متماسكة من اجل حلين لمسألة القيمة الابتدائية ، فيكون لدينا من طرح المعادلتين واخذ للقيمة المطلقة :

$$|y(x) - \phi(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) - f(t, \phi(t)) dt \right|$$

إضافة إلى ذلك ، بما أن $|\phi(x) - y_0| \leq b$ من اجل قيمة x في المجال $|x - x_0| < a$ فإن $f(t, y(t))$ و $f(t, \phi(t))$ لهما قيم عند نقط من T .

وبالتالي فإن شرط ليبشيتز محقق ، وفي المتراجحه الأخيرة يكون لدينا :

$$(10) \quad |y(x) - \phi(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x A |y(t) - \phi(t)| dt \right|$$

زيادة على ذلك ، بما أن الفرق الأكبر بين $y(t)$ و $\phi(t)$ هو $2b$ فيكون :

$$|y(x) - \phi(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x A 2b dt \right| = 2bA|x - x_0|$$

فإذا عدنا إلى المتراجحه (10) السابقة واستعملنا التقدير لـ $|y(t) - \phi(t)|$ في الحد المكمل نجد التقدير المحس :

$$|y(x) - \phi(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x A(2bA|t - x_0|) dt \right| = 2bA^2 \frac{|x - x_0|^2}{2}$$

فإذا عدنا إلى المتراجحه (2) بهذا التقدير الجديد فإننا نحصل على :

$$|y(x) - \phi(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x A \left(2bA^2 \frac{|t - x_0|^2}{2} \right) dt \right| = 2bA^3 \frac{|x - x_0|^3}{3!}$$

بالاستمرار في هذا الإجراء في تنقية التقدير لـ $|y(x) - \phi(x)|$ نحصل بعد الخطوة n على :

$$|y(x) - \phi(x)| \leq 2bA^n \frac{|x - x_0|^n}{n!} \leq 2b \frac{A^n a^n}{n!}$$

ونلاحظ أن الحد الآتي لهذه المتراجحه المستمرة هو من الرتبة $(n+1)$ لمتسلسلة القوة المتقاربة $2be^{Aa}$ والذي يقترب من الصفر عندما يصبح n لانتهائيا .

وبالتالي فإن الفرق $|y(x) - \phi(x)|$ يمكن أن يأخذ اختيارياً صغيراً يأخذ n أكبر ما يمكن وبالتالي يكون الفرق معدوماً ومنه :

$$y(x) = \phi(x) \quad : \quad |x - x_0| \leq a$$

وهكذا يكمل برهان نظرية Picard والتي يمكن إعادة صياغتها في الشكل التالي :

نظرية (Picard) :

تعتبر المعادلة التفاضلية : $y' = f(x, y)$

والشرط الابتدائي : $y(x_0) = y_0$

حيث $f(x, y)$ دالة مستمرة في منطقة مستطيلة T :

$$|y - y_0| \leq b \quad , \quad |x - x_0| \leq a$$

وتحقق شرط ليبشيتز : $|f(x, y_i) - f(x, y_j)| \leq A|y_i - y_j|$ في T .

إذا كان $|f(x, y)| \leq M$ في T وإذا كان h اصغر العددين $\left(a, \frac{b}{M}\right)$ فإنه يوجد حل

وحيد لمسألة القيم الابتدائية :

$$y' = f(x, y) \quad \text{و} \quad y(x_0) = y_0$$

على المجال $|x - x_0| < h$.

ملاحظة :

يمكن تعميم نظرية Picard لتشمل المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة

الثانية والتي تأخذ الشكل :

$$(11) \quad y'' = f(x, y', y)$$

والتي يرفق معها الشروط الابتدائية التالية :

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{و} \quad y'(x_0) = y'_0$$

على المجال : $|x - x_0| < a$.

ويكون نصها كما يلي :-

نظرية -2-

إذا كانت الدالة $f(x, y, y')$ في المعادلة (11) ومشتقاتها الجزئية بالنسبة إلى y, y' مستمرة في المنطقة T . المعرفة كما يلي :

$$(12) \quad |x - x_0| \leq a \quad , \quad |y - y_0| \leq b \quad , \quad |y' - y'_0| \leq c$$

فأنه يوجد مجال ما : $|x - x_0| \leq h$ ، وحل وحيد $\phi(x)$ للمعادلة التفاضلية (11) على المجال $|x - x_0| \leq h$ ، ويحقق الشروط الابتدائية التالية :

$$(13) \quad \phi'(x_0) = y'_0 \quad , \quad \phi(x_0) = y_0$$

ملاحظات:

1- يمكن أتباع خطوات البرهان السابق لإثبات هذه النظرية ، كما يمكن الحصول عليه في عدة مراجع أخرى* ونترك إثبات هذه النظرية للقارئ .

2- يمكن أن يتم تعميم هذه النظرية على المعادلات التفاضلية من المرتبة العليا مباشرة .

تمارين

1- حل كلاً من المعادلات التالية بطريقة التقريبات المتعاقبة :

$$1- y' = y \quad , \quad y = y_0 = 1 \quad , \quad x = 0$$

$$2- y' = y^2 \quad , \quad y = y_0 \quad , \quad x = 0$$

$$3- y' = 2xy \quad , \quad y = y_0 = 1 \quad , \quad x = 0$$

$$4- y' = y + e^x \quad , \quad y = y_0 \quad , \quad x = 0$$

2- اثبت التمهيدية التالية :

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) \quad \text{و} \quad |y_n(x) - y_0| \leq b \quad \text{إذا كان}$$

$$|y(x) - y_0| \leq b \quad \text{فأن}$$

3- في هذه المسألة سنهتم بسؤال انفراد الحل للمعادلة التكاملية :

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \phi(t)] dt$$

أ- افرض أن ϕ و Ψ حلان للمعادلة التكاملية .

اثبت أن :

$$\phi(x) - \Psi(x) = \int_0^x \{f[t, \phi(t)] - f[t, \Psi(t)]\} dt$$

ب- بين أن :

$$|\phi(x) - \Psi(x)| \leq \int_0^x |f[t, \phi(t)] - f[t, \Psi(t)]| dt$$

ج- باستعمال شرط ليبشيتز بين أن :

$$|\phi(x) - \Psi(x)| \leq K \int_0^x |\phi(t) - \Psi(t)| dt$$

حيث K الحد الأعلى لـ $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$ في المنطقة T .

الفصل الرابع عشر

النظم الخطية للمعادلات التفاضلية

Linear systems of Differential Equations

حيث الدوال المعطاة: $a_{ij}(x)$, $g_i(x)$: $i=1, \dots, n$ هي دوال مستمرة على مجال ما I .

ونلاحظ أن النظام (1) خطي بالنسبة للدوال y_1, y_2, \dots, y_n والدوال المشتقات y'_1, y'_2, \dots, y'_n وإذا كانت الدوال $\{g_i(x)\}$ مطابقة للصفر فالنظام يسمى نظاما متجانسا وإذا كانت غير معدومة على المجال I فالنظام يصبح نظاما غير متجانس .

مثال -1-

نعتبر النظام التالي :-

$$y'_1 = y_1 - xy_2 + e^x$$

$$y'_2 = x^2 y_1 - y_3$$

$$y'_3 = y_1 + y_2 - y_3 + 2e^{-x} \quad (i)$$

حيث المجال I هو المحور الحقيقي $[-\infty, +\infty[$ وفي هذه الحالة $n=3$ وباستعمال رموز العبارة I نجد أن :-

$$a_{11}(x) = 1 \quad a_{12}(x) = -x \quad a_{13}(x) = 0 \quad g_1(x) = e^x$$

$$a_{21}(x) = x^2 \quad a_{22}(x) = 0 \quad a_{23}(x) = -1 \quad g_2(x) = 0$$

$$a_{31}(x) = 1 \quad a_{32}(x) = 1 \quad a_{33}(x) = -1 \quad g_3(x) = 2e^{-x}$$

لنأخذ النظام التالي :-

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & -x & 0 \\ x^2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (ii)$$

$A(x)$ هي مصفوفة حيث عناصرها دوال تبقى جميع خواص المصفوفات (جمع المصفوفات - ضرب المصفوفات بثابت ... الخ) سارية المفعول بالنسبة للمصفوفات التي عناصرها دوال معرفة على المجال المشترك I .
ليكن y, y' متجهين عموديين :-

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{bmatrix} \quad (iii)$$

ولیکن $g(x)$ متجه معرف كما يلي :-

$$g(x) = \begin{bmatrix} e^x \\ 0 \\ 2e^{-x} \end{bmatrix} \quad (iv)$$

إذن نلاحظ أن الضرب الاتجاهي المصفوفي لـ $A(x)$, y يعطي :-

$$A(x)y = \begin{bmatrix} y_1 - xy_2 \\ x^2 y_1 - y_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \end{bmatrix}$$

ونرى أن النظام السابق يمكن تمثيله على الصورة المصفوفية الاتجاهية

$$y' = A(x)y + g(x) \quad (v)$$

حيث $A(x)$, $g(x)$ معرفتان في (ii) بالترتيب

نعود الآن إلى الحالة العامة للنظام (1) ونعرف المصفوفة كما يلي :-

$$(2) \quad A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

حيث العناصر هي الدوال $a_{ij}(x)$ وعددها n^2 حيث $i, j = 1, \dots, n$ وتعرف المتجهات $y', y, g(x)$ كما يلي :-

$$(3) \quad g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix}$$

إذن النظام (1) يمكن كتابته على الصورة :

$$(4) \quad y' = A(x)y + g(x)$$

تمرين -1-

$$y'_1 = y_2 + \sin x$$

$$y'_2 = y_1$$

ليكن لدينا النظام

عرف المصفوفة $A(x)$ والمتجهات $y', y, g(x)$ ثم اكتب هذه النظام من الصورة (4) قبل البدء في تعريف الحل ومناقشة النظام (4) يجب أن نقدم بعض التعاريف الجبرية المتعلقة بالمصفوفات والمتجهات .

Definitions

2 تعاريف

1- نقول أن المصفوفة $A(x)$ (أو المتجه $g(x)$) مستمرة (أو مستمر) على المجال I إذا وإذا فقط كان كل عنصر من عناصرها دالة مستمرة عند كل نقطة من المجال I .

2- المصفوفة $B(x)$ ($n \times n$) أو المتجه $U(x)$ ذو n مركبة والمعرفتان على المجال I والمعطاة على الصورة التالية :-

$$B(x) = \begin{bmatrix} b_{11}(x) & b_{12}(x) & b_{13}(x) & \dots & b_{1n}(x) \\ b_{21}(x) & b_{22}(x) & b_{23}(x) & \dots & b_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & b_{n3}(x) & \dots & b_{nn}(x) \end{bmatrix}, \quad U(x) = \begin{bmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \\ \vdots \\ U_n(x) \end{bmatrix}$$

قابلتان للاشتقاق على المجال I إذا وإذا فقط كان كل عنصرهما قابلاً للاشتقاق عند كل نقطة من المجال I . وتكون المشتقة الأولى من الصورة :-

$$B'(x) = \begin{bmatrix} b'_{11}(x) & b'_{12}(x) & \dots & b'_{1n}(x) \\ b'_{21}(x) & b'_{22}(x) & \dots & b'_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b'_{n1}(x) & b'_{n2}(x) & \dots & b'_{nn}(x) \end{bmatrix}, \quad U'(x) = \begin{bmatrix} U'_1(x) \\ U'_2(x) \\ \vdots \\ U'_n(x) \end{bmatrix}$$

بالمثل نقول أن المصفوفة $B(x)$ أو المتجه $U(x)$ قابلان للتكامل على المجال (C, d) إذا وإذا فقط كان كل عنصر من عناصرهما قابلاً للتكامل على المجال (C, d) ويكون تكاملهما من الصورة :-

$$\int_C^d B(x) dx = \begin{bmatrix} \int_C^d b_{11}(x) dx & \int_C^d b_{12}(x) dx & \dots & \int_C^d b_{1n}(x) dx \\ \int_C^d b_{21}(x) dx & \int_C^d b_{22}(x) dx & \dots & \int_C^d b_{2n}(x) dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_C^d b_{m1}(x) dx & \int_C^d b_{m2}(x) dx & \dots & \int_C^d b_{mn}(x) dx \end{bmatrix}$$

$$\int_C^d U(x) dx = \begin{bmatrix} \int_C^d U_1(x) dx \\ \int_C^d U_2(x) dx \\ \vdots \\ \int_C^d U_n(x) dx \end{bmatrix}$$

3- لتكن $A(x)$ مصفوفة $n \times n$ مستمرة على المجال I ليكن $g(x)$ مستمراً إذا n مركبة على المجال I . حل النظام :

$$y'(x) = A(x)y(x) + g(x)$$

على مجال ما J هو $(J \subset I)$ هو متجه $U(x)$ مشتقته $U'(x)$ مستمرة على المجال J حيث أن :

$$U'(x) = A(x)U(x) + g(x)$$

من اجل قيم x في المجال J .

مثال -2-

لنعتبر المعادلة التفاضلية (حالة $n=1$) $y' = y+1$

إذن $U(x) = e^{-x} + 1$ هو الحل علي المجال $-\infty < x < \infty$

بالنسبة إلى $U'(x)$ فهي مستمرة على المجال $-\infty < x < \infty$ ولدينا $U'(x) = e^{-x}$ وهكذا يكون

$$U'(x) = -U(x) + 1$$

مثال -3-

بين أن $U(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}$ هو حل للنظام (4) على المجال $-\infty < x < \infty$

حيث $n=2$ و

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g(x) = 0$$

الحل :-

واضح أن $U(x)$ قابل للاشتقاق على المجال $-\infty < x < \infty$ لان e^x دالة مستمرة

$$U'(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}$$

و

$$A(x)U(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^x \\ e^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x \\ e^x \end{bmatrix} \text{ من جهة أخرى حيث}$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$U'(x) = A(x)U(x) \quad -\infty < x < \infty \text{ وهكذا يكون}$$

4- ليكن $U(x)$ حلا لمسألة القيم الابتدائية التالية :-

$$y' = A(x)y + g(x) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

حيث $y_0, x_0 \in I$ متجه من الفضاء الاقليدي .

إذن $U'(x) = A(x)U(x) + g(x)$ من اجل كل قيم x في المجال I

حيث

$$U(x_0) = y_0 \quad , \quad x_0 \in I$$

مثال -4-

$$U(x) = \begin{bmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \end{bmatrix} \quad \text{بين أن المتجه}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ حيث } y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y \quad \text{هو حل للنظام}$$

على المجال $-\infty < x < \infty$ والذي يحقق الشرط الابتدائي $U(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

الحل :-

$$U(0) = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ -\sin 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{واضح أن :-}$$

وبما أن مشتقات $\sin x$ و $\cos x$ دوال مستمرة على المجال $-\infty < x < \infty$

فان :-

$$U'(x) = \begin{bmatrix} -\sin x \\ -\cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2(x) \\ -U_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} U(x)$$

مثال -5-

بين أن المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية التالية :

$$y'' + \rho(x)y' + q(x)y = r(x) , \quad y(x_0) = a , \quad y'(x_0) = b$$

حيث ρ, q, r دوال مستمرة على المجال I , x_0 نقطة من المجال I و a, b ثابتان
يمكن اختزالها إلى صورة النظام (6)

الحل :-

تكمن الفكرة الأساسية في إدخال الدالتين y_1, y_2 حيث

$$y_1 = y , \quad y_2 = y'$$

$$y_1' = y_2 \quad \text{إن}$$

$$y_2' = y'' = -\rho(x)y' - q(x)y + r(x) = -\rho(x)y_2 - q(x)y_1 + r(x)$$

هذا يعني انه يمكن تمثيل مسألة القيم الحدية المعطاة من صورة النظام (6) أي :-

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -\rho(x) \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix} , \quad y(x_0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{حيث}$$

ونلاحظ أن هذا النظام هو حالة خاصة من النظام (6)

بصفة عامة أن المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n التالية :

$$y^{(n)} + P_1(n)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n y = r(x)$$

$$y(x_0) = a_1, y'(x_0) = a_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_n$$

حيث P_1, P_2, \dots, P_n دوال مستمرة معطاة على المجال I , x_0 نقطة من I و a_1, a_2, \dots, a_n ثوابت اختيارية .

تكافئ النظام التالي :-

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ -P_n(x) & -P_{n-1}(x) & \cdot & -P_2(x) & -P_1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(x) \end{bmatrix}$$

$$y(x_0) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

و

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix}$$

حيث

$y_1 = y_1, y_2 = y', y_3 = y'', \dots, y_n = y^{(n-1)}$ بوضع

يكون لدينا :-

$$y_1' = y' = y_2$$

$$y_2' = y'' = y_3$$

⋮

$$y_{n-1}' = y^{(n-1)} = y_n$$

$$y_n' = y^{(n)} = -P_n(x)y_1 - P_{n-1}(x)y_2 - \dots - P_1(x)y_n + r(x)$$

$$y_1(x_0) = y(x_0) = a_1, y_2(x_0) = y'(x_0) = a_2, \dots, y_n(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) = a_n$$

هذا يؤدي أن مسألة القيم الابتدائية مكافئة للنظام

$$y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & y_2 \\ & & & & y_3 \\ & & & & \vdots \\ & & & & y_n \\ -P_n(x)y_1 - P_{n-1}(x)y_2 - \dots - P_1(x)y_n + r(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -P_n(x) & & \dots - P_2(x) - P_1(x) & & \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(x) \end{bmatrix}$$

$$y(x_0) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

حيث

3.XIV نظرية وجود وانفراد الحل

The Existence and Uniqueness Theorem

نظرية -1-

إذا كانت $A(x)$ مضمونة ($n \times n$) مستمرة على مجال ما I و $g(x)$ متجه ذا n مركبة مستمر على نفس المجال I . إذن من اجل كل نقطة x_0 من I ومن اجل متجه ثابت $y(x_0)$ فان لمسألة القيم الابتدائية التالية

$$(7) \quad y' = A(x)y + g(x) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

حل واحد وواحد فقط على المجال I

البرهان :-

كما مر معنا في الفصل السابق في دراسة نظرية وجود وانفراد حل المعادلات التفاضلية ، يمكننا إثبات نفس النظرية بالنسبة للنظم المعادلات التفاضلية حيث تكافئ مسألة القيم الابتدائية (7) المعادلة التكاملية التالية :-

$$(8) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x [A(s)y(s) + g(s)] ds$$

ليكن J مجالا جزئيا منتهيا مغلقا من I يحتوي على النقطة x_0 (إذا كان I مغلقا نأخذ $I=J$) ويمكن أن نتبع نفس خطوات برهان نظرية وجود وانفراد حل المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى .

نبدأ أولا بتعريف متتالية المتجهات من الصورة التالية :-

$$\begin{aligned} \Phi_0(x) &= y_0 \\ (9) \quad \Phi_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x [A(s)\Phi_n(s) + g(s)] ds, n=1,2,\dots \end{aligned}$$

ثم نشبت بالتراجع أن المتجه $\Phi_n(x)$ معرف ومستمر على المجال J

واضح أن $\Phi_0(x)$ هو متجه دوال معرفة ومستمرة على المجال J

نفرض أن $\Phi_n(x)$ هو متجه دوال معرفة ومستمرة على المجال J

إذن $A(s)\Phi_n(s) + g(s)$ هو متجه دوال مستمرة على المجال J . وتكاملها

من x_0 إلى x هو متجه دوال مستمرة على J

ومن المعادلة (9) يكون المتجه $\Phi_{n+1}(x)$ متجه دوال مستمرة على المجال J .

إذن كل متجه $\Phi_n(x)$ هو متجه دوال معرفة ومستمرة على المجال J .

بما أن A, g مستمرتان على المجال المنتهي المغلق J فإن $|A(x)|$ و $|g(x)|$

محدودتان على J ليكن L, K ثابتين حيث أن :

$$|A(s)| \leq K, \quad |g(s)| \leq L, \quad s \in J$$

ليكن $M = K|y_0| + L$ فإنه من الممكن إثبات المتراجحة التالية :-

$$\left| \Phi_{n+1}(x) - \Phi(x) \right| \leq \frac{MK^n (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)}$$

من اجل $n = 0, 1, 2, \dots$ و $x \in J$ بنفس الطريقة المذكورة في الفصل السابق ، والفرق الوحيد هو أن (10) صالحة من اجل جميع قيم x التي تنتمي إلى J ، أما باقي الإثبات فهو ينبثق تماما من برهان نظرية وجود حل المعادلة التفاضلية التي سبق تقديمها في الفصل السابق .

بما أن J هو مجال جزئي منته مغلق اختياري من I فان النظام (7) حل $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) \text{ على المجال } I \text{ حيث}$$

يبقى الآن إثبات أن الحل $\Phi(x)$ هو حل وحيد للنظام (7) على المجال J .

نفرض أن لمسألة القيم الابتدائية (7) حلا آخر $\psi(x)$ على المجال I وبالتالي يكون

لدينا :-

$$\Phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x [A(s)\Phi(s) + g(s)] ds$$

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x [A(s)\psi(s) + g(s)] ds$$

وبطرح المعادلتين نجد أن :-

$$\Phi(x) - \psi(x) = \int_{x_0}^x A(s) [\Phi(s) - \psi(s)] ds$$

بأخذ القيمة القياسية واستعمال $|A(s)| \leq K$ نجد أن :-

$$\left| \Phi(x) - \psi(x) \right| \leq K \int_{x_0}^x \left| \Phi(s) - \psi(s) \right| ds$$

وباستعمال متراجحة كراون وال (الفصل السابق) نجد أن $|\Phi(x) - \psi(x)| \leq 0$ وبما أن $|\Phi(x) - \psi(x)|$ غير سالب فيكون لدينا $|\Phi(x) - \psi(x)| = 0$ أي $\psi = \Phi$ وهكذا ينتهي برهان النظرية .

مثال -7-

نعتبر مسألة القيم الابتدائية التالية (حيث $n=3$) :

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & -x & 0 \\ \frac{1}{x^2-1} & 0 & -1 \\ 2 & \frac{1}{x^2+1} & 3 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} e^x \\ \cos x \\ -e^x \end{bmatrix}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

بين أن لهذه المسألة حلا وحيدا ثم جد المجال I لوجود هذا الحل حسب النظرية -1-
كل عناصر المصفوفة $A(x)$ المتجه $g(x)$ هي دوال مستمرة على المجال $-\infty < x < \infty$ عدا الدالة $\frac{1}{x^2-1}$.

في هذه الحالة الدالة $\frac{1}{x^2-1}$ غير مستمرة عند $x = \pm 1$

وبما أن $x_0 = 0$ فان النظرية (1) تؤكد لنا أن لمسألة القيم الابتدائية حلا واحدا Φ حيث $\Phi(0) = y_0$ وأن الحل موجود على المجال $-1 < x < 1$.

وواضح انه إذا اخترنا نقطة أخرى x_0 مثل $x_0 = 10$ فانه لمسألة القيم الابتدائية الجديدة حلا واحد $\psi(x)$ حيث $\psi(x_0) = y_0$ وان مجال وجود هذا الحل هو $-1 < x < \infty$.

سندرس في هذه الفقرة تركيبة حلول النظام :-

$$(11) \quad y' = A(x)y + g(x)$$

إذا كان $g(x) \neq 0$ فالنظام (11) نظام غير متجانس والذي نلحق به النظام المرفق الخطي المتجانس التالي :

$$(12) \quad y' = A(x)y$$

وسندرس في هذه الفقرة التركيبية الجبرية لمجموعة الحلول لهذا النظام (12) . وبناء على التعريف -3- من الفقرة -2- فإن حل هذا النظام (12) هو متجهه $U(x)$ والذي مشتقته مستمرة على المجال I .

باستعمال مصطلحات الجبر الخطي نقول ان حل النظام (12) هو عنصر من الفضاء الاتجاهي $C'_n(I)$ للدوال ذات n مركبة والتي قيمتها حقيقية أو تخيلية ومشتقاتها الأولى مستمرة على المجال I حيث :

C ترمز إلى الاستمرار و (\prime) ترمز إلى المشتقة الأولى والدليل n يعنى أن كل متجه له n مركبة و I يمثل المجال الذي أخذناه بعين الاعتبار .
ليكن f هي مجموعة من الأعداد الحقيقية أو المركبة .

تعريف -5-

الفضاء الاتجاهي V على f هو مجموعة عناصر تدعى متجهات .
نعرف على V عمليتين :- العملية الأولى هي عملية الجمع والعملية الثانية هي عملية بضرب في عدد ثابت حيث :-

1- من اجل كل زوج من المتجهات $U, \vartheta \in V$ فان $W = U + \vartheta \in V$

ويسمى W بمجموع المتجهين U, ϑ

2- من اجل كل متجه $U \in V$ ومن اجل كل ثابت α من f فان $\alpha U \in V$ ويسمى

هذا المتجه بحاصل ضرب α و U وتحقق هاتان العمليتان الخواص التالية :-

$$\text{ج1- } \forall U, \vartheta, w \in V \text{ فان } U + (\vartheta + w) = (U + \vartheta) + w$$

$$\text{ج2- } \forall U \in V \text{ فانه يوجد عنصر حيادي يرمز له ب } 0 \text{ حيث } U + 0 = U$$

$$\text{ج3- } \forall U \in V \text{ فانه يوجد متجه واحد } \vartheta \text{ حيث } U + \vartheta = 0$$

ويرمز للمتجه ϑ بالرمز $-U$ يسمى المتجه العكسي .

$$\text{ج4- } U + \vartheta = \vartheta + U \text{ من اجل } U, \vartheta \in V$$

$$\text{ض1- } \forall \alpha \in f \text{ و } \forall U, \vartheta \in V \text{ فان } \alpha(U + \vartheta) = \alpha U + \alpha \vartheta$$

$$\text{ض2- } \forall \alpha, \beta \in f \text{ و } \forall U \in V \text{ فان } (\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$$

$$\text{ض3- } \forall \alpha, \beta \in f \text{ و } \forall U \in V \text{ فان } (\alpha \beta)U = \alpha(\beta U)$$

$$\text{ض4- } \forall U \in V \text{ فان } 1U = U$$

تعريف 6-

ليكن V فضاء اتجاهيا على f فان المجموعة الجزئية W من V ($W \subseteq V$) تسمى

بالفضاء الجزئي لـ V إذا وإذا فقط W هو نفسه فضاء اتجاهي على f مع نفس

العمليتين الجمع والضرب في ثابت .

ليكن $U(x), \vartheta(x)$ حلين للنظام (12) على المجال I وليكن α, β ثابتين اختياريين

حقيقيتين أو مركبتين ، فان $\alpha U(x) + \beta \vartheta(x)$ هو أيضا حل للنظام (12) على I

ويكون لدينا :

$$\begin{aligned} [\alpha U(x) + \beta \vartheta(x)]' &= \alpha U'(x) + \beta \vartheta'(x) = \alpha A(x)U(x) + \beta A(x)\vartheta(x) \\ &= A(x)[\alpha U(x) + \beta \vartheta(x)] \end{aligned}$$

وهذا يعني أن كل توافقية خطية من الحلول للنظام (12) هي أيضا حل للنظام (12) وبالتالي مجموعة كل حلول النظام (12) هو فضاء جزئي من الفضاء الاتجاهي $C'_n(I)$.

ملاحظة :-

انه من السهل التحقق أن المتجهات التالية في الفضاء $C'_n(I)$ هي مستقلة خطيا

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} t^k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

من اجل k عدد صحيح موجب

ويكون بعد الفضاء $C'_n(I)$ هو عبارة عن عدد المتجهات المستقلة خطيا في $C'_n(I)$. وواضح أن بعد $C'_n(I)$ غير منته لان k عدد صحيح اختياري موجب وهذه الحقيقة مهمة بالنسبة لمسألة إيجاد بعد الفضاء الاتجاهي V لحلول النظام (12) الذي فضاء جزئي $C'_n(I)$ وتلخص لنا هذه النتيجة النظرية التالية :-

نظرية -2-

إذا كانت $A(x)$ مصفوفة $n \times n$ مركبة ومستمرة على المجال I فان حلول النظام :-

$$y' = A(x)y$$

على المجال I تكون فضاء اتجاهيا V على مجموعة الأعداد المركبة بعده n .

ملاحظة :-

من الملاحظات السابقة على النظرية فان هذا يعني لإيجاد أي حل للنظام (12) يكفي إيجاد عدد منته من الحلول للنظام (12) بمعنى آخر لإيجاد المجموعة التي تكون القاعدة (قاعدة الحلول) للفضاء الاتجاهي V .

البرهان :-

لقد أثبتنا أن الحلول تكون الفضاء الاتجاهي V على الأعداد المركبة و لإثبات أن بعد V هو n ، يستلزم تكوين قاعدة للفضاء V المتكونة من n متجه مستقلة خطيا في V وهذه هي الحلول المستقلة خطيا للنظام (12) على المجال I .

لتكن x_0 نقطة من المجال I ولتكن $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ، n متجه مستقلة خطيا من الفضاء الاقليدي المركب . على سبيل المثال $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$

$$e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} J \\ \text{الصف} \end{matrix}$$

هي n متجه من هذا النحو

وبناء على النظرية -1- فان النظام (12) يملك n حل $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ كل منها موجود على المجال I ، وكل حل يحقق الشرط الابتدائي :

$$(13) \quad \Phi_j(x_0) = \sigma_j, \quad j=1,2,\dots,n$$

أولا يجب أن نثبت أن الحلول $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ مستقلة خطيا على المجال I . وهذا يستدعي أن يستخدم فحص التوفيقات الخطية لهذه الدوال الاتجاهية مع معاملات ثابتة .

نفرض انه يوجد ثوابت مركبة a_1, a_2, \dots, a_n حيث أن :

$$a_1 \Phi_1(x) + a_2 \Phi_2(x) + \dots + a_n \Phi_n(x) = 0, \forall x \in I$$

وخصوصا إذا وضعنا $x = x_0$ واستعملنا الشروط الابتدائية (13) نجد أن :-

$$a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + \dots + a_n \sigma_n = 0$$

وهذا يؤدي إلى انه كل الثوابت a_1, a_2, \dots, a_n معدومة لان قد فرضنا أن المتجهات

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ مستقلة خطيا .

إن $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ هي أيضا مستقلة خطيا على المجال I .

ولاستكمال برهان النظرية سنثبت أن هذه الـ n حل المستقلة خطيا للنظام (12) تغطي الفضاء V .

لدينا الخاصة أن كل حل $\psi(x)$ للنظام (1) يمكن (1) تمثيله على شكل توافقية خطية للحلول $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$.

نحسب قيمة الحل ψ عند x_0 وليكن $\psi(x_0) = \sigma$ بما أن المتجهات الثابتة

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ تكون قاعدة للفضاء الاقليدي المركب . فانه توجد ثوابت

وحيدة c_1, c_2, \dots, c_n حيث أن المتجه الثابت σ يمكن تمثيله كما يلي :-

$$\sigma = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + \dots + c_n\sigma_n$$

لتعتبر الآن المتجه

$$\Phi(x) = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + \dots + c_n\Phi_n(x)$$

وواضح أن $\Phi(x)$ هو حل للنظام (12) والقيمة الابتدائية لـ Φ هي :

$$\Phi(x_0) = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + \dots + c_n\sigma_n = \sigma$$

لذلك $\Phi(x)$ و $\psi(x)$ هما حلان اثنان للنظام (12) على المجال I حيث

$$\sigma = \Phi(x_0) = \psi(x_0)$$

إذن بناء على نظرية -1- وجود وجدانية الحل فإن $\Phi(x) = \psi(x)$ من اجل كل n على المجال I والحل $\psi(x)$ يعبر عن التوافقية الخطية الوحيدة

$$(14) \quad \psi(x) = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + \dots + c_n\Phi_n(x)$$

$$\forall x \in I$$

ملاحظة :-

الآن إذ كونا مصفوف $n \times n$ باستعمال الحلول n المستقلة خطيا كأعمدة فنحصل علي مصفوف الحل على المجال I و أعمدتها دائما تكون مستقلة خطيا على المجال I . مصفوفة الحل التي أعمدتها مستقلة خطيا على I تسمى بالمصفوفة الأساسية للنظام (12) علي I . ونرمز للمصفوفة الأساسية المكونة من الحلول

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n \text{ كأعمدة بالرمز } \Phi .$$

إن كل حل ψ هو عبارة عن توافقية خطية (14) من اجل اختيار وحيد للتوابت c_1, c_2, \dots, c_n وهو ببساطة من الصورة :-

$$(15) \quad \psi(x) = \Phi(x)c$$

حيث Φ هي المصفوفة الأساسية المكونة آفا و C هي المتجه العمودي ذو المركبات c_1, c_2, \dots, c_n .

ونلاحظ من خلال ما تقدم انه لإيجاد أي حل للنظام (12) يستلزم إيجاد المصفوفة الأساسية . والسؤال التي يطرح نفسه هو : لنفرض أننا وجدنا مصفوفة الحل للنظام (12) علي مجال ما I . كيف يمكن اختبار بطريقة بسيطة ان مصفوفة الحل هي المصفوفة الأساسية . والجواب عن هذا السؤال محتواه في نتيجة النظرية التالية :-

نظرية -3-

مصفوفة الحل Φ للنظام

$$y' = A(x)y$$

هي المصفوفة الأساسية إذا وإذا فقط $\det \Phi(x) \neq 0$ من اجل كل $x \in I$. بالإضافة إذا كان $\det \Phi(x_0) \neq 0$ من اجل x_0 في I فان $\det \Phi(x) \neq 0$ من اجل كل x في I .

حيث يرمز $\det \Phi(x)$ إلى محدد المصفوفة $\Phi(x)$

مثال -8-

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{bmatrix}$$

بين أن المصفوفة

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y$$

هو مصفوفة أساسية للنظام

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{حيث}$$

الحل :-

أولا يجب أن نثبت أن هذه المصفوفة هي مصفوفة الحل . لتكن $\Phi_1(x)$ هي العمود أقول من المصفوفة $\Phi(x)$ إذن .

$$\Phi_1'(x) = \begin{bmatrix} e^x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Phi_1(x)$$

من اجل $-\infty < x < \infty$

بالمثل إذا كانت $\Phi_2(x)$ هي العمود الثاني في $\Phi(x)$ يكون لدينا :-

$$\Phi_2'(x) = \begin{bmatrix} (x+1)e^x \\ e^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xe^x \\ e^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Phi_2(x)$$

من اجل $-\infty < x < \infty$

إذن $\Phi(x) = [\Phi_1(x), \Phi_2(x)]$ هي مصفوفة الحل على المجال $-\infty < x < \infty$

بناء على النظرية -3- بما أن $\det \Phi = e^{2x} \neq 0$ ؛ $\Phi(x)$ هي مصفوفة

أساسية على المجال $-\infty < x < \infty$

وبناء على النظرية -3- أيضا فانه يمكن حساب $\det \Phi(x)$ عند نقطة واحدة لتكن

هذه النقطة $x = 0$

وبما أن $\Phi(0) = I$ فان هذا يؤدي إلى إن $\det \Phi(0) = 1 \neq 0$

تمرين -2-

اثبت باستعمال النظرية -3- أن المصفوفة $\Phi(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$

هي مصفوفة أساسية للنظام $y' = Ay$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

تطبيق :-

سنطبق النظرية -3- على المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية التالية :-

$$(16) \quad y'' + \rho(x)y' + q(x)y = 0$$

حيث ρ, q دالتان مستمرتان على المجال I . وكما رأينا في المثال -5- في التعريف -4- من الفقرة -2- أن هذه المعادلة تكافئ النظام التالي .

$$(17) \quad y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & \rho(x) \end{bmatrix} y, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

إذا كانت $\Phi(x)$ هي مصفوفة الحل للنظام (17) على المجال I أذن

$$\Phi(x) = [\Phi_1(x), \Phi_2(x)]$$

$$\Phi_1(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{bmatrix}, \quad \Phi_2(x) = \begin{bmatrix} \psi_2(x) \\ \psi_2(x) \end{bmatrix} \quad \text{حيث}$$

$\psi_1(x), \psi_2(x)$ هما حلان للمعادلة الخطية

وبناء على النظرية -3- فإن $\Phi(x)$ هي المضمونة الأساسية للنظام (17) على

المجال I إذا وإذا فقط

$$\det \Phi(x) = \begin{vmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall x \in I$$

هذه المحددة تسمى بالرانسكيان للدالتين ψ_2, ψ_1 .

إن وفق النظرية -2- إذا كان $\det \Phi(x) \neq 0$ فإن الحلين $\psi_2(x), \psi_1(x)$ للمعادلة (16) مستقلان خطياً على المجال I ، وكل حل للمعادلة (16) يمكن أن يكتب على

الشكل توافقية خطية للدالتين $\psi_2(x), \psi_1(x)$

وهذا النصف الأول للنتيجة التي سبق أن أثبتناها في فصل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية والتي نصها كما يلي .

نظرية -4-

إذا كان ψ_2, ψ_1 حلين للمعادلة (16) على المجال I فإنها مستقلتان خطياً إذا وإذا فقط كان رانسكيان الدالتين $W[\psi_1(x), \psi_2(x)]$ غير معدوم على المجال I .

ملاحظة :-

بنفس الطريقة يمكن تعميم هذه النتيجة بالنسبة للمعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة n .

نظرية -5-

إن مجموعة الحلول $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ على المجال I للمعادلة :

$$(18) \quad y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y = 0$$

حيث P_1, P_2, \dots, P_n دوال مستمرة على I . مستقلة خطياً على I إذا وإذا فقط كان رانسكيان هذه الدوال $W[\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)]$ غير معدوم على المجال I . وتكون مجموعة n الحل المستقلة خطياً للمعادلة (18) القاعدة الأساسية للحلول .

XIV-5- النظم الخطية غير المتجانسة

Linear Nonhomogeneous Systems

سنستعمل الآن الدراسة المفصلة في الفقرتين السابقتين لدراسة شكل حلول النظام الخطي غير المتجانس التالي :

$$(19) \quad y' = A(x)y + g(x)$$

حيث $A(x)$ مصفوفة مستمرة و $g(x)$ متجه مستمر على نفس المجال I . طبعا يبقى كل التحليل التالي متعلق بإمكانية وجود المصفوفة الأساسية للنظام المتجانس المرفق

$$y' = A(x)y$$

بناء على النظرية -1- إذا كانت لدينا نقطة ما (x_0, y_0) حيث $x_0 \in I$ فإنه يوجد حل واحد Φ للنظام (19) على المجال I حيث $\Phi(x_0) = y_0$.

لتكوين حلول النظام (19) نفرض ان $\Phi(x)$ هي المصفوفة الأساسية للنظام المتجانس

$$y' = A(x)y$$

على المجال I

وكنتيجة للنظرية -2- فإن Φ موجودة .

نفرض أن Φ_1, Φ_2 حلين للنظام (19) إذن $\Phi_1 - \Phi_2$ هو حل للنظام المتجانس على المجال I .

وبناء على النظرية -3- فإنه يوجد متجه ثابت C حيث :-

$$(20) \quad \Phi_1 - \Phi_2 = \Phi.C$$

معنى هذا انه يكفي لإيجاد أي حل للنظام (19) ، معرفة حل واحد لهذا النظام لان الحل الآخر يمكن الحصول عليه من العبارة (20) .

وهناك طريقة بسيطة لتعيين حل النظام (19) وتسمى هذه الطريقة بطريقة تغيير الثوابت والتي تتطلب معرفة المصفوفة الأساسية للنظام المتجانس .
 لتكن Φ المصفوفة الأساسية للنظام المتجانس على المجال I وسنحاول إيجاد الحل Ψ للنظام (19) من الصورة :

$$(21) \quad \Psi(x) = \Phi(x)V(x)$$

حيث V متجه يتطلب تعيينه - (وواضح انه إذا كان V ثابتاً فإن Ψ تصبح حلاً للنظام المتجانس ولهذا سنتجنب هذا الأمر) . بالتعويض عن (21) في (19) نجد أن
 : من أجل $x \in I$

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= \Phi'(x)V(x) + \Phi(x)V'(x) \\ &= A(x)\Phi(x)V(x) + g(x) \end{aligned}$$

وبما أن $\Phi(x)$ المصفوفة الأساسية للنظام المتجانس أي $\Phi' = A\Phi$

$$\text{إذن :- } \Phi(x)V'(x) = g(x)$$

وبما أن $\Phi(x)$ مصفوفة غير منفردة على المجال I ، فإنه يمكن نقلها إلى الطرف الثاني من المعادلة :-

$$V'(x) = \Phi^{-1}(x)g(x)$$

وبمكاملة هذا النظام نجد أن :-

$$V(x) = \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s)g(s)ds, \quad x_0, x \in I$$

وبالتالي تصبح المعادلة (21) من الصورة :-

$$(22) \quad \Psi(x) = \Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s)g(s)ds, \quad x_0, \quad x \in I$$

إذن إذا كان للنظام (19) حلاً Ψ من الصورة (21) فإنه يعطي بالعلاقة (22) وتكون قد أثبتنا نتيجة النظرية التالية :-

نظرية -6-

إذا كانت Φ هي المصفوفة الأساسية للنظام

$$y' = A(x)y$$

على المجال I . فإن الدالة

$$\Psi(x) = \Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s)g(s)ds$$

هي الحل الوحيد للنظام

$$y' = A(x)y + g(x)$$

الذي يحقق الشرط الابتدائي :-

$$\Psi(x_0) = 0$$

على المجال I .

ملاحظة :

بإدماج النظرية -6- والملاحظات التي بدأنا بها في هذه الفقرة نرى أن أي حل ϕ للنظام على المجال I يكون من الصورة :

(23)

$$\phi(x) = \phi_h(x) + \psi(x)$$

حيث Ψ حل النظام (19) الذي يحقق الشروط الابتدائية $\Psi(x_0) = 0$ و ϕ_h حل النظام المتجانس الذي يحقق الشروط الابتدائية التالية :

$$\phi_h(x_0) = Y_0$$

على سبيل المثال.

مثال -9-

جد حل مسألة القيم الابتدائية التالية:

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} e^{-x} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{bmatrix}$$

لقد رأينا في المثال -8- أن:

هي مصفوفة أساسية للنظام المتجانس المرفق لهذا النظام على المجال $-\infty < x < \infty$.

بأخذ المصفوفة العكسية للمصفوفة Φ نجد أن:

$$\Phi^{-1}(s) = \frac{1}{e^{2s}} \begin{bmatrix} e^s & -se^s \\ 0 & e^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-s}$$

إن بناء على النظرية -6- ، يكون الحل Ψ الذي يحقق الشرط $\Psi(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

من الصورة التالية :

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{bmatrix} \int_0^x e^{-s} \begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{bmatrix} \int_0^x \begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - e^{-2x}) \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

وبما أن $\Phi(0) = I$ ، فإن حل النظام المتجانس المرفق الذي يحقق الشرط الابتدائي التالي:

$$Y(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

يكون من الصورة:

$$\Phi_h(x) = \Phi(x) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x-1)e^x \\ e^x \end{bmatrix}$$

ومن العلاقة (23) يكون الحل المطلوب من الصورة:

$$\phi(x) = \phi_h(x) + \Psi(x) = \begin{bmatrix} xe^x - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ e^x \end{bmatrix}$$

XIV. 6. النظم الخطية ذات المعاملات الثابتة:

Linear Systems with Constant Coefficients

في هذه الفقرة سندرس كيفية إيجاد المصفوفة الأساسية للنظام $Y' = AY$ حيث A مصفوفة $(n \times n)$ ثابتة .

وحساب المصفوفة الأساسية مباشرة يتطلب دراسة القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفات. وبالتالي يجب تقديم المصطلحات المتعلقة بالجبر الخطي.

The Exponential of a Matrix

1- أسية المصفوفة

في إطار إيجاد المصفوفة الأساسية للنظام :

$$(24) \quad Y' = AY$$

يجب أولاً تعريف أسية المصفوفة. إذا كانت M مصفوفة $(n \times n)$ نعرف المصفوفة e^M من الصورة التالية :

$$(25) \quad e^M = 1 + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots + \frac{1}{k!}M^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

حيث 1 مصفوفة الوحدة $(n \times n)$. وليس من الصعب أيضاً تعريف مصطلح تقارب متسلسلة المصفوفات وإثبات ذلك . ومن أهم خصائص المصفوفة الأسية ما يلي:

أ- إذا كانت M, P مصفوفتين $(n \times n)$ متبادلتين ($MP=PM$) فإن :

$$(26) \quad e^{M+P} = e^M \cdot e^P$$

ويمكن إثبات هذه الخاصية بسهولة حيث أن الطرف الأول يعطى :

$$e^{M+P} = \sum_{\mathfrak{R}=0}^{\infty} \frac{(M+P)^{\mathfrak{R}}}{\mathfrak{R}!}$$

وبناء على نظرية ذي الحدين و $MP = PM$ ،

$$(M+P)^{\mathfrak{R}} = \sum_{\ell=0}^{\mathfrak{R}} \frac{\mathfrak{R}!}{\ell!(\mathfrak{R}-\ell)!} M^{\ell} P^{\mathfrak{R}-\ell}$$

إذن :

$$(27) \quad e^{M+P} = \sum_{\mathfrak{R}=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\mathfrak{R}} \frac{M^{\ell}}{\ell!} \cdot \frac{P^{\mathfrak{R}-\ell}}{(\mathfrak{R}-\ell)!}$$

ومن جهة أخرى:

$$e^M \cdot e^P = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{P^j}{j!}$$

وباستخدام علاقة ضرب متسلسلتين متقاربتين مطلقا نجد أن :

$$e^M \cdot e^P = \sum_{k=0}^{\infty} C_k$$

حيث :

$$(28) \quad C_k = \sum_{\ell=0}^k \frac{M^{\ell}}{\ell!} \cdot \frac{P^{k-\ell}}{(k-\ell)!}$$

وبمقارنة (27) ، (28) . نكون قد أثبتنا (26) .

ب- إذا كانت T مصفوفة (nxn) غير مفردة فإن:

$$(29) \quad T^{-1} e^{(M)} T = e^{(T^{-1}MT)}$$

ويمكن الآن إثبات النتيجة الأساسية التالية للنظام الخطي ذي المعاملات الثابتة .

نظرية (7) :

المصفوفة :

$$(30) \quad \Phi(x) = e^{Ax}$$

هي المصفوفة الأساسية للنظام (24) حيث $\Phi(0)=1$ على المجال $-\infty < x < \infty$.

البرهان :

باستعمال المعادلة (25) حيث $M = Ax$, A مصفوفة $(n \times n)$ نجد أن:

$$[e^{Ax}]' = A + \frac{A^2 x}{1!} + \frac{A^3 x^2}{2!} + \dots + \frac{A^k x^{k-1}}{(k-1)!} + \dots$$

ولدينا أيضاً e^{Ax} هي مصفوفة الحل للنظام (24) [أعمدتها هي حلول للنظام (24)].

$$\det \Phi(0) = \det 1 \neq 0 \quad \text{وبما أن :}$$

إن وفق النظرية -3- فإن $\Phi(x)$ مصفوفة أساسية للنظام (24).

ملاحظة :

نستنتج من النظرية -7- والمعادلة (15) أن أي حل للنظام (24) يكون على الصورة:

$$(31) \quad \Phi(x) = e^{Ax} \cdot C \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

حيث C متجه ثابت اختياري .

مثال -10-

جد المصفوفة الأساسية للنظام $Y' = AY$ إذا كانت A مصفوفة قطرية من الصورة :

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & d_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & d_n \end{bmatrix}$$

الحل :

من المعادلة (24) يكون لدينا :

$$e^{Ax} = I + \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & \ddots d_n \end{bmatrix} \frac{x}{1!} + \begin{bmatrix} d_1^2 & 0 \\ 0 & \ddots d_n^2 \end{bmatrix} \frac{x^2}{2!} + \cdots + \begin{bmatrix} d_1^k & 0 \\ 0 & \ddots d_n^k \end{bmatrix} \frac{x^k}{k!} + \cdots$$
$$= \begin{bmatrix} e^{d_1 x} & & 0 \\ & e^{d_2 x} & \\ 0 & & \ddots e^{d_n x} \end{bmatrix}$$

ومن النظرية -7- فإن هذه المصفوفة هي المصفوفة الأساسية :

مثال -11-

جد المصفوفة الأساسية للنظام $Y' = AY$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

إذا كانت :

الحل :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بما أن

وواضح أن هاتين المصفوفتين متبادلتين إذن :

$$e^{Ax} = e^{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}x} \cdot e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{3x} & 0 \\ 0 & e^{3x} \end{bmatrix} \left\{ 1 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \frac{x^2}{2!} + \dots \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ولكن :

فإن المتسلسلة اللانهائية تصبح من الصورة التالية:

$$e^{Ax} = e^{3x} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

ومن خلال النظرية -7- فإن المصفوفة هي المصفوفة الأساسية.

2. القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفات

Eigenvalues and Eigenvectors of Matrices

في إطار إيجاد التمثيل العام لحلول النظام (24) يجب إدخال مصطلح القيمة الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة.

$$Y' = AY \quad \text{ولتعليل هذا المفهوم، نأخذ النظام:}$$

$$C \neq 0 \text{ و } \Phi(x) = e^{\lambda x} C \quad \text{ونأخذ الحل من الصورة:}$$

حيث الثابت λ . والمتجه C يجب تعيينهما.

بالتعويض نرى أن $e^{\lambda x} C$ هو حل إذاً فقط إذا كان:

$$\lambda e^{\lambda x} C = A e^{\lambda x} C$$

$$(\lambda I - A)C = 0 \quad \text{وبما أن } e^{\lambda x} \neq 0 \text{ فإن هذا الشرط يصبح من الصورة:}$$

والذي هو عبارة عن نظام جبري خطي متجانس بالنسبة للمتجه C . وبناءً على نظرية الجبر الخطي للأنظمة الجبرية فإن هذا النظام يقبل حلاً غير معدوم إذاً وإذا فقط كان اختيار λ يحقق الشرط:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

وهذا يؤدي إلى التعاريف التالية:

التعريف -7-

لتكن A مصفوفة $(n \times n)$ (حقيقية أو مركبة)، القيمة الذاتية للمصفوفة A هي الثابت λ حيث أن النظام الجبري :

$$(31) \quad (\lambda I - A)X = 0$$

يقبل حلاً غير معدوم .

كل حل غير معدوم للنظام (32) يسمى بالمتجه الذاتي للمصفوفة A المقابل للقيمة الذاتية λ .

التعريف -8-

كثير الحدود من الدرجة n : $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

يسمى بكثير الحدود المميز للمصفوفة A .

وبالتالي، يبين الحساب الذي سبق التعريف -7- أن $e^{\lambda x} C$ هو حل للنظام الخطي $Y' = AY$ إذاً وإذاً فقط كانت λ هي القيمة الذاتية للمصفوفة A و C هو المتجه الذاتي المرافق لهذه القيمة.

وأن القيم الذاتية للمصفوفة A هي جذور كثير الحدود $P(\lambda) = 0$.

مثال -12-

جد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المرفقة للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل :

القيم الذاتية للمصفوفة A هي جذور المعادلة :

$$\det[A - \lambda I] = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 5 \\ -5 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 34 = 0$$

إن : $i^2 = -1$ حيث $\lambda_2 = 3 - 5i$ و $\lambda_1 = 3 + 5i$

يحقق المتجه الذاتي $U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ المرفق للقيمة الذاتية λ_1 النظام الجبري الخطي

المتجانس التالي :

$$(A - \lambda_1 I)U = \begin{bmatrix} -5i & 5 \\ -5 & -5i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-iU_1 + U_2 = 0$$

$$-U_1 - iU_2 = 0$$

إن :

وبالتالي :

$$U = \infty \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

هو متجه ذاتي من أجل أي ثابت ∞ .

بالمثل المتجه الذاتي $\mathcal{V} = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{bmatrix}$ المرفق للقيمة الذاتية λ_2 يكون من الصورة :

$$g = \beta \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

من أجل أي ثابت β .

مثال -13-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

جد القيم الذاتية للمصفوفة :

الحل :

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

لنأخذ المعادلة :

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 1 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

إن $\lambda = 3$ وهي قيمة مضاعفة ذاتية للمصفوفة A .

لإيجاد المتجه الذاتي نأخذ النظام :

$$(3I - A)C = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 - C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{matrix}$$

أو

فأي متجه C حيث المركبتين متساويتين $C_1 = C_2$ ، هو متجه ذاتي .

$$C = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إن :

هو متجه ذاتي حيث α ثابت ما.

ملاحظة :

في المثال -13- المتجهان \mathcal{U}, \mathcal{G} مستقلان خطياً إذا كان $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$ لأن :

$$\det[U, \mathcal{G}] = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha i & \beta \end{vmatrix} = 2 \alpha \beta \neq 0$$

وبالتالي يكون المتجهان \mathcal{U}, \mathcal{G} قاعدة الفضاء الإقليدي ذي بعدين.

وعموماً إذا كان للمصفوفة $A (n \times n)$ قيمة ذاتية مختلفة فإن المتجهات الذاتية المرفقة تكون قاعدة الفضاء الإقليدي المركب الذي بعده n .

نظرية -8-

مجموعة المتجهات الذاتية k المرفقة إلى القيم الذاتية k المختلفة فهي مستقلة خطياً .

البرهان:

سنثبت هذه النظرية بالتراجع بالنسبة للعدد k من المتجهات الذاتية .

من أجل $k = 1$ النتيجة عادية .

الآن نفرض أن مجموعة المتجهات الذاتية $(p-1)$ المرفقة إلى القيم الذاتية $(p-1)$ المختلفة للمصفوفة A المعطاة مستقلة خطياً .

ليكن $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_p$ متجهات ذاتية للمصفوفة A للقيم الذاتية

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ على الترتيب حيث $\lambda_i \neq \lambda_j$ نم أجل $i \neq j$.

نفرض أنه توجد مجموعة ثوابت C_1, C_2, \dots, C_p ليست كلها معدومة حيث أن :

$$C_1 \mathcal{G}_1 + C_2 \mathcal{G}_2 + \dots + C_p \mathcal{G}_p = 0$$

نفرض أن $C_1 \neq 0$ وبتطبيق $(A - \lambda_1 I)$ على طرفي هذه المعادلة مع الأخذ بعين الاعتبار أن :

$$(A - \lambda_1 I) \mathcal{G}_j = (\lambda_j - \lambda_1) \mathcal{G}_j \quad (j=1, \dots, n)$$

فحصل على :

$$C_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \mathcal{G}_2 + C_3 (\lambda_3 - \lambda_1) \mathcal{G}_3 + \dots + C_p (\lambda_p - \lambda_1) \mathcal{G}_p = 0$$

لكن $\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \dots, \mathcal{G}_p$ مستقلة خطياً بفرضية التراجع وبالتالي
حيث $C_j (\lambda_j - \lambda_1) = 0$ $j = 2, 3, \dots, p$.

بما أن $\lambda_j \neq \lambda_1$ حيث $j = 2, 3, \dots, p$ إذن يكون $C_j = 0$

حيث $j = 2, 3, \dots, p$ وتصبح المعادلة من الشكل : $C_1 \mathcal{G}_1 = 0$

وبما أن $\mathcal{G}_1 \neq 0$ فإن $C_1 = 0$ والذي يثبت أن $\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \dots, \mathcal{G}_p$ مستقلة خطياً.
وهكذا ينتهي إثبات النظرية بالتراجع .

3 حساب المصفوفة الأساسية Calculation of a Fundamental Matrix.

لقد سبق أن رأينا في النظرية -7- أن e^{At} هي المصفوفة الأساسية للنظام الخطي الذي معاملات ثابتة :

$$Y' = AY$$

ورأينا في الأمثلة السابقة كيف يمكن حساب e^{At} في بعض الحالات الخاصة ، وسنثبت الآن كيف يمكن حساب المصفوفة الأساسية Φ للنظام $Y' = AY$ في حالة أن المصفوفة A ، متجهها ذاتيا مستقلا خطيا. هذا في الحالة الخاصة إذا كانت القيم الذاتية للمصفوفة A مختلفة .

لنفرض أن للمصفوفة A ، n متجها ذاتيا مستقلا خطيا : $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$ المرفقة للقيم الذاتية (ليس شرطاً أن تكون كلها مختلفة) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ فتكون لدينا كل دالة اتجاهية من الصورة :

$$\phi_j = e^{\lambda_j x} \mathcal{G}_j \quad j = 1, \dots, n$$

حل للنظام $Y' = AY$ على المجال $-\infty < x < \infty$

$$\phi_j'(x) = (e^{\lambda_j x}) \lambda_j \mathcal{G}_j \quad \text{أي:}$$

$$= e^{\lambda_j x} A \mathcal{G}_j$$

$$= A e^{\lambda_j x} \mathcal{G}_j = A \phi_j(x) \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

تعرف المصفوفة Φ كما يلي :

$$\Phi(x) = [\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)]$$

بما أن كل عمود من المصفوفة Φ هو حل للنظام $Y' = AY$ فالمصفوفة Φ هي مصفوفة الحل لهذا النظام على المجال $-\infty < x < \infty$.

$$\det\Phi(0) = \det[\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n] \neq 0 \quad \text{ويكون لدينا :}$$

لأن المتجهات $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$ مستقلة خطيا وبالتالي وفق النظرية -3- يكون لدينا $\det\Phi(x) \neq 0$ على المجال المفتوح $-\infty < x < \infty$. وبالتالي فالمصفوفة $\Phi(x)$ هي المصفوفة الأساسية لهذا النظام .
ونكون بالتالي قد أثبتنا النتيجة الثالثة :

نظرية -9-

لتكن A مصفوفة ثابتة (حقيقية أو مركبة) ولنفرض أن $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$ هي n متجه ذاتي مستقلة خطيا للمصفوفة A المرفقة للقيم الذاتية التالية على الترتيب :
 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
إذن :

$$(32) \quad \Phi(x) = \left[e^{\lambda_1 x} \mathcal{G}_1, e^{\lambda_2 x} \mathcal{G}_2, \dots, e^{\lambda_n x} \mathcal{G}_n \right]$$

هي المصفوفة الأساسية للنظام الخطي الذي معاملاته ثابتة: $Y' = AY$ على المجال $-\infty < x < \infty$. وهذه هي الحالة التي تكون فيها: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ كلها مختلفة .

مثال -14-

جد المصفوفة الأساسية للنظام $Y' = AY$ إذا كانت : $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

الحل :

لقد سبق أن رأينا أن لهذه المصفوفة A قيمتين ذاتيتين $\lambda_1 = 3+5i$ و $\lambda_2 = 3+5i$ وأن المتجهين الذاتيين هما :

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} , \quad g_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

وهما مستقلتان خطيا . باستعمال النظرية -9- فإن :

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} e^{(3+5i)x} & ie^{3-5i)x} \\ ie^{3+5i)x} & e^{(3-5i)x} \end{bmatrix}$$

هي المصفوفة الأساسية على المجال $-\infty < x < \infty$ لهذا النظام .

ملاحظة :

بصورة عامة لا تعطي النظرية السابقة المصفوفة e^{Ax} ، ولكنها تمنح المصفوفة الأساسية $\Phi(x)$ للنظام $Y' = AY$. ووفق ما سبق من مناقشة ، بما أن $\Phi(x)$ و e^{Ax} مصفوفتان أساسيتان للنظام $Y' = AY$ على المجال $-\infty < x < \infty$ فإنه توجد مصفوفة C غير مفردة حيث :

$$e^{Ax} = \Phi(x)C$$

$$C = \Phi^{-1}(0)$$

بوضع $x = 0$ نجد أن :

وبالتالي :

$$(34) \quad e^{Ax} = \Phi(x)\Phi^{-1}(0)$$

مثال -15-

جد المصفوفة e^{Ax} إذا كانت المصفوفة A هي المصفوفة المعرفة في المثال -15-

الحل :-

من خلال المثال -15- لدينا :

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} e^{(3+5i)x} & ie^{(3-5i)x} \\ ie^{(3+5i)x} & e^{(3-5i)x} \end{bmatrix}$$

وبالتالي :-

$$e^{Ax} = \begin{bmatrix} e^{(3+5i)x} & ie^{(3-5i)x} \\ ie^{(3+5i)x} & e^{(3-5i)x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$e^{Ax} = e^{3x} \begin{bmatrix} \cos 5x & \sin 5x \\ -\sin 5x & \cos 5x \end{bmatrix}$$

ملاحظة :

إذا كانت A حقيقية فإن المصفوفة e^{Ax} حقيقية حسب التعريف (25) وبالتالي تعطي المعادلة (34) طريق لتشكل المصفوفة الأساسية في حالة A مصفوفة حقيقية والمثال -16- هو حالة خاصة لهذه الملاحظة .

Linear Nonhomogeneous system A. النظام الخطي غير المتجانس

نختم هذه الفقرة بأخذ النظام غير المتجانس

$$(35) \quad Y' = AY + g(x)$$

حيث A مصفوفة ثابتة و $g(x)$ هي دالة اتجاهية مستمرة على المجال $-\infty < x < \infty$.

باستعمال عبارة الثوابت المتغيرة واعتبار المصفوفة الأساسية للنظام المتجانس هي:

$$\Phi(x) = e^{Ax}$$

$$\Phi^{-1}(s) = e^{-As}$$

حيث

$$\Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(s) = e^{(x-s)A}$$

أي

$$\Phi(x_0) = Y_0$$

وإذا كان الشرط الابتدائي هو

فإن الحل المتجانس يكون من الصورة :

$$\Phi_h(x) = e^{(x-x_0)A} Y_0$$

ويكون حل النظام (35) من الصورة :

$$\Phi(x) = e^{(x-x_0)A} Y_0 + \int_{x_0}^x e^{(x-s)A} g(s) ds, \quad -\infty < x < \infty$$

حيث e^{Ax} هي المصفوفة الأساسية للنظام المتجانس والتي يمكن الحصول عليها بالطريقة التي وضعناها أنفا. ونلاحظ أنه من السهل حساب مقلوب المصفوفة Φ وحساب أيضا $\Phi(x)\Phi^{-1}(s)$ ولكنه ليس من الممكن حساب التكامل (36) مباشرة إلا في حالات خاصة جدا .

مثال -16-

جد الحل Φ للنظام $Y' = AY + g(x)$ الذي يحقق الشرط الابتدائي إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} e^{-x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{إذا كانت} \quad \phi(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحل :

من المثال السابق لدينا

$$e^{Ax} = e^{3x} \begin{bmatrix} \cos 5x & \sin 5x \\ -\sin 5x & \cos 5x \end{bmatrix}$$

بالتعويض في (36) نجد أن :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= e^{3x} \begin{bmatrix} \cos 5x & \sin 5x \\ -\sin 5x & \cos 5x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &+ \int_0^x e^{3(x-s)} \begin{bmatrix} \cos 5(x-s) & \sin 5(x-s) \\ -\sin 5(x-s) & \cos 5(x-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds \end{aligned}$$

$$= e^{3x} \begin{bmatrix} \sin 5x \\ \cos 5x \end{bmatrix} + \int_0^x e^{3(x-s)} e^{-s} \begin{bmatrix} \cos 5(x-s) \\ -\sin 5(x-s) \end{bmatrix} ds$$

في هذه الحالة يمكن حساب التكامل كما يلي :

$$\phi(x) = e^{3x} \begin{bmatrix} \sin 5x \\ \cos 5x \end{bmatrix} + e^{3x} \int_0^x e^{-4s} \begin{bmatrix} \cos 5x \cos 5s + \sin 5x \sin 5s \\ -\sin 5x \cos 5s + \cos 5x \sin 5s \end{bmatrix} ds$$

باستعمال عبارة التكامل بالتجزئة التالية :

$$\int_0^x e^{-4s} \cos 5s ds = \frac{e^{-4s}}{16+25} (-4 \cos 5s + 5 \sin 5s) \Big|_{s=0}^{s=x}$$

$$\int_0^x e^{-4s} \sin 5s ds = \frac{e^{-4s}}{16+25} (-4 \sin 5s - 5 \cos 5s) \Big|_{s=0}^{s=x}$$

نحصل على :-

$$\phi(x) = e^{3x} \begin{bmatrix} \sin 5x \\ \cos 5x \end{bmatrix} + e^{3x} \begin{bmatrix} \cos 5x \left[\frac{e^{-4x}}{41} (-4 \cos 5x + 5 \sin 5x) + \frac{4}{41} \right] \\ + \sin 5x \left[\frac{-e^{-4x}}{41} (-4 \sin 5x - 5 \cos 5x) + \frac{5}{41} \right] \\ - \sin 5x \left[\frac{e^{-4x}}{41} (-4 \cos 5x + 5 \sin 5x) + \frac{4}{41} \right] \\ + \cos 5x \left[\frac{e^{-4x}}{41} (-4 \sin 5x - 5 \cos 5x) + \frac{5}{41} \right] \end{bmatrix}$$

ونلاحظ رغم بساطة المسألة إلا أن الإجابة معقدة وصعبة .

في هذه الفقرة سنعين الصورة العامة للمصفوفة e^{Ax} عندما تكون A مصفوفة اختيارية $n \times n$ ونشير إلى أن الطريقة التي سنوضحها فيما يلي يمكن تطبيقها في جميع الحالات وتحتوي على نتيجتي الفقرتين السابقتين التي تبين خاصيتين وننبه القارئ إلى أن هذه الطريقة صعبة ومعقدة إلى حد ما . وسنستعمل النتيجة التالية من الجبر الخطي والتي يمكن الحصول علي برهانها في كتب الرياضيات المتقدمة .

لتكن A مصفوفة $n \times n$ مركبة $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ القيم الذاتية المختلفة للمصفوفة A حيث تعددية كل منها هي n_1, n_2, \dots, n_k على الترتيب وحيث

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

نرفق لكل قيمة ذاتية λ_r ذات تعددية n_r النظام الخطي التالي :-

$$(A - \lambda_r I)^{n_r} X = 0$$

وتغطي حلول كل نظام خطي فضاء جزئيا يسمى X_r حيث $J = 1, 2, \dots, k$.
الجبر الخطي النتيجة التالية :-

من اجل كل X في فضاء n اقليدي فانه توجد متجهات وحيدة x_1, x_2, \dots, x_k من اجل $x_r \in X_r (J = 1, \dots, k)$ حيث أن :-

$$(38) \quad x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$$

من المهم معرفة أن النظام الجبري الخطي (37) n_r حل مستقلة خطيا أي أن بعد الفضاء الجزئي X هو n_r .

ونشير إلى أن في حالة كون القيم الذاتية كلها مختلفة عن بعضها فإن $n_i = 1$ حيث $J = i, \dots, k$ و $k = n$ بالتالي فإن المتجهات x_1, x_2, \dots, x_n هي مضاعفات المتجهات الذاتية الثابتة المستقلة خطيا و تغطي الفضاء n الاقليدي . إذن إذا كانت \mathcal{A} وإذا كان x متجه اختياريا ، فالمتجه x_j يعطي بالعلاقة :

$$x_j = C_j \mathcal{A}_j$$

من اجل أي ثابت C_j حيث $j = 1, \dots, n$

لنطبق هذه الدراسة على النظام الخطي $y' = Ay$ ولنبحث عن الحل $\phi(x)$ الذي يحقق الشرط الابتدائي $\phi(x) = y_0$ وبناء على النظرية -7- فإن :-
 $\phi(x) = e^{xA} \cdot y_0$ وهدفنا هو حساب $e^{xA} y_0$ مباشرة أي البحث عن مركبات المصفوفة $\phi(x)$.

ومن تعريف أسية المصفوفة فإن الحالة العامة تكون $e^{xA} \cdot y_0$ عبارة عن متسلسلة لا نهائية وبالتالي فحسابها صعب ومعقد .

فالدراسة الجبرية التي سبق تقديمها توفر علينا هذا الجهد وذلك بتحليل المتجه y_0 بحيث أن مركبات $e^{xA} \cdot y_0$ يمكن كتابتها علي صورة توافقية خطية منتهية من الأسس وقوى x .

نحسب القيم الذاتية المختلفة $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ذات التعددية n_1, n_2, \dots, n_k للمصفوفة A . ونطبق النظرية بالنسبة للمتجه y_0 وفق (38) فيكون لدينا :

$$y_0 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_k$$

حيث \mathcal{G}_J هو متجه اختياري من الفضاء الجزئي x_J ($J=1,2,\dots,n$).
 بما أن x_J هو الفضاء الجزئي المغطي بالنظام (37)، فإن \mathcal{G}_J يمكن أن يكون حلاً
 للنظام (37).
 الآن من العبارة (39) يكون :-

$$e^{xA} y_0 = \sum_{J=1}^k e^{xA} \mathcal{G}_J$$

ويمكن أن نكتب

$$e^{xA} \mathcal{G}_J = e^{\lambda_J x} \cdot e^{(A-\lambda_J I)^x} \cdot \mathcal{G}_J \\
= e^{\lambda_J x} \left[1 + x(A-\lambda_J I) + \frac{x^2}{2!} (A-\lambda_J I)^2 + \dots + \frac{x^{n_J-1}}{(n_J-1)!} (A-\lambda_J I)^{n_J-1} \right] \mathcal{G}_J$$

على المجال $-\infty < x < \infty$. ونلاحظ أن المتسلسلة داخل القوسين منتهية لان \mathcal{G}_J
 هو حل للنظام (37) وبالتالي $(A-\lambda_J I)^{n_J} \mathcal{G}_J = 0$ ومنه كل الحدود أعلى درجة
 من هذا الحد في نشر المصفوفة $e^{(A-\lambda_J I)x}$ تكون معدومة.
 نلاحظ أن المتجهات $W_J = (A-\lambda_J I)^P \mathcal{G}_J$ من اجل $P=0,1,\dots,n_J-1$ ينتمي
 إلى الفضاء الجزئي X_J لان :

$$(A-\lambda_J I)^{n_J} W_J = (A-\lambda_J I)^{n_J} (A-\lambda_J I)^P \mathcal{G}_J = (A-\lambda_J I)^{n_J+P} \mathcal{G}_J = 0$$

إذن يبقى المتجه $e^{xA} \mathcal{G}_J$ في X_J من اجل كل x حيث $-\infty < x < \infty$

بتطبيق هذا الحساب على الحل $\Phi(x) = e^{xA} y_0$ للنظام $y' = Ay$

نجد أن :-

$$\begin{aligned}\phi(x) &= e^{xA} y_0 = e^{xA} \sum_{j=1}^k \mathcal{G}_j = \sum_{j=1}^k e^{xA} \cdot \mathcal{G}_j \\ &= \sum_{j=1}^k e^{\lambda_j x} \left[I + x(A - \lambda_j I) + \dots + \frac{x^{n_j-1}}{(n_j-1)!} (A - \lambda_j I)^{n_j-1} \right] \mathcal{G}_j\end{aligned}$$

وفي النهاية الحل Φ الذي يحقق الشرط الابتدائي $\Phi(0) = y_0$ هو :

$$(40) \quad \phi(x) = \sum_{j=1}^k e^{\lambda_j x} \left[\sum_{i=0}^{n_j-1} \frac{x^i}{i!} (A - \lambda_j I)^i \right] \mathcal{G}_j, -\infty < x < \infty$$

وهذه العلاقة تعطينا بالضبط مركبات الحل كدوال للمتغير x من اجل أي مصفوفة A .

مثال -17-

جد حل مسألة القيمة الابتدائية التالية :-

$$y' = Ay \quad , \quad y(0) = y_0$$

$$e^{xA} \text{ إذا كانت } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} . \text{ جد أيضا } e^{xA}$$

الحل :

كما رأينا في الأمثلة السابقة أن $\lambda_1 = 3$ هي القيم الذاتية المضاعفة لهذه المصفوفة أي $n_1 = 2$ وبالتالي هناك فضاء جزئي واحد x_1 .

لنحسب :

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - 3I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ونلاحظ أن}$$

وبالتالي يتحقق النظام (37) من أجل متجهه في x_1 . بالتعويض في (40) حيث

$$n_1 = 2 \quad , \quad y_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

نجد أن :-

$$\phi(x) = e^{3x} [I + x(A - 3I)y_0]$$

وبالتالي :-

$$(41) \quad \phi(x) = e^{3x} \left\{ I + x \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = e^{3x} \begin{bmatrix} a + x(b - a) \\ b + x(b - a) \end{bmatrix}$$

هو الحل للنظام المعطاة حيث $\Phi(0) = y_0$

1- لتكوين e^{xA} يمكن استعمال العبارة التالية :

$$e^{xA} = e^{\lambda x} e^{(A - \lambda I)x} = e^{\lambda x} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!} (A - \lambda I)^i$$

في حالة قيمة ذاتية واحدة يكون $(A - 3I)^2 = 0$

ومنه

$$\begin{aligned} e^{xA} &= e^{3x} [I + (A - 3I)x] = e^{3x} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x \right\} \\ &= e^{3x} \begin{bmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2- يمكن استعمال العبارة (41) كما يلي :-

بما أن e^{xA} هي المصفوفة الأساسية التي تختزل إلى المصفوفة الوحدة عند $x = 0$ إذن :

$$e^{Ax} = e^{xA} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[e^{xA} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e^{xA} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

حيث تعطي العبارة (41) متجهين الحلين $e^{xA} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $e^{xA} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

بالتعويض أولا عن $y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ثم عن $y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ على الترتيب وهكذا نحصل أيضا على المصفوفة المطلوبة .

مثال -18-

لنعتبر النظام الثاني :

$$y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3$$

$$y_2' = 2y_1 + y_3$$

$$y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3$$

الذي مصفوفة معاملاته هي :-

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

جد الحل ϕ الذي يحقق الشرط الابتدائي :- $\phi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = y_0$

الحل :-

كثير الحدود المميز للمصفوفة A هو $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ وبالتالي القيم الذاتية هي $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 2$ مع التعددية $n_1 = 1$ و $n_2 = 2$ على الترتيب
لنأخذ النظم الجبرية الخطية من الصورة (37) أي :

$$(A - I)x = 0 \quad , \quad (A - 2I)x = 0$$

لتعين الفضاءين الجزئيين x_1, x_2 من الفضاء الثلاثي الاقليدي .
بأخذ النظامين على التوالي يكون لدينا أولا : -

$$(A - I)x = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

إذن x_1 هو الفضاء الجزئي المغطي بالمتجهات $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ حيث $x_1 = 0, x_2 = x_3$

وواضح أن $\dim x_1 = 1$

ثانيا يكون لدينا :

$$(A - 2I)x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow \begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

إذن x_2 هو الفضاء الجزئي المغطي بالمتجهات $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ حيث $x_1 = x_2, x_3$ اختياري

وواضح أن $\dim X_2 = 2$.

لنبحث الآن عن المتجهات $\mathcal{G}_1 \in X_1$ و $\mathcal{G}_2 \in X_2$ حيث أننا نستطيع كتابة المتجه

$$Y_0 = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 \quad \text{: كما يلي :}$$

$$\text{بما أن } \mathcal{G}_1 \in X_1 \text{ إذن } \mathcal{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \text{ من أجل } \alpha \text{ ثابت ما .}$$

$$\text{وبما أن } \mathcal{G}_2 \in X_2 \text{ إذن } \mathcal{G}_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \text{ من أجل } \gamma, \beta \text{ ثابتين اختياريين .}$$

وبالتالي :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

أي أن $\alpha + \beta = b$ ، $\alpha + \beta = b$ ، $\beta = a$ ، $\alpha + \gamma = c$ وبحل هذه المعادلات نجد أن $\alpha = b - a$ ، $\beta = a$ ، $\gamma = c - b + a$.

$$\mathcal{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ b - a \\ b - a \end{bmatrix} , \quad \mathcal{G}_2 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ c - b + a \end{bmatrix} , \quad \text{و}$$

باستخدام المعادلة (40) نجد الحل $\phi(x)$ حيث $\phi(x) = Y_0$

$$\phi(x) = e^x \mathcal{G}_1 + e^{2x} [I + x(A - 2I)] \mathcal{G}_2$$

$$= e^x \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 - a \\ b - a \end{bmatrix} + e^{2x} \left\{ I + x \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} a \\ a \\ c - b + a \end{bmatrix}$$

$$(42) \quad = e^x \begin{bmatrix} a \\ b - a \\ b - a \end{bmatrix} + e^{2x} \begin{bmatrix} 1+x & -x & x \\ 2x & 1-2x & x \\ x & -x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a \\ c - b + a \end{bmatrix}$$

وللايجاد e^{xA} نضع على الترتيب Y_0 مساويا $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ في العبارة (42) فنحصل

على الحلول الثلاثة المستقلة خطيا التي نستعملها كأعمدة في المصفوفة :

$$e^{xA} = \begin{bmatrix} (1+x)e^{2x} & -xe^{2x} & xe^{2x} \\ -e^x + (1+x)e^{2x} & e^x - xe^{2x} & xe^{2x} \\ -e^x + e^{2x} & e^x - e^{2x} & e^{2x} \end{bmatrix}$$

مثال -20-

جد حل المسألة ذات القيمة الابتدائية التالية : $Y' = AY + g(x)$

حيث A هي المصفوفة المعرفة في المثال -18- و $g(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 1 \end{pmatrix}$

حيث $\phi(x) = Y_0$.

الحل :-

$$\phi(x) = e^{xA} = e^{3x} \begin{bmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{bmatrix} \quad \text{من المثال -18- لدينا :}$$

لنحسب :

$$\phi(x)\phi^{-1}(s) = e^{(z-s)A} = e^{3(x-s)} \begin{bmatrix} 1-(x-s) & x-s \\ -(x-s) & 1+(x-s) \end{bmatrix}$$

$$e^{(x-s)A} g(x) = e^{3x} \begin{bmatrix} 1-(x-s) + e^{-3s} & (x-s) \\ -(x-s) + e^{-3s} & (1+x-s) \end{bmatrix}$$

ويكون :

$$\phi(x) = e^{3x} \begin{bmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{bmatrix} Y_0 + e^{3x} \int_0^x \begin{bmatrix} 1-(x-s) + e^{-3s} & (x-s) \\ -(x-s) + e^{-3s} & (1+x-s) \end{bmatrix}$$

ويبدو هناك نقطة بسيطة في حساب التكاملات .

تمارين

(I) - أحسب المشتقة الأولى لكل من المتجهات أو المصفوفات التالية :

$$-\infty < x < \infty, \quad B(x) = \begin{bmatrix} x & e^{-x} & 7 \\ \sin x & 0 & \cos x \\ x^2 & x & 1 \end{bmatrix} -1$$

$$-\infty < x < \infty, \quad B(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} -2$$

$$-0 < x < \infty, \quad U(x) = \begin{bmatrix} \ln x \\ x \ln x \\ x^2 \ln x \end{bmatrix} -3$$

$$-1 < x < 2, \quad U(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} -4$$

(II) - هل المتجهة $U(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} \\ x^2 \end{bmatrix}$ مستمر على المجال $1 \leq x \leq 2$ ؟

وهل هو مستمر على المجال $-1 < x < 1$ لماذا ؟

(III) - أكتب النظام التالي على الصورة المصفوفية :

$$y_1' = 6y_1 - y_2$$

$$y_2' = 3y_1 + 2y_2$$

أ- بين أن المتجهين $U_1(x) = \begin{bmatrix} e^{5x} \\ e^{5x} \end{bmatrix}$ و $U_2(x) = \begin{bmatrix} e^{3x} \\ 3e^{3x} \end{bmatrix}$ هما حلان لهذا النظام .

ب- بين أن U_1, U_2 مستقلان خطيا على أي مجال $[a, b]$

ج- جد الحل العام لهذا النظام حيث $y_1(0) = 4$, $y_2(0) = 3$.

IV- أعد نفس الأسئلة السابقة بالنسبة لمسألة القيم الابتدائية التالية :

$$Y(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$$

حيث $U_1(x) = \begin{bmatrix} e^{2x} \\ (x-1)e^{2x} \end{bmatrix}$ و $U_2(x) = \begin{bmatrix} e^{2x} \\ -xe^{2x} \end{bmatrix}$

V- اكتب النظام التالي على الصورة المصفوفية :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 - 2e^{2x} \end{cases}$$

أ- بين أن المتجهين $U_1(x) = \begin{bmatrix} e^x \\ -e^x \end{bmatrix}$ و $U_2(x) = \begin{bmatrix} e^{-5x} \\ e^{-5x} \end{bmatrix}$ هما حلان للنظام التجانسي المرفق لهذا النظام ؟

ب- بين أن U_1, U_2 مستقلان خطيا ؟

ج- بين أن الحل المتجانس لهذا النظام هو : $U_p(x) = \begin{bmatrix} -\frac{6}{7}e^{2x} \\ \frac{8}{7}e^{2x} \end{bmatrix}$

د- اكتب صورة الحل العام لهذا النظام .

VI - اكتب مسألة القيم الابتدائية المكافئة على صورة نظام من المرتبة الأولى لكل من مسألة القيم الابتدائية التالية :

$$y'' + 2y' + 7xy = e^{-x} , \quad y(1) = 7, y'(1) = -2$$

$$2y'' - 5x^2 y' + (\cos x)y = \ln x , \quad y(2) = 1, y'(2) = 0$$

$$y''' - 6y'' + 3y' + e^{-x}y = \sin x , \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

VII - بماذا تخبرنا النظرية -1 حول كل من مسألة القيم الابتدائية التالية :

$$x_0 = 1 , \quad n = 2 \quad -1$$

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} e^x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A(x) = \begin{bmatrix} x & \ln x \\ -1 & x \ln x \end{bmatrix}$$

$$x_0 = -1 \quad \text{نفس الجزء -1- ماعدا} \quad -2$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{x^2 9} \end{bmatrix} \quad \text{نفس الجزء -1- ماعدا} \quad -3$$

VIII - بين أن $\Phi(x) = \begin{bmatrix} x^2 & x \\ 2x & 1 \end{bmatrix}$ هي المصفوفة الأساسية للنظام $y' = AY$

حيث $A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \frac{2}{x} \end{bmatrix}$ على المجال I الذي لا يحتوي على نقطة المبدأ

هل أن $\det \Phi(0) = 0$ يتعارض مع النظرية -3-

IX- نعتبر النظام التالي : $y' = AY + g(x)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \quad \text{حيث :}$$

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{bmatrix} \quad \text{تحقق أن :}$$

هي المصفوفة الأساسية للنظام $y' = AY$. جد الحل ϕ للنظام غير المتجانس حيث :

$$\phi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

X- نعتبر النظام التالي : $Y' = A(x)Y + g(x)$ حيث :

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \frac{2}{x} \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} x^4 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

جد الحل ϕ الذي يحقق الشرط الابتدائي التالي $\phi(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ثم جد مجال

صلاحية هذا الحل .

XI- أ- اثبت العلاقة (29) .

ب- إذا كانت M مصفوفة $n \times n$ فأثبت أن :

$$[e^M]^{-1} = e^{-M}, \quad [e^M]^k = e^{kM}, \quad e^0 = I$$

حيث k عدد صحيح و 0 مصفوفة $n \times n$

ج- إذا كانت $\Phi(x) = e^{Ax}$ فأثبت أن $\Phi^{-1}(x) = e^{-Ax}$

XII - جد المصفوفة الأساسية للنظام $y' = AY$ إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{XIII - أعد نفس السؤال إذا كانت :}$$

XIV - احسب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المرفقة للمصفوفات التالية :

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad -3 \quad ; \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad -2 \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad -1$$

XV - جد المصفوفة الأساسية للنظام $y' = AY$ ثم جد e^{xA} لكل من مصفوفة

المعاملات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad -2 \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad -1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad -4 \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad -3$$

-XVI جد الحل ϕ للنظام $y' = AY + g(x)$ في كل من الحالات التالية :

$$\phi(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} e^x \\ 1 \end{bmatrix} \quad -1$$

$$\phi(0) = 0 \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-x} \end{bmatrix} \quad -2$$

$$\phi(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad g(x) \quad -3 \text{ كيفي}$$

المصطلحات

Glossary

الفصل الأول

Differential Equation	معادلة تفاضلية
Ordinary Differential Equation	معادلة تفاضلية عادية
Partial Differential Equation	معادلة تفاضلية جزئية
closed form solution	صورة حل مغلقة
order	مرتبة
Degree	درجة
Linear	خطية
Homogeneous	متجانسة
Constant Coefficient	معامل ثابت
Variable coefficient	معامل متغير
Arbitrary Constant	ثابت اختياري

Essential	جوهرى
General Solution	حل عام
Particular Solution	حل خاص
Singular Solution	حل منفرد
Complete	حل كامل
Boundary Conditions	شروط حدية
Boundary -Value- Problem	مسألة القيم الحدية
Independent Variable	متغير مستقل
Dependent Variable	متغير تابع
Derivative	مشتقة
Envelope	مغلف

الفصل الثاني

First Order	مرتبة أولى
Geometrical Interpretation	منحنى هندسي
Curve of Constant Slope	منحنى حبل متساوي
Lineal elements	عناصر مستقيمة
Direction Field	حقل اتجاه
Unique solution	حل وحيد
Many Solutions	حلول عديدة
Existence theorem	نظرية الوجود
Uniqueness theorem	نظرية الوجدانية
Integral curves	منحنى تكاملي
Family of curves	مجموعة منحنيات
Variables separable	متغيرات قابلة للفصل
Integrating Factor	عامل تكميل
Integrating	تكامل

الفصل الثالث

Complete differentials

تفاضل تكامل

Exact differential equation

معادلة تفاضلية تامة

Fractions

كسور

Substitution

تعويض

Simultaneously

أنيما

Initial Conditions

شروط ابتدائية

الفصل الرابع

Linear Differential Equation	معادلة نطا صلبة خطية
Term	حد
Complementary Function	دالة متممة
Bernoulli's equation	معادلة بيرنولي
Riccati's equation	معادلة ريكاتي
Elementary Functions	دوال أولية

الفصل الخامس

Higher Degree	درجة عليا
Equations solvable for p	معادلات قابلة للحل بالنسبة لـ p
Equations solvable for y	معادلات قابلة للحل بالنسبة لـ y
Equations solvable for u	معادلات قابلة للحل بالنسبة لـ u
Clariaut's equation	معادلة كليرو

الفصل السادس

Different Applications	تطبيقات مختلفة
Geometrical Applications	تطبيقات هندسية
physical Applications	تطبيقات فيزيائية
Rectangular coordinates	إحداثيات متعامدة
Slope of the tangent	صيل المماس
normal	العمودي
Subnormal	تحت العمودي
Polar coordinates	إحداثيات قطبية
Perpendicular	عمودي
Trajectory	مسار
∞ - trajectory	مسار ∞
Orthogonal trajectory	مسار متعامد

Hyperbola	قطع زائد
Concetric Circles	دوائر متحدة المركز
Newton's low of cooling	قانون نيوتن للتبريد
Temperature	درجة حرارة
Saturated	مشبع
Concentration	تركيز
Coefficient of Conductivity	معامل التوصيل
Terminal Velocity	السرعة النهائية
Electric circuit	دائرة كهربائية
Condenser	هنري
Ohm	أوم
Ampere	أمبير
Electromotive Force	قوة دفع كهربائية
Resistance	مقاومة

Resistance

مكثف

Capacite

سعة

Charge

شحنة

Coulomb

كولوم

Kirchhoff's Low

قانون كيرشوف

الفصل السابع

Second order	مرتبة الثانية
Nonlinear	غير خطية
Homogeneous	متجانسة
Frequency	تردد
Damping Factor	معامل الخمود
Forced motion	حركة قسرية
Transient phenomem	ظاهرة عابرة
steady - state phenomenon	ظاهرة حالة الاستقرار
Horizontal beam	عارضضة أفقية
Fibers	ألياف
Elastic curve	منحنى مرن
Neutral surface	سطح التعادل

Segment	قطعة
Modulus of Elasticity	معامل المرونة
Moment of inertia	عزم قصور ذاتي
Bending moment	عزم حائي
Fixed	مثبت
Pendulum	بندول
Friction	احتكاك
Center of gravity	مركز الثقل
Maximum deflection	أفران أقصى
Spring	زنبرك
Flexural Rigidity	جساءة الثني
Critical axials loads	أحمال محورية حرجية
Critical Damping	نتمامد حوج

الفصل الثامن

Miscellaneous applications

تطبيقات متنوعة

Radius of curvature

نصف قطر الانحناء

Oscillatory motion

حركة اهتزازية

Simple harmonic motion

حركة توافقية بسيطة

Amplitude

سعة

Displacement

إزاحة

Period

دور

Damped motion

حركة مخمدة

Converges absolutely

تقارب مطلق

Ratio test

اختبار النسبة

odd

فردى

Even

زوجى

Continuous	مستمرة
Recursion Formula	صبغة تراجع
Radius of convergence	نصف قطر التقارب
Convergence Internal	مجال التقارب
Analytic Function	دالة تحليلية
Taylor series	متسلسلات نيولور
Irregular	غير منتظم
Ordinary point	نقطة عادية
Integer	عدد صحيح
Differentiation Successive	تفاضل متعاقب
Frobenius Series	متسلسلات فروبيوس
Indical equation	معادلة آسية
Finite	محدد

الفصل التاسع

Series	متسلسلة
Singular point	نقطة منفردة
Regular singular point	نقطة منفردة منتظمة
Dummy Index	دليل - أسية
Partial Sum	مجموع جزئي
Remainder	متبقي
Center	مركز
Power series	متسلسلة قوى
Convergent	متقارب
Divergent	متباعد
Abel's Identity	متطابقة أبيل
Linearly Independent	مستقل خطيا

Linearly dependent	مرتبط خطيا
Necessary and sufficient condition	الشرط اللازم والكافي
Complementary function	دالة متممة
Reduction of order	تخفيض المرتبة
D' Alembert	دا لمبير
Constant coefficients	معاملات ثابتة
Variable coefficients	معاملات متغيرة
Operator	مؤثر
Polynomial	كثير حدود
characteristic equator	معادلة مميزة
characteristic roots	جنور مميزة
Real roots	جنور حقيقية
Complex roots	جنور مركبة
Distinct real roots	جنور حقيقية مختلفة (ضمايزة)

Repeated roots	جذور مضاعفة
Formula	صيغة
Partial Fractions	كسور جزئية
Constants of Integration	ثوابت التكامل
Undetermined coefficient	معاملات غير معينة
Variation of Parameters	تغيير برامترات
Lagrange	لاغرانج
Restriction equation	معادلة قيدية

الفصل العاشر

Famous	شهير
Legendre 's Equation	معادلة ليجندر
Kronicker index	دليل كرونيتكر
Bessel's Equation	معادلة بيسل
Euler equation	معادلة أويكر
Gauss equation	معادلة جاوس
Hypergeometric series	متسلسلات فوق هندسية
Laguerre equation	معادلة لأكبر
Hermite equation	معادلة هرميث

الفصل الحادي عشر

Higher Order	مرتبة عليا
Wronskian	رونسكيان
Reduction of order	تخفيض المرتبة
Cramer	كرامير
undetermined coefficients	معاملات غير معينة
Variation of parameters	تغيير البارامترات

الفصل الثاني عشر

Laplace Transform

تحويل لابلاس

Elementary functions

دوال بسيطة

Operator

مؤشر

Derivatives

مشتقات

Gamma function

دالة جاما

Periodic function

دالة دورية

Inverse Transform

تحويل عكسي

الفصل الثالث عشر

Existence and uniqueness Theorem	نظرية الوجود والوحدانية
Series	متسلسلات
Lipschitz Condition	شرط ليبشيتز
proof	إثبات
Lemma	تمهيدية
Gronwall Inequality	مراجعة كروانوال

الفصل الرابع عشر

Linear system	نظام خطي
Linear homogeneous	نظام خطي متجانس
Vector	متجه
Matrix	مصفوفة
Exponential of a matrix	أسية المصفوفة
Eigenvectors	قيم ذاتية
Determinant	محدد
Fundamental matrix	مصفوفة أساسية
General Case	حالة عامة

المحتوى



المراجع

المحتوى

المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات

الفصل الأول : المعادلات التفاضلية العادية

- 1- مقدمة .
- 2- تعاريف ومفاهيم .
- 3- حل المعادلة التفاضلية .
- 4- مسألة القيم الحدية في المعادلات التفاضلية .
- 5- تمارين .

الفصل الثاني : المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

- 1- المعنى الهندسي للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى .
- 2- نظرية وجود وانفراد الحل .
- 3- معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى قابلة لفصل المتغيرات .
- 4- معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى تختزل إلى صورة قابلة للفصل:
 - معادلات تفاضلية متجانسة .
 - معادلات فيها معاملات التفاضل دالتان خطيتان .
 - معادلات على الصورة $yM(xy)dx + xN(xy)dy = 0$
 - صور أخرى .
- 5- تمارين .

الفصل الثالث : المعادلات التفاضلية التامة من المرتبة الأولى

- 1- تعاريف ونظريات .
- 2- عامل التكميل - تعريفه وطريقة البحث عنه .
- 3- تمارين .

الفصل الرابع : المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى

- 1- تعريف المعادلة التفاضلية الخطية .
- 2- نظريات .
- 3- المعادلات التي يمكن أرجاعها الى معادلات خطية :
 - معادلة بيرنولي Bernoulli التفاضلية .
 - معادلة ريكاتي Reccati التفاضلية .
- 4- تمارين .

الفصل الخامس المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى ومن الدرجة العليا

- 1- تعريف .
- 2- معادلات تحل في $p = y'$
- 3- معادلات تحل في y
- 4- معادلات تحل في k
- 5- معادلة كلير Clairaut
- 6- تمارين .

الفصل السادس : تطبيقات مختلفة على المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

- 1- مقدمة .
- 2- تطبيقات هندسية .
- 3- تطبيقات فيزيائية .
- 4- تمارين .

الفصل السابع : المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية

- 1- تعاريف ونظريات .
- 2- المعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية .
- 3- المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية .
- 4- الاستقلال والارتباط .
- 5- تخفيض المرتبة لمعادلة تفاضلية خطية .
- 6- المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة .
- 7- المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة .
- 8- طريقة المعاملات غير المعينة .
- 9- طريقة تغيير البارامترات لحل المعادلات التفاضلية الخطية (طريقة لاغرانج) .
- 10- تمارين .

الفصل الثامن : تطبيقات متنوعة على المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية

- 1- تطبيقات هندسية .
- 2- تطبيقات فيزيائية .
- 3- تطبيقات كهربائية .
- 4- تطبيقات تركيبية (بنية الأجسام الصلبة) .
- 5- تمارين .

الفصل التاسع : متسلسلات الحلول للمعادلات الخطية من المرتبة الثانية

- 1- مقدمة : تعاريف ومفاهيم .
 - . دليل المتسلسلة .
 - . متسلسلة القوى .
 - . النقطة العادية والنقطة المنفردة لمعادلة تفاضلية .
- 2- الحلول في متسلسلة قوى بجوار النقطة العادية .
 - نظرية -1-
 - طريقة العمل لإيجاد الحل بجوار نقطة عادية .
 - طريقة التفاضل المتعاقب .
 - نظرية -2-

3- الحل في متسلسلة فرو بنويس بجوار نقطة مفردة منتظمة .

نظرية -3-

الطريقة العملية لإيجاد الحل بجوار نقطة مفردة ، منتظمة

الحل في متسلسلة حول نقطة مفردة عند اللانهاية .

أمثلة مختلفة محلوله .

4- تمارين .

الفصل العاشر : متسلسلات الحل لبعض المعادلات التفاضلية الخطية الشهيرة

Legendre's Equation	- مسألة 1-	1- معادلة ليجندر
Bessel 's Equation	- مسألة 2-	2- معادلة بيسل
Euler,s Equation	- مسألة 3-	3- معادلة أويلر
Gouss's Equation	- مسألة 4-	4- معادلة جاوس
Laguerre's Equation	- مسألة 5-	5- معادلة لاكير
		6- تمارين .

الفصل الحادي عشر : المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة العالية

1- تعاريف ونظريات .

2- المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة n

الرونسكيان .

نظرية .

المعادلات المتجانسة ذات المعادلات الثابتة

جذور حقيقة متمايضة .

جذور مركبة .

جذور متكررة .

أمثلة محلولة .

3- المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة من المرتبة n

الحل العام .

تخفيض المرتبة لمعادلة تفاضلية خطية .

طريقة المعاملات غير المعينة .

طريقة تغيير البارامترات .

4- تمارين .

الفصل الثاني عشر : تحويل لابلاس

1- مقدمة .

2- خواص تحويل لابلاس - تعاريف - نظريات - أمثلة .

3- تحويل بعض الدوال البسيطة .

4- مشتقات التحويلات .

5- تحويلات المشتقات - نظرية - أمثلة .

- 6- الدالة كما The gamma function
- 7- الدالة الدورية The Periodic function
- 8- التحويل العكسي
- 9- تطبيقات على المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة .
- 10- جدول تحويل لابلاس لبعض الدوال .
- 11- تمارين .

الفصل الثالث عشر : دراسة وجود وانفراد حلول المعادلات التفاضلية

- 1- ملاحظات أولية .
- 2- نظرية وجود وانفراد الحل .
- 3- شرط لبشيتز Lipschitz Condition
- 4- برهان نظرية وجود الحل .
- 5- برهان نظرية وانفراد الحل .
- 6- نظريات وجود الحل الأخرى .
- 7- تمارين .

الفصل الرابع عشر : النظم الخطية للمعادلات التفاضلية

- 1- مقدمة .
- 2- تعاريف .
- 3- نظرية وجود وانفراد الحل .

- 4- النظم الخطية المتجانسة .
- 5- النظم الخطية غير المتجانسة .
- 6- النظم الخطية ذات المعاملات الثابتة .
 - أسية المصفوفة .
 - القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفات .
 - حساب المصفوفات الأساسية .
 - النظام الخطي غير المتجانس .
 - الحالة العامة .
- 7- تمارين .

المصطلحات .

الفهرس .

المراجع .

المراجع

- 1- AGNEW R.P "Differential Equations " Mc Grow - Hill N.Y, 1960
- 2- BIRKOFF G. And ROTA G "Ordinary Differential Equations " Ginn and Company , Boston 1962
- 3- EARL D.R and PHILLIP E.B "Elementary Differential Equations " Mocomillan Publishing Co , Inc New York ,1972
- 4- FRED B. and JOHN A.N " Ordinary Differential Equations " A First course W.A. Benjamin, Inc. California , 1973 .
- 5- KOSHLIYAKOV N.S. , SMIRNOV M.M and GLINER E.B. " Differential Equations of Mathematical physics " North - Holland Publishing Company Amsterdam , 1964
- 6- RICHARD B. " Differential Equations " schoum's Outline Series, Mc Grow - Hill book Company , 1975

7- ZANE C . M "Introduction to Ordinary " Differential Equations " Prindle , Weber et Schmidt Boston , Mossachusetts , 1972.

8- PIERRE GRISVARD "Calcul Differential of Equations Differentials " office des publications Universitaires , 2 eme Edition, Alger , 1980 .

9- زيد الأمير " المعادلات التفاضلية "

ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر 1985

10 - السيد / عبدالمعطي البدري " المعادلات التفاضلية العادية وتطبيقاتها " - دار الراتب الجامعية , بيروت 1985

11- فرانك آيرز " نظريات ومسائل في المعادلات التفاضلية "

سلسلة ملخصات شوم دار ماكجروهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع القاهرة 1988

12- GEORGE ARFKEN "Mathematical Methods for Physicists" Second edition Academic Press , New York - 1970

- 13- Differential Equations : A Aodeling
perspective R.L. Borrelli & C. Coleman John
Wiley & Sons , Ltd 1996**
- 14- Differential equation and boundary value prowls
W.E. Boyce & R.C. Diprima
John Wiley Sons ,Ltd .1992**
- 15- Differential equation with meple
K.R. Coombes ,B.R. Hunt ,R.L . Lipsmon , J.E.
Osborn & G.T. Stuck J.W 1996**
- 16- Ordinary Differential Equations
Birkhoff , 1989. J&w .**
- 17- Introduction of Ordinary Differential Equations
Ross , 1989 .J&W**