المعهد العالي
للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

الدكتور عمران قوبا

التحليل

4

المتسلسلات الصحيحة
التوابع الهولومورفية والميرومورفية
نظرية الرواسب
تحويلات لابلاس

التحليل

الجزء الرابع

الدكتور عمران قوبا

منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا
2018

التحليل

الجزء الرابع

عمران قوبا

تصميم الغلاف: المؤلف

من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

الجمهورية العربية السورية، 2018.

Analysis

Volume 4

Omran Kouba

Publications of the

Higher Institute for Applied Sciences and Technology (HIAST)

Syrian Arab Republic, 2018.

ISBN: 978-9933-9-2611-3

منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

- "الجبر، الجزء الأول، مبادئ الجبر المجرد"، للدكتور عمران قوبا، الطبعة الأولى 2009، الطبعة الثانية 2017.
- "التحليل، الجزء الأول"، للدكتور عمران قوبا، الطبعة الأولى 2009، الطبعة الثانية 2017.
- "كيمياء المحاليل المائية"، للدكتورة يمن الأتاسي، الطبعة الأولى 2011، الطبعة الثانية 2016.
- "الأنظمة الرادارية في مواجهة التشويش والخداع"، للدكتور علي طه، 2011.
- "ميكانيك النقطة المادية"، للدكتور مصطفى العليوي والدكتور هاني قوبا، الإصدار الأول 2011، الإصدار الثاني 2016.
- "الجبر، الجزء الثاني، الجبر الخطي"، للدكتور عمران قوبا، 2017.
- "التحليل، الجزء الثاني"، للدكتور عمران قوبا، 2017.
- "المرجع في الرسم الصناعي، الجزء الثالث"، للدكتور محمد بدر قويدر، 2017.
- "مدخل إلى كيمياء المياه: تلوث- معالجة- تحليل"، للدكتور نصر الحايك، 2017.
- "الترموديناميك"، للدكتور عقيل سلوم، 2017.
- "دليل الرسام الصناعي"، للدكتور مصطفى الجرف، 2017.
- "التحليل، الجزء الثالث"، للدكتور عمران قوبا، 2018.
- "التحليل، الجزء الرابع"، للدكتور عمران قوبا، 2018.
- "التحليل، الجزء الخامس"، للدكتور عمران قوبا، 2018.

لمعلومات أوفى عن المنشورات وطلب نسخة ورقية أو تحميل المتاح منها إلكترونياً، يمكن الاطلاع على موقع المعهد الإلكتروني:

www.hiast.edu.sy

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا مؤسسة حكومية للتعليم العالي أحدثت بموجب المرسوم التشريعي رقم /24/ لعام 1983، وذلك بهدف إعداد أطر علمية متميزة من مهندسين وباحثين للإسهام الفاعل في عملية التطوير العلمي والتنمية في الجمهورية العربية السورية.
يمنح المعهد العالي درجة الإجازة في الهندسة في الاتصالات والمعلوماتية والنظم الإلكترونية والميكاترونيكس وعلوم وهندسة المواد وهندسة الطيران. يقبل المعهد العالي لدراسة هذه الاختصاصات شريحة منتقاة من المتفوقين في الشهادة الثانوية من الفرع العلمي. يتيح المعهد العالي أيضاً برامج ماجستير أكاديمي في نظم الاتصالات وفي التحكم والروبوتيك وفي نظم المعطيات الكبيرة ونظم المعلومات ودعم القرار وفي علوم وهندسة المواد وعلوم وهندسة البصريات. ويمنح المعهد العالي درجة الدكتوراه في الاتصالات والمعلوماتية ونظم التحكم والفيزياء التطبيقية. تُحدث في المعهد العالي اختصاصات جديدة بحسب متطلبات سوق العمل وتوجهات البحث والتطوير المحلية والعالمية.

يمتاز المعهد بأطره الكفوءة ذات التأهيل العالي وبمختبراته المجهزة تجهيزاً عالياً وببنيته التحتية الفريدة في القطر. إلى جانب النشاط التعليمي، يمارس المعهد العالي عبر جهود أطره وفعالياته العلمية المختلفة نشاطاً حثيثاً في البحث والتطوير، إذ ينفذ مشاريع متنوعة لصالح الجهات العامة والخاصة في القطر، كما يتعاون مع جهات خارج القطر في بعض المشاريع البحثية والتطويرية. يسعى المعهد أيضاً، عبر دورات تدريبية نظرية وعملية متاحة للقطاعين العام والخاص وللأفراد، إلى إفادة أوسع فئة من المهتمين من إمكانيات فريقه العلمي ومختبراته.

استكمالاً لدور المعهد العالي الرائد في مجال التعليم ونشر العلم، يحرص المعهد العالي على نشر كتب علمية عالية المستوى من نتاج أطره العلمية، منها ما هو تدريسي يوافق المناهج في المعهد العالي ويفيد شريحة واسعة من الطلاب الجامعيين عموماً، ومنها ما هو علمي ثقافي. يخضع الكتاب قبل نشره إلى عملية تقويم علمي من مجموعة منتقاة بعناية من أصحاب الاختصاص، إضافةً إلى تدقيق لغوي حفاظاً على سوية عالية للمنشورات باللغة العربية.

يتيح المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا بعضاً من منشوراته على موقعه على الشابكة تحت رخصة المشاع الإبداعي لتعميم الفائدة على شريحة واسعة من القراء.

للتواصل مع المعهد العالي والاطلاع على شروط النشر وآخر المنشورات وتحميل المتاح منها:

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، دمشق، ص.ب 31983
هاتف +(963)(11)5123819
فاكس +(963)(11)5140760
بريد إلكتروني contact@hiast.edu.sy
موقع إلكتروني www.hiast.edu.sy

شكر

أتقدّم بالشكر العميق إلى جميع الزملاء الذين أغنوا بملاحظاتهم فحوى هذا الكتاب، وأسهموا في إعطائه شكله النهائي هذا.

وأخصُّ بالشكر المعلِّم الفاضل الأستاذ الدكتور موفق دعبول، والأستاذ الدكتور محمد بشير قابيل والدكتور خالد حلاوة على قراءتهم المتمعّنة لهذا الكتاب وعلى الملاحظات القيّمة التي أبدوها عليه. وأخيراً، وليس آخراً، أتقدم بجزيل الشكر والامتنان إلى الأستاذ مروان البواب الذي دقّق الكتاب لغوياً وأسهم بملاحظاته ومقترحاته في تحسين صياغة العديد من الفقرات.

محتوى الجزء الأوّل

مقدّمة

الفصل الأوّل
حقل الأعداد الحقيقيّة

الفصل الثاني
المتتاليات العدديّة

الفصل الثالث
المتسلسلات العدديّة

الفصل الرابع

التوابع لمتحوّل حقيقي : النهايات والاستمرار

الفصل الخامس

التوابع لمتحوّل حقيقي : الاشتقاق

محتوى الجزء الثاني

مقدّمة

الفصل السادس

التوابع المألوفة

الفصل السابع

مقارنة التوابع والنشر المحدود

الفصل الثامن

متتاليات ومتسلسلات التوابع

الفصل التاسع

التوابع الأصليّة والتكامل المحدود

الفصل العاشر

التكاملات المعمَّمة أو المعتلّة

والتكاملات التابعة لوسيط

محتوى الجزء الثالث

مقدّمة

الفصل الحادي عشر
الفضاءات الشعاعيّة المنظّمة

الفصل الثاني عشر
التوابع لعدّة متحوّلات

الفصل الثالث عشر

منشأ المعادلات التفاضليّة وتصنيفها

الفصل الرابع عشر

المعادلات التفاضليّة السلّمية الشهيرة من المرتبة الأولى

الفصل الخامس عشر

المعادلات التفاضليّة الخطّية

الفصل السادس عشر

المبرهنات الأساسيّة المتعلّقة بالمعادلات التفاضليّة العاديّة

محتوى الجزء الرابع

مقدّمة

الفصل السابع عشر

المتسلسلات الصحيحة

الفصل الثامن عشر

نظريّة كوشي والتوابع الهولومورفيّة

الفصل التاسع عشر

النشر بمتسلسلات لوران ونظريّة الرواسب

الفصل العشرون

تحويلات لابلاس وتطبيقاتها

محتوى الجزء الخامس

مقدّمة

الفصل الحادي والعشرون

متسلسلات فورييه

الفصل الثاني والعشرون

مقدّمة في نظريّة القياس والتكامل

الفصل الثالث والعشرون

تحويلات فورييه

الفصل الرابع والعشرون

التوزيعات

مقدّمة

التحليل الرياضيّ هو فرعٌ من فروع الرياضيّات يتعامل مع الأعداد الحقيقيّة والأعداد العقديّة والتوابع، وهو يدرس مفاهيم الاستمرار والتكامل والتفاضل في أطرها العامّة.

تاريخياً، يمكن إرجاع بدايات هذا الفرع من فروع الرياضيّات إلى القرن السابع عشر، مع اختراع نيوتن ولايبنتز حسابَي التفاضل والتكامل، ثُمّ تطوّرت موضوعات المعادلات التفاضليّة وتحليل فورييه، والتوابع المولّدة في العمل التطبيقي في القرنين السابع عشر والثامن عشر، وجرى استخدام تقانات حسابَي التفاضل والتكامل بنجاح في تقريب العديد من المسائل المنقطعة، والمسائل المتّصلة.

وبقي تعريف مفهوم التابع موضع نقاش ومحاورة بين الرياضيّاتيين طوال القرن الثامن عشر، وكان كوشي CAUCHY أوّل من وضع التحليل الرياضي على أسس منطقيّة صلبة بإدخاله مفهوم متتاليات كوشي وذلك مع بداية القرن التاسع عشر. كما أرسى كوشي القواعد الصوريّة الأساسيّة للتحليل العقدي ووضع شروطاً تضمن وجود حلول للمعادلات التفاضليّة ووحدانية هذه الحلول. ودرسَ بواسون POISSON وليوفيل LIOUVILLE وفورييه FOURIER وغيرهم المعادلات التفاضليّة الجزئيّة والتحليل التوافقي.

وفي منتصف القرن التاسع عشر وضع ريمان RIEMANN نظريّته في التكامل. وشهد الثُلث الأخير من ذلك القرن إعادة التنظيم الأخيرة للمفاهيم الأساسيّة في التحليل الرياضي بجهود فايرشتراس WEIERSTRASS، الذي رأى أنّ النظرة الهندسيّة لمفاهيم النهاية والاستمرار تقود أحياناً إلى استنتاجات خاطئة، فوضع ما يسمّى تعريف ε-δ للنهاية. وبعدها تنبّه الرياضيّاتيّون إلى أنّهم يفترضون وجود مجموعة "متّصلة" من الأعداد الحقيقيّة دون أي إثبات على وجود هذه المجموعة، فأنشأ ديدكند DEDKINDE مجموعة الأعداد الحقيقيّة مستخدماً ما سُميّ لاحقاً "مقاطع ديدكند"، وجرت في الوقت نفسه تقريباً محاولات تطوير المبرهنات المتعلّقة بتكامل ريمان، وهذا ما أدّى إلى دراسة "قياس" المجموعات التي تكون عليها التوابع الحقيقيّة منقطعة.

وبدأت تظهر «الوحوش» المتمثّلة بتوابع غريبة مثل التوابع الحقيقيّة التي لا تقبل الاشتقاق عند أيّة نقطة، أو تلك التوابع التي تملأ منحنياتها الفراغ. وفي هذه الحقبة، طوّر جوردان JORDAN وبورِل BOREL نظرّية القياس، وطوّر كانتور CANTOR ما يُعرف اليوم بالنظريّة «الساذجة» للمجموعات.

ومع بداية القرن العشرين صار التحليل الرياضي يُصاغ بواسطة المفاهيم الجديدة في نظريّة المجموعات، وحلّ لوبيغ LEGESGUE مسألة نظريّة القياس والتكامل، وأدخل هِلبرت HILBERT مفهوم الفضاءات التي عُرفت فيما بعدُ باسمه لحل المعادلات التكامليّة، وكان مفهوم الفضاء الشعاعي المنظّم في الجوّ، إذ أنشأ باناخ BANACH في العشرينيات من ذلك القرن التحليل التابعي.

بدأت مفاهيم التوابع المعمّمة أو التوزيعات تظهر في نهايات القرن التاسع عشر، وذلك في إطار توابع غرين GREEN، وتحويلات لابلاس LAPLACE ونظريّة ريمان للمتسلسلات المثلثيّة التي هي ليست متسلسلات فورييه لتوابع قابلة للمُكاملة على سبيل المثال. وقاد الاستخدام المُكثّف لتحويلات لابلاس، واستخدام طرائق الحساب الرمزي إلى ما صار يُعرف بحساب العمليات. حملت هذه الطرائق سمعة سيِّئة بين الرياضيّاتيين لأنّ تعليل صحّتها كان يعتمد على متسلسلات متباعدة.

أمّا المرّة الأولى التي احتل فيها مفهوم التابع المُعمّم موقعاً مركزيّاً في الرياضيّات فقد جاءت في إطار تكامل لوبيغ، إذ صار التابع القابل للمكاملة بمعنى لوبيغ مُكافئاً لأي تابع يتفق معه اتفاقاً شبه أكيد. وظهر تابع ديراك δ في العشرينيات والثلاثينيات من القرن العشرين، إذ راح ديراك DIRAC يتعامل مع القياس كتابع بالمعنى التقليدي.

وجاء التتويج النهائي لهذه المفاهيم في نظريّة التوزيعات لشوارتز SCHWARTZ وذلك في نهاية الأربعينيات من القرن العشرين. تكمن نقطة الضعف الأساسيّة في هذه النظريّة في أنّه لا تمكن في إطار

هذه النظريّة معالجة المسائل اللاخطيّة، فالتوزيعات بمعنى شوارتز لا تؤلّف جبراً، ولا يمكن حساب جداء ضرب التوزيعات كما تُضرب التوابع.

يهدف هذا المؤلَّف إلى دراسة التحليل الرياضي، وهو موجّه إلى طلاب سيتابعون دراستهم في مجالات هندسيّة، ومكوّن من خمسة أجزاء.

نعالج في هذا الجزء الرابع الموضوعات الآتية:

- يدرس الفصل السابع عشر المتسلسلات الصحيحة: تقاربها، وخواص مجموعها، ثُم يعرِّف التوابع التحليليّة ويدرس التابع الأسّي لمتحوّل عقدي كمثال مهمّ عليها.
- ويعالج الفصل الثامن عشر مفهوم التوابع الهولومورفيّة وخواصها، ويعرض أمثلة عليها، ثُم يستعرض نظريّة كوشي والمبرهنات الأساسية المتعلّقة بها.
- ويتصدّى الفصل التاسع عشر لدراسة النقاط الشاذة ولنشر التوابع بمتسلسلات لوران، ثُم يعرض نظريّة الرواسب ويدرس بعض تطبيقاتها في حساب التكاملات.
- وأخيراً يدرس الفصل العشرون مفهوم تحويلات لابلاس، وهي أداة مفيدة لدراسة بعض أنواع المعادلات التفاضليّة الخطِّية. ومثال مهم على بعض التحويلات التكامليّة المعروفة.

هذا ويتبع كل فصل من فصول الكتاب مجموعة من التمرينات المتباينة في درجات صعوبتها، تهدف إلى مساعدة الطالب على اكتساب المهارات اللازمة، واستيعاب المفاهيم المدروسة.

ومن المفيد هنا الإشارة إلى أنّ دراسة كتاب رياضيات تختلف اختلافاً جوهرياً عن قراءة قصّة أو كتاب شعر يستمتع بهما المرء جالساً على كرسي مريح، إذ لا بُد من قلم وورقة ومنضدة نجلس إليها، نعالج المادّة النظريّة ونُغالب التمرينات حلاًّ ومعاناة.

لذلك ننصح القارئ ألاّ يطّلع على الحلول المُقترحة للتمارين إلاّ بعد أن يستنفد جميع محاولات حلها، وعليه في جميع الأحوال إعادة صياغة الحلّ بلغته ليضمن الاستيعاب الكامل للمفاهيم والأفكار المُعالجة.

ختاماً، أُزجي الشكر لجميع الزملاء الذين ساهموا في إخراج هذا الكتاب إلى النّور، وأُعرب عن شكري لكلّ زميل يُبدي ملاحظة أو انتقاداً بنّاءَيْن حول فحوى هذا الكتاب.

أيار 2017

عمران قوبا

المتسلسلات الصحيحة

نفترض أنّ القارئ على دراية بخواص وبناء حقل الأعداد العقديّة الذي درسناه في الجزء الأوّل من كتاب الجبر. هذا، ونُطلق عادة تسمية **المستوي العقديّ** على الفضاء الشعاعيّ المنظّم $(\mathbb{C},|\cdot|)$ الذي بعده اثنان على حقل الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$. ونكتب عادة $\mathbb{C}$ عوضاً عن $(\mathbb{C},|\cdot|)$ إذ لا مجال للالتباس، ونرمز إلى عناصر المستوي العقديّ بأحد الرمزين:

$$z = x + \mathrm{i}\, y \quad \text{أو} \quad z = (x, y)$$

ولمّا كان $\mathbb{C}$ فضاءً شعاعيّاً منظّماً منتهي البُعد، فإنّ الخواص والتعاريف الطبولوجيّة المتعلّقة بالفضاءات الشعاعية المنظّمة المنتهية البُعد التي أتى القارئ على دراستها تبقى سارية في هذه الحالة. وأخيراً يمكن النظر إلى التوابع المعرّفة على مجموعة جزئيّة من $\mathbb{C}$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ بصفتها توابع لمتحولين فتسري عليها جميع التعاريف والخواص التي تسرى على التوابع لعدّة متحوّلات.

1. عموميات

1-1. تعريف. نسمّي **متسلسلة صحيحة** لمتحوّل عقدي كل متسلسلة توابع $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ حيث f_n تابعٌ من الشكل $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_n(z) = a_n z^n$ حيث a_n من $\mathbb{C}$، ونرمز إليها تجاوزاً بالرمز $\sum a_n z^n$. ونسمّي a_0 الحد الثابت.

يمكننا تزويد مجموعة المتسلسلات الصحيحة بثلاثة قوانين هي الجمع $(+)$ والضرب بعدد عقدي $(\cdot)$ والضرب $(\times)$ معرّفة كما يلي:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

$$\lambda \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum (\lambda a_n) z^n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$$

ومن السهل تيقُّنُ أنّ مجموعة المتسلسلات الصحيحة، مزوّدة بالقوانين السابقة تكوّن **جبراً تبديلياً** على حقل الأعداد العقديّة.

1-2. **توطئة** -Abel. لتكن $\sum a_n z^n$ متسلسلة صحيحة، ولنفترض أنّه يوجد z_0 في $\mathbb{C}$ يجعل المتتالية $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة، عندئذ تكون المتسلسلة $\sum a_n z^n$ متقاربة بالإطلاق عند كلِّ قيمة للعدد z من $D(0,|z_0|)$، أي من القرص المفتوح الذي مركزه 0 ونصف قطره $|z_0|$.

الإثبات

في الحقيقة، نجد استناداً إلى الفرْض عدداً M من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقِّق

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n z_0^n| \leq M$$

في حالة $z_0 = 0$ ليس هناك ما يجب إثباته. لنفترض إذن أنّ $z_0 \neq 0$، عندئذ أيّاً كانت z من $D(0,|z_0|)$ فلدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n z^n| \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

وهذا ما يُثبت تقارب المتسلسلة $\sum a_n z^n$ بالإطلاق لأنّ $|z/z_0| < 1$. ❐

1-3. **نتيجة**. لتكن $\sum a_n z^n$ متسلسلة صحيحة، ولنفترض أنّه يوجد z_0 في $\mathbb{C}$ يجعل المتسلسلة $\sum a_n z_0^n$ متقاربة، عندئذ تكون المتسلسلة $\sum a_n z^n$ متقاربة بالإطلاق عند كلِّ قيمة للعدد z من القرص $D(0,|z_0|)$.

1-4. **مبرهنة وتعريف**. لتكن $\sum a_n z^n$ متسلسلة صحيحة. عندئذ يوجد عنصر وحيد R من $\overline{\mathbb{R}}$، يُحقِّق الخاصّتين الآتيتين.

1. المتسلسلة $\sum a_n z^n$ متقاربة بالإطلاق أيّاً كان العدد z من $\mathbb{C}$ المُحقِّق للشرط $|z| < R$.
2. المتسلسلة $\sum a_n z^n$ متباعدة أياً كان z من $\mathbb{C}$ مُحقِّقاً الشرط $|z| > R$.

نسمّي العنصرَ R **نصف قطر تقارب** المتسلسلة الصحيحة $\sum a_n z^n$.

الإثبات

لتكن $\mathcal{B}$ مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة r التي تجعل المتتالية $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة. لمّا كانت $\mathcal{B}$ غير خالية، (لأنّ 0 ينتمي إلى $\mathcal{B}$)، فهي تقبل حداً أعلى

$$R = \sup \mathcal{B} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

- لتكن z من $\mathbb{C}$ تُحقّق $|z| > R$. عندئذ نجد، استناداً إلى تعريف R، عدداً r من $\mathcal{B}$ يُحقّق $|z| > r \geq R$. ولمّا كانت المتتاليةُ $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة اقتضت التوطئة 1-2 التقاربَ بالإطلاق للمتسلسلة $\sum a_n z^n$.
- ومن جهة أخرى، إذا كانت z من $\mathbb{C}$ تُحقّق $|z| < R$. فإنّ تعريف R يبيّن أنّ المتتالية $(a_n |z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست محدودة، وهذا يقتضي تباعد المتسلسلة $\sum a_n z^n$. ❐

1-5. **مبرهنة**. لتكن $\sum a_n z^n$ متسلسلة صحيحة، عندئذ يُحقّق نصف قطر تقاربها R العلاقة[1]:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

الإثبات

نلاحظ أنّ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

ونحصل على النتيجة المطلوبة باستعمال **معيار كوشي** في تقارب المتسلسلات العدديّة. ❐

1-6. **ملاحظة** : لتكن $\sum a_n z^n$ متسلسلة صحيحة، ولنفترض أنّ $a_n \neq 0$ بدءاً من قيمة n_0 للدليل n، وأنّ النهاية $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \rho \in \overline{\mathbb{R}}$ موجودة. عندئذ ρ هو نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum a_n z^n$، وذلك بناءً على ما درسناه في المتسلسلات العدديّة. ❐

[1] مع الاصطلاح $\frac{1}{\infty} = 0$، و $\frac{1}{0} = \infty$.

1-7. **تعريف** : لتكن $\sum a_n z^n$ متسلسلة صحيحة، نصف قطر تقاربها R . عندئذ نسمّي القرص المفتوح الذي مركزه 0، ونصف قطره R في المستوي العقدي **قرص تقارب المتسلسلة** $\sum a_n z^n$ ونسمّي تجاوزاً الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها R **دائرة تقارب المتسلسلة**. ومن المهمّ الإشارة هنا إلى وجود متسلسلات صحيحة تتباعد عند كلِّ نقطة من نقاط دائرة تقاربها!.

1-8. **مبرهنة**. لتكن $\sum a_n z^n$ متسلسلة صحيحة، نصف قطر تقاربها $0 < \alpha$، ولتكن $\sum b_n z^n$ متسلسلة صحيحة، نصف قطر تقاربها $0 < \beta$. عندئذ

1. يُحقِّقُ σ نصف قطر تقارب متسلسلة المجموع $\sum c_n z^n$ حيث $\forall n, c_n = a_n + b_n$ العلاقة $\sigma \geq \min(\alpha, \beta)$ وتحدث المساواة في حالة $\alpha \neq \beta$.

2. يُحقِّقُ π نصف قطر تقارب متسلسلة الجداء $\sum d_n z^n$ حيث $\forall n, d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ العلاقة $\pi \geq \min(\alpha, \beta)$.

الإثبات

1. لمّا كانت المتسلسلتان $\sum a_n z^n$ و $\sum b_n z^n$ متقاربتين أياً كانت z من $\mathbb{C}$ تُحقِّق الشرط $|z| < \min(\alpha, \beta)$، استنتجنا تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum c_n z^n$ عند قيم z هذه، إذن $\sigma \geq \min(\alpha, \beta)$. ولو افترضنا مثلاً أنّ $\alpha > \beta$، لكان لدينا من جهة أولى $\sigma \geq \beta$، ومن جهة ثانية $\beta \geq \min(\sigma, \alpha)$ وذلك بتطبيق ما أثبتناه على المتسلسلتين الصحيحتين $\sum c_n z^n$ و $\sum(-a_n) z^n$. وهذا يبيِّن أنّ $\sigma = \min(\alpha, \beta)$ في هذه الحالة.

2. لمّا كانت المتسلسلتان $\sum a_n z^n$ و $\sum b_n z^n$ متقاربتين بالإطلاق أياً كان z من $\mathbb{C}$ يُحقِّق الشرط $|z| < \min(\alpha, \beta)$، استنتجنا تقارب متسلسلة جداء التّلافّ لهما أي المتسلسلة الصحيحة $\sum d_n z^n$ عند قيم z هذه، وبناءً على هذا يكون $\pi \geq \min(\alpha, \beta)$. ❐

1-9. **ملاحظات**. سنحتفظ برموز المبرهنة السابقة. بدراسة حالة المتسلسلتين $\sum a_n z^n$ و $\sum b_n z^n$ حيث $a_n = 1 + 2^n$ و $b_n = 1 - 2^n$ نجد $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ و $\sigma = 1 > \frac{1}{2}$. وكذلك نجد بدراسة حالة المتسلسلتين $\sum z^n$ و $1 - z$ أنّ $\alpha = 1$ و $\beta = \infty$ وأخيراً أنّ $1 > \infty = \pi$. نستنتج من ذلك أنّه ليس هناك عموماً مساواة في المتراجحات الواردة في المبرهنة السابقة.

1-10. **تعريف**. لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متسلسلة صحيحة. نسمّي متسلسلتها الصحيحة **المشتقّة** المتسلسلة الصحيحة المعرّفة بالصيغة: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$.

1-11. **مبرهنة**. لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متسلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها R . عندئذ يكون R' نصف قطر تقارب متسلسلتها الصحيحة المشتقّة مساوياً R .

الإثبات

لنلاحظ أوّلاً أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_{n+1}||z|^{n+1} \leq |z|(n+1)|a_{n+1}||z|^n$$

وهذه المتراجحة تُبيِّن أن الشرط $|z| < R'$ يقتضي $|z| \leq R$. ومنه $R' \leq R$.

ومن جهة أخرى، لتكن $\varepsilon > 0$. عندئذ نجد،

$$\forall z \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)\left|a_{n+1}\right||z|^n \leq \frac{1}{\varepsilon|z|}\left|a_{n+1}\right|((1+\varepsilon)|z|)^{n+1}$$

وذلك بناءً على المتراجحة الواضحة $(n+1)\varepsilon \leq (1+\varepsilon)^{n+1}$. وهذا يبيِّن أنّ

$$0 < (1+\varepsilon)\,|z| < R \Rightarrow |z| \leq R'$$

ويقتضي أنّ $R \leq (1+\varepsilon)R'$. ومن ثَمّ نجد أنّ $R \leq R'$ لأنّ ε عدد موجب تماماً كيفي. وبناءً على هذا نكون قد أثبتنا أنّ $R = R'$. ❒

2. خواص مجموع متسلسلة صحيحة

لقد درسنا سابقاً متتاليات ومتسلسلات التوابع الحقيقيّة وأنماط التقارب المختلفة. في الحقيقة، تبقى معظم التعاريف والنتائج التي أثبتناها هناك سارية في حالة التوابع العقديّة لمتحوّل عقدي، لذلك سنذكِّر ببعضها.

2-1. **تعريف**. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{C}$. ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$. نقول إنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **تتقارب ببساطة** من تابع f ينتمي إلى $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$ إذا وفقط إذا تحقَّق الشرط

$$\forall x \in A, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

ونقول إنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **تتقارب بانتظام** من تابع f ينتمي إلى $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$، إذا وفقط إذا تقاربت من الصفر المتتالية $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\overline{\mathbb{R}}$، المعرّفة كما يلي :

$$\mu_n = \sup_{x\in A}\left|f_n(x) - f(x)\right|$$

ونقول إنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **تحقِّق شرط كوشي بانتظام**، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط : مهما تكن ε من $\mathbb{R}_+^*$، يوجد N_ε من $\mathbb{N}$ يُحقّق :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(n \ge N_\varepsilon, m \ge N_\varepsilon\right) \Rightarrow \sup_{x\in A}\left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \varepsilon$$

وأخيراً نقول إنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **تتقارب بانتظام على كلِّ مجموعة متراصّة** من تابع f ينتمي إلى $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$، إذا وفقط إذا تحقَّق الشرط: مهما تكن المجموعة المتراصّة K المحتواة في A، فإن المتتالية $(f_{n|K})_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب بانتظام من $f_{|K}$.

لمّا كانت كلُّ متتالية تُحقِّق شرط كوشي في $\mathbb{C}$ متقاربة، فإنّنا نستنتج بسهولة ودون تعديل في البرهان الذي درسناه سابقاً أنّ متتاليات التوابع من $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$ التي تُحقِّق شرط كوشي بانتظام تكون متقاربة بانتظام. وأنّ التقارب بانتظام على كلِّ مجموعة متراصّة لمتتالية من التوابع المستمرة من $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$ يقتضي استمرار النهاية على A.

2-2. **تعريف**. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{C}$. ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$. نقول إنّ المتسلسلة $\sum f_n$ تتقارب ببساطة (أو بانتظام، أو بانتظام على كلِّ مجموعة متراصّة) من تابع f ينتمي إلى $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$ إذا وفقط إذا تقاربت متتالية التوابع $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ ببساطة (أو بانتظام، أو بانتظام على كلِّ مجموعة متراصّة) من التابع f الذي نسمّيه مجموع المتسلسلة $\sum f_n$.

ونقول إنّ المتسلسلة $\sum f_n$ متقاربة **بالنظيم** على A إذا وفقط إذا تقاربت المتسلسلة العددية $\sum \sup_A |f_n|$. ونعلم أنّ التقارب بالنظيم على A يقتضي التقارب المنتظم على المجموعة A.

2-3. **مبرهنة**. لتكن $\sum a_n z^n$ متسلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها R $0 < R$. عندئذ تتقارب متسلسلة التوابع $\sum a_n z^n$ بالنظيم، ومن ثَمَّ بانتظام على كلِّ قرص مغلق $\bar{D}(0,r)$ مركزه 0 ونصف قطره r ينتمي إلى $]0,R[$.

الإثبات

في الحقيقة، إنّ هذه النتيجة واضحة لأنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \sup_{z\in\bar{D}(0,r)} |a_n z^n| = |a_n| r^n$$

والمتسلسلة $\sum |a_n| r^n$ متقاربة في حالة $r < R$. ❐

2-4. **نتيجة**. لتكن $\sum a_n z^n$ متسلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها R $0 < R$. عندئذ يكون مجموعها $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ مستمرّاً على قرص التقارب $D(0,R)$.

الإثبات

هذه نتيجة واضحة من المبرهنة السابقة. ❐

✍ نأتي الآن إلى تعريف مهمٍّ جداً في دراستنا اللاحقة.

2-5. تعريف. لتكن Ω مجموعة مفتوحة وغير خالية من المستوي العقدي $\mathbb{C}$. وليكن f تابعاً من Ω إلى $\mathbb{C}$. نقول إنّ التابع f يقبل الاشتقاق عند نقطة z_0 من Ω، إذا وفقط إذا قَبِلَ التابع

$$\Delta_{f,z_0} : \Omega \backslash \{ z_0 \} \to \mathbb{C} : z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

نهاية عند z_0. ونرمز عادة إلى هذه النهاية بالرمز $f'(z_0)$ في حال وجودها. ونقول إنّ التابع f **هولومورفي** على Ω إذا وفقط إذا قَبِلَ الاشتقاق عند كلِّ نقطة من Ω.

سندرس لاحقاً التوابع الهولومورفية بإسهاب، لذلك سنكتفي هنا بالتعريف وسنبيِّن أنّ المتسلسلات الصحيحة تعطي أمثلة مهمة على توابع هولومورفيّة.

2-6. مبرهنة. لتكن $\sum a_n z^n$ متسلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها $0 < R$. عندئذ يكون التابع $z \mapsto S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ هولومورفياً على قرص التقارب $D(0,R)$، ويكون

$$\forall z \in D(0,R), \quad S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

الإثبات

لتكن ω من $D(0,R)$، ولنختر عدداً r من المجال $]|\omega|, R[$. عندئذ، مهما تكن z من $D(0,r) \backslash \{\omega\}$، يكن

$$\frac{S(z) - S(\omega)}{z - \omega} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n - \omega^n}{z - \omega} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k \omega^{n-1-k} \right)$$

لنعرّف $Q(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n \omega^{n-1}$ (هذه متسلسلة متقاربة استناداً إلى المبرهنة 1-11). عندها يكون

$$\frac{S(z) - S(\omega)}{z - \omega} - Q(\omega) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} (z^k \omega^{n-1-k} - \omega^{n-1}) \right) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(z)$$

إذ عرّفنا

$$f_n(z) = a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} (z^k \omega^{n-1-k} - \omega^{n-1}) \right)$$

ولكن

$$\forall z \in D(0,r), \quad \left|f_n(z)\right| \leq 2n\left|a_n\right|r^{n-1}$$

ولمّا كانت المتسلسلة الصحيحة المشتقّة تقبل R نصف قطر للتقارب، فإنّنا نستنتج تقارب المتسلسلة $\sum n\left|a_n\right|r^{n-1}$. وهذا يقتضي تقارب المتسلسلة $\sum f_n$ بالنظيم على القرص $D(0,r)$. ولمّا كانت التوابع $f_n(z)$ $z \mapsto$ مستمرّة على $D(0,r)$، (فهي إذن مستمرّة عند ω من $D(0,r)$)، وتساوي 0 عند ω، استنتجنا استمرار $z \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} f_n(z)$ عند ω، ومن ثَمّ

$$\lim_{z\to\omega} \sum_{n=2}^{\infty} f_n(z) = 0$$

وبناءً على هذا نجد

$$\lim_{z\to\omega} \frac{S(z)-S(\omega)}{z-\omega} = Q(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\omega^{n-1}$$

وهذا يثبت أنّ S يقبل الاشتقاق عند كلّ نقطة ω من $D(0,R)$، وأنّ

$$S'(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,a_{n+1}\omega^n$$

وهو المطلوب إثباته. ❐

7-2. **نتيجة**. لتكن $\sum a_n z^n$ متسلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها $0 < R$. عندئذ يقبل التابع $z \mapsto S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ الاشتقاق عدداً لانهائياً من المرات على قرص التقارب $D(0,R)$، ويكون

$$\forall z \in D(0,R), \quad S^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} z^n$$

وبوجه خاص

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_p = \frac{1}{p!} S^{(p)}(0)$$

2-8. نتيجة. لتكن $\sum a_n z^n$ متسلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها $R > 0$. عندئذ تتقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ على القرص $D(0,R)$ ، ويكون

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

2-9. مبرهنة -Abel. لتكن $\sum a_n z^n$ متسلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها يساوي 1. نفترض أنّ المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ متقاربة، وأنّ مجموعها يساوي σ. ثُمّ نعرّف المجموعة $\mathcal{D}_\alpha = \left\{ z \in D(0,1) : \frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \alpha \right\}$ في حالة $1 \leq \alpha$. عندئذ يكون

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \mathcal{D}_\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sigma$$

الإثبات

لنعرّف، في حالة z من $D(0,1)$ المقدار $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ، ولنعرّف أيضاً، في حالة n من $\mathbb{N}$ ، المجاميع الجزئية $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. لمّا كانت المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة، أمكننا تعريف العدد M من $\mathbb{R}_+$ بالصيغة $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n|$. واستنتجنا من ذلك تقارب المتسلسلة $\sum S_n z^n$ أياً كان z من $D(0,1)$. ومن جهة أخرى، مهما تكن z من $D(0,1)$ ، يكن :

$$\begin{aligned} f(z) &= S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (S_n - S_{n-1}) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n - z \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n \end{aligned}$$

وكذلك لدينا $\sigma = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma z^n$ إذن

$$\forall z \in D(0,1), \quad f(z) - \sigma = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} (S_n - \sigma) z^n$$

ومن ثَمّ، أياً كان z من $\mathcal{D}_\alpha$، وأياً كان N من $\mathbb{N}^*$، فلدينا

$$\begin{aligned}
\left|f(z)-\sigma\right| &\leq |1-z|\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left|S_n-\sigma\right||z|^n\\
&\leq 2M|1-z|\cdot\sum_{n=0}^{N-1}|z|^n+\left(\sup_{n\geq N}\left|S_n-\sigma\right|\right)|1-z|\cdot\sum_{n=N}^{\infty}|z|^n\\
&\leq 2M|1-z|\cdot\frac{1-|z|^N}{1-|z|}+\left(\sup_{n\geq N}\left|S_n-\sigma\right|\right)\cdot|1-z|\cdot\frac{|z|^N}{1-|z|}\\
&\leq \frac{|1-z|}{1-|z|}\cdot\left(2M\left(1-|z|^N\right)+\sup_{n\geq N}\left|S_n-\sigma\right|\right)\\
&\leq \alpha\cdot\left(2M\left(1-|z|^N\right)+\sup_{n\geq N}\left|S_n-\sigma\right|\right)
\end{aligned}$$

لتكن إذن $\varepsilon>0$. لمّا كانت $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من σ، وجدنا $N=N_\varepsilon$ في $\mathbb{N}^*$ يُحقِّق

$$\sup_{n\geq N}\left|S_n-S\right|<\frac{\varepsilon}{2\alpha}$$

وعندئذ نعرّف العدد η بالصيغة

$$\eta=1-\sqrt[N]{1-\frac{\varepsilon}{4\alpha M+\varepsilon}}$$

مهما تكن z من $\mathcal{D}_\alpha$، وتحقَّق $\left|1-z\right|<\eta$، يكن $1-|z|<\eta$، ومن ثَمّ

$$1-\frac{\varepsilon}{4\alpha M+\varepsilon}<|z|^N$$

وبناءً عليه، يكون لدينا

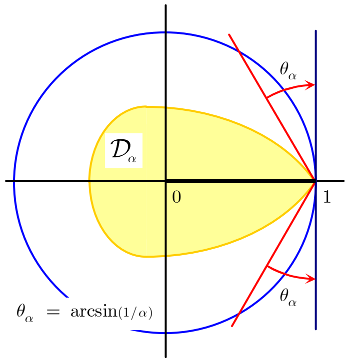
$$2\alpha M\left(1-|z|^N\right)<\frac{\varepsilon}{2}$$

وهذا يقتضي أنّ $\left|f(z)-\sigma\right|<\varepsilon$. إذن لقد أثبتنا أنّ

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\quad \left(z\in\mathcal{D}_\alpha\right)\wedge\left(\left|z-1\right|<\eta\right)\Rightarrow\left|f(z)-\sigma\right|<\varepsilon$$

وهذا هو المطلوب. ❐

.10-2 **ملاحظة**. في حالة $\alpha = 1$، تكون المجموعة $\mathcal{D}_1$ هي المجال $[0,1[$. أمّا في حالة $1 < \alpha$ فتأخذ المجموعة $\mathcal{D}_\alpha$ الشكل الآتي:



ومن ثَمّ تنص المبرهنة السابقة على أنّه في حال تقارب المتسلسلة العدديّة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ يسعى مجموع المتسلسلة الصحيحة $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ إلى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ عندما تسعى z إلى 1 مع بقائها ضمن زاوية متناظرة بالنسبة إلى المحور الحقيقي وقيمتها أصغر تماماً من 180°. ويمكن بسهولة تعميم هذه النتيجة على الوجه الآتي.

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متسلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها R. وليكن z_0 عدداً من $\mathbb{C}$ يُحقّق $R = |z_0|$، وتكون عنده المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ متقاربة، عندئذ يسعى مجموع المتسلسلة $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ يسعى إلى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ عندما تسعى z إلى z_0 مع بقائها ضمن زاوية متناظرة بالنسبة إلى المستقيم $\mathbb{R}z_0$ وقيمتها أصغر تماماً من 180°.

.3 التابع الأسّي لمتحوّل عقدي وتطبيقاته

.1-3 **تعريف**. لمّا كان نصف قطر التقارب للمتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ مساوياً $+\infty$، عرّفنا

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

وذلك أيّاً كانت z من $\mathbb{C}$.

تضمّ المبرهنة الآتية عدداً من خواص **التابع الأسّي لمتحوّل عقدي**.

3-2. **مبرهنة**.

1. أيّاً كان (z_1, z_2) من $\mathbb{C}^2$ كان $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.
2. أيّاً كان z من $\mathbb{C}$ كان $e^z \neq 0$.
3. التابع $\exp$ هولومورفيٌّ و $\exp' = \exp$.
4. إنّ مقصور $\exp$ على $\mathbb{R}$ تابع موجب ومتزايد تماماً ويسعى إلى 0 عند $-\infty$، وإلى $+\infty$ عند $+\infty$.
5. أيّاً كان z من $\mathbb{C}$ كان

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2\pi \mathrm{i}\mathbb{Z}$$

والتابع $\exp$ يقبل العدد $2\pi\,\mathrm{i}$ "دوراً".

6. إذا كانت $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ هي الدائرة الواحديّة، فإنّ التطبيق

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{U}, t \mapsto e^{\mathrm{i}t}$$

هو تشاكلٌ زمري غامر بين $(\mathbb{R},+)$، و $(\mathcal{U},\cdot)$ نواته هي المجموعة $2\pi\mathbb{Z}$.

7. وأخيراً إنّ صورة التابع الأسّي $\exp$ هي $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

الإثبات

1. لتكن (z_1, z_2) من $\mathbb{C}^2$. لمّا كانت المتسلسلتان

$$e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \quad \text{و} \quad e^{z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}$$

متقاربتين بالإطلاق استنتجنا أنّ $\sum_{n=0}^{\infty} d_n = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ حيث

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$$

وبناءً على هذا يكون لدينا $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

2. لمّا كان $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1$ استنتجنا أنّ

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z \neq 0$$

3. هذه نتيجة مباشرة من المبرهنة 2-6.

4. هذه نتيجة واضحة من الخواص التي درسناها سابقاً للتابع الأسّي الحقيقي.

5. لنلاحظ أوّلاً أنّ

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R},\quad e^{\mathrm{i}\,t} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\,t)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\,t)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\,t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}=\cos t+\mathrm{i}\sin t\end{aligned}$$

وذلك استناداً إلى تعريف التابعين $\sin$ و $\cos$ الذي ورد عند دراسة التوابع المألوفة، ومن ثَمّ فإنّ $\forall k\in\mathbb{Z},\ e^{2\pi\mathrm{i}k}=1$. وبالعكس لتكن $z=x+\mathrm{i}\,y$ تُحقّق $e^z=1$. عندئذ يكون لدينا

$$1=\left|e^z\right|=\left|e^x\cdot e^{\mathrm{i}\,y}\right|=e^x$$

ومن ثَمّ $x=0$. وبناءً عليه يكون لدينا أيضاً

$$\cos y+\mathrm{i}\sin y=1$$

أو $\sin y=0$ و $\cos y=1$، أي $y\in 2\pi\mathbb{Z}$. وبذا نكون قد أثبتنا التكافؤ المطلوب.
ونستنتج من ذلك وضوحاً أنّ

$$\forall z\in\mathbb{C},\ \exp(z+2\pi\,\mathrm{i})=\exp(z)$$

6. إنّ كوْن التطبيق φ غامرٌ هي الخاصة الوحيدة الواجب إثباتها. لتكن $\omega=\alpha+\mathrm{i}\,\beta$ عنصراً من $\mathcal{U}$ عندئذ يكون $\alpha^2+\beta^2=1$ ونناقش الحالتين التاليتين:

- في حالة $\alpha\geq 0$ نعرّف $t=\arcsin\beta$ عندئذ يكون $e^{\mathrm{i}\,t}=\omega$.
- وفي حالة $\alpha<0$ نعرّف $t=\pi-\arcsin\beta$ عندئذ يكون $e^{\mathrm{i}\,t}=\omega$.

7. هذه نتيجة واضحة استناداً إلى ما سبق. ❒

3-3. **تعريف**. تسمّى التوابع الآتية، المعرّفة على $\mathbb{C}$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{C}$، توابع **جيب التمام** cosine، و**الجيب** sine، و**جيب التمام الزائدي** hyperbolic cosine، و**الجيب الزائدي** hyperbolic sine :

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{e^{\mathrm{i}\,z} + e^{-\mathrm{i}\,z}}{2} &&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \\
\sin z &= \frac{e^{\mathrm{i}\,z} - e^{-\mathrm{i}\,z}}{2\,\mathrm{i}} &&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\
\mathrm{ch}\, z &= \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} &&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \\
\mathrm{sh}\, z &= \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} &&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}
\end{aligned}$$

ونلاحظ أنّ $\mathrm{ch}(\mathrm{i}\,z) = \cos z$ و $\mathrm{sh}(\mathrm{i}\,z) = \mathrm{i}\sin z$، وهذا ما يُبرِّر التشابه الكبير بين خواص هذه التوابع، التي تمدِّد التوابع المثلّثيّة والتوابع الزائدية الحقيقيّة إلى الساحة العقديّة. ونترك القارئ يتحقَّق أنّ التوابع $\cos$ و $\sin$ دوريّة ومجموعة أدوارها هي $2\pi\mathbb{Z}$ وأنّ التوابع ch و sh أيضاً "**دوريّة**" ومجموعة أدوارها هي $2\pi\,\mathrm{i}\,\mathbb{Z}$.

أمّا مجموعة الأعداد العقديّة التي ينعدم عندها التابع $\sin$ فهي $\pi\mathbb{Z}$ ومجموعة الأعداد العقديّة التي ينعدم عندها التابع $\cos$ فهي $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. يتيح لنا هذا تعريف تابع **الظل** على المجموعة $\mathbb{D}_{\tan} = \mathbb{C}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ بالعلاقة:

$$\tan : \mathbb{D}_{\tan} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{\sin z}{\cos z}$$

وكذلك نعرِّف تابع **ظل التمام** أو **التظل** على المجموعة $\mathbb{D}_{\cot} = \mathbb{C}\backslash\pi\mathbb{Z}$ بالصيغة:

$$\cot : \mathbb{D}_{\cot} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{\cos z}{\sin z}$$

ونترك القارئ يعرِّف بأسلوب مماثل تابعي الظل th وظل التمام coth الزائديين. ونلاحظ العلاقة المفيدة التالية $\tan \mathrm{i}\,z = \mathrm{i}\,\mathrm{th}\, z$.

4. التوابع التحليليّة

4-1.**تعريف**. لتكن المجموعة المفتوحة Ω من $\mathbb{C}$، وليكن التابع $f:\Omega\to\mathbb{C}$. نفترض أنّ f يقبل الاشتقاق عدداً لانهائياً من المرات عند z_0 من Ω، عندئذ نسمّي المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n$ **متسلسلة تايلور** للتابع f عند z_0.

4-2. **تعريف**. لتكن المجموعة المفتوحة Ω من $\mathbb{C}$، وليكن التابع $f:\Omega\to\mathbb{C}$. نقول إنّ f **تابع تحليلي عند النقطة** z_0 من Ω، إذا وُجِدَ عدد حقيقيّ $\rho(z_0)$ موجب تماماً، ووُجِدتْ متسلسلة صحيحة $\sum a_n z^n$ نصف قطر تقاربها أكبر أو يساوي $\rho(z_0)$ يُحقِّقان

$$\forall z\in\Omega,\quad z\in D(z_0,\rho(z_0))\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

ونقول إنّ f **تحليلي على** Ω إذا وفقط إذا كان تحليلياً عند كلّ نقطة z_0 من Ω.

4-3. **مبرهنة** : لتكن Ω مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعاً تحليلياً على Ω. عندئذ يكون f مستمراً وقابلاً للاشتقاق عدداً لانهائياً من المرات على Ω، وأيّاً كانت z_0 من Ω، يوجد جوار محتوى في Ω للعنصر z_0، يساوي فيه التابع f مجموع متسلسلة تايلور الموافقة له.

الإثبات

لتكن z_0 من Ω، عندئذ يوجد قرص مفتوح $D(z_0,\rho(z_0))$ محتوى في Ω ونصف قطره $\rho(z_0)$ موجب تماماً، وتوجد متسلسلة صحيحة $\sum a_n z^n$ نصف قطر تقاربها أكبر أو يساوي $\rho(z_0)$ بحيث

$$\forall z\in D(z_0,\rho(z_0)),\ \ f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

ونستنتج، استناداً إلى النتيجتين 2-4 و2-7. أنّ التابعَ f مستمرٌّ وقابلٌ للاشتقاق عدداً لا نهائياً من المرات على $D(z_0,\rho(z_0))$، والنتيجة 2-7. نفسها تُنْبِئُنا أنّ $a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ وذلك أياً كانت n من $\mathbb{N}$. إذن يتطابق التابع f مع متسلسلة تايلور الموافقة له على $D(z_0,\rho(z_0))$.

وهذا يُثبت المطلوب. ❐

4-4. **ملاحظة**. ينتج أيضاً من النتيجة 2-7. أنّه إذا كان f تحليلياً على مجموعة مفتوحة U فإنّ مشتقَّه f' تحليليٌّ أيضاً، لأنّه إذا كان $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ داخل القرص المفتوح $D(z_0,\rho(z_0))$، كان أيضاً $f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-z_0)^n$ داخل القرص نفسه.

وبالتدريج نرى أنّ كوْن f تحليليٌّ على مجموعة مفتوحة U، يجعل جميع مشتقّاته $(f^{(n)})_{n\geq 1}$ موجودة وتحليليّة على U.

5-4. **مثال** : التابع الأسّي تحليلي على $\mathbb{C}$. في الحقيقة، مهما تكن z_0 من Ω، فلدينا

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad e^z=e^{z_0}\cdot e^{z-z_0}=e^{z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{z_0}}{n!}(z-z_0)^n$$

ونصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{z_0}}{n!}z^n$ يساوي $+\infty$.

6-4. **مبرهنة**. لتكن $\mathcal{D}$ مجموعة **مفتوحة مترابطة** وغير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن f و g تابعين تحليليين على $\mathcal{D}$، و z_0 من $\mathcal{D}$. عندئذ تكون الخواص التالية متكافئة:

1. أياًكانت n من $\mathbb{N}$ فلدينا $f^{(n)}(z_0)=g^{(n)}(z_0)$.
2. يوجد في $\mathcal{D}$ جوار V للنقطة z_0 يُحقِّق $\forall z\in V,\;\; f(z)=g(z)$.
3. التابعان f و g متساويان.

الإثبات

إنّ الاقتضاءين 3. $\Leftarrow$ 2. و 2. $\Leftarrow$ 1. واضحان. لنثبت إذن الاقتضاءين المعاكسين.

1. $\Leftarrow$ 2. نعلم أنّه يوجد استناداً إلى التعريف عددان موجبان تماماً ρ_1 و ρ_2 يُحقّقان $D(z_0,\rho_1)\subset\mathcal{D}$ و $D(z_0,\rho_2)\subset\mathcal{D}$ ويكون

$$\forall z\in D(z_0,\rho_1),\;\; f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$
$$\forall z\in D(z_0,\rho_2),\;\; g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

ومن ثَمّ إذا عرّفنا $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$ فإنّ الخاصة 1. تقتضي

$$\begin{aligned}\forall z \in D(z_0, \rho), \quad f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = g(z)\end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ 2.

2. $\Leftarrow$ 3. لنعرّف المجموعة

$$\mathcal{A} = \left\{\omega \in \mathcal{D} : \exists V \in \mathbb{V}(\omega), \ \forall z \in V, \ f(z) = g(z)\right\}$$

أي إنّ $\mathcal{A}$ هي مجموعة نقاط $\mathcal{D}$ التي يتساوى في جوارٍ لكلٍّ منها التابعان f و g. إنّ المجموعة $\mathcal{A}$ **غير خالية**، لأنّ z_0 من $\mathcal{A}$ بمُقتضى الفرْض 2. وإذا كانت ω من $\mathcal{A}$ وجدنا قرصاً مفتوحاً $D(\omega, \rho)$ يتساوى عليه التابعان f و g، ولكنّ المجموعة المفتوحة $D(\omega, \rho)$ جوارٌ لكلّ نقطة من نقاطها، إذن $D(\omega, \rho) \subset \mathcal{A}$، فالمجموعة $\mathcal{A}$ **مجموعة مفتوحة**. سنثبت من جهة أخرى أنّ المجموعة $\mathcal{D} \backslash \mathcal{A}$ مفتوحة أيضاً.

لتكن z من $\mathcal{D} \cap \overline{\mathcal{A}}$. إذن توجد متتالية $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{A}$ متقاربة نحو z. ولمّا كان التابعان f و g تحليليَّيْن على $\mathcal{D}$ استنتجنا أنّ

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad f^{(p)}(z) = \lim_{n \to \infty} f^{(p)}(z_n), \quad g^{(p)}(z) = \lim_{n \to \infty} g^{(p)}(z_n)$$

ولكنّ التابعين f و g متساويان في جوار كلّ نقطة من $\mathcal{A}$ ومن ثَمّ

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(p)}(z_n) = g^{(p)}(z_n)$$

وبناءً عليه يكون

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ f^{(p)}(z) = g^{(p)}(z)$$

وهذا يقتضي تساوي التابعين f و g على جوار للنقطة z، أي إنّ $z \in \mathcal{A}$. بذا نكون قد أثبتنا أنّ $\mathcal{D} \cap \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. فإذا كان ω عنصراً من $(\mathcal{D} \backslash \mathcal{A})$ استنتجنا أنّ $\omega \notin \overline{\mathcal{A}}$ أي يوجد عدد حقيقيٌّ موجب تماماً $\rho > 0$ يُحقّق في آن معاً $D(\omega, \rho) \cap \mathcal{A} = \varnothing$ و $D(\omega, \rho) \subset \mathcal{D}$ وهذا يُثبتُ أنّ المجموعة $\mathcal{D} \backslash \mathcal{A}$ مجموعة مفتوحة. ولمّا كانت المجموعة $\mathcal{D}$ مترابطة استنتجنا أنّ $\mathcal{D} \backslash \mathcal{A} = \varnothing$ وهذا بدوره يُثبتُ أنّ $\mathcal{A} = \mathcal{D}$. ❐

لتكن $\mathcal{D}$ مجموعة مفتوحة ومترابطة، وليكن f تابعاً تحليلياً على $\mathcal{D}$. ولنفترض أنّ $\widetilde{\mathcal{D}}$ مجموعة مفتوحة ومترابطة تحوي $\mathcal{D}$. هل يوجد تابع تحليلي $g : \widetilde{\mathcal{D}} \to \mathbb{C}$ يتطابق مع f على المجموعة $\mathcal{D}$، أي يُحقّق $g_{|\mathcal{D}} = f$؟ في الحقيقة، إذا وُجِدَ مثلُ هذا التابع g كان وحيداً، بناءً على المبرهنة السابقة، وأسميناه تمديداً تحليلياً للتابع f إلى $\widetilde{\mathcal{D}}$. وتسمى مسألة البحث عن التابع g انطلاقاً من f **مسألة التمديد التحليلي**.

4-7. **تعريف**. لتكن z_0 من $\mathbb{C}$، وليكن f تابعاً تحليلياً في جوارٍ z_0. نقول إنّ z_0 **صفر للتابع** f، إذا وفقط إذا كان $f(z_0) = 0$. ونقول إنّ z_0 **صفر بسيط** للتابع f إذا كان $f(z_0) = 0$ و $f'(z_0) \neq 0$. ونقول إنّ z_0 **صفر مضاعف** للتابع f إذا كان z_0 صفراً غير بسيط للتابع f ولم يكن f معدوماً في جوار z_0، وعندها تكون المجموعة $\mathcal{K} = \left\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(z_0) \neq 0\right\}$ غير خالية، بمُقتضى المبرهنة السابقة، ونعرّف **رتبة مضاعفة** الصفر z_0 للتابع f بأنها العدد $m = \min \mathcal{K}$.

4-8. **مبرهنة**. لتكن $\mathcal{D}$ مجموعة مفتوحة مترابطة غير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن f تابعاً تحليلياً على $\mathcal{D}$، نفترض أنّ f غير معدوم على $\mathcal{D}$. عندئذ تكون أصفار التابع f معزولة، أي مهما يكن الصفر z_0 للتابع f في $\mathcal{D}$، يوجد في $\mathcal{D}$ جوار V للنقطة z_0 يُحقّق

$$\forall z \in V \backslash \{z_0\}, \quad f(z) \neq 0$$

الإثبات

ليكن z_0 صفراً للتابع f، ولتكن k رتبة مضاعفة الصفر z_0. عندئذ يوجد عدد حقيقي موجب تماماً $0 < \rho$ يُحقّق

$$\begin{aligned}
\forall z \in D(z_0,\rho), \ \ f(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \\
&= (z-z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-k}
\end{aligned}$$

لنعرّف أياً كانت z من $D(z_0,\rho)$ المقدار

$$g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-k}$$

لمّا كان التابع g مستمراً على $D(z_0,\rho)$ ويحقّق $g(z_0)=\frac{1}{k!}f^{(k)}(z_0)\neq 0$، وجدنا ρ_1 في المجال $\left]0,\rho\right[$ يكون عنده

$$\forall z\in D(z_0,\rho_1),\quad g(z)\neq 0$$

وعندئذ يكون

$$\forall z\in D(z_0,\rho_1)\backslash\{z_0\},\qquad f(z)=(z-z_0)^k g(z)\neq 0$$

وهذا يُثبت أنّ الصفر z_0 معزول. ❐

9-4. نتيجة. لتكن $\mathcal{D}$ مجموعة مفتوحة مترابطة وغير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن f تابعاً تحليلياً على $\mathcal{D}$، و z عنصراً من $\mathcal{D}$. نفترض أنّه توجد متتالية $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{D}\backslash\{z\}$ متقاربة من z ومكوّنة من أصفارٍ للتابع f، أي $\forall n\geq 0,\ f(z_n)=0$، عندئذ يكون التابع f معدوماً على $\mathcal{D}$.

الإثبات

في الحقيقة، لمّا كان f مستمراً عند z استنتجنا أنّ $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=0$. إذن يكون z صفراً غير معزول للتابع f، والتابع f معدوم على $\mathcal{D}$ استناداً إلى المبرهنة السابقة. ❐

10-4. مثال. لتكن p من $\mathbb{N}^*$ و a من $\mathbb{C}\backslash\{0\}$، عندئذ يكون التابع $z\mapsto\dfrac{1}{(z-a)^p}$ تحليلياً عند 0 ويكون

$$\forall z\in D\big(0,|a|\big),\qquad \frac{1}{(z-a)^p}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^p C_{n+p-1}^{p-1}}{a^{n+p}}z^n$$

إذ يساوي نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة السابقة $|a|$. في الحقيقة هذه نتيجة بسيطة في حالة $p=1$، وتنتج الحالة العامّة بالتدريج على p، بأخذ المشتقات المتتالية.

ملاحظة. ينتج من ذلك أنّه إذا كان f تابعاً كسرياً لا يقبل 0 قطباً له، فإنّنا نستنتج من تفريق f إلى عناصر بسيطة أنّه يكون تحليلياً عند 0، ويكون نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة التي تمثّل منشور تايلور للتابع f عند الصفر مساوياً للمسافة بين 0 ومجموعة أقطاب التابع f.

11-4. **مبرهنة**. ليكن f تابعاً معرّفاً في جوار z_0 من $\mathbb{C}$ ويأخذ قيمه في $\mathbb{C}$. عندئذ تكون الخاصّتان الآتيتان متكافئتين.

① التابع f تحليلي عند النقطة z_0.

② توجد أعداد (r, M, K) في $(\mathbb{R}_+^*)^3$ ويكون f قابلاً للاشتقاق عدداً لانهائياً من المرّات على مجموعة مفتوحة تحوي $\overline{D}(z_0, r)$ ويكون

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \overline{D}(z_0, r), \quad \left|f^{(n)}(z)\right| \leq M\,(n!)\,K^n$$

الإثبات

في الحقيقة، يمكننا أن نفترض $z_0 = 0$ دون الإخلال بعموميّة الإثبات.

① $\Leftarrow$ ② لمّا كان f تحليلياً عند 0، تساوى التابع f مع مجموع متسلسلة صحيحة $\sum a_n z^n$ في جوار الصفر، إذن ليكن $0 < \rho$ يُحقّق

$$\forall z \in \overline{D}(0, \rho), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ولنعرف العدد الحقيقي $\widetilde{M} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\left|a_n \rho^n\right|\right)$. ثمّ لنتأمّل عدداً حقيقياً ما r من المجال $]0, \rho[$.

إنّ التابع f قابل للاشتقاق عدداً لانهائيّاً من المرات على القرص المفتوح $D(0, \rho)$ الذي يحوي $\overline{D}(0, r)$. نعلم أنّه، مهما تكن p من $\mathbb{N}$ ومهما تكن z من $\overline{D}(0, r)$ فلدينا

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} z^n$$

ومنه، أياً كانت p من $\mathbb{N}$، وأيّاً كانت z من $\overline{D}(0, r)$ كان

$$\begin{aligned}
\left|f^{(p)}(z)\right| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} \left|a_{n+p}\right| \rho^n \left|\frac{z}{\rho}\right|^n \\
&\leq \frac{\widetilde{M}}{\rho^p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \\
&\leq \frac{\widetilde{M}}{\rho^p} \frac{p!}{(1 - r/\rho)^{p+1}} = \underbrace{\frac{\rho \widetilde{M}}{\rho - r}}_{M} (p!) \Bigg(\underbrace{\frac{1}{\rho - r}}_{K}\Bigg)^p = M\,(p!) K^p
\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ الخاصّة المطلوبة.

② $\Leftarrow$ ① لتكن z من $\bar{D}(0,r)$. لنعرّف في حالة t من $[0,1]$ و n من $\mathbb{N}$ التابع العقدي لمتحوِّل حقيقي φ كما يأتي:

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(1-t)^k}{k!}z^k f^{(k)}(tz)$$

نلاحظ بحساب بسيط أنّ φ قابلٌ للاشتقاق، و $\varphi'(t)=\dfrac{(1-t)^n}{n!}z^{n+1}f^{(n+1)}(tz)$. وإذا استخدمنا المساواة الواضحة $\varphi(1)-\varphi(0)=\int_0^1\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t$ استنتجنا أنّه أياً كانت z من $\bar{D}(0,r)$ وأياً كانت n من $\mathbb{N}$ فلدينا

$$R_n(z)\overset{\text{تعريف}}{=}f(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k = z^{n+1}\cdot\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(tz)\,\mathrm{d}\,t$$

وبناءً على هذا نجد، استناداً إلى الفرْض،

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\forall z\in\bar{D}(0,r),|R_n(z)| &\le |z|^{n+1}MK^{n+1}(n+1)\int_0^1(1-t)^n\,\mathrm{d}\,t\\ &\le M\left(K|z|\right)^{n+1}\end{aligned}$$

فإذا عرّفنا $\rho=\min\left(r,\frac{1}{K}\right)$، وجدنا $\forall z\in D(0,\rho),\ \lim_{n\to\infty}R_n(z)=0$، ومن ثَمّ يكون

$$\forall z\in D(0,\rho),\quad f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$$

وهذا هو المطلوب. ❐

12-4. نتيجة. لتكن $\sum a_n z^n$ متسلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها $0<R$. عندئذ يكون التابع $f:z\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ تحليلياً على $D(0,R)$.

الإثبات

من جهة أولى، نعلم أنّ التابع f يقبل الاشتقاق عدداً لانهائياً من المرّات على $D(0,R)$. لتكن ρ من $]0,R[$ ولنعرّف $\widetilde{M}_\rho = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(|a_n|\left(\frac{\rho+R}{2}\right)^n\right)$. عندئذ، أيّاً كان p من $\mathbb{N}$، وأيّاً كان z من $\bar{D}(0,\rho)$ فلدينا:

$$\begin{aligned}
\left|f^{(p)}(z)\right| &\le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+p)!}{n!}|a_{n+p}|\left(\frac{\rho+R}{2}\right)^n\left|\frac{2z}{\rho+R}\right|^n\\
&\le \frac{2^p\widetilde{M}_\rho}{(\rho+R)^p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+p)!}{n!}\left(\frac{2\rho}{\rho+R}\right)^n\\
&\le \frac{2^p\widetilde{M}_\rho}{(\rho+R)^p}\frac{p!}{\big(1-2\rho/(\rho+R)\big)^{p+1}} = \widetilde{M}_\rho\frac{R+\rho}{R-\rho}(p!)\left(\frac{2}{R-\rho}\right)^p
\end{aligned}$$

فإذا عرّفنا $M_\rho = \widetilde{M}_\rho\dfrac{R+\rho}{R-\rho}$، و $K_\rho = \dfrac{2}{R-\rho}$ استنتجنا مما سبق أنّ

$$\forall\rho\in\,]0,R[,\forall n\in\mathbb{N},\forall z\in\bar{D}(0,\rho),\quad \left|f^{(n)}(z)\right|\le M_\rho(n!)K_\rho^n$$

ومن ثَمّ، أيّاً كانت z_0 من $D(0,R)$، نختار $\rho=\dfrac{R+|z_0|}{2}$، فيكون f قابلاً للاشتقاق عدداً لانهائياً من المرّات في جوار مفتوح للقرص $\bar{D}(z_0,\rho-|z_0|)$. ويكون

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall z\in\bar{D}(z_0,\rho-|z_0|),\quad \left|f^{(n)}(z)\right|\le M_\rho(n!)K_\rho^n$$

وبناءً عليه، يكون f تحليليّاً عند z_0 استناداً إلى المبرهنة السابقة. ❐

فمثلاً جميع التوابع $z\mapsto\cos z$ و $z\mapsto\sin z$ و $z\mapsto\operatorname{ch} z$ و $z\mapsto\operatorname{sh} z$ توابع تحليلية في المستوي العقدي.

لقد تحدّثنا حتى الآن عن التوابع التحليليّة لمتحوِّلٍ عقدي، ولكن يمكننا أيضاً تعريف التوابع التحليليّة لمتحوِّل حقيقيّ.

4-13. **تعريف**. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن التابع $f : I \to \mathbb{R}$. نقول إنّ f تابع تحليلي على I، إذا وفقط إذا وُجِدَ عدد حقيقيّ $\rho(x_0)$ موجب تماماً، ووُجِدتْ متسلسلة صحيحة $\sum a_n z^n$ أمثالها حقيقيّة ونصف قطر تقاربها أكبر أو يساوي $\rho(x_0)$ وتُحقِّق

$$\forall x \in I,\ \left|x - x_0\right| < \rho(x_0) \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

وذلك مهما كانت x_0 من I.

من الواضح أنّ المبرهنات 4-3. و 4-6. و 4-8. تبقى صحيحة في حالة التوابع التحليليّة لمتحوّل حقيقي، وتبيِّن المبرهنة التالية أنّه بالإمكان إرجاع مسألة دراسة التوابع التحليليّة لمتحول حقيقي إلى تلك المتعلّقة بالتوابع التحليليّة لمتحوّل عقدي.

4-14. **مبرهنة**. ليكن I مجالاً مفتوحاً غير خالٍ من $\mathbb{R}$، وليكن $f : I \to \mathbb{R}$. تابعاً تحليليّاً على I. حينئذ يمكن تمديد التابع f إلى تابع تحليليّ على مجموعة مفتوحة $\mathcal{D}$ في $\mathbb{C}$ تحوي I.

الإثبات

مهما كانت x_0 من I يوجد عدد حقيقيّ $\rho(x_0)$ موجب تماماً، وتوجد متسلسلة صحيحة $\sum a_n(x_0) z^n$ أمثالها حقيقيّة ونصف قطر تقاربها أكبر أو يساوي $\rho(x_0)$ بحيث

$$\forall x \in I,\ \left|x - x_0\right| < \rho(x_0) \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0)(x - x_0)^n$$

لنعرّف، حين تكون x_0 من I، القرص المفتوح $D_{x_0} = D(x_0, \rho(x_0))$ والتابع

$$f_{x_0} : D_{x_0} \to \mathbb{C},\ f_{x_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0) \cdot (z - x_0)^n$$

إنّ f_{x_0} تابع تحليلي على D_{x_0} ويتطابق مع f على $D_{x_0} \cap I$.

إذا كانت x_0 و x_1 نقطتين مختلفتين من I وكان $D_{x_1} \cap D_{x_0} \neq \varnothing$ ، فإنّ تقاطع المجموعة $D_{x_1} \cap D_{x_0}$ مع المجال I هو مجال مفتوح غير خال، وليكن J . ولمّا كانت التوابع f و f_{x_0} و f_{x_1} متطابقة على المجال J ، استنتجنا

$$\forall x \in J,\ \ \forall p \in \mathbb{N}, \quad f_{x_1}^{(p)}(x) = f_{x_0}^{(p)}(x) = f^{(p)}(x)$$

وينتج من ذلك تساوي التابعين f_{x_0} و f_{x_1} على $D_{x_1} \cap D_{x_0}$ لأنّها مجموعة مترابطة.

لنعرّف إذن المجموعة المفتوحة $\mathcal{D} = \bigcup_{x_0 \in I} D_{x_0}$. إنّ ما أثبتناه آنفاً يبيِّن وجود تابع $\tilde{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ معرّف بالعلاقة $\tilde{f}(z) = f_{x_0}(z)$ في حالة نقطة ما x_0 من I تُحقِّق $z \in D_{x_0}$.

إنّ المجموعة $\mathcal{D}$ مترابطة. لأنّه إذا كان z_1 و z_2 عنصرين من $\mathcal{D}$ فيوجد x_1 و x_2 من I يُحقّقان $z_1 \in D_{x_1}$ و $z_2 \in D_{x_2}$ وعندئذ يكوِّن اجتماع القطع المستقيمة $[z_1, x_1]$ و $[x_1, x_2]$ و $[x_2, z_2]$ طريقاً مستمراً بين z_1 و z_2 محتوى في $\mathcal{D}$. ويكون $\tilde{f}$ تحليليّاً على $\mathcal{D}$ ويُحقِّق

$$\forall x \in I,\ \ \tilde{f}(x) = f(x)$$

إذن $\tilde{f}$ تابع تحليلي على $\mathcal{D}$ يُمدِّد التابع التحليلي الحقيقي f المعرّف على I . ❐

15-4. ملاحظة. لقد أوجدنا سابقاً النشر بمتسلسلات صحيحة لمتحول حقيقي للعديد من التوابع المألوفة وذلك في جوار 0 ، سنذكِّر فيما يلي ببعض هذه النتائج لأهميتها دون العودة إلى إثباتها، فمثلاً على المجال $]-1,+1[$ لدينا

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \\
(1+x)^{\alpha} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k, \quad \alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}
\end{aligned}$$

ويتيقَّن القارئ بسهولة أنّ نصف قطر تقارب هذه المتسلسلات الصحيحة يساوي الواحد.

4-16. **ملاحظة**. ليكن التابع

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & : \ x \neq 0 \\ 0 & : \ x = 0 \end{cases}$$

نعلم أنّ f ينتمي إلى الصف C^∞ على $\mathbb{R}$ ويُحقّق $\forall p \in \mathbb{N}, f^{(p)}(0) = 0$. فلو كان f تحليليّاً على مجال مفتوح يحوي 0، لأمكن تمديده إلى تابع تحليليٍّ $\tilde{f}$ معرّف على مجموعة مفتوحة ومترابطة $\mathcal{D}$ من $\mathbb{C}$ تحوي 0، وعندها يكون $\forall p \in \mathbb{N}, \tilde{f}^{(p)}(0) = 0$. ولكنّ هذا يقتضي أنّ التابع $\tilde{f}$ معدوم في $\mathcal{D}$، وهذا تناقضٌ لأنّ

$$\forall x \in \mathcal{D} \cap \mathbb{R}^*, \ \tilde{f}(x) = e^{-1/x^2} \neq 0$$

نستنتج إذن أنّ التابع f ليس تحليليّاً على أيِّ مجال مفتوح يحوي 0 .

تمرينات

التمرين 1. عيِّن نصف قطر تقارب كلٍّ من المتسلسلات الصحيحة الآتية:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{2n} z^n$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (3+(-1)^n)^n z^n$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\tfrac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n} z^n$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arccos\left(1-\frac{1}{n^2}\right) z^n$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1} z^n$
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right) z^n$
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right) z^n$
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{2}-E(n\sqrt{2})} z^n$
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}(2n)!}{2^n(3n)!\cdot n!} z^n$
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na(na+1)\cdots(na+n-1)}{n!} z^n$

$a \in \mathbb{R}_+^*$

الحل

1. لمّا كان $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = +\infty$ استنتجنا أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ يساوي 0.

2. إذا عرّفنا $a_n = C_n^{2n}$، وجدنا أنّ

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} = \frac{n+1}{2(2n+1)}$$

وعليه $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{4}$، إذن نصف قطر تقارب المتسلسلة $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}^n z^n$ يساوي $\dfrac{1}{4}$.

3. إذا عرّفنا $a_n = n!/n^n$ ، وجدنا أنّ

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

وعليه $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = e$ ، إذن نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ يساوي e .

4. إذا عرّفنا $A_n = |z^{2^n}|$ ، وجدنا أنّ $\frac{A_{n+1}}{A_n} = |z|^{2^n}$ ، وعليه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \begin{cases} 0 & : \quad 0 < |z| < 1 \\ 1 & : \quad |z| = 1 \\ \infty & : \quad 1 < |z| \end{cases}$$

إذن تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$ متقاربة إذا وفقط إذا كان $|z| < 1$، فنصف قطر تقاربها يساوي 1 .

5. إذا عرّفنا $a_n = (3 + (-1)^n)^n$ ، وجدنا أنّ $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 4$ ، وعليه فإنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=1}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n$ يساوي $\frac{1}{4}$.

6. إذا عرّفنا $a_n = \left(1 + (-1)^n / n\right)^{n^2}$ ، وجدنا أنّ $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = e$ ، وعليه فنصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n / n)^{n^2} z^n$ يساوي $\frac{1}{e}$.

7. إذا عرّفنا $a_n = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n}$ ، وجدنا أنّ

$$e^n a_n = \frac{2(e^{2n} + 1)}{e^{2n} + e^{-2n} - 2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$$

إذن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/e$ ، وعليه فنصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n} z^n$ يساوي e .

8. إذا عرّفنا $a_n = \arccos(1-n^{-2})$ ، وجدنا أنّ

$$\frac{1-\cos a_n}{2} = \frac{1}{2n^2} \quad \text{أو} \quad \sin\frac{a_n}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}n}$$

ومنه $a_n = 2\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}n}$ إذن $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \sqrt{2}$ ومن ثَمّ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$ ، وعليه فنصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=1}^{\infty}\arccos(1-n^{-2})z^n$ هو 1.

9. إذا عرّفنا $a_n = \dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$ وجدنا مباشرة أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1$ إذن نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}z^n$ يساوي 1.

10. إذا عرّفنا $a_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ وجدنا بالنشر المحدود أنّ

$$\begin{aligned} a_n &= \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) \\ &= (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{(-1)^n\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

إذن $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$ ، وعليه فنصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})z^n$ يساوي 1.

11. ليكن $a_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ ، ولنعرّف $b_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$.
نلاحظ أنّ b_n عدد طبيعي زوجي لأنّ

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k}3^{k/2} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k}(-1)^k 3^{k/2} \\ &= \sum_{0\le k\le n/2} C_n^{2k}2^{n-2k+1}3^k \end{aligned}$$

وعليه $a_n = -\sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)$ ، ولكن $0 < 2-\sqrt{3} < 1$ إذن

$$|a_n| \underset{+\infty}{\sim} \pi(2-\sqrt{3})^n$$

ومن ثَمّ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$$

إذن نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)z^n$ يساوي $2+\sqrt{3}$.

12. ليكن $a_n=\dfrac{1}{n\sqrt{2}-\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}$، نعلم، من جهة أولى، أنّ $0<n\sqrt{2}-\lfloor n\sqrt{2}\rfloor<1$ في حالة $n\geq 1$، إذن $1\leq a_n$. ومن جهة ثانية، لأنّ 2 ليس مربع عدد عادي، نستنتج أنّ العدد الطبيعي $2n^2-\lfloor n\sqrt{2}\rfloor^2$ موجب تماماً فهو أكبر أو يساوي 1 إذن

$$\left(n\sqrt{2}+\lfloor n\sqrt{2}\rfloor\right)\left(n\sqrt{2}-\lfloor n\sqrt{2}\rfloor\right)\geq 1$$

ومنه

$$a_n\leq n\sqrt{2}+\lfloor n\sqrt{2}\rfloor\leq 2\sqrt{2}n\leq 3n$$

وعليه

$$\forall n\geq 1,\quad 1\leq a_n\leq 3n$$

إذن من الواضح أنّ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$ ، ونصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n\sqrt{2}-\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}$ يساوي 1.

13. ليكن $a_n=\dfrac{n^{2n}(2n)!}{2^n(3n)!\cdot n!}$، من الواضح أنّ

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}}&=\frac{n^{2n}(2n)!}{2^n(3n)!\cdot n!}\cdot\frac{2^{n+1}(3n+3)!\cdot(n+1)!}{(n+1)^{2n+2}(2n+2)!}\\&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}\cdot\frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(2n+1)}\end{aligned}$$

إذن $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{27}{2e^2}$. ونصف قطر تقارب المتسلسلة المدروسة يساوي $\dfrac{27}{2e^2}$.

.14 ليكن $a_n = \dfrac{na(na+1)\cdots(na+n-1)}{n!}$ ، من الواضح أنّ

$$a_n = a\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a}{k/n}+1\right)$$

إذن

$$\frac{1}{n}\ln a_n = \frac{\ln a}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{a}{k/n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\mathrm{d}\,x$$

ولكن

$$\int_0^1 \ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\mathrm{d}\,x = (a+1)\ln(a+1) - a\ln a$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \frac{(a+1)^{a+1}}{a^a}$$

ونصف قطر تقارب المتسلسلة المدروسة يساوي $\dfrac{a^a}{(a+1)^{a+1}}$. ■

التمرين .2 عيّن نصف قطر تقارب كلٍّ من المتسلسلات الصحيحة الآتية واحسب مجموع كلٍّ منها:

.1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$ .2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1+n^2)2^{n+1}x^n$

.3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}x^n$ .4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n}x^n$

.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$ .6 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$

.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}x^n$ .8 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n!}x^n$

الحل

1. من الواضح أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$ يساوي 1. لنرمز بالرمز $f(x)$ إلى مجموعها. نلاحظ أنّ

$$\forall x\in\left]-1,1\right[,\quad f(x)=-x^3\sum_{n=1}^{\infty}n(-x^2)^{n-1}=-x^3g'(-x^2)$$

مع $g(u)=\sum_{n=0}^{\infty}u^n=\dfrac{1}{1-u}$. إذن $g'(u)=\dfrac{1}{(1-u)^2}$ ومن ثَمّ

$$\forall x\in\left]-1,1\right[,\quad f(x)=-\frac{x^3}{(1+x^2)^2}$$

2. من الواضح أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(1+n^2)2^{n+1}x^n$ يساوي $\dfrac{1}{2}$. لنرمز بالرمز $f(x)$ إلى مجموعها. نلاحظ أنّه في حالة $|x|<1$ لدينا

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x}{2}\right)&=2\sum_{n=0}^{\infty}(1+n^2)x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}\big(1+n+n(n-1)\big)x^n\\
&=2\sum_{n=0}^{\infty}x^n+2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+2x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}\\
&=2\sum_{n=0}^{\infty}x^n+2x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'+2x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)''\\
&=\frac{2}{1-x}+\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{4x^2}{(1-x)^3}=\frac{2-2x+4x^2}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

إذن

$$\forall x\in\left]-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right[,\quad f(x)=\frac{2-4x+16x^2}{(1-2x)^3}$$

3. من الواضح أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}x^n$ يساوي 1.

لنرمز بالرمز $f(x)$ إلى مجموعها.

نلاحظ أنّ

$$\forall x \in [0,1[, \qquad x^3 f(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} x^{2n+3}$$
$$\forall x \in [0,1[, \quad x^3 f(-x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} x^{2n+3}$$

ومن ثَمّ

$$\forall x \in [0,1[, \qquad \left(x^3 f(x^2)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2} = x \arctan x$$
$$\forall x \in [0,1[, \quad \left(x^3 f(-x^2)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+2} = \frac{x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

وبحساب تابع أصلي نجد

$$\forall x \in [0,1[, \qquad x^3 f(x^2) = \frac{x^2+1}{2} \arctan x - \frac{x}{2}$$
$$\forall x \in [0,1[, \quad x^3 f(-x^2) = \frac{x^2-1}{4} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{x}{2}$$

ومنه

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2x} \cdot \dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x} & : \quad x \in \left]0,1\right[\\ \dfrac{1}{3} & : \quad x = 0 \\ \dfrac{x+1}{4x\sqrt{-x}} \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right) - \dfrac{1}{2x} & \quad x \in \left]-1,0\right[\end{cases}$$

4. من الواضح أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n} x^n$ يساوي 1 . لنرمز بالرمز $f(x)$ إلى مجموعها. نلاحظ أنّه في حالة $|x| < 1$ لدينا

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}\right)' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \end{aligned}$$

أي

$$f(x)=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'-\ln(1-x)=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}-\ln(1-x)$$

إذن

$$.\forall x\in\left]-1,1\right[,\quad f(x)=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}-\ln(1-x)$$

5. من الواضح أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$ يساوي 1 لأنّ

$$\forall n\geq 1,\quad 1\leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leq n$$

لنرمز بالرمز $f(x)$ إلى مجموع هذه المتسلسلة. نلاحظ أنّه في حالة $|x|<1$ لدينا

$$\begin{aligned}(1-x)f(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n-\sum_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\end{aligned}$$

إذن

$$.\forall x\in\left]-1,1\right[,\quad f(x)=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

6. من الواضح أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ يساوي $+\infty$. لنرمز بالرمز $f(x)$ إلى مجموع هذه المتسلسلة. ليكن $\mathrm{j}=\exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}\right)$ عندئذ نلاحظ ما يلي :

$$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{C},\quad e^z+e^{\mathrm{j}z}+e^{\mathrm{j}^2z}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n+\mathrm{j}^nz^n+\mathrm{j}^{2n}z^n}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+\mathrm{j}^n+\mathrm{j}^{2n}}{n!}z^n\end{aligned}$$

ولمّا كان $\mathrm{j}^3 = 1$ استنتجنا أنّ

$$1 + \mathrm{j}^n + \mathrm{j}^{2n} = \begin{cases} 0 & : \quad n \neq 0 \bmod 3 \\ 3 & : \quad n = 0 \bmod 3 \end{cases}$$

إذن

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z + e^{\mathrm{j}z} + e^{\mathrm{j}^2 z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(3n)!} z^{3n}$$

ومن ثَمّ

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{e^z + e^{\mathrm{j}z} + e^{\mathrm{j}^2 z}}{3} = \frac{1}{3}\left(e^z + 2e^{-z/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)\right)$$

7. من الواضح أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^n$ يساوي 1. لنرمز بالرمز $f(x)$ إلى هذه المتسلسلة. نلاحظ أنّه في حالة $|x| < 1$ لدينا:

$$\begin{aligned}\big(xf(x)\big)' &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = -\ln(1+x) \\ &= \big(x - (1+x)\ln(1+x)\big)'\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x} & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

8. من الواضح أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n!} x^n$ يساوي $+\infty$. لنرمز بالرمز $f(x)$ إلى مجموعها. عندئذ نرى بسهولة أنّ

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}n\theta} x^n}{n!}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{\mathrm{i}\theta}x)^n}{n!}\right) \\ &= \mathrm{Im}\Big(\exp(e^{\mathrm{i}\theta}x)\Big) = \mathrm{Im}\, e^{x\cos\theta + \mathrm{i}x\sin\theta} \\ &= e^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)\end{aligned}$$

إذن $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)$ ∎

التمرين 3. هل يمكن لمتسلسلة صحيحة أن تتقارب بانتظام على $\mathbb{C}$؟

الحل

تتقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum a_n z^n$ بانتظام على $\mathbb{C}$ إذا وفقط إذا وُجد عددٌ n_0 يُحقّق $a_n = 0$ أيّاً كانت قيمة $n_0 \leq n$.

في الحقيقة، **الشرط كافٍ**، لأنّ متتالية المجاميع الجزئيّة تكون في هذه الحالة ثابتة بدءاً من الحد ذي الدليل n_0. و**الشرطُ لازمٌ**، لأنّه إذا تقاربت هذه المتسلسلة الصحيحة بانتظام على $\mathbb{C}$، تقارب حدُّها العام بانتظام على $\mathbb{C}$ من الصفر، فيوجد عددٌ n_0 يُحقّق

$$\forall n \geq n_0, \sup_{z\in\mathbb{C}} \left|a_n z^n\right| \leq 1$$

وهذا يقتضي $\forall n \geq n_0,\ a_n = 0$. ■

التمرين 4. لتكن $\sum a_n z^n$ و $\sum b_n z^n$ متسلسلتين صحيحتين نصفا قطري تقاربهما R و R' على التوالي. أثبت أنّ نصف قطر التقارب R'' للمتسلسلة الصحيحة $\sum a_n b_n z^n$ يُحقّق المتراجحة $R'' \geq R\,R'$.

- أعطِ مثالاً تكون فيه المتراجحة السابقة تامّة.
- ثُمّ أعطِ شرطاً كافياً تتحقّقُ عنده المساواة.

الحل

ليكن ρ من $\left]0, RR'\right[$، يوجد عددان r و r' يحقّقان $r < R$ و $r' < R'$ و $\rho = rr'$. خُذ على سبيل المثال $r = \sqrt{\rho R / R'}$ و $r' = \sqrt{\rho R' / R}$. عندئذ يكون لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|a_n b_n \rho^n\right| \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \left|a_m r^m\right| \cdot \sup_{m\in\mathbb{N}} \left|b_m r'^m\right| = M$$

إذن $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n b_n \rho^n\right| < +\infty$. وهذا يثبت أنّ $\rho \leq R''$. وعليه نكون قد أثبتنا أنّ

$$\rho < RR' \Rightarrow \rho < R''$$

إذن $R'' \geq R\,R'$.

تبيّن حالة المتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$ و $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}$ أنّ المتراجحة السابقة يمكن أن تكون تامّة.

وإذا كانت النهايتان $\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}, \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}\right)$ موجودتين ومختلفتين عن $(0,\infty)$ و $(\infty,0)$ تحقّقتْ المساواة. ■

التمرين 5. لتكن $\sum a_n z^n$ متسلسلة صحيحة تُحقِّق الشرط $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0$. نفترض وجود عدد k من $\mathbb{N}^*$ يُحقِّق $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+k}}{a_n}\right| = \ell$ و ℓ من $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. عيّن نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum a_n z^n$.

الحل

في حالة p من المجموعة $\{0,1,\ldots,k-1\}$، نعرّف $b_n^{(p)} = a_{nk+p}$. فيكون

$$\left|\frac{b_{n+1}^{(p)}}{b_n^{(p)}}\right| = \left|\frac{a_{nk+p+k}}{a_{nk+p}}\right|$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}^{(p)}}{b_n^{(p)}}\right| = \ell$$

وعليه فإنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(p)} z^n$ يساوي $\frac{1}{\ell}$. ومن ثَمّ فإنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(p)} z^{kn}$ يساوي $\frac{1}{\sqrt[k]{\ell}}$، وكذلك فإنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(p)} z^{kn+p}$ يساوي $\frac{1}{\sqrt[k]{\ell}}$.

لنرمز بالرمز $\mathcal{B}$ إلى مجموعة المتتاليات العقديّة المحدودة أي

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n| < +\infty$$

ليكن R نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum a_n z^n$. عندئذ

$$R = \sup\{r \geq 0 : (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}\}$$

و

$$\frac{1}{\sqrt[k]{\ell}} = \sup\left\{r \geq 0 : (b_n^{(p)} r^{nk+p})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}\right\}, \quad p = 0,1,\ldots,k-1$$

ولكن أيّاً كانت r من $\mathbb{R}_+$، فلدينا

$$(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \forall p \in \{0,1,\ldots,k-1\},\ \left(b_n^{(p)} r^{nk+p}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\left\{r \geq 0 : (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}\right\} &= \bigcap_{p=0}^{k-1}\left\{r \geq 0 : \left(b_n^{(p)} r^{nk+p}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}\right\} \\ &= \bigcap_{p=0}^{k-1}\left[0, \frac{1}{\sqrt[k]{\ell}}\right] = \left[0, \frac{1}{\sqrt[k]{\ell}}\right]\end{aligned}$$

إذن $R = \dfrac{1}{\sqrt[k]{\ell}}$. ∎

التمرين 6. لتكن $\sum a_n z^n$ متسلسلة صحيحة تُحقِّق الشرط $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0$. نفترض وجود عددين ℓ_1 و ℓ_2 من $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ يُحقِّقان $\{\ell_1, \ell_2\} \neq \{0, +\infty\}$ و

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right| = \ell_1 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}\right| = \ell_2 .$$

عيّن نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum a_n z^n$.

الحل

نلاحظ أنّه، مهما تكن n فلدينا

$$\left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}\right| = \left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right| \cdot \left|\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}\right| \quad \text{و} \quad \left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| = \left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right|$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+2}}{a_n}\right| = \ell_1 \ell_2$$

فإذا استفدنا من التمرين السابق استنتجنا أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum a_n z^n$ يساوي $1/\sqrt{\ell_1\ell_2}$.

لنتأمّل المتسلسلة $\sum_{n=1} n^{(-1)^n} z^n$. هنا $a_{2n} = 2n$ و $a_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$. إذن $\ell_1 = 0$ و $\ell_2 = +\infty$، أمّا نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1} n^{(-1)^n} z^n$ فيساوي 1. إذن الشرط $\{\ell_1,\ell_2\} \neq \{0,+\infty\}$ شرط لازم لصحّة النتيجة. ■

التمرين 7. لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من الأعداد العقديّة، ولنعرّف $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

① أثبت أنّ للمتسلسلتين الصحيحتين $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ و $\sum \dfrac{A_n}{n!} z^n$ نصف قطر التقارب نفسه.

② نفترض أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum a_n z^n$ يساوي 1. أثبت أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum A_n z^n$ يساوي 1 أيضاً. ثُمّ أعطِ مثالاً يُبيِّن خطأ هذه الخاصّة في حال كوْن نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum a_n z^n$ مختلفاً عن 1.

الحل

① لنعرّف r و R نصفي قطري تقارب المتسلسلتين $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ و $\sum \dfrac{A_n}{n!} z^n$ بالترتيب.

- لتكن $0 < \alpha$ بحيث $\alpha < R$ عندئذ تكون المتتالية $\left(|A_n|\dfrac{\alpha^n}{n!}\right)_{n\geq 0}$ محدودة. نضع $M = \sup_{n\geq 0}\left(|A_n|\dfrac{\alpha^n}{n!}\right)$. عندها، مهما تكن $1 \leq n$ يكن :

$$\begin{aligned}
\frac{|a_n|}{n!}\alpha^n &= \frac{\alpha^n}{n!}|A_n - A_{n-1}|\\
&\leq \frac{\alpha^n}{n!}|A_n| + \frac{\alpha}{n}\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}|A_{n-1}| \leq (1+\alpha)M
\end{aligned}$$

فالمتتالية $\left(|a_n|\dfrac{\alpha^n}{n!}\right)_{n\geq 0}$ محدودة، ومن ثَمّ $\alpha \leq r$. إذن $\alpha < R \Rightarrow \alpha \leq r$ أو $R \leq r$.

▪ وبالعكس، لتكن $\beta < r$، ولنضع $\sup_{n\geq 0}\left(|a_n|\frac{\beta^n}{n!}\right) = M$. عندها مهما تكن $n \geq 1$ يكن :

$$|A_n|\frac{\beta^n}{n!} \leq \frac{\beta^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}|a_k| \leq \frac{\beta^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{\beta^k}\right)M \qquad (*)$$

لنضع بالتعريف $b_n = (n!)\beta^{-n}$. عندئذ نلاحظ أنّ $\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{k+1}{\beta}$، إذن في حالة $\beta < k+1$ يكون $b_k < b_{k+1}$، وفي حالة $k+1 \leq \beta$ يكون $b_{k+1} \leq b_k$. إذن

$$\begin{aligned}\forall n \geq \lfloor\beta\rfloor,\quad \sum_{k=0}^{n-1}b_k &= \sum_{0\leq k<\lfloor\beta\rfloor}b_k + \sum_{\lfloor\beta\rfloor\leq k<n}b_k\\ &\leq \lfloor\beta\rfloor b_0 + \left(n-\lfloor\beta\rfloor\right)b_{n-1}\end{aligned}$$

أو

$$\forall n \geq \lfloor\beta\rfloor,\quad \sum_{k=0}^{n}b_k \leq \lfloor\beta\rfloor + nb_{n-1} + b_n$$

أمّا في حالة $n < \lceil\beta\rceil$ فلدينا

$$\sum_{k=0}^{n}b_k = \sum_{0\leq k\leq n}b_k \leq \sum_{0\leq k<\lceil\beta\rceil}b_k \leq \lfloor\beta\rfloor b_0 = \lfloor\beta\rfloor$$

إذن مهما تكن n من $\mathbb{N}$ يكن $\sum_{k=0}^{n}b_k \leq \beta + nb_{n-1} + b_n$، ومن ثَمّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{n}b_k \leq 1 + \beta\frac{\beta^n}{n!} + \beta \leq 1 + \beta + \beta e^{\beta} = M_\beta$$

فإذا عُدنا إلى $(*)$ استنتجنا أنّ

$$\sup_{n\geq 0}\left(|A_n|\frac{\beta^n}{n!}\right) \leq MM_\beta$$

ومن ثَمّ $\beta \leq R$. ولمّا كانت هذه المتراجحة صحيحة أيّاً كانت β تحقّق $\beta < r$ استنتجنا أنّ $r \leq R$. ومنه $r = R$.

② لنعرّف R نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum A_n z^n$. لمّا كان

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \frac{1}{1-z}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

استنتجنا أنّ $R \geq \min(1,1) = 1$. ومن جهة ثانية، لمّا كان

$$(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

إذن $\min(R,\infty) \geq 1$. وهذا ما يثبت أنّ $R = 1$.

في حالة المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ نجد أنّ نصف قطر التقارب يساوي $+\infty$، في حين أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)z^n$ يساوي 1. ■

التمرين 8. ليكن f و g تابعين مستمرّين على المجال المتراص وغير التافه $[a,b]$، ويأخذان قيمهما في $\mathbb{R}_+^*$. نعرّف $a_n = \int_a^b (f(t))^n g(t)\,\mathrm{d}t$. أثبت أنّ R نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum a_n z^n$ يُحقّق العلاقة $\frac{1}{R} = \sup_{[a,b]} f$.

الحل

لنضع $M = \sup_{[a,b]} f$، ولتكن ε من $]0,1[$، عندئذ يوجد مجالٌ I غير تافه، ويُحقّق $I \subset [a,b]$ و

$$\forall x \in I,\ f(x) \geq \varepsilon M$$

وعليه، مهما تكن $n \in \mathbb{N}$ يكن

$$\begin{aligned}\varepsilon^n M^n \int_I g(t)\,\mathrm{d}t &\leq \int_I (f(t))^n g(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq a_n = \int_a^b (f(t))^n g(t)\,\mathrm{d}t \leq M^n \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varepsilon M \cdot \sqrt[n]{\int_I g(t)\,\mathrm{d}\,t} \le \sqrt[n]{a_n} \le M \cdot \sqrt[n]{\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}\,t}$$

فإذا جعلنا n تسعى إلى $+\infty$ استنتجنا أنّه، مهما تكن ε من $]0,1[$ يكن

$$\varepsilon M \le \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \le M$$

وهذا يبرهن على أنّ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = M$ ويثبتُ المطلوب. ■

التمرين 9. لتكن (α,β) من $\mathbb{C}^2$ ولتكن المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من الأعداد العقديّة، المعرّفة كما يلي:

$$a_0 = 0, \; a_1 = 1, \; a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$$

① أثبت أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum a_n z^n$ موجب تماماً.

② أثبت صحة المساواة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{z}{1-\alpha z-\beta z^2}$ داخل قرص تقارب المتسلسلة.

③ استنتج قيمة نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum a_n z^n$.

④ نفترض أنّ $(\alpha,\beta) = (1,1)$. احسب a_n بدلالة n.

الحل

① لنعرّف $b_n = \max\left(|a_n|,|a_{n-1}|\right)$ في حالة $1 \le n$. لمّا كان

$$|a_n| \le \left(|\alpha|+|\beta|\right) b_{n-1} \quad \text{و} \quad |a_{n-1}| \le b_{n-1}$$

استنتجنا أنّ $b_n \le K b_{n-1}$ حيث $K = \max\left(1,|\alpha|+|\beta|\right)$. ولأنّ $b_1 = 1$ نجد أنّ $b_n \le K^{n-1}$ وذلك مهما كانت قيمة $1 \le n$. وعليه يكون $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \le K^n$، فنصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum a_n z^n$ أكبر أو يساوي $\frac{1}{K}$. لنفترض إذن أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum a_n z^n$ هو R.

② لتكن z من $D(0,R)$. من الواضح أنّ :

$$\forall n \ge 2, \quad a_n z^n = \alpha z a_{n-1} z^{n-1} + \beta z^2 a_{n-2} z^{n-2}$$

وعليه

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = \alpha z \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} + \beta z^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^{n-2}$$

فإذا عرّفنا $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. استنتجنا

$$f(z) - z = \alpha z f(z) + \beta z^2 f(z)$$

أو

$$\forall z \in D(0,R), \quad (1 - \alpha z - \beta z^2) f(z) = z$$

إذن $0 \neq 1 - \alpha z - \beta z^2$ مهما كانت z من $D(0,R)$. ويكون

$$\forall z \in D(0,R), \quad f(z) = \frac{z}{1 - \alpha z - \beta z^2}$$

③ لنناقش الحالات الآتية :

- حالة $\alpha = 0$ و $\beta = 0$. في هذه الحالة $f(z) = z$ ونصف قطر التقارب هو $+\infty$.
- حالة $\alpha \neq 0$ و $\beta = 0$. هنا $f(z) = \frac{z}{1 - \alpha z}$ ونصف قطر التقارب هو $1/|\alpha|$.
- حالة $\beta \neq 0$. في هذه الحالة هناك جذران عقديّان ω_1 و ω_2 للمعادلة $\beta z^2 + \alpha z - 1 = 0$. عندئذ ينتج من الشرط $1 - \alpha z - \beta z^2 \neq 0$، مهما كانت z من $D(0,R)$، أنّ $R \le \min\left(|\omega_1|, |\omega_2|\right)$. وبالعكس، لأنّه في حالة $|z| < \min\left(|\omega_1|, |\omega_2|\right)$، و $\omega_2 \neq \omega_1$ نجد

$$\begin{aligned} \frac{z}{1 - \alpha z - \beta z^2} &= \frac{z}{\left(1 - z/\omega_1\right)\left(1 - z/\omega_2\right)} \\ &= \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}\right)^{-1} \left(\frac{1}{1 - z/\omega_1} - \frac{1}{1 - z/\omega_2}\right) \\ &= \frac{1}{\beta(\omega_1 - \omega_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega_1^n} - \frac{1}{\omega_2^n}\right) z^n \end{aligned}$$

وهذا يبرهن أنّ $\min\left(|\omega_1|, |\omega_2|\right) \le R$، وعليه $R = \min\left(|\omega_1|, |\omega_2|\right)$. ونترك معالجة حالة $\omega_1 = \omega_2$ للقارئ.

④ لنفترض أنّ $(\alpha,\beta)=(1,1)$. عندئذ يكون جذرا المعادلة $z^2+z-1=0$ هما

$$\omega_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{و} \quad \omega_2=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=-\frac{1}{\omega_1}$$

وعليه

$$\frac{z}{1-z-z^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n}z^n$$

إذن

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}.$$

التمرين 10. لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفتان كما يأتي:

$$u_0=v_0=1,\quad u_{n+1}=u_n+2v_n,\quad v_{n+1}=u_n+v_n$$

عيِّن نصف قطر تقارب كلٍّ من المتسلسلتين الصحيحتين $\sum\frac{u_n}{n!}z^n$ و $\sum\frac{v_n}{n!}z^n$ واحسب مجموع كل منهما.

الحل

لنعرّف $b_n=\max\left(|u_n|,|v_n|\right)$ عندئذ نلاحظ أنّه، في حالة n من $\mathbb{N}$، لدينا

$$|v_{n+1}|\le|u_n|+|v_n|\le 2b_n \quad \text{و} \quad |u_{n+1}|\le|u_n|+2|v_n|\le 3b_n$$

وعليه

$$\forall n\in\mathbb{N},\ b_{n+1}\le 3b_n$$

ومن ثَمّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\ b_n\le 3^n$$

لمّا كان نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum\frac{3^n}{n!}z^n$ يساوي $+\infty$، ولمّا كان

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{|u_n|}{n!}\le\frac{3^n}{n!} \qquad \text{و} \qquad \forall n\in\mathbb{N},\ \frac{|v_n|}{n!}\le\frac{3^n}{n!}$$

استنتجنا أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلتين الصحيحتين $\sum\frac{u_n}{n!}z^n$ و $\sum\frac{v_n}{n!}z^n$ يساوي $+\infty$.

لنعرّف إذن

$$v(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n}{n!}z^n \quad \text{و} \quad u(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{n!}z^n$$

في حالة $z\in\mathbb{C}$. ولكن مهما تكن n من $\mathbb{N}$ ومهما تكن z من $\mathbb{C}$ يكن

$$\begin{aligned}(n+1)\frac{u_{n+1}}{(n+1)!}z^n &= \frac{u_n}{n!}z^n+2\frac{v_n}{n!}z^n\\ (n+1)\frac{v_{n+1}}{(n+1)!}z^n &= \frac{u_n}{n!}z^n+\frac{v_n}{n!}z^n\end{aligned}$$

إذن، بالجمع،

$$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{C},\quad u'(z)&=u(z)+2v(z)\\ v'(z)&=u(z)+\ \ v(z)\end{aligned}$$

ليكن λ عدداً عقديّاً سنعيّنه لاحقاً، ولنعرّف $f=u+\lambda v$. عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{C},\quad f'(z)&=(1+\lambda)u(z)+\big(2+\lambda\big)v(z)\\ f'(z)&=(1+\lambda)\left(u(z)+\frac{2+\lambda}{1+\lambda}v(z)\right)\end{aligned}$$

فإذا اخترنا λ بحيث يتحقّق الشرط $\lambda=\dfrac{2+\lambda}{1+\lambda}$، أي $\lambda=\varepsilon\sqrt{2}$ حيث $\varepsilon=+1$ أو $\varepsilon=-1$. استنتجنا أنّ

$$.\forall z\in\mathbb{C}, f'(z)=(1+\lambda)f(z)$$

نعرّف من جديد $\forall z\in\mathbb{C},\ g(z)=e^{-(1+\lambda)z}f(z)$. فيكون لدينا عندئذ

$$\forall z\in\mathbb{C},\ g'(z)=0$$

وعليه

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad g(z)=g(0)=f(0)=u(0)+\lambda v(0)=1+\lambda$$

نستنتج مما سبق أنّ

$$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{C},\quad u(z)+\sqrt{2}v(z)&=(1+\sqrt{2})e^{(1+\sqrt{2})z}\\ u(z)-\sqrt{2}v(z)&=(1-\sqrt{2})e^{(1-\sqrt{2})z}\end{aligned}$$

وعليه

$$\forall z \in \mathbb{C},\quad u(z) = \frac{1}{2}\Big((1+\sqrt{2})e^{(1+\sqrt{2})z} + (1-\sqrt{2})e^{(1-\sqrt{2})z}\Big)$$
$$v(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big((1+\sqrt{2})e^{(1+\sqrt{2})z} - (1-\sqrt{2})e^{(1-\sqrt{2})z}\Big)$$

ونستنتج من ذلك أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}$$
$$v_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}}$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 11. لتكن المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة كما يلي:

$$a_0 = 1,\quad a_1 = 1,\quad a_2 = 0,\quad a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$$

عيّن نصف قطر تقارب، واحسب مجموع المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

الحل

لنعرّف $b_n = \max\big(|a_{n+2}|, |a_{n+1}|, |a_n|\big)$ عندئذ نلاحظ أنّه في حالة n من $\mathbb{N}$ يكون

$$|a_{n+1}| \le b_n \quad \text{و} \quad |a_{n+2}| \le b_n \quad \text{و} \quad |a_{n+3}| \le 23\,b_n$$

ومنه $b_{n+1} \le 23\,b_n$. ولأنّ $b_0 = 1$ نستنتج أنّ $b_n \le (23)^n$ وذلك مهما كانت قيمة $0 \le n$. وعليه يكون

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \le (23)^n$$

فنصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum a_n z^n$ أكبر أو يساوي $\frac{1}{23}$.

لنفترض إذن أنّ نصف قطر المتسلسلة الصحيحة $\sum a_n z^n$ يساوي R. ولتكن z من $D(0,R)$.

من الواضح أنّ :

$$\forall n \ge 0,\quad a_{n+3}z^{n+3} = 6za_{n+2}z^{n+2} - 11z^2a_{n+1}z^{n+1} + 6z^3a_nz^n$$

وعليه

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n z^n = 6z\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n - 11z^2\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + 6z^3\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

فإذا عرّفنا $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. استنتجنا

$$f(z) - 1 - z = 6z(f(z) - 1 - z) - 11z^2(f(z) - 1) + 6z^3 f(z)$$

أو

$$\forall z \in D(0,R), \quad (1 - 6z + 11z^2 - 6z^3)f(z) = 1 - 5z + 5z^2$$

إذن

$$\forall z \in D(0,R), \quad 1 - 6z + 11z^2 - 6z^3 \neq 0$$

ويكون

$$\forall z \in D(0,R), \qquad f(z) = \frac{1 - 5z + 5z^2}{1 - 6z + 11z^2 - 6z^3}$$

ولكن

$$1 - 6z + 11z^2 - 6z^3 = (1 - z)(1 - 2z)(1 - 3z)$$

فالشرط السابق يقتضي أنّ $R \leq \frac{1}{3}$. ومن جهة أخرى، نلاحظ أنّه في حالة $\left|z\right| < \frac{1}{3}$ يكون

$$\begin{aligned}
\frac{1 - 5z + 5z^2}{1 - 6z + 11z^2 - 6z^3} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1 - z} + \frac{1}{1 - 2z} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1 - 3z} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 2^{n+1} - 3^n}{2} z^n
\end{aligned}$$

إذن $R \geq \frac{1}{3}$. ومنه $R = \frac{1}{3}$ ويكون

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; a_n = \frac{1 + 2^{n+1} - 3^n}{2}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 12. لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقيّة متقاربة من عدد a ينتمي إلى $\mathbb{R}_+^*$.

① أثبت أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}z^n$ يساوي 1. نرمز بالرمز $f(z)$ إلى مجموع هذه المتسلسلة.

② ليكن g مقصور f على المجال $]-1,+1[$. أثبت أنّ $\lim_{t\to1^-}\frac{g(t)}{\ln(1-t)}=-a$.

الحل

① يوجد عددٌ n_0 يُحقّق

$$\forall n\geq n_0,\quad \frac{a}{2}\leq a_n\leq\frac{3a}{2}$$

ومنه نستنتج أنّ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n/n\right|}=1$. ونصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}z^n$ يساوي 1.

② نعلم أنّ

$$\forall t\in[0,1[,\quad -a\ln(1-t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n}t^n$$

إذن

$$\forall t\in[0,1[,\quad g(t)+a\ln(1-t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-a}{n}t^n$$

وعليه، أيّاً كانت $N\in\mathbb{N}^*$، وأيّاً كانت t من المجال $[0,1[$ نجد

$$\begin{aligned}\left|g(t)+a\ln(1-t)\right|&\leq\sum_{n=1}^{N}\frac{\left|a_n-a\right|}{n}t^n+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\left|a_n-a\right|}{n}t^n\\&\leq\sum_{n=1}^{N}\frac{\left|a_n-a\right|}{n}+\sup_{k>N}\left|a_k-a\right|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\\&\leq\sum_{n=1}^{N}\frac{\left|a_n-a\right|}{n}+\sup_{k>N}\left|a_k-a\right|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\\&\leq N\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|a_k-a\right|+\sup_{k>N}\left|a_k-a\right|\big(-\ln(1-t)\big)\end{aligned}$$

لمّا كانت المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من العدد a . أمكننا تعريف $M = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|a_k - a\right|$. فيكون لدينا

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1[,\quad \left|\frac{g(t)}{\ln(1-t)} + a\right| \le \frac{NM}{\left|\ln(1-t)\right|} + \sup_{k>N}\left|a_k - a\right|$$

ليكن $\varepsilon > 0$ ، يوجد عددٌ طبيعي N_ε يحقّق $\forall k > N_\varepsilon, \left|a_k - a\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$. إذن نختار، في المتراجحة السابقة، $N = N_\varepsilon$. ولمّا كان $\lim_{t\to 1^-}\left|\ln(1-t)\right| = +\infty$ استنتجنا أنّه يوجد عددٌ η من $]0,1[$ بحيث

$$\forall t \in]\eta,1[,\quad \frac{N_\varepsilon M}{\left|\ln(1-t)\right|} \le \frac{\varepsilon}{2}$$

وعندئذ يكون لدينا

$$\forall t \in]\eta,1[,\quad \left|\frac{g(t)}{\ln(1-t)} + a\right| \le \varepsilon$$

وهذا يثبتُ صحّة النتيجة $\lim_{t\to 1^-}\frac{g(t)}{\ln(1-t)} = -a$. ■

التمرين 13. لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين حقيقيّتين من $\mathbb{R}_+^*$. نفترض تقارب المتسلسلتين $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ حين تكون x في المجال $]0,1[$ ، وتباعدهما عندما يكون $x = 1$. أثبت أنّ :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c \Rightarrow \lim_{t\to 1^-}\frac{f(t)}{g(t)} = c$$

الحل

لنعرّف $\varepsilon_n = \frac{a_n}{b_n} - c$. ولنلاحظ، أنّه في حالة t من $]0,1[$ و N من $\mathbb{N}$ ، لدينا :

$$\left|f(t) - cg(t)\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n b_n t^n\right| \le \sum_{n=0}^{N}\left|\varepsilon_n\right| b_n t^n + \sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\varepsilon_n\right| b_n t^n$$

لمّا كان $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ أمكننا تعريف $M = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\varepsilon_n\right|$. فنستنتج أنّ

$$\forall t \in [0,1[, \quad \left|f(t) - cg(t)\right| \leq M\sum_{n=0}^{N} b_n + \sup_{k>N}\left|\varepsilon_k\right| \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n t^n$$

ومنه

$$\forall t \in [0,1[, \quad \left|f(t) - cg(t)\right| \leq M\sum_{n=0}^{N} b_n + \sup_{k>N}\left|\varepsilon_k\right| g(t)$$

أو

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1[, \quad \left|\frac{f(t)}{g(t)} - c\right| \leq \frac{M}{g(t)}\sum_{n=0}^{N} b_n + \sup_{k>N}\left|\varepsilon_k\right|$$

ليكن $\varepsilon > 0$، يوجد عددٌ طبيعي N_ε يحقّق

$$\forall k > N_\varepsilon, \quad \left|\varepsilon_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

إذن نختار، في المتراجحة السابقة، $N = N_\varepsilon$. ولمّا كان $\lim_{t\to 1^-} g(t) = +\infty$ استنتجنا أنّه يوجد عددٌ η من $]0,1[$ بحيث

$$\forall t \in]\eta,1[, \quad \frac{M}{g(t)}\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} b_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

وعندئذ يكون لدينا

$$\forall t \in]\eta,1[, \quad \left|\frac{f(t)}{g(t)} - c\right| \leq \varepsilon$$

وهذا يثبتُ صحّة النتيجة $\lim_{t\to 1^-} \frac{f(t)}{g(t)} = c$. ■

التمرين 14. أوجد، في جوار $x = 0$ ، النشر بمتسلسلة صحيحة لمتحوّل حقيقي للتابع

$$F(x) = \ln(1 + x + x^2)$$

الحل

تتلخّص الطريقة العامّة في مثل هذه الحالات بنشر مشتق هذا التابع، الذي هوتابعٌ كسري، ثُمّ استنتاج نشر التابع. ولكن هناك، في الحالة المدروسة بين أيدينا، طريق مختصر!.

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad f(x) &= \ln\frac{1-x^3}{1-x}\\ &= \ln(1-x^3)-\ln(1-x)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n}x^n\end{aligned}$$

حيث $\alpha_n = 1$ في حالة $n \neq 0 \bmod 3$ و $\alpha_n = -2$ في حالة $n = 0 \bmod 3$. ■

التمرين 15. أوجد، في جوار $x = 0$ ، النشر بمتسلسلة صحيحة لمتحوِّل حقيقي للتابع

$$F(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\tan\alpha\right)$$

و α ينتمي إلى $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

الحل

تتلخّص الطريقة العامّة في مثل هذه الحالات بنشر مشتق هذا التابع. نجد بحساب بسيط أنّ

$$\begin{aligned}F'(x) &= \frac{-2\tan\alpha}{(1+x)^2\left(1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\tan^2\alpha\right)}\\ &= \frac{-2\tan\alpha}{(1+\tan^2\alpha)(1+x^2)+2(1-\tan^2\alpha)x}\\ &= -\frac{\sin 2\alpha}{1+2\cos 2\alpha x+x^2}\\ &= -\frac{\sin 2\alpha}{|1+e^{2i\alpha}x|^2}\\ &= \frac{-\sin 2\alpha}{(1+e^{2i\alpha}x)(1+e^{-2i\alpha}x)}\\ &= \frac{i}{2}\left(\frac{e^{2i\alpha}}{1+e^{2i\alpha}x}-\frac{e^{-2i\alpha}}{1+e^{-2i\alpha}x}\right)\end{aligned}$$

إذن في حالة $|x| < 1$ لدينا

$$F'(x) = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{2\,\mathrm{i}(n+1)\alpha}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-2\,\mathrm{i}(n+1)\alpha}x^n\right)$$

وعليه يكون لدينا

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2i\sin(2(n+1)\alpha)x^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin(2(n+1)\alpha)x^n \end{aligned}$$

ومن ثَمّ، في حالة $|x| < 1$، يكون لدينا

$$\begin{aligned} F(x) &= \alpha + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(2(n+1)\alpha)}{n+1}x^{n+1} \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(2n\alpha)}{n}x^n \end{aligned}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 16. أوجد، في جوار $x = 0$، النشر بمتسلسلة صحيحة لمتحوّل حقيقي للتابع

$$F(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t$$

الحل

يمكننا هنا ملاحظة ما يأتي:

$$F(0) = 0 \quad \text{و} \quad \forall x \in \mathbb{R},\quad F'(x) = 2xF(x) + 1 \tag{1}$$

- التابع F هو التابعُ الوحيد الذي يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ويُحقّق الشرط (1). في الحقيقة، لنفترض أنّ $x \mapsto G(x)$ هو تابعٌ آخر معرّفٌ وقابلٌ للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ويُحقّق الشرط (1). عندئذ نعرّف $x \mapsto H(x) = e^{-x^2}(F(x) - G(x))$. فيكون

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\quad H'(x) &= -2xH(x) + e^{-x^2}(F'(x) - G'(x)) \\ &= -2xH(x) + 2xe^{-x^2}(F(x) - G(x)) = 0 \end{aligned}$$

إذن $H = 0$، أو $G = F$.

▫ لنفترض وجود متسلسلة صحيحة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ نصف قطر تقاربها R موجبٌ تماماً، ويُحقّق مجموعها $x \mapsto S(x)$ الشرطين

$$S(0) = 0 \text{ و } \forall x \in \left]-R, R\right[,\ S'(x) = 2xS(x) + 1 .$$

عندئذ يمكننا أن نستنتج أنّ $a_0 = 0$ وأيّاً كانت x من $\left]-R, R\right[$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} x^n$$

إذن، يجب أن يكون

$$a_0 = 0 \text{ و } a_1 = 1 \text{ و } \forall n \geq 1,\ (n+1) a_{n+1} = 2a_{n-1}$$

ومنه

$$a_{2n} = \frac{1}{n} a_{2(n-1)} = \cdots = \frac{1}{n(n-1)\cdots 1} a_0 = 0$$

$$a_{2n+1} = \frac{2}{2n+1} a_{2n-1} \cdots = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} a_1$$

أو

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = 0 \quad \text{و} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

▫ لنعرّف إذن التابع $x \mapsto G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} x^{2n+1}$. إنّ نصف قطر تقارب هذه المتسلسلة الصحيحة هو $+\infty$، بالاستناد إلى معيار دالمبيرت مثلاً. نتوثّقُ مباشرة بناءً على ما سبق أن G يحقّق الشرطين (1)، وبناءً على وحدانيّة الحل نستنتج أنّ $F = G$ أي

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} x^{2n+1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 17. أوجد، في جوار $x=0$ ، النشر بمتسلسلة صحيحة لمتحوّل حقيقي للتابعين

$$g(x)=\ln\sqrt{1-2x\operatorname{ch}a+x^2} \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{1}{1-2x\operatorname{ch}a+x^2}$$

الحل

لنلاحظ أوّلاً أنّ $(1-e^a x)(1-e^{-a}x) = 1-2x\operatorname{ch}a+x^2$. إذن

$$f(x)=\frac{1}{1-2x\operatorname{ch}a+x^2}=\frac{1}{2\operatorname{sh}a}\left(\frac{e^a}{1-e^a x}-\frac{e^{-a}}{1-e^{-a}x}\right)$$

فإذا كان $|x|<e^{-|a|}$ استنتجنا أنّ

$$f(x)=\frac{1}{1-2x\operatorname{ch}a+x^2}=\frac{1}{2\operatorname{sh}a}\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{(n+1)a}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+1)a}x^n\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}(n+1)a}{\operatorname{sh}a}x^n$$

ومنه

$$\forall x\in\left]-e^{-|a|},e^{-|a|}\right[,\quad \frac{1}{1-2x\operatorname{ch}a+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}(n+1)a}{\operatorname{sh}a}x^n$$

ومن جهة أخرى

$$g'(x)=\frac{x-\operatorname{ch}a}{1-2x\operatorname{ch}a+x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^a}{1-e^a x}+\frac{e^{-a}}{1-e^{-a}x}\right)$$

فإذا كان $|x|<e^{-|a|}$ استنتجنا أنّ

$$g'(x)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{(n+1)a}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+1)a}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{ch}((n+1)a)x^n$$

ومنه

$$\forall x\in\left]-e^{-|a|},e^{-|a|}\right[,\quad \ln\sqrt{1-2x\operatorname{ch}a+x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}na}{n}x^n$$

وهي النتيجة المرجوّة. ∎

التمرين 18. أوجد، في جوار $x=0$ ، النشر بمتسلسلة صحيحة لمتحوّل حقيقي للتابع

$f(x)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^k$ و k من $\mathbb{R}^*$.

(يمكن البدء بإيجاد معادلة تفاضليّة من المرتبة 2 يُحقّقها التابع f).

الحل

لنلاحظ في حالة عدد حقيقي x أنّ:

$$f'(x)=k(x+\sqrt{1+x^2})^{k-1}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{k}{\sqrt{1+x^2}}f(x)$$

ومن ثَمّ

$$\left(\sqrt{1+x^2}f'(x)\right)'=kf'(x)=\frac{k^2}{\sqrt{1+x^2}}f(x)$$

أو

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f'(x)+\sqrt{1+x^2}f''(x)=\frac{k^2}{\sqrt{1+x^2}}f(x)$$

وأخيراً

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad (1+x^2)f''(x)+xf'(x)-k^2f(x)=0$$

إذن يُحقّق التابع f الخاصة التالية :

$$(\mathbb{P}):\begin{cases}f(0)=1,\ f'(0)=k,\\ \forall x\in\mathbb{R},\quad (1+x^2)f''(x)+xf'(x)-k^2f(x)=0\end{cases}$$

☜ نعلم من دراسة المعادلات التفاضليّة–راجع الجزء الثالث– أنّ كلّ تابع يُحقّق الخاصّة $(\mathbb{P})$ في جوار 0 ينطبق على التابع f في جوار 0.

لنبحث عن متسلسلة صحيحة $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ نصف قطر تقاربها R موجب تماماً ويُحقّق مجموعها الخاصّة $(\mathbb{P})$ على المجال $I=\left]-R,R\right[$. في الحقيقة، يجب أن يكون $a_0=1$ و $a_1=k$.
وفي حالة x من $\left]-R,R\right[$ لدينا

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n-k^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2}+(n^2-k^2)a_n)x^n=0$$

ومن ثَمّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2}=-\frac{n^2-k^2}{(n+2)(n+1)}a_n$$

ونرى أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=1$ ، وهذا ما يثبت، استناداً إلى التمرين 5.، أنّ $R=1$. ويمكننا تدريجيّاً إثبات أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{2n}=\frac{(-1)^n}{(2n)!}\prod_{p=0}^{n-1}(4p^2-k^2)$$

$$a_{2n+1}=\frac{(-1)^n k}{(2n+1)!}\prod_{p=0}^{n-1}((2p+1)^2-k^2)$$

وبسبب خاصّة وحدانيّة حلّ المسألة $(\mathbb{P})$ نستنتج أنّ

$$\forall x\in\left]-1,1\right[,\quad (x+\sqrt{1+x^2})^k=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

حيث $a_0=1$ و

$$\forall n\geq 1,\quad a_n=\frac{k}{n!}\cdot\prod_{j=1}^{n-1}(k-n+2j)$$ ■

التمرين 19. أوجد، في جوار $x=0$ ، النشر بمتسلسلة صحيحة لمتحوّل حقيقي للتابع

$$f(x)=(\arcsin x)^2$$

(يمكن البدء بإيجاد معادلة تفاضليّة من المرتبة 2 يُحقّقها التابع f).

الحل

لنلاحظ أنّ

$$\forall x \in \left]-1,1\right[,\quad f'(x) = 2\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ومن ثَمّ

$$\forall x \in \left]-1,1\right[,\quad \left(\sqrt{1-x^2}f'(x)\right)' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

أو

$$\forall x \in \left]-1,1\right[,\quad -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x) + \sqrt{1-x^2}f''(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

وأخيراً

$$\forall x \in \left]-1,1\right[,\quad (1-x^2)f''(x) - xf'(x) - 2 = 0$$

إذن التابع f يُحقّق الخاصة الآتية :

$$(\mathbb{P}) : \begin{cases} f(0) = 1,\ f'(0) = 0, \\ \forall x \in \left]-1,1\right[,\quad (1-x^2)f''(x) - xf'(x) - 2 = 0 \end{cases}$$

☜ نعلم من دراسة المعادلات التفاضليّة–راجع الجزء الثالث– أنّ كلّ تابع يُحقّق الخاصّة $(\mathbb{P})$ في جوار 0 ينطبق على التابع f في جوار 0.

لنبحث عن متسلسلة صحيحة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ نصف قطر تقاربها R موجب تماماً وتُحقّق الخاصّة $(\mathbb{P})$ على المجال $\left]-R,R\right[= I$.

في الحقيقة، يجب أن يكون $a_0 = 1$ و $a_1 = 0$. وفي حالة x من $\left]-R,R\right[$ لدينا

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}na_n x^n - 2 = 0$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n\Big)x^n = 2$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n \quad \text{و} \quad a_2 = 1$$

ولكن $a_1 = 0$ إذن ينتج من العلاقة التدريجيّة السابقة أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0$$

وينتج من جهة ثانية أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2n} = \frac{4^n (n!)^2}{2n^2(2n)!} = \frac{2^{2n-1}}{n^2 C_{2n}^n}$$

ونجد بحساب مباشر أنّ $R = 1$. وبسبب خاصّة وحدانيّة حلّ المسألة $(\mathbb{P})$ نستنتج أنّ

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \arcsin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{n^2 C_{2n}^n} x^{2n}$$

فمثلاً باختيار $x = 1/2$ نجد

$$\frac{\pi^2}{18} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 C_{2n}^n}$$

وباختيار $x = 1/\sqrt{2}$ نجد

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 C_{2n}^n}$$

وأخيراً باختيار $x = \sqrt{3}/2$ نجد

$$\frac{2\pi^2}{9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 C_{2n}^n}$$

التمرين 20.

① ادرس التقارب البسيط والمنتظم لمتتالية التوابع $(f_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة كما يلي:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f_n(z) = (1 - az)(1 - a^2 z)\cdots(1 - a^n z)$$

و a من $\left]-1,+1\right[$.

② نعرّف $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$. أثبت أنّ f هو التابع الوحيد المستمر عند 0 ويُحقّق الشرطين :

$f(0) = 1$ و $f(z) = (1 - az) f(az)$.

③ عبّر عن التابع f بصيغة مجموع متسلسلة صحيحة في جوار 0.

الحل

① لتكن $(\alpha_k)_{1\le k\le n}$ أعداداً عقديّة ما. نذكّر بالرمز $\mathbb{N}_n = [1,n]\cap\mathbb{N}$. عندئذ:

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha_k) = \sum_{B\subset\mathbb{N}_n}\prod_{k\in B}\alpha_k$$

ومن ثَمّ، بالاستفادة من المتراجحتين : $1+x\le e^x$ و $e^x-1\le xe^x$ ، نجد

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha_k)-1\right| &\le \sum_{\varnothing\ne B\subset\mathbb{N}_n}\prod_{k\in B}|\alpha_k| \\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(1+|\alpha_k|\right)-1 \\
&\le \exp\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|\right)-1 \\
&\le \left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|\right)\cdot\exp\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|\right)
\end{aligned}$$

نستنتج بوجه خاص، بعد أن نضع $b=|a|$ ، أنّه مهما تكن z من $\mathbb{C}$ ، ومهما تكن $1\le n$ و $0\le m$ فلدينا

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{k=1}^{n}(1-a^{k+m}z)-1\right| &\le \left(\sum_{k=1}^{n}b^{k+m}\ |z|\right)\cdot\exp\left(\sum_{k=1}^{n}b^{k+m}\ |z|\right) \\
&\le \frac{b^m\ |z|}{1-b}\exp\left(\frac{|z|}{1-b}\right)
\end{aligned}$$

لتكن $R>0$ ، عندئذ، بأخذ $m=0$ نستنتج

$$\forall n\ge 1, \forall z\in\bar{D}(0,R),\quad \left|f_n(z)-1\right|\le\frac{R}{1-b}\exp\left(\frac{R}{1-b}\right)$$

وعليه

$$\forall n \geq 1, \qquad \sup_{z\in\bar{D}(0,R)}\left|f_n(z)\right| \leq 1+\frac{R}{1-b}\exp\left(\frac{R}{1-b}\right)=M_R$$

وبالعودة إلى المتراجحة نفسها نجد

$$\forall (m,n)\in\mathbb{N}^{*2}, \forall z\in\bar{D}(0,R), \qquad \left|\frac{f_{n+m}(z)}{f_m(z)}-1\right| \leq \frac{b^m R}{1-b}\exp\left(\frac{R}{1-b}\right)\leq b^m M_R$$

ومن ثَمّ

$$\forall (m,n)\in\mathbb{N}^{*2}, \forall z\in\bar{D}(0,R), \qquad \left|f_{n+m}(z)-f_m(z)\right| \leq b^m M_R\left|f_m(z)\right| \leq b^m M_R^2$$

أو

$$\forall (m,n)\in\mathbb{N}^{*2}, \qquad \sup_{z\in\bar{D}(0,R)}\left|f_{n+m}(z)-f_m(z)\right| \leq b^m M_R^2$$

ولمّا كان $\lim\limits_{m\to\infty} b^m = 0$ استنتجنا أنّ متتالية التوابع $(f_n)_{n\geq 1}$ تُحقّق شرط كوشي بانتظام على كل قرص متراصّ $\bar{D}(0,R)$ في $\mathbb{C}$ ، فهي إذن متقاربة بانتظام على كلّ مجموعة متراصّة في $\mathbb{C}$.

② ليكن $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ تابعاً مستمرّاً عند 0 ويُحقّق الشرطين :

$$h(0)=1 \text{ و } h(z)=(1-az)h(az) \,.$$

عندئذ نبرهن بالتدريج على العدد n أنّ $h(z)=f_n(z)h(a^n z)$ مهما كان z من $\mathbb{C}$. ولكن $\lim\limits_{n\to\infty} h(a^n z)=h(0)=1$ ، إذن $\forall z\in\mathbb{C}, \quad h(z)=f(z)$.

③ لنبحث عن متسلسلة صحيحة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ نصف قطر تقاربها R ويُحقّق مجموعها $S(z)$ الشرطين

$$\forall z\in\mathbb{C}, S(z)=(1-az)S(az) \text{ و } S(0)=1 \,.$$

إذا وُجدت مثل هذه المتسلسلة وجب أن يكون $a_0=1$ ، وكذلك

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= (1-az)\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n a^{n+1} z^{n+1}\end{aligned}$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(a^n - 1)z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}a^n z^n$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = a_{n-1}\frac{a^n}{a^n - 1}$$

وعليه

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = \frac{a^n}{a^n - 1}\frac{a^{n-1}}{a^{n-1} - 1}\cdots\frac{a^1}{a^1 - 1}a_0 = \frac{a^{n(n+1)/2}}{\prod_{k=1}^{n}(a^k - 1)}$$

كما نلاحظ أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1 - a^{n+1}}{|a|^{n+1}} = +\infty$ ، إذن نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ يساوي $+\infty$. وبناءً على الوحدانيّة التي أثبتناها في السؤال 2. نستنتج أنّ

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n(n+1)/2}}{\prod_{k=1}^{n}(a^k - 1)}z^n$$

أو مهما كان العدد العقدي z والعدد الحقيقي a من $]-1,1[$ كان

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - a^k z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n(n+1)/2}}{\prod_{k=1}^{n}(a^k - 1)}z^n$$

■

التمرين 21. أوجد، في جوار $x = 0$ ، النشر بمتسلسلة صحيحة لمتحوّل حقيقي للتابع

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x\sin^2 t)\,\mathrm{d}\,t$$

الحل

ليكن x عنصراً من $]-1,1[$. ولنعرّف

$$f_n : \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \ f_n(t) = \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\sin^{2n} t$$

عندئذ تتقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ بالنظيم، ومجموعها f هو

$$f(t) = \ln(1 + x\sin^2 t)$$

إذن

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x\sin^2 t)\,\mathrm{d}\,t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,\mathrm{d}\,t$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\,\mathrm{d}\,t$$

ولكن نعلم أنّ $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{2^{2n+1}} C_{2n}^n$ ، إذن

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad F(x) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n+1}} C_{2n}^n x^n$$ ■

التمرين 22. أوجد، في جوار $z = 0$ ، النشر بمتسلسلة صحيحة للتابع

$$F(z) = \int_0^{2\pi} e^{z\cos t}\,\mathrm{d}\,t$$

الحل

ليكن z عنصراً من $\mathbb{C}$. ولنعرّف $f_n : [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ f_n(t) = \frac{z^n}{n!}\cos^n t$. عندئذ تتقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ بالنظيم، ومجموعها f يحقّق $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = e^{z\cos t}$. إذن

$$F(z) = \int_0^{2\pi} e^{z\cos t}\,\mathrm{d}\,t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}\,t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^{2\pi} \cos^n t\,\mathrm{d}\,t$$

ولكن نعلم أنّ $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}\,t = \frac{2\pi}{2^{2n}} C_{2n}^n$ و $\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} t\,\mathrm{d}\,t = 0$ ، إذن

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad F(z) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$ ■

التمرين 23. مبرهنة Sergeï Bernstein.

I. لتكن a من $\mathbb{R}_+^*$. وليكن $g:[-a,a]\to\mathbb{R}$ تابعاً زوجياً من الصف C^∞ يُحقّق

$$\forall n\geq 0,\quad \forall x\in[-a,a],\quad g^{(2n)}(x)\geq 0$$

1. أثبت أنّ $g^{(2p)}$ متزايد على $[0,a]$ وذلك أياً كانت p .

2. أثبت أنّه يوجد $M\geq 0$ يُحقّق، أياً كانت n من $\mathbb{N}$ و (u,v) من $\mathbb{R}^2$ ما يلي:

$$0\leq u\leq v\leq a\Rightarrow 0\leq \frac{(v-u)^n}{n!}g^{(n)}(u)\leq M .$$

3. لتكن p من $\mathbb{N}$. ولنتأمّل التابع

$$I_p:[-a,a]\to\mathbb{R},\ I_p(x)=g(x)-\sum_{k=0}^{p}\frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}$$

أثبت أنّ I_p تابع زوجيٌّ موجب، ويحقّق على المجال $[-a,a]$ المساواة الآتية:

$$I_p(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{2p+1}}{(2p+1)!}g^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

وإذا كانت x من $]-a,a[$ كان $\lim\limits_{p\to\infty}I_p(x)=0$. ماذا تستنتج؟

II. ليكن $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^∞، يُحقّق الشرط

$$\forall n\geq 0,\quad \forall x\in[-a,a],\quad f^{(2n)}(x)\geq 0$$

أثبت أنّ $\forall x\in\,]-a,a[,\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

III. استنتج أنّ التابع $x\mapsto\tan x$ يقبل في جوار الصفر النشر بمتسلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها يساوي $\frac{\pi}{2}$.

الحل

I.1. التابع g زوجي، إذن تكون جميع التوابع $\left(g^{(2p)}\right)_{p\geq 0}$ زوجيّة، وتكون التوابع $\left(g^{(2p+1)}\right)_{p\geq 0}$ فرديّة. وبوجه خاصّ $\forall p\in\mathbb{N},\ g^{(2p+1)}(0)=0$. لمّا كان $\left(g^{(2p+1)}\right)'$ موجباً على $[0,a]$ استنتجنا أنّ $g^{(2p+1)}$ متزايدٌ على هذا المجال. ولأنّ $g^{(2p+1)}(0)=0$ وجب أن يكون $g^{(2p+1)}$ موجباً على $[0,a]$. نستنتج إذن أنّ $g^{(2p)}$ متزايدٌ على المجال $[0,a]$.

2.I. ينتج مما سبق أنّ جميع مشتقّات التابع g موجبة على المجال $[0,a]$ إذن المتراجحة اليساريّة صحيحة وضوحاً ولا تحتاج إلى إثبات إضافي. لتكن $\mathbb{P}_n$ القضيّة الآتية:

$$\forall(u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq u \leq v \leq a \Rightarrow \frac{(v-u)^n}{n!} g^{(n)}(u) \leq g(a)$$

إنّ $\mathbb{P}_0$ واضحة. لتكن $1 \leq n$، وليكن $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ يحقّق المتراجحة $0 \leq u \leq v \leq a$. عندئذ، استناداً إلى منشور تايلور مع باقٍ تكاملي لدينا:

$$g(v) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(v-u)^k}{k!} g^{(k)}(u) + R_n(v,u)$$

حيث

$$R_n(v,u) = \frac{(v-u)^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^n g^{(n+1)}(u + t(v-u))\,\mathrm{d}\,t$$

ولكن من الواضح أنّ المقدار $R_n(v,u)$ موجبٌ وجميع حدود المجموع السابق موجبةٌ. إذن

$$\frac{(v-u)^n}{n!} g^{(n)}(u) \leq g(v) \leq g(a)$$

وهذا يثبت صحّة القضيّة $\mathbb{P}_n$.

3.I. في حالة x من $[-a,a]$ نكتب استناداً إلى منشور تايلور مع باقٍ تكاملي ما يأتي

$$g(x) = \sum_{k=0}^{2p+1} \frac{x^k}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{x^{2p+2}}{(2p+1)!} \int_0^1 (1-t)^{2p+1} g^{(2p+2)}(tx)\,\mathrm{d}\,t$$

ومنه، بملاحظة أنّ $g^{(2k+1)}(0) = 0$، نستنتج أنّه في حالة x من $[-a,a]$ لدينا

$$I_p(x) = g(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} g^{(2k)}(0) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2p+1}}{(2p+1)!} g^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}\,t$$

من الواضح أنّ I_p تابع زوجي، إذن لنفترض أنّ $0 \leq x < a$. عندئذ يكون لدينا، بالاستفادة من السؤال السابق :

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{2p+1}}{(2p+1)!} g^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}\,t \leq (2p+2)M \int_0^x \frac{(x-t)^{2p+1}}{(a-t)^{2p+2}}\,\mathrm{d}\,t$$

ولكنّ التابع $t \mapsto \dfrac{x-t}{a-t}$ متناقص على المجال $[0,x]$ إذن

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{2p+1}}{(2p+1)!} g^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}\,t \leq \frac{(2p+2)Ma}{a-x}\left(\frac{x}{a}\right)^{2p+1}$$

ولمّا كان $\lim\limits_{p\to\infty}(2p+2)\big(x/a\big)^{2p+1} = 0$ ، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{p\to\infty} I_p(x) = 0$ ، وهي نتيجة تبقى صحيحة أيّاً كانت x من $]-a,a[$ ، لأنّ I_p زوجي. وعليه:

$$\forall x \in \,]-a,a[,\;\; g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}$$

.II ليكن $g : [-a,a] \to \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big)$. يُحقّق التابع g شروط الطلب السابق، إذن يساوي التابع g منشور تايلور الموافق، أي

$$\forall x \in \;]-a,a[,\quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n}$$

ليكن x من $]-a,a[$ ، يفيدنا منشور تايلور مع باق تكاملي بكتابة ما يأتي:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{2p+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \;= \frac{x^{2p+2}}{(2p+1)!} \int_0^1 (1-t)^{2p+1} f^{(2p+2)}(tx)\,\mathrm{d}\,t$$

ولكن من الواضح أنّ $f^{(2p+2)}(u) \leq 2g^{(2p+2)}(u)$ إذن

$$0 \leq f(x) - \sum_{k=0}^{2p+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \;\leq 2\frac{x^{2p+2}}{(2p+1)!} \int_0^1 (1-t)^{2p+1} g^{(2p+2)}(tx)\,\mathrm{d}\,t$$

أو

$$0 \leq f(x) - \sum_{k=0}^{2p+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \;\leq 2\int_0^1 \frac{(x-u)^{2p+1}}{(2p+1)!} g^{(2p+2)}(u)\,\mathrm{d}\,t = 2I_p(x)$$

ولكن أثبتنا أنّ $\lim\limits_{p\to\infty} I_p(x) = 0$ ، إذن

$$f(x) = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{2p+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

ومن جهة ثانية

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{2p}\frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}x^k-\sum_{k=0}^{2p-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}x^k\right)&=\lim_{p\to\infty}\frac{f^{(2p)}(0)}{(2p)\,!}x^{2p}\\&=\lim_{p\to\infty}\frac{g^{(2p)}(0)}{(2p)\,!}x^{2p}=0\end{aligned}$$

إذن لدينا أيضاً

$$f(x)=\lim_{p\to\infty}\sum_{k=0}^{2p}\frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}x^k$$

وهذا يبرهن أنّ $f(x)=\lim\limits_{p\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}x^k$. فالتابع f ينطبق على متسلسلة تايلور الموافقة له على المجال المفتوح $]-a,a[$. أي

$$\forall x\in\,]-a,a[,\ f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}x^k$$

III. لنتأمّل التابع $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R},\ f(x)=\tan x$ ، لنبرهن بالتدريج على العدد n أنّ

$$\forall x\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right[,\qquad f^{(n)}(x)\geq 0$$

في الحقيقة، من المعلوم أنّ $f'=1+f^2$ ، إذن النتيجة المطلوبة محقّقة في حالة $n=0,1$.

لنفترض أنّ المشتقّات $f^{(k)}$ موجبة في حالة $k=0,1,\ldots,n$ ، عندئذ

$$f^{(n+1)}=(f')^{(n)}=(1+f^2)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}f^{(n-k)}$$

وهذا يبرهن أنّ $f^{(n+1)}$ موجب على المجال المذكور. ليكن a عدداً ما من المجال $]0,\pi/2[$ ، التوابع $(\tan^{(2p+1)})_{p\geq 0}$ جميعها توابع زوجيّة، فهي إذن، اعتماداً على ما سبق، موجبة على المجال $[-a,a]$. ومنه

$$\forall x\in\,]-a,a[,\quad \tan'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tan^{(2k)}(0)}{(2k)\,!}x^{2k}$$

ولمّا كان هذا صحيحاً أيّاً كانت a من $]0,\pi/2[$ ، استنتجنا أنّ

$$\forall x \in \left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[,\quad \tan' x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tan^{(2k+1)}(0)}{(2k)!}x^{2k}$$

وينتج من ذلك أنّ

$$\forall x \in \left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[,\quad \tan(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tan^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

ولا يمكن أن يتجاوز نصف قطر التقارب $\frac{\pi}{2}$، لأنّ $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan x = +\infty$. ■

التمرين 24. أثبت أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{x^n}{n!}$ يساوي $+\infty$، وإذا كان $f(x)$ هو مجموع هذه المتسلسلة فأثبت أنّ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-ex} = e^{-1/2}$$

الحل

نعلم أنّ

$$\forall n \geq 1,\quad \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \geq 1,\quad n-\frac{1}{2} \leq n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq n-\frac{1}{2}+\frac{1}{3n}$$

أو مهما يكن n أكبر تماماً من الصفر يكن

$$\frac{e^n}{\sqrt{e}} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \leq \frac{e^n}{\sqrt{e}}+\frac{e^n}{\sqrt{e}}\left(e^{1/(3n)}-1\right) \leq \frac{e^n}{\sqrt{e}}+\frac{e^{n+1}}{(n+1)\sqrt{e}}$$

إذن نصف قطر تقارب المتسلسلة التي تعرّف f يساوي $+\infty$، ويكون في حالة $x>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ex)^n}{\sqrt{e}\cdot n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{x^n}{n!} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ex)^n}{n!}+\frac{1}{x}\frac{(ex)^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

إذن

$$\frac{e^{ex}-1}{\sqrt{e}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{e}}\left(e^{ex}-1+\frac{e^{ex}-1}{x}-e\right)$$

أو

$$\forall x>0,\quad 1-e^{-ex}\le \sqrt{e}\cdot e^{-ex}f(x)\le\left(1+\frac{1}{x}\right)(1-e^{-ex})$$

إذن $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{e}\,e^{-ex}f(x)=1$ أو

$$f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{e^{ex}}{\sqrt{e}}$$

التمرين 25. أثبت التقارب المنتظم على كل مجموعة متراصّة من $\bar{D}(0,1)\backslash\{1\}$ للمتسلسلة الصحيحة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$.

الحل

ليكن $S_n(z)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k}$. عندئذ

$$\begin{aligned}zS_n(z)-S_n(z)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{z^{k+1}}{k}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{z^{k+1}}{k+1}\\&=\frac{z^{n+1}}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)z^{k+1}-z\\&=\frac{z^{n+1}}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{z^{k+1}}{k(k+1)}-z\end{aligned}$$

أو

$$\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{1\},\quad S_n(z)=\frac{z^{n+1}}{n(z-1)}+\frac{1}{z-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{z^{k+1}}{k(k+1)}-\frac{z}{z-1}$$

ومنه نستنتج مباشرة أنّ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ تتقارب ببساطة على $\bar{D}(0,1)\backslash\{1\}$.

لتكن α من $]0,1[$، ولنضع

$$K_\alpha=\left\{z\in\mathbb{C}:\left(|z|\le 1\right)\wedge\left(|1-z|\ge\alpha\right)\right\}$$

من السهل التوثّق أنّه مهما تكن المجموعة المتراصّة K المحتواة في $\bar{D}(0,1)\backslash\{1\}$ فيوجد α في $]0,1[$ تجعل $K\subset K_\alpha$.

ولكن في حالة z من K_α و m من $\mathbb{N}$ و n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{aligned}\left|S_{n+m}(z)-S_n(z)\right| &= \left|\frac{z^{n+m+1}}{(n+m)(z-1)}-\frac{z^{n+1}}{n(z-1)}+\frac{1}{z-1}\sum_{k=n}^{n+m-1}\frac{z^{k+1}}{k(k+1)}\right|\\ &\leq \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{n+m}+\frac{1}{n}+\sum_{k=n}^{n+m-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right)\leq \frac{2}{\alpha n}\end{aligned}$$

إذن

$$\forall\left(n,m\right)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N},\quad \sup_{z\in K_\alpha}\left|S_{n+m}(z)-S_n(z)\right|\leq\frac{2}{\alpha n}$$

وهذا ما يثبت تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ بانتظام على K_α، ويُنجز الإثبات. ■

التمرين 26. أَتوجد توابع تحليليّة f على المجال $]-1,+1[$ وتحقّق الشرط

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad f\left(\frac{1}{2n}\right)=f\left(\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{n}$ ؟

أعد السؤال نفسه بعد أن تستبدل الشرطَ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$ أو الشرط $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n^3}$ بالشرط السابق.

الحل

- لنفترض وجود تابع تحليلي f على المجال $]-1,1[$ يُحقّق

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, f\left(\frac{1}{2n}\right)=f\left(\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{n}$$

ولنتأمّل

$$h:\,]-1,1[\,\to\mathbb{R},\ h(x)=f(x)-2x$$

إنّ h تابعٌ تحليلي أيضاً ويُحقّق $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ h\left(\frac{1}{2n}\right)=0$، إذن للتابع التحليلي h صفرٌ غير معزول، فهو من ثَمّ صفري. أي $\forall x\in\,]-1,1[,\ f(x)=2x$، وهذا يناقض الشرط الثاني، لأنّ $\frac{2}{2n+1}\neq\frac{1}{n}=f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$. فالجواب في هذه الحالة هو لا.

- أمّا في حالة الشرط $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$، فالتابع التحليلي $f(z)=z^2$ يُحقّق المطلوب، والجواب في هذه الحالة هو نعم.

- لنفترض وجود تابع تحليلي f على $]-1,1[$ يُحقّق

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\tfrac{1}{n}\right) = f\left(-\tfrac{1}{n}\right) = -\tfrac{1}{n^3}$$

ولنتأمّل

$$h :]-1,1[\to \mathbb{R},\ h(x) = f(x) - x^3$$

إنّ h تابعٌ تحليليّ أيضاً وهو يُحقّق $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h\left(-\tfrac{1}{n}\right) = 0$ ، إذن للتابع التحليلي h صفرٌ غير معزول، فهو إذن صفري. أي $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = x^3$ ، وهذا يناقض الشرط الثاني، لأنّ $\tfrac{1}{n^3} \neq -\tfrac{1}{n^3} = f\left(\tfrac{1}{n}\right)$. فالجواب في هذه الحالة هو لا.

نظريّة كوشي والتوابع الهولومورفيّة

1. التوابع الهولومورفيّة

1-1. **تعريف**. لتكن Ω مجموعة مفتوحة غير خالية من المستوي العقدي $\mathbb{C}$. وليكن f تابعاً من Ω إلى $\mathbb{C}$. نقول إنّ التابع **f يقبل الاشتقاق عند نقطة z_0 من Ω**، إذا وفقط إذا قَبِلَ التابع التالي

$$\Delta_{f,z_0} : \Omega\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

نهاية عند z_0. ونرمز عادة إلى هذه النهاية بالرمز $f'(z_0)$ في حال وجودها.
ونقول إنّ التابع **f هولومورفي على Ω** إذا وفقط إذا قَبِلَ الاشتقاق عند كلِّ نقطة من Ω. لاحظ أنه إذا قَبِلَ f الاشتقاق عند نقطةٍ كان مستمراً عندها.

2-1. **مبرهنة**

① لتكن U مجموعة مفتوحة غير خالية من المستوي العقدي $\mathbb{C}$، ولتكن z_0 من U. وأخيراً ليكن f و g تابعين عقديين معرّفين على U وقابلين للاشتقاق عند z_0. عندئذ يكون التابعان $f + \lambda g$ (حيث $\lambda \in \mathbb{C}$)، و fg قابلين للاشتقاق عند z_0، وإذا كان $g(z_0) \neq 0$ كان التابع $\frac{f}{g}$، المعرَّف في جوار z_0، قابلاً للاشتقاق عند z_0. وحينئذ يكون

$$\begin{aligned}(f + \lambda g)'(z_0) &= f'(z_0) + \lambda g'(z_0)\\ (f\,g)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)\\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) &= \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}\end{aligned}$$

② لتكن U و V مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين من المستوي العقدي $\mathbb{C}$. وليكن $f : U \to \mathbb{C}$ تابعاً قابلاً للاشتقاق عند z_0 من U، ويُحقّق $f(U) \subset V$، وليكن كذلك $g : V \to \mathbb{C}$ تابعاً قابلاً للاشتقاق عند $f(z_0)$. عندئذ يكون $g \circ f$ قابلاً للاشتقاق عند z_0 ويكون $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.

إنّ إثبات المبرهنة السابقة بسيط جداً انطلاقاً من التعريف، ويشابه إثبات المبرهنة المماثلة المتعلّقة بالتوابع لمتحوّل حقيقيّ لذلك نترك التفاصيل تمريناً للقارئ.

لقد أثبتنا عند دراسة المتسلسلات الصحيحة أنّ مجموع متسلسلة صحيحة هولومورفي على قرص تقاربها، وكذلك يكون هولومورفياً كلُّ تابع تحليلي على مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$ لأنّه يتطابق محليّاً مع مجموع متسلسلة صحيحة.

لتكن U مجموعة مفتوحة غيرخالية من المستوي العقدي $\mathbb{C}$. وليكن $f : U \to \mathbb{C}$. نطابق بين المستوي العقدي $\mathbb{C}$ و $\mathbb{R}^2$. عندئذ يُكتب كلُّ عدد عقدي z من U بالشكل $z = x + \mathrm{i}\, y$ و (x, y) عنصرٌ من $\mathbb{R}^2$ ، ومن ثَمّ يمكننا النظر إلى التابع f على أنّه تابع لمتحولين يأخذ قيمه في $\mathbb{R}^2$. في حالة $z = x + \mathrm{i}\, y$ من U، نعرّف $P(x, y)$ بأنّه الجزء الحقيقي للمقدار $f(z)$ ، و $Q(x, y)$ بأنه الجزء التخيلي للمقدار نفسه، أي

$$\forall (x + \mathrm{i}\, y) \in U, \quad f(x + \mathrm{i}\, y) = P(x, y) + \mathrm{i}\, Q(x, y)$$

1-3. مبرهنة. لتكن U مجموعة مفتوحة غير خالية من المستوي العقدي $\mathbb{C}$. وليكن لعنصر $z_0 = x_0 + \mathrm{i}\, y_0$ من U، و $f = P + \mathrm{i}\, Q$ تابعاً عقدياً معرّفاً على U. (انظر الرموز التي سبقت نص المبرهنة) . عندئذ تكون الخاصتان التاليتان متكافئتين.

① التابع f قابل للاشتقاق عند z_0.

② التابع f ، بصفته تابعاً لمتحوّلين، قابلٌ للمفاضلة عند (x_0, y_0)، وتتحقّق المساواتان :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{و} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

(شرطَا **كوشي- ريمان**) .

الإثبات

① ⇐ ② لنفترض أنّ f قابل للاشتقاق عند z_0 ولنلاحظ أنّ هذه الخاصّة تكافئ

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|f(z_0+h+\mathrm{i}\,k)-f(z_0)-(h+\mathrm{i}\,k)f'(z_0)\right|}{|h+\mathrm{i}\,k|}=0$$

فالتابع $(x,y)\overset{\tilde{f}}{\longmapsto} f(x+\mathrm{i}\,y)$ قابل للمفاضلة عند z_0 وتفاضله هو

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,\tilde{f}_{z_0}(h,k)&=(h+\mathrm{i}\,k)f'(z_0)\\&=(h\,\mathrm{Re}\,f'(z_0)-k\,\mathrm{Im}\,f'(z_0))+\mathrm{i}(h\,\mathrm{Im}\,f'(z_0)+k\,\mathrm{Re}\,f'(z_0))\end{aligned}$$

وبالعودة إلى الجزأين الحقيقي والتخيلي P و Q نستنتج أنّهما قابلين للمفاضلة عند (x_0,y_0) وأنّ

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,P_{(x_0,y_0)}&=\mathrm{Re}\,f'(z_0)\cdot\mathrm{d}\,x-\mathrm{Im}\,f'(z_0)\cdot\mathrm{d}\,y\\\mathrm{d}\,Q_{(x_0,y_0)}&=\mathrm{Im}\,f'(z_0)\cdot\mathrm{d}\,x+\mathrm{Re}\,f'(z_0)\cdot\mathrm{d}\,y\end{aligned}$$

وهذا يقتضي وضوحاً شرطَي كوشي-ريمان.

② ⇐ ① نفترض إذن أنّ P و Q قابلَين للمفاضلة عند (x_0,y_0) وأنّ

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,P_{(x_0,y_0)}&=\alpha\cdot\mathrm{d}\,x-\beta\cdot\mathrm{d}\,y\\\mathrm{d}\,Q_{(x_0,y_0)}&=\beta\cdot\mathrm{d}\,x+\alpha\cdot\mathrm{d}\,y\end{aligned}$$

حيث $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)=\alpha$، $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)=\beta$ وذلك بناءً على شرطَي كوشي-ريمان. استناداً إلى تعريف قابليّة المفاضلة لدينا

$$f(z_0+h+\mathrm{i}\,k)-f(z_0)-(\alpha h-\beta k)-\mathrm{i}(\beta h+\alpha k)=\sqrt{h^2+k^2}\;\varepsilon(h,k)$$

و $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$. وهذا يُكافئ قولنا

$$f(z_0+h+\mathrm{i}\,k)-f(z_0)-(\alpha+\mathrm{i}\,\beta)\cdot(h+\mathrm{i}\,k)=\sqrt{h^2+k^2}\;\varepsilon(h,k)$$

أو

$$\frac{f(z_0+h+\mathrm{i}\,k)-f(z_0)}{h+\mathrm{i}\,k}-(\alpha+\mathrm{i}\,\beta)=\frac{\sqrt{h^2+k^2}}{h+\mathrm{i}\,k}\,\varepsilon(h,k)\overset{\text{تعريف}}{=}\varepsilon_1(h+\mathrm{i}\,k)$$

وهذا يبيِّن أنّ

$$\lim_{\zeta\to 0}\Delta_{f,z_0}(\zeta)=\alpha+\mathrm{i}\,\beta$$

والتابع f قابل للاشتقاق عند z_0 ومشتقه معطى بالعلاقة

$$f'(z_0)=\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)+\mathrm{i}\,\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$$ ❐

تفيدنا المبرهنة السابقة، التي توضّح العلاقة بين التوابع العقديّة لمتحوِّل عقدي والتوابع الحقيقية لمتحولين، في استنتاج العديد من خواص التوابع الهولومورفية انطلاقاً من خواص التوابع لعدة متحولات التي درسناها سابقاً. لنذكر على سبيل المثال النتيجة المهمّة التالية:

4-1. **مبرهنة**. لتكن U مجموعة مفتوحة ومترابطة وغير خالية من المستوي العقدي $\mathbb{C}$. وليكن $f:U\to\mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً على U، يُحقِّق

$$\forall z\in U,\ f'(z)=0$$

عندئذ يكون التابع f تابعاً ثابتاً على U.

2. مفهوم اللوغاريتم العقدي

لقد وجدنا في دراستنا السابقة، أنّ التطبيق

$$\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

يُعرِّف تشاكلاً زُمرياً غامراً بين الزمرة $(\mathbb{C},+)$ والزمرة الضربيّة $(\mathbb{C}^*,\times)$ نواته $2\pi\,\mathrm{i}\,\mathbb{Z}$. كما يعرِّف التطبيق $\varphi:\mathbb{R}\to\mathcal{U}=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\right\},\ \theta\mapsto e^{\mathrm{i}\,\theta}$ تشاكلاً زمرياً غامراً بين الزمرة $(\mathbb{R},+)$ و الزمرة $(\mathcal{U},\times)$ نواته هي $2\pi\mathbb{Z}$.

إذا كان z عنصراً من $\mathbb{C}^*$، عرّفنا **عُمدة** z أو **زاوية** z بأنها المجموعة

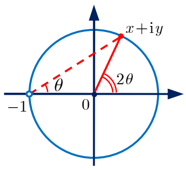
$$\arg(z)=\left\{\theta\in\mathbb{R}:e^{\mathrm{i}\,\theta}=\frac{z}{|z|}\right\}$$

ونلاحظ أنّ

$$\forall z\in\mathbb{C}^*,\ \arg(z)\neq\varnothing$$

وإذا كان θ_0 عنصراً من $\arg(z)$ كان $\arg(z)=\theta_0+2\pi\mathbb{Z}$.

إذا كان z عنصراً من $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$، أسمينا **التعيين الأساسي لزاوية** z العنصر الوحيد في المجموعة $\arg(z)\cap\,]-\pi,\pi[$، ورمزنا إليه بالرمز $\operatorname{Arg}(z)$. ونتحقَّق بسهولة صحةَ المساواة التالية :



$$\operatorname{Arg}(z)=2\arctan\frac{y}{1+x}$$

في حالة $z=x+\mathrm{i}\,y$ من $\mathcal{U}\backslash\{-1\}$.

وأخيراً نذكِّر بأنّ التابع الأسّي تابع تحليلي في $\mathbb{C}$، وأنّ $\exp^{(n)}=\exp$.

2-1. **تعريف**. لتكن z عدداً من $\mathbb{C}^*$. نسمي **لوغاريتم العدد العقدي** z في $\mathbb{C}$، المجموعة

$$\log(z)=\left\{w\in\mathbb{C}: e^{w}=z\right\}$$

ليكن $w=x+\mathrm{i}\,y$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. وليكن z عدداً من $\mathbb{C}^*$. حينئذ يكون

$$e^{w}=z\Leftrightarrow e^{x}\cdot e^{\mathrm{i}\,y}=z=|z|\cdot\frac{z}{|z|}$$

ولمّا كان $e^{x}>0$ و $e^{\mathrm{i}\,y}\in\mathcal{U}$ استنتجنا أنّ

$$w\in\log(z)\Leftrightarrow\left(e^{x}=|z|\right)\wedge\left(y\in\arg(z)\right)$$

أو، لأنّ التابع $x\mapsto\ln x$ ،$\ln:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ تقابلٌ،

$$w\in\log(z)\Leftrightarrow\left(x=\ln|z|\right)\wedge\left(y\in\arg(z)\right)$$

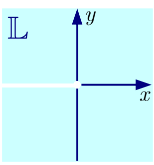
نستنتج من ذلك الخاصّة التالية:

2-2. **مبرهنة**: لتكن z عدداً من $\mathbb{C}^*$. إنّ المجموعة $\log(z)$ غير خالية، وهي تساوي

$$\left\{\ln|z|+\mathrm{i}\theta:\theta\in\arg(z)\right\}$$

أي، مهما تكن θ_0 من $\arg(z)$، يكن

$$\log(z)=\ln|z|+\mathrm{i}\,\theta_0+2\pi\,\mathrm{i}\,\mathbb{Z}$$



لمّا كان التعيين الأساسي لزاوية عدد عقدي غير معرّف إلاّ على المجموعة $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$، ولمّا كانت هذه المجموعة ستؤدي دوراً مهمّاً في دراستنا اللاحقة فإنّنا سنرمز إليها بالرمز $\mathbb{L}$. ومن الواضح أنّ

$$\mathbb{L}=\left\{z\in\mathbb{C}^*:\pi\notin\arg(z)\right\}=\left\{z\in\mathbb{C}^*:\frac{z}{|z|}\neq-1\right\}$$

وحين تكون z عنصراً من $\mathbb{L}$ لدينا $\ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z) \in \log(z)$، ومنه التعريف الآتي :

2-3. تعريف. لتكن z من $\mathbb{L} = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. نسمّي **اللوغاريتم الأساسي** للعدد z العددَ العقدي $\ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)$ ونرمز إليه بالرمز $\mathrm{Log}(z)$، ونسمي التابع

$$\mathrm{Log} : \mathbb{L} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \mathrm{Log}(z)$$

تابع اللوغاريتم الأساسي.

لمّا كان

$$\mathrm{Arg}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+^*$$

استنتجنا أنّ مقصور تابع اللوغاريتم الأساسي على المجموعة $\mathbb{R}_+^*$ يتطابق مع تابع اللوغاريتم الطبيعي $\ln$، أي $\ln = \mathrm{Log}_{|\mathbb{R}_+^*}$.

2-4. مبرهنة. يعرّف تابع اللوغاريتم الأساسي تقابلاً بين المجموعة $\mathbb{L}$ والمجموعة

$$\Lambda = \left\{x + \mathrm{i}\,y : (x,y) \in \mathbb{R} \times \left]-\pi, +\pi\right[\right\}$$

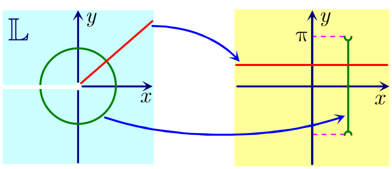
ويكون التابع العكسي هو $\exp_{|\Lambda}$، أي مقصور التابع الأسّي على المجموعة Λ.

الإثبات

نلاحظ أوّلاً أنّ التابع Log متباينٌ لأنّ $\forall z \in \mathbb{L},\ e^{\mathrm{Log}(z)} = z$. ومن جهة أخرى نرى بسهولة، من التعريف، أنّ

$$\forall (x + \mathrm{i}\,y) \in \Lambda,\ \mathrm{Log}(e^{x+\mathrm{i}\,y}) = x + \mathrm{i}\,y$$

وهو المطلوب إثباته. ❐



ويتيقّن القارئ أنّه عندما يتحوّل العدد z على نصف المستقيم المفتوح

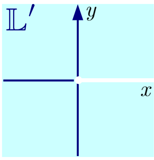
$$D_{\theta_0} = \left\{re^{\mathrm{i}\,\theta_0} : r \in \mathbb{R}_+^*\right\}$$

تَرسم صورتُه $w = \mathrm{Log}(z)$ المستقيمَ $\{w : \mathrm{Im}(w) = \theta_0\}$، وعندما تتحوّل z على الدائرة $C(0,r)$ التي مركزها 0 ونصف قطرها $0 < r$ (محذوفاً منها النقطة $-r$)، فإنّ صورتها $w = \mathrm{Log}(z)$ ترسم المجال المفتوح :

$$\left\{w : (\mathrm{Re}\,w = \ln r) \wedge (\mathrm{Im}\,w \in \left]-\pi, +\pi\right[)\right\}$$

وبملاحظة أنّ $e^{\mathrm{i}\,\pi} = -1$ نحصل على النتيجة التالية :

2-5. **نتيجة**. لتكن $\mathbb{L}' = -\mathbb{L} = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$. عندئذ يعرِّف التابع $z \mapsto \mathrm{Log}(-z) + \mathrm{i}\,\pi$ تقابلاً بين $\mathbb{L}'$ والمجموعة



$$\Lambda' = \{x + \mathrm{i}\,y : (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, 2\pi[\}$$

ويكون التابع العكسي هو $\exp_{|\Lambda'}$، أي مقصور التابع الأسّي على المجموعة Λ'.

2-6. **تعريف**. لتكن Ω مجموعة مفتوحة ومترابطة وغير خالية من $\mathbb{C}^*$. نسمّي **تعييناً مستمرّاً للتابع اللوغاريتمي** على Ω، كلَّ تابع **مستمرٍّ** $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ يُحقِّق

$$\forall z \in \Omega, \quad e^{\varphi(z)} = z$$

ونسمّي **تعييناً مستمرّاً للزاوية** على Ω، كلَّ تابع **مستمرٍّ** $\Theta : \Omega \to \mathbb{R}$ يُحقِّق

$$\forall z \in \Omega, \quad \frac{z}{|z|} = e^{\mathrm{i}\,\Theta(z)}$$

إنّ المفهومين السابقين مرتبطان معاً ارتباطاً وثيقاً، إذْ يكون $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ تعييناً مستمرّاً للتابع اللوغاريتمي على Ω، إذا كان $z \mapsto \mathrm{Im}\,(\varphi(z))$ تعييناً مستمرّاً للزاوية على Ω، ويكون التابع $\Theta : \Omega \to \mathbb{R}$ تعييناً مستمرّاً للزاوية على Ω إذا كان $z \mapsto \ln|z| + \mathrm{i}\,\Theta(z)$ تعييناً مستمرّاً للتابع اللوغاريتميّ على Ω.

2-7. **مبرهنة**. إنّ تابع اللوغاريتم الأساسي Log تعيينٌ مستمرٌّ للتابع اللوغاريتمي على $\mathbb{L}$. وبقول مكافئ إن التابع Arg هو تعيين مستمرٌّ للزاوية على المجموعة $\mathbb{L}$.

الإثبات:

إنّ هذه النتيجة واضحة بملاحظة أنّ

$$\forall z \in \mathbb{L}, \quad \mathrm{Arg}(z) = 2\arctan\frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z + |z|}$$

فالتابع Arg مستمرٌّ على $\mathbb{L}$. ❐

وبناءً على ما سبق نرى أنّ النتيجة التالية واضحة :

2-8. **نتيجة**. إنّ التابع $z \mapsto \mathrm{Log}\,(-z) + \mathrm{i}\,\pi$ تعيينٌ مستمرٌّ للتابع اللوغاريتمي على المجموعة $\mathbb{L}' = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$.

2-9. **مبرهنة**. لتكن Ω مجموعة مفتوحة ومترابطة وغير خالية من $\mathbb{C}^*$. ولنفترض وجود تعيين مستمرٍّ φ للتابع اللوغاريتمي على Ω، عندئذ يكون كلُّ تعيين مستمرٍّ للتابع اللوغاريتمي على Ω، من الصيغة :

$$f_k : \Omega \to \mathbb{C},\ z \mapsto \varphi(z) + 2\pi\,\mathrm{i}\,k \quad \text{حيث } k \text{ عددٌ من } \mathbb{Z}$$

وبقول مُكافئ: إذا وُجِدَ تعيينٌ مستمرٌّ Θ للزاوية على Ω، كان كلُّ تعيين مستمرٍّ للزاوية على Ω من الصيغة :

$$g_k : \Omega \to \mathbb{R},\ z \mapsto \Theta(z) + 2\pi k \quad \text{حيث } k \text{ عددٌ من } \mathbb{Z}.$$

الإثبات

في الحقيقة، يكفي أن نُثبت الجزء الأوّل من المبرهنة. من الواضح أنّ التوابع $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ هي تعيينات للتابع اللوغاريتمي على Ω.

ومن جهة أخرى، إذا كان $f : \Omega \to \mathbb{C}$ تعييناً للتابع اللوغاريتمي على Ω، عرّفنا التابع

$$\lambda : \Omega \to \mathbb{C}, \quad \lambda(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}(f(z) - \varphi(z))$$

إنّ λ تابع مستمرٌّ على Ω ويحقّق الخاصّة

$$\forall z \in \Omega, \quad e^{2\pi\mathrm{i}\lambda(z)} = e^{f(z)-\varphi(z)} = \frac{\exp(f(z))}{\exp(\varphi(z))} = 1$$

وبناءً على هذا يكون

$$\forall z \in \Omega, \quad \lambda(z) \in \mathbb{Z}$$

لنتأمّل الآن عنصراً (a,b) من Ω^2. لمّا كانت Ω مجموعة مفتوحة ومترابطة، استنتجنا وجود طريق من a إلى b محتوى في Ω، أي تابعٍ مستمرٍّ $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ يُحقّق

$$\gamma([0,1]) \subset \Omega \text{ و } \gamma(0) = a \text{ و } \gamma(1) = b$$

وعندها يكون التابع $t \mapsto \lambda \circ \gamma(t)$ تابعاً مستمراً على المجال $[0,1]$ ويأخذ قيمه في $\mathbb{Z}$. فهو إذن تابع ثابتٌ استناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى. وبناءً على هذا يكون

$$\lambda(b) = \lambda \circ \gamma(1) = \lambda \circ \gamma(0) = \lambda(a)$$

بذا يكون التابع λ ثابتاً على Ω أي يوجد k في $\mathbb{Z}$ يُحقّق $\forall z \in \Omega,\ \lambda(z) = k$، وهذا يقتضي صحة المساواة $f = f_k$، ويتم إثبات المطلوب. □

2-10. **ملاحظة**. من الخطأ الاعتقاد بوجود تعيين للتابع اللوغاريتمي، أو للزاوية، على أية مجموعة مفتوحةٍ مترابطةٍ وغير خالية Ω من $\mathbb{C}$.

لنتأمّل على سبيل المثال المجموعة $\Omega = \mathbb{C}^*$، ولنفترض وجود تعيين مستمرّ g للزاوية على Ω، حينئذ يكون $g_{|\mathbb{L}}$ تعييناً مستمراً للزاوية على $\mathbb{L}$. إذن يوجد k في $\mathbb{Z}$ يُحقّق

$$\forall z \in \mathbb{L}, \quad g(z) = \operatorname{Arg}(z) + 2\pi k$$

ينتج من ذلك أنّ

$$\lim_{\substack{z\to -1\\ \operatorname{Im} z<0}} g(z) = (2k-1)\pi \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{z\to -1\\ \operatorname{Im} z>0}} g(z) = (2k+1)\pi$$

وهذا يناقض استمرار g عند النقطة -1.

2-11. **نتيجة**. لتكن Ω مجموعة مفتوحة ومترابطة وغير خالية من $\mathbb{C}^*$. إذا وُجِدَ تعيينان مستمرّان للتابع اللوغاريتمي على Ω، واتفقا في نقطة من Ω كانا متساويين على Ω.

الإثبات

لنفترض أنّ φ و ψ هما تعيينان مستمران للتابع اللوغاريتمي على Ω. عندئذ نستنتج من المبرهنة السابقة وجود عدد صحيح k يُحقّق

$$\forall z \in \Omega, \quad \psi(z) = \varphi(z) + 2\pi \mathrm{i} k$$

ولأنّه، استناداً إلى الفرْض، يوجدُ عددٌ، وليكن z_0 في Ω، يُحقّق $\psi(z_0) = \psi(z_0)$، استنتجنا أنّ $k = 0$ إذن

$$\forall z \in \Omega, \quad \psi(z) = \varphi(z)$$

وهي الخاصّة المرجوّة. ❑

فمثلاً تابع اللوغاريتم الأساسي Log هو التعيين المستمرُّ الوحيد F للتابع اللوغاريتمي على $\mathbb{L}$، الذي يُحقّق $F(1) = 0$. وهو أيضاً التعيين المستمرُّ الوحيد للتابع اللوغاريتمي على $\mathbb{L}$، الذي يكون مقصوره على مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة تماماً مساوياً تابع اللوغاريتم الطبيعي $\ln$.

12-2. مبرهنة

$$\forall z \in D(0,1), \quad \operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

الإثبات

من الواضح أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ يساوي 1، فهي متقاربة على القرص $D(0,1)$ لنرمز بالرمز $f(z)$ إلى مجموع هذه المتسلسلة حين يكون z عنصراً من $D(0,1)$.

نعلم أنّ f هولومورفي على $D(0,1)$ وأنّ

$$\forall z \in D(0,1), \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{n-1} = \frac{1}{1+z}$$

ليكن $\mathcal{D} = D(1,1)$ أي القرص المفتوح الذي مركزه 1 و نصف قطره 1. ولنعرّف

$$\forall z \in \mathcal{D}, \quad \varphi(z) = \frac{1}{z} \cdot \exp(f(z-1))$$

إن φ تابع هولومورفي على $\mathcal{D}$ ويُحقّق

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathcal{D}, \quad \varphi'(z) &= \frac{-1}{z} \cdot \varphi(z) + \frac{1}{z} \exp(f(z-1)) \cdot f'(z-1) \\ &= -\frac{\varphi(z)}{z} + \frac{\varphi(z)}{z} = 0 \end{aligned}$$

فهو إذن تابع ثابتٌ على المجموعة المفتوحة والمترابطة $\mathcal{D}$. ولمّا كان $\varphi(1) = 1$ استنتجنا من ذلك أنّ

$$\forall z \in \mathcal{D}, \quad \exp(f(z-1)) = z$$

فالتابع $z \mapsto f(z-1)$ هو التعيين المستمرُّ الوحيد للتابع اللوغاريتمي على $\mathcal{D}$ الذي يأخذ القيمة 0 عند 1. ولمّا كان $\mathcal{D} \subset \mathbb{L}$ كان $\operatorname{Log}_{|\mathcal{D}}$ أيضاً تعييناً مستمرّاً للتابع اللوغاريتمي على $\mathcal{D}$ يأخذ القيمة 0 عند 1، وينتج من الوحدانيّة أنّ

$$\forall z \in \mathcal{D}, \quad f(z-1) = \operatorname{Log}(z)$$

وهذا يُكافئ الخاصة المطلوبة. ❐

2-13. **مبرهنة**. إنّ تابع اللوغاريتم الأساسي Log تابعٌ تحليلي على $\mathbb{L}$، فهو بوجه خاصّ هولومورفي، ويُحقّق

$$\forall z \in \mathbb{L}, \quad \mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{z}$$

الإثبات

ليكن z_0 عنصراً من $\mathbb{L}$، ولتكن r_0 المسافة بين z_0 و $\mathbb{R}_-$ (أي $r_0 = |\mathrm{Im}\, z_0|$ في حالة $\mathrm{Re}\, z_0 \leq 0$، و $r_0 = |z_0|$ في حالة $\mathrm{Re}\, z_0 > 0$). عندئذ يكون

$$\mathcal{D}_0 = D(z_0, r_0) \subset \mathbb{L}$$

ويكون التابعان $z \mapsto \mathrm{Log}(z)$ و $z \mapsto \mathrm{Log}(z_0) + \mathrm{Log}\left(1 + \frac{z-z_0}{z_0}\right)$ تعيينين مستمرّين للتابع اللوغاريتمي على القرص $\mathcal{D}_0$، وهما يأخذان القيمة نفسها عند z_0. لأنّ

$$\forall z \in \mathcal{D}_0, \ \exp\left(\mathrm{Log}(z_0) + \mathrm{Log}\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)\right) = z_0\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right) = z$$

نستنتج من ذلك صحة المساواة

$$\forall z \in \mathcal{D}_0, \quad \mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(z_0) + \mathrm{Log}\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)$$

ولكن $\left|\frac{z-z_0}{z_0}\right| < 1$ في حالة z من $\mathcal{D}_0$، وهذا يؤدّي، بمُقتضى المبرهنة السابقة، إلى ما يأتي:

$$\forall z \in \mathcal{D}_0, \quad \mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n}(z - z_0)^n$$

بذا نكون قد أثبتنا أنّ التابع Log تحليلي على $\mathbb{L}$، وبوجه خاص هو هولومورفيٌّ على $\mathbb{L}$. ونستنتج من اشتقاق طرفي المساواة $\exp\big(\mathrm{Log}(z)\big) = z$ أنّ

$$\forall z \in \mathbb{L}, \quad \mathrm{Log}'(z_0) = \frac{1}{z} \qquad \square$$

2-14. **نتيجة**. لتكن Ω مجموعة مفتوحة ومترابطة وغير خالية من $\mathbb{C}^*$. وليكن f تعييناً مستمرّاً للتابع اللوغاريتمي على Ω. عندئذ يكون f تابعاً تحليلياً على Ω ويكون

$$\forall z \in \Omega, \quad f'(z) = \frac{1}{z}$$

الإثبات

ليكن z_0 عنصراً من Ω. إذا كان $z_0 \notin \mathbb{R}_-$، كان z_0 عنصراً من المجموعة المفتوحة $\Omega \cap \mathbb{L}$، ووجدنا قرصاً مفتوحاً $\mathcal{D} = D(z_0, r)$ محتوى بالكامل في $\Omega \cap \mathbb{L}$. أمّا في حالة $z_0 \in \mathbb{R}_-^*$، فعندئذ يكون z_0 عنصراً من المجموعة المفتوحة $\Omega \cap \mathbb{L}'$، ووجدنا قرصاً مفتوحاً $\mathcal{D} = D(z_0, r)$ محتوى بالكامل في $\Omega \cap \mathbb{L}'$. (تذكّر أنّ $\mathbb{L}' = -\mathbb{L} = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_+$).

- في حالة $\mathcal{D} \subset \mathbb{L}$، يكون التابعان $f_{|\mathcal{D}}$ و $\mathrm{Log}_{|\mathcal{D}}$ تعيينين مستمرّين للتابع اللوغاريتمي على $\mathcal{D}$ فهما يختلفان بثابت على $\mathcal{D}$.
- وفي حالة $\mathcal{D} \subset \mathbb{L}'$ يكون التابعان $f_{|\mathcal{D}}$ و $z \mapsto \mathrm{Log}(-z) + \mathrm{i}\,\pi$ أيضاً تعيينين مستمرّين للتابع اللوغاريتمي على $\mathcal{D}$ ومن ثَمّ يختلفان فقط بثابت على $\mathcal{D}$.

ولمّا كانت الخاصّة المطلوبة خاصّة محليّة، (أي يكفي تحقُّقها في جوار كلّ نقطة من Ω حتى تتحقَّق على كامل Ω)، فإنّ المناقشة السابقة تبيِّن أنّه يكفي لإثبات المطلوب أن يُحقّق تابع اللوغاريتم الأساسي Log الخاصّة المرجوّة. ويكتمل الإثبات بناءً على المبرهنة 2-13.. ❐

2-15. **تعريف – تابع القوّة**. ليكن α عدداً عقديّاً. نعرّف تابع **الرفع إلى الأس** α بأنّه التابع

$$\mathcal{P}_\alpha : \mathbb{L} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^\alpha \overset{\text{تعريف}}{=} \exp(\alpha \,\mathrm{Log}(z))$$

في حالة $\alpha \in \mathbb{R}$ نرى بجلاء أنّ مقصور التابع $\mathcal{P}_\alpha$ على $\mathbb{R}_+^*$ هو تابع الرفع إلى الأس α المألوف. لنبحث كيف تنتقل خواص ذلك التابع الحقيقي إلى هذا التابع المعرّف في الساحة العقديّة.

- مهما تكن (α, β) من $\mathbb{C}^2$ ومهما تكن z من $\mathbb{L}$ فإنّ $z^{\alpha+\beta} = z^\alpha \cdot z^\beta$. وذلك لأنّ

$$\begin{aligned}\exp(\alpha \,\mathrm{Log}\, z) \times \exp(\beta \,\mathrm{Log}\, z) &= \exp(\alpha \,\mathrm{Log}\, z + \beta \,\mathrm{Log}\, z)\\ &= \exp((\alpha+\beta)\,\mathrm{Log}\, z) = z^{\alpha+\beta}\end{aligned}$$

وبوجه خاصّ $1 = z^0 = z^\alpha \cdot z^{-\alpha}$ وذلك أياً كان z من $\mathbb{L}$.

- في الحالة الخاصّة الموافقة لأسّ صحيح α من $\mathbb{Z}$ نرى، إذا كان $\alpha > 0$، أنّه

$$z^\alpha = \exp(\mathrm{Log}\, z) \times \cdots \times \exp(\mathrm{Log}\, z) = \underbrace{z \times \cdots \times z}_{\alpha}$$

وإذا كان $\alpha = 0$ فإنّ $z^0 = 1$ ، وأخيراً حين يكون $\alpha < 0$ ، فإنّ $z^\alpha = \dfrac{1}{z^{-\alpha}}$.
فالتابع $\mathcal{P}_\alpha$ يتطابق مع المقصور على $\mathbb{L}$ للتابع $z \mapsto z^n$ المعرّف بأسلوب تقليدي على $\mathbb{C}$ في حالة $n \in \mathbb{N}$ ، وعلى $\mathbb{C}^*$ في حالة $n \in -\mathbb{N}^*$.

- إنّ التابع $\mathcal{P}_\alpha$ هولومورفي على $\mathbb{L}$ ، لأنه ناتج تركيب توابع هولومورفيّة، ولدينا

$$\begin{aligned}\mathcal{P}'_\alpha(z) &= \exp'(\alpha \operatorname{Log} z)\cdot(\alpha \operatorname{Log} z)'\\ &= \frac{\alpha}{z}\cdot z^\alpha = \alpha \cdot z^{\alpha-1} = \alpha\cdot\mathcal{P}_{\alpha-1}(z)\end{aligned}$$

وذلك أياً كانت z من $\mathbb{L}$. ونستنتج من ذلك أنّ هذا التابع يقبل الاشتقاق عدداً لانهائياً من المرات، وأنّه في حالة n من $\mathbb{N}^*$ و z من $\mathbb{L}$ لدينا

$$(\mathcal{P}_\alpha)^{(n)}(z) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\cdot z^{\alpha-n}$$

16-2. مبرهنة : لتكن α من $\mathbb{C}$. عندئذ

$$\forall z \in D(0,1),\quad (1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n$$

الإثبات

إنّ حالة α من $\mathbb{N}$ ، توافق دستور ثنائي الحد لنيوتن وهي حالة تافهة. سنفترض إذن أنّ $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$. نترك للقارئ أن يتيقّن بسهولة أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة المدروسة يساوي الواحد، فهي متقاربة في القرص المفتوح $D(0,1)$.

نعرِّف إذن التابع التحليلي

$$f : D(0,1) \to \mathbb{C}, z \mapsto 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n$$

ونلاحظ بالحساب المباشر أنّه، مهما تكن z من $D(0,1)$ ، فلدينا

$$\begin{aligned}(1+z)f'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} z^n\\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} z^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} z^n\\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(\alpha-n+n)z^n = \alpha\cdot f(z)\end{aligned}$$

لنتأمّل إذن التابع الهولومورفي Φ الآتي:

$$\Phi : D(0,1) \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) \cdot (1+z)^{-\alpha}$$

نلاحظ من جهة أولى أنّ $\Phi(0) = 1$ ومن جهة ثانية أنّ

$$\begin{aligned} \Phi'(z) &= f'(z) \cdot (1+z)^{-\alpha} + f(z) \cdot (-\alpha) \cdot (1+z)^{-\alpha-1} \\ &= f'(z) \cdot (1+z)^{-\alpha} - f'(z) \cdot (1+z) \cdot (1+z)^{-\alpha-1} = 0 \end{aligned}$$

وذلك أياً كان z من $D(0,1)$. فالتابع Φ ثابت ويساوي 1 على المجموعة $D(0,1)$. نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall z \in D(0,1), \quad f(z) = (1+z)^{\alpha}$$

وهذا هو المطلوب إثباته. ❐

2-17. نتيجة. لتكن α من $\mathbb{C}$. عندئذ يكون تابع القوّة $\mathcal{P}_\alpha$ تحليلياً على $\mathbb{L}$.

الإثبات

ليكن z_0 عنصراً من $\mathbb{L}$. لقد بيّنّا في سياق إثبات المبرهنة 2-13. أنّه يوجد عدد حقيقي r_0 يحقّق الشرطين $0 < r_0 \le |z_0|$ و $D(z_0, r_0) \subset \mathbb{L}$ ويكون

$$\forall z \in D(z_0, r_0),\ \ \operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(z_0) + \operatorname{Log}\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)$$

وعندها، أياً كانت z من $D(z_0, r_0)$، فلدينا

$$\begin{aligned} z^{\alpha} &= \exp(\alpha \operatorname{Log} z_0) \exp\left(\alpha \operatorname{Log}\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)\right) \\ &= z_0^{\alpha}\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)^{\alpha} \end{aligned}$$

ولمّا كان

$$\forall z \in D(z_0, r_0), \qquad \left|\frac{z - z_0}{z_0}\right| < 1$$

استنتجنا، استناداً إلى المبرهنة السابقة، أنّه مهما تكن z من $D(z_0, r_0)$، فلدينا

$$z^{\alpha} = z_0^{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z_0^{\alpha-n} (z - z_0)^n$$

بذا نكون قد أثبتنا أنّ التابع $\mathcal{P}_\alpha$ تحليلي على $\mathbb{L}$. ❐

☜ في هذه الفقرات التالية نطابق، كما فعلنا سابقاً، بين المستوي العقديّ $\mathbb{C}$ والفضاء الشعاعي الحقيقي $\mathbb{R}^2$.

3. تكامل تابع عقدي على طريق

3-1. تعريف. لتكن U مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن $f : U \to \mathbb{C}$ تابعاً عقدياً مستمراً، وأخيراً ليكن Γ طريقاً من الصف C^1 قِطَعيّاً محتوى في U، ومعطى بالتمثيل الوسيطي $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}, \varphi(t) = x(t) + \mathrm{i}\, y(t)$. عندئذ نضع بالتعريف

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

لاحظ أنّ التابع $t \mapsto \varphi'(t)$ قد لا يكون معرّفاً عند عدد منته من نقاط المجال $[a,b]$، ولكن يمكن تمديده إلى تابع مستمرٍّ قِطَعيّاً على $[a,b]$، وهذا ما أتاح لنا وضع التعريف السابق.

في الحقيقة، إذا عرّفنا، أياً كانت $z = x + \mathrm{i}\, y$ من U، المقدارين $P(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z)$ و $Q(x,y) = \mathrm{Im}\, f(z)$، كان لدينا

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f\circ\varphi)\varphi' &= \int_a^b \big(P(x,y) + \mathrm{i}\,Q(x,y)\big)\cdot(x' + \mathrm{i}\,y')\\
&= \int_a^b \big(P(x,y)x' - Q(x,y)y'\big) + \mathrm{i}\int_a^b \big(Q(x,y)x' + P(x,y)y'\big)\\
&= \int_\Gamma \big(P(x,y)\mathrm{d}x - Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y\big) + \mathrm{i}\int_\Gamma \big(Q(x,y)\mathrm{d}x + P(x,y)\,\mathrm{d}\,y\big)
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ إذا عرّفنا انطلاقاً من f الشكلين التفاضليَّيْن من المرتبة الأولى $\omega^{\Re}$ و $\omega^{\Im}$ بالعلاقتين:

$$\begin{aligned}
\omega^{\Re}_{(x,y)} &= P(x,y)\,\mathrm{d}\,x - Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y\\
\omega^{\Im}_{(x,y)} &= Q(x,y)\,\mathrm{d}\,x + P(x,y)\,\mathrm{d}\,y
\end{aligned}$$

صار لدينا بالتعريف

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_\Gamma \omega^{\Re} + \mathrm{i}\int_\Gamma \omega^{\Im}$$ ⌘

وبناءً على هذا نرى أنّ التكاملين $\mathrm{Re}\left(\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z\right)$ و $\mathrm{Im}\left(\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z\right)$ هما تكاملان لشكلين تفاضليين من المرتبة الأولى على الطريق Γ، ومن ثَمَّ يُمكننا الاستفادة من المبرهنات العامّة المتعلّقة بالأشكال التفاضليّة من المرتبة الأولى التي درسناها عند دراسة التوابع لعدّة متحولات.

وأخيراً يمكننا تبرير الرمز $f(z)\,\mathrm{d}\,z$ بوضع $\mathrm{d}\,z = \mathrm{d}\,x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}\,y$ تعريفاً، فيكون لدينا حينئذ

$$f(z)\,\mathrm{d}\,z = \big(P(x,y) + \mathrm{i}\,Q(x,y)\big)\cdot(\mathrm{d}\,x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}\,y) = \omega^{\Re}_{(x,y)} + \mathrm{i}\,\omega^{\Im}_{(x,y)}$$

وهذا منسجم تماماً مع العلاقة ⌘.

3-2. مبرهنة. لتكن U مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن $f : U \to \mathbb{C}$ تابعاً عقدياً مستمراً، وأخيراً ليكن Γ طريقاً من الصف C^1 قِطَعيّاً محتوى في U. عندئذ

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \le \sup_\Gamma |f| \cdot L(\Gamma)$$

حيث $L(\Gamma)$ هو طول الطريق Γ[†]، و $\sup_\Gamma |f|$ هو الحد الأعلى للتابع المستمر f على المجموعة المتراصّة Γ.

الإثبات

ليكن $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ تمثيلاً وسيطياً من الصف C^1 قِطَعيّاً للطريق Γ. في الحالة التي يكون فيها $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$، لا يوجد ما يجب إثباته.

لنفترض إذن أنّ $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z \ne 0$، ولنعرّف θ العدد الحقيقي الذي يُحقّق

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = \left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \cdot e^{\mathrm{i}\theta}$$

عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned}\left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| &= \mathrm{Re}\left(\int_a^b e^{-\mathrm{i}\theta} f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\\ &= \int_a^b \mathrm{Re}\big(e^{-\mathrm{i}\theta} f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\big)\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

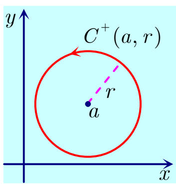
[†] إذا كان $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ تمثيلاً وسيطياً من الصف C^1 قِطَعيّاً للطريق Γ كان $L(\Gamma) = \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}\,t$.

ومنه

$$\begin{aligned}\left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| &\le \int_a^b \left|e^{-\mathrm{i}\theta} f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\right|\mathrm{d}t\\ &\le \int_a^b \left|f\circ\varphi(t)\right|\cdot\left|\varphi'(t)\right|\mathrm{d}t \le \sup_\Gamma|f|\cdot\int_a^b\left|\varphi'(t)\right|\mathrm{d}t\\ &\le \sup_\Gamma|f|\cdot L(\Gamma)\end{aligned}$$

وهذه هي المتراجحة المطلوبة. ❑

3-3. أمثلة :



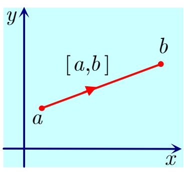
❖ إذا كان $a\in\mathbb{C}$ و $0<r$ فإنّ

$$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C},\ \gamma(t)=a+re^{\mathrm{i}t}$$

هو التمثيل الوسيطي **للدائرة** التي مركزها a ونصف قطرها $0<r$ موجّهة بالاتجاه الموجب.

نرمز عادة إلى الطريق المغلق $\gamma([0,2\pi])$ بالرمز $C^+(a,r)$. نلاحظ أنّ طول هذا الطريق يساوي $2\pi r$ كما هو متوقّع. وإذا كانت U مجموعة مفتوحة تحوي $C^+(a,r)$، وكان $f:U\to\mathbb{C}$ تابعاً عقدياً مستمراً، كان

$$\int_{C^+(a,r)} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}r\int_0^{2\pi} f\left(a+re^{\mathrm{i}\theta}\right)e^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$$



❖ إذا كان (a,b) عنصراً من $\mathbb{C}^2$ كان

$$\gamma:[0,1]\to\mathbb{C},\ \gamma(t)=a(1-t)+bt$$

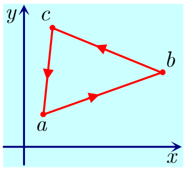
هو التمثيل الوسيطي **للقطعة المستقيمة** التي بدايتها a ونهايتها b موجّهة من a إلى b.

ولقد رمزنا سابقاً إلى الطريق المغلق $\gamma([0,1])$ بالرمز $[a,b]$. نلاحظ أنّ طول هذا الطريق يساوي $|b-a|$. وإذا كانت U مجموعة مفتوحة تحوي $[a,b]$ وكان $f:U\to\mathbb{C}$ تابعاً عقدياً مستمراً، كان

$$\int_{[a,b]} f(z)\,\mathrm{d}z = (b-a)\int_0^1 f(a+t(b-a))\,\mathrm{d}t$$

❖ إذا كانت (a,b,c) عنصراً من $\mathbb{C}^3$ فإننا نرمز بالرمز $\Delta(a,b,c)$ إلى **المثلث** الذي رؤوسه هي النقاط a و b و c أي أصغر مجموعة محدّبة تحوي هذه النقاط :

$$\Delta(a,b,c)=\left\{\lambda a+\mu b+\nu c:(\lambda,\mu,\nu)\in[0,1]^3\,:\,\lambda+\mu+\nu=1\right\}$$



وعندئذ نرمز بالرمز $\partial\Delta(a,b,c)$ إلى الطريق الموجّه المكوَّن من محيط هذا المثلّث أي إلى الطريق $\gamma:[0,3]\to\mathbb{C},$ من الصف C^1 قِطَعيّاً المعطى بالتمثيل الوسيطي التالي :

$$\gamma(t)=\begin{cases}a+t(b-a) & : \ 0\le t\le 1\\ b+(t-1)(c-b) & : \ 1\le t\le 2\\ c+(t-2)(a-c) & : \ 2\le t\le 3\end{cases}$$

أو يمكننا أنّ نعرّف $\partial\Delta(a,b,c)$ بأن نكتب تجاوزاً

$$\partial\Delta(a,b,c)=[a,b]\cup[b,c]\cup[c,a]$$

ويتوثّق القارئ بسهولة أنّ $\displaystyle\int_{\partial\Delta(a,b,c)} f(z)\,\mathrm{d}\,z$ لا يتغيَّر عند إجراء تبديل دائري على النقط a و b و c، في حين يكون

$$\int_{\partial\Delta(a,b,c)} f(z)\,\mathrm{d}\,z=-\int_{\partial\Delta(a,c,b)} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

4. دليل نقطة بالنسبة إلى طريق

4-1. تعريف. ليكن Γ طريقاً **مغلقاً** من الصف C^1 قِطعيّاً في $\mathbb{C}$. وليكن ω عنصراً من $\mathbb{C}$ **لا** ينتمي إلى Γ. نسمّي **دليل ω بالنسبة إلى** Γ العدد $\mathrm{Ind}(\omega,\Gamma)$ المعرّف بالتكامل

$$\mathrm{Ind}(\omega,\Gamma)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{\mathrm{d}\,z}{z-\omega}$$

تلخِّص المبرهنة التالية بعض أهمّ خواص دليل منحن مغلق.

4-2. **مبرهنة**. ليكن Γ طريقاً مغلقاً من الصف C^1 قِطَعيّاً في $\mathbb{C}$، ولتكن $\Omega=\mathbb{C}\backslash\Gamma$. عندئذ تتحقَّق الخواص التالية :

① يأخذ التابع $\operatorname{Ind}(\omega,\Gamma)\ \omega\mapsto$ قيمه في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$.

② التابع $\operatorname{Ind}(\omega,\Gamma)\ \omega\mapsto$ ثابتٌ على كلِّ مركّبة مترابطة في المجموعة المفتوحة Ω.

③ التابع $\operatorname{Ind}(\omega,\Gamma)\ \omega\mapsto$ معدومٌ على المركّبة المترابطة غير المحدودة في Ω.

الإثبات

① ليكن $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C},\ t\mapsto\gamma(t)$ تمثيلاً وسيطياً من الصف C^1 قِطعيّاً للطريق Γ. عندئذ يكون

$$\operatorname{Ind}(\omega,\Gamma)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_a^b\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-\omega}\,\mathrm{d}\,t$$

إذ مدَّدنا التابع $\gamma'(t)\ t\mapsto$ ليصبح مستمرّاً قِطَعيّاً على $[a,b]$.

ليكن ω عنصراً من Ω، ولنعرّف التابع

$$\varphi:[a,b]\to\mathbb{C},\quad \varphi(t)=\exp\left(\int_a^t\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-\omega}\,\mathrm{d}\,s\right)$$

فيكون φ تابعاً مستمراً على $[a,b]$ وقابلاً للاشتقاق على $\operatorname{cont}(\gamma')$ أي نقاط استمرار التابع γ' التي تساوي المجال $[a,b]$ محذوفاً منه عدداً منتهياً من النقاط هي نقاط انقطاع التابع γ' في حال وجودها. ويكون لدينا

$$\forall t\in\operatorname{cont}(\gamma'),\quad \varphi'(t)=\varphi(t)\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-\omega}$$

أو

$$\forall t\in\operatorname{cont}(\gamma'),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-\omega}\right)=0$$

نستنتج من ذلك أنّ التابع $t\mapsto\dfrac{\varphi(t)}{\gamma(t)-\omega}$ تابعٌ مستمرٌ على $[a,b]$، ويأخذ عدداً منتهياً من القيم، (لأنّه ثابت على كلِّ مجال من $\operatorname{cont}(\gamma')$)، فهو إذن تابعٌ ثابتٌ.

ومنه

$$\forall t \in [a,b], \quad \varphi(t) = \frac{\gamma(t)-\omega}{\gamma(a)-\omega}$$

ولما كان Γ طريقاً مغلقاً، استنتجنا أنّ $\gamma(b) = \gamma(a)$ وبناءً عليه يكون $\varphi(b) = 1$. أي

$$\exp(2\pi \mathrm{i}\ \mathrm{Ind}(\omega,\Gamma)) = 1$$

وهذا يقتضي أنّ $\mathrm{Ind}(\omega,\Gamma) \in \mathbb{Z}$، ويُثبتُ النقطة الأولى.

② ليكن ω_0 عنصراً من Ω، لما كانت Ω مجموعة مفتوحة، (لأنها متمّمة المجموعة المتراصّة $\Gamma = \gamma([a,b])$)، وجدنا $0 < \rho$ يُحقّق $D(\omega_0, 2\rho) \subset \Omega$. وحينئذ يكون لدينا في حالة ω من $D(\omega_0,\rho)$ ما يلي :

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Ind}(\omega,\Gamma) - \mathrm{Ind}(\omega_0,\Gamma)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_\Gamma \left(\frac{1}{z-\omega} - \frac{1}{z-\omega_0}\right)\mathrm{d}\,z\right| \\
&\leq \frac{L(\Gamma)}{2\pi}\cdot \sup_{z\in\Gamma}\left|\frac{\omega-\omega_0}{(z-\omega)(z-\omega_0)}\right| \\
&\leq |\omega-\omega_0|\cdot\frac{L(\Gamma)}{2\pi\rho^2}
\end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ استمرار التابع $\mathrm{Ind}(\omega,\Gamma) \mapsto \omega$ على Ω. فإذا كانت V مركّبة مترابطة في Ω وجب أن تكون صورتها وفق التابع المستمر $\omega \mapsto \mathrm{Ind}(\omega,\Gamma)$ مجالاً من $\mathbb{R}$، ووجب أن تكون هذه الصورة محتواة في $\mathbb{Z}$ بناءً على ما سبق. إذن لا بُد أن تكون هذه الصورة مكوّنة من نقطة واحدة. فالتابع $\omega \mapsto \mathrm{Ind}(\omega,\Gamma)$ ثابتٌ على V.

③ وأخيراً، لمّا كانت المجموعة Γ مجموعة متراصّة وجدنا عدداً $0 < R$ يُحقّق الشرط $\Gamma \subset \bar{D}(0,R)$، وهذا يُبيّنُ أنّ Ω تحوي المجموعة المترابطة $\mathbb{C}\backslash\bar{D}(0,R)$، ويُثبتُ أنّ للمجموعة Ω مركّبةً مترابطة وحيدة غير محدودة U وهي تحوي المجموعة $\mathbb{C}\backslash\bar{D}(0,R)$.

لنعرّف $M = 2R + L(\Gamma)$ عندئذ يتحقّق، في حالة $\omega \in \mathbb{C}$، الاقتضاء الآتي

$$|\omega| \geq M \Rightarrow |\mathrm{Ind}(\omega,\Gamma)| \leq \frac{L(\Gamma)}{2\pi}\cdot\sup_{z\in\Gamma}\left|\frac{1}{z-\omega}\right| < \frac{L(\Gamma)}{R+L(\Gamma)} < 1$$

ولمّا كان $\mathrm{Ind}(\omega,\Gamma)$ $\omega \mapsto$ يأخذ قيمه في $\mathbb{Z}$ استنتجنا أنّ

$$\forall \omega \in \mathbb{C}, \quad |\omega| \geq M \Rightarrow \mathrm{Ind}(\omega,\Gamma) = 0$$

وأخيراً لأنّ التابع $\omega \mapsto \mathrm{Ind}(\omega,\Gamma)$ ثابتٌ على U، ومعدوم على المجموعة $\mathbb{C}\setminus D(0,M)$ المحتواة في U استنتجنا أنّ $\omega \mapsto \mathrm{Ind}(\omega,\Gamma)$ يساوي الصفر على U. ❐

3-4. نتيجة. لتكن $C^+(a,r)$ الدائرة التي مركزها a ونصف قطرها $0 < r$ موجّهة بالاتجاه الموجب. عندئذ يكون

$$\mathrm{Ind}(\omega, C^+(a,r)) = \begin{cases} 1 & : \ |\omega - a| < r \\ 0 & : \ |\omega - a| > r \end{cases}$$

الإثبات

في الحقيقة، إنّ للمجموعة $\Omega = \mathbb{C}\setminus C^+(a,r)$ مركّبتين مترابطتين هما القرص المفتوح $D(a,r)$ ومتمّمة القرص المغلق $\bar{D}(a,r)$ أي $\mathbb{C}\setminus\bar{D}(a,r)$.

ولمّا كانت $\mathbb{C}\setminus\bar{D}(a,r)$ هي المركّبة المترابطة غير المحدودة في Ω، استنتجنا أنّ

$$\mathrm{Ind}(\omega, C^+(a,r)) = 0$$

حين يكون $|\omega - a| > r$.

ومن جهة أخرى لمّا كان $\mathrm{Ind}(\omega,\Gamma)$ $\omega \mapsto$ ثابتاً على $D(a,r)$ استنتجنا أنّ

$$\forall \omega \in D(a,r), \ \ \mathrm{Ind}(\omega, C^+(a,r)) = \mathrm{Ind}(a, C^+(a,r))$$

ثُمّ نحصل على النتيجة المطلوبة بملاحظة أنّ

$$\mathrm{Ind}(a, C^+(a,r)) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C^+(a,r)} \frac{\mathrm{d}\, z}{z - a} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{r\, \mathrm{i}\, e^{\mathrm{i}\theta}}{a + re^{\mathrm{i}\theta} - a} \mathrm{d}\, \theta = 1$$

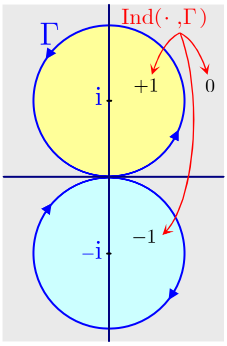
وهي الخاصّة التي أعلنّا عنها. ❐

نستنتج مما سبق بسهولة أنّ

$$\mathrm{Ind}(\omega, C^-(a,r)) = \begin{cases} -1 & : \ |\omega - a| < r \\ 0 & : \ |\omega - a| > r \end{cases}$$

حين تكون $C^-(a,r)$ هي الدائرة التي مركزها a ونصف قطرها r موجّهة بالاتجاه السالب.

4-4. أمثلة :



❖ ليكن Γ الطريق المغلق المعطى بالمنحني الوسيطي التالي :

$$\gamma : [-\pi, +\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = 2e^{i|t|}\sin t$$

نلاحظ بحساب بسيط أنّ

$$\gamma(t) = \begin{cases} -i + i\,e^{-2it} & : \ t \in [-\pi, 0] \\ +i - i\,e^{+2it} & : \ t \in [0, +\pi] \end{cases}$$

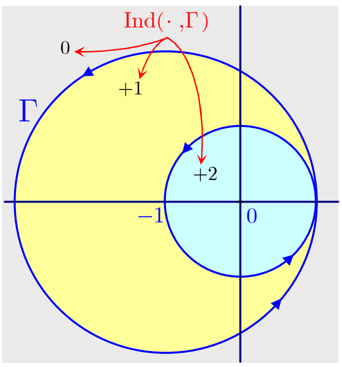
وهذا يتيح لنا أن نكتب

$$\Gamma = C^{+}(+i, 1) \cup C^{-}(-i, 1)$$

ونترك القارئ يتيقّن أنّ دليل الطريق Γ يأخذ القيم المبيّنة في الشكل المجاور على المركّبات المترابطة الثلاث للمجموعة $\mathbb{C}\backslash\Gamma$.

❖ ليكن Γ الطريق المغلق المعطى بالمنحني الوسيطي

$$\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = e^{it} + \left\lfloor \frac{t}{2\pi} \right\rfloor \cdot (e^{it} - 1)$$



و $\lfloor x \rfloor$ هو الجزء الصحيح للعدد x.

نلاحظ بحساب بسيط أنّ

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{it} & : \ t \in [0, 2\pi] \\ -1 + 2e^{it} & : \ t \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

وهذا يتيح لنا أن نكتب

$$\Gamma = C^{+}(0, 1) \cup C^{+}(-1, 2)$$

ويتيقّن القارئ أنّ دليل الطريق Γ يأخذ القيم المبيّنة في الشكل المجاور على المركّبات المترابطة الثلاث للمجموعة $\mathbb{C}\backslash\Gamma$.

☜ وبوجه عام، إنّ التعريف الذي وضعناه للمقدار $\mathrm{Ind}(\omega, \Gamma)$ هو الصياغة الرياضيّة الدقيقة لما يمكن أن نسميّه العدد الجبريّ للمرات التي يلتف فيها الطريق Γ حول النقطة ω.

5. تكامل التوابع الهولومورفيّة على طريق

5-1. مبرهنة. لتكن Ω مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{C}$. وليكن $F:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً على Ω. نفترض أنّ F' تابعٌ مستمرٌّ على Ω، عندئذ يكون

$$\int_\Gamma F'(z)\,\mathrm{d}\,z=0$$

وذلك مهما يكن Γ طريقاً مغلقاً من الصف C^1 قِطَعِيّاً محتوى في Ω.

الإثبات

ليكن $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ تمثيلاً وسيطياً من الصف C^1 قِطَعِيّاً للمنحني Γ. عندئذ يكون

$$\int_\Gamma F'(z)\,\mathrm{d}\,z=\int_a^b F'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

ولكنّ التابع $G:[a,b]\to\mathbb{C},\ t\mapsto F\circ\gamma$ تابع مستمرٌّ، وقابل للاشتقاق عند كلِّ نقطة t يكون فيها التابع γ قابلاً للاشتقاق وتتحقّق عندها المساواة

$$G'(t)=F'(\gamma(t))\gamma'(t)$$

نستنتج من ذلك أنّ G تابع أصليّ للتابع المستمر قِطَعِيّاً $t\mapsto F'(\gamma(t))\gamma'(t)$. ولأن $\gamma(a)=\gamma(b)$ نجد

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F'(z)\,\mathrm{d}\,z&=\int_a^b F'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}\,t\\&=\Big[G(t)\Big]_a^b=F(\gamma(b))-F(\gamma(a))=0\end{aligned}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ❐

5-2. ملاحظة. يمكننا استنتاج المبرهنة السابقة بملاحظة أنّ

$$\int_\Gamma F'(z)\,\mathrm{d}\,z=\int_\Gamma \mathrm{d}\,P+\mathrm{i}\int_\Gamma \mathrm{d}\,Q$$

إذا كان P و Q هما التابعان الحقيقيان المعرّفان بالعلاقة

$$F(x+\mathrm{i}\,y)=P(x,y)+\mathrm{i}\,Q(x,y)$$

5-3. أمثلة

- مهما يكن Γ طريقاً مغلقاً من الصف C^1 قِطَعِيّاً ومحتوى في $\mathbb{C}$ فلدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{\Gamma} z^n \,\mathrm{d}\, z = 0$$

يكفي أن نطبّق المبرهنة السابقة على التابع الهولومورفي $F(z) = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$.

- مهما يكن Γ طريقاً مغلقاً من الصف C^1 قِطَعِيّاً ومحتوى في $\mathbb{C}^*$ فلدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{\Gamma} z^{-2-n} \,\mathrm{d}\, z = 0$$

يكفي أن نطبّق المبرهنة السابقة على التابع الهولومورفي $F(z) = -\dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{1}{z^{n+1}}$.

5-4. مبرهنة : لتكن Ω مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{C}$، ولتكن ω من Ω. وأخيراً ليكن $f : \Omega \to \mathbb{C}$ تابعاً مستمراً على Ω وهولومورفياً على $\Omega \backslash \{\omega\}$. عندئذ يكون

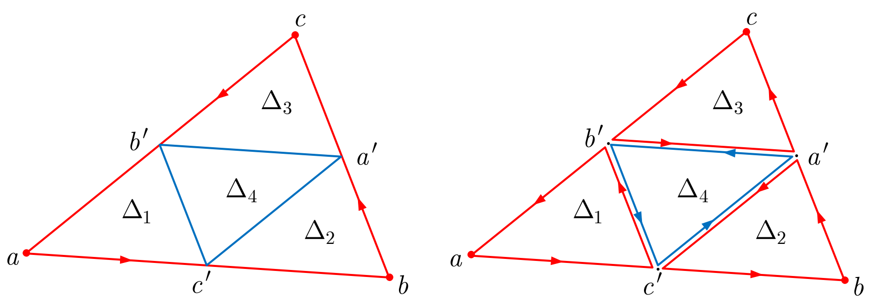
$$\int_{\partial \Delta(a,b,c)} f(z) \,\mathrm{d}\, z = 0$$

وذلك أياً كان المثلّث $\Delta(a,b,c)$ (راجع الأمثلة في 3-3.) المحتوى في Ω.

الإثبات

- ليكن $\Delta = \Delta(a,b,c)$ مثلّثاً محتوى في Ω. ولنفترض أوّلاً أنّ ω تقع خارج هذا المثلّث.

لنعرّف a' و b' و c' منتصفات القطع المستقيمة $[b,c]$ و $[c,a]$ و $[a,b]$ على الترتيب، ثُمّ لنتأمّل المثلثات الأربعة الناتجة عن ذلك $\Delta_1 = \Delta(a,c',b')$ و $\Delta_2 = \Delta(b,a',c')$ و $\Delta_3 = \Delta(c,b',a')$ و $\Delta_4 = \Delta(a',b',c')$.



فإذا كان $\int_{\partial\Delta(a,b,c)} f(z)\,\mathrm{d}\,z$ $J =$ استنتجنا أنّ

$$J = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta_k} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

وبناءً على هذا لا بد أن تكون واحدة على الأقل من القيم $\left(\left|\int_{\partial\Delta_k} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|\right)_{1\leq k\leq 4}$ أكبر أو تساوي $\left|\frac{J}{4}\right|$، لنرمز إذن بالرمز $\Delta^{(1)}$ إلى مثلث من بين المثلثات $(\Delta_k)_{1\leq k\leq 4}$ يُحقِق

$$\left|J\right| \leq 4\left|\int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|$$

نكرِّر المناقشة السابقة، انطلاقاً من $\Delta^{(1)}$ عوضاً عن Δ، فنحصل على مثلّث $\Delta^{(2)}$ يُحقِّق $\Delta^{(2)} \subset \Delta^{(1)}$ وكذلك

$$\left|\int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \leq 4\left|\int_{\partial\Delta^{(2)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|$$

وبالتدريج نبني متتالية من المثلثات $\left(\Delta^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تحقّق الشروط التالية :

① $\Delta^{(0)} = \Delta(a,b,c)$.

② $\forall n\in\mathbb{N},\quad \Delta^{(n+1)} \subset \Delta^{(n)}$.

③ $\forall n\in\mathbb{N},\quad L(\partial\Delta^{(n+1)}) = \dfrac{1}{2}L(\partial\Delta^{(n)})$.

④ $\forall n\in\mathbb{N},\quad \left|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \leq 4\left|\int_{\partial\Delta^{(n+1)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|$.

وينتج من ذلك أنّ

❸ $\forall n\in\mathbb{N},\quad L(\partial\Delta^{(n)}) = 2^{-n}L(\partial\Delta)$.

❹ $\forall n\in\mathbb{N},\quad \left|J\right| \leq 4^n\left|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|$.

لتكن z_n نقطة ما من $\Delta^{(n)}$. إنّ المتتالية $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تُحقِّق شرط كوشي في $\mathbb{C}$. لأنّ

$$\begin{aligned}\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2,\quad n>m \quad &\Rightarrow (z_n,z_m)\in(\Delta^{(m)})^2\\ &\Rightarrow \left|z_n - z_m\right| \leq L(\partial\Delta^{(m)}) = 2^{-m}L(\partial\Delta)\end{aligned}$$

إذ استخدمنا خاصّة هندسيّة بسيطة، وهي أنّ المسافة بين أية نقطتين واقعتين داخل مثلّث أصغرُ من محيطه (في الحقيقة، نصف المحيط ولكن لا نحتاج إلى هذه الدقّة)، ونترك إثبات ذلك للقارئ.

نستنتج إذن تقارب المتتالية $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عنصر ξ ينتمي إلى $\mathbb{C}$. ولمّا كانت $\Delta^{(n)}$ مجموعة مغلقة ولمّا كان $\forall m \geq n,\ z_m \in \Delta^{(m)} \subset \Delta^{(n)}$ استنتجنا أنّ

$$\xi = \lim_{m\to\infty} z_m \in \Delta^{(n)}$$

وهذه النتيجة صحيحة مهما تكن n من $\mathbb{N}$. ومنه $\xi \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta^{(n)}$.

لتكن $\varepsilon > 0$. لمّا كان التابع f قابلاً للاشتقاق عند ξ، إذن يوجد $r > 0$ يُحقِّق

$$\forall z \in D(\xi,r),\quad \left|f(z) - f(\xi) - f'(\xi)\cdot(z-\xi)\right| \leq \varepsilon\left|z-\xi\right| \tag{1}$$

وإذا استخدمنا الخاصّة الهندسية البسيطة التي ذكرناها سابقاً وجدنا أنّ

$$\forall z \in \Delta^{(n)},\quad \left|z-\xi\right| \leq L(\partial\Delta^{(n)}) = 2^{-n}L(\partial\Delta)$$

إذن توجد k في $\mathbb{N}$ تُحقّق $\Delta^{(k)} \subset D(\xi, 2^{-k}L(\partial\Delta)) \subset D(\xi,r)$. ولكن باستخدام المثال 3-5. نرى أنّ

$$\int_{\partial\Delta^{(k)}} \left(f(\xi) + f'(\xi)\cdot(z-\xi)\right) \mathrm{d}\, z = 0$$

ومن ثَمّ يكون

$$\int_{\partial\Delta^{(k)}} f(z)\,\mathrm{d}\, z = \int_{\partial\Delta^{(k)}} \left(f(z) - f(\xi) - f'(\xi)(z-\xi)\right) \mathrm{d}\, z$$

وباستخدام (1) نجد

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Delta^{(k)}} f(z)\,\mathrm{d}\, z\right| &\leq L(\partial\Delta^{(k)})\cdot \sup_{z\in\Delta^{(k)}} \left|f(z) - f(\xi) - f'(\xi)\cdot(z-\xi)\right| \\ &\leq \varepsilon\left(2^{-k}L(\partial\Delta)\right)^2\end{aligned}$$

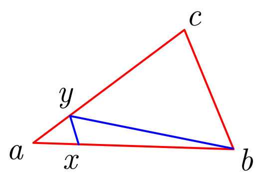
وبالاستناد إلى الخاصّة 4 نجد

$$\left|J\right| \leq 4^k\left|\int_{\partial\Delta^{(k)}} f(z)\,\mathrm{d}\, z\right| \leq \varepsilon\left(L(\partial\Delta)\right)^2$$

ولمّا كان ε عدداً موجباً كيفيّاً استنتجنا مما سبق أنّ $J = 0$. ويُنجَزُ الإثبات في الحالة التي يكون فيها $\omega \notin \Delta(a,b,c)$.

- لنفترض الآن أنّ ω هي أحد رؤوس المثلّث $\Delta(a,b,c)$، مثلاً $\omega = a$. يمكننا أن نفترض أنّ $b \neq a$ و $c \neq a$، وإلاّ كانت النتيجة المطلوبة محقّقة.

يوجد $0 < R$ يُحقّق $\bar{D}(a,R) \subset \Omega$ وذلك لأنّ Ω مجموعة مفتوحة. ولمّا كان f مستمراً على المجموعة المتراصّة $\bar{D}(a,R)$ استنتجنا أنّه محدود عليها. لنختر إذن عدداً M يحقّق



$$M > \sup_{z\in\bar{D}(a,R)} \left|f(z)\right|$$

لتكن $0 < \varepsilon$. عندئذ نختار العدد t كما يلي :

$$t \in \left]0, \min\left(R, \tfrac{\varepsilon}{4M}, |b-a|, |c-a|\right)\right[$$

ونعرّف النقطة $x = a + t\frac{b-a}{|b-a|}$ من القطعة المستقيمة $[a,b]$، والنقطة $y = a + t\frac{c-a}{|c-a|}$ من القطعة المستقيمة $[a,c]$.

لمّا كان $\omega \notin \Delta(x,b,y)$ و $\omega \notin \Delta(y,b,c)$ استنتجنا، استناداً إلى الحالة السابقة أنّ

$$\int_{\partial\Delta(x,b,y)} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{\partial\Delta(y,b,c)} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

ولمّا كان $\int_{\partial\Delta(a,b,c)} f(z)\,\mathrm{d}\,z$ يساوي المجموع :

$$\int_{\partial\Delta(a,x,y)} f(z)\,\mathrm{d}\,z + \int_{\partial\Delta(x,b,y)} f(z)\,\mathrm{d}\,z + \int_{\partial\Delta(y,b,c)} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Delta(a,b,c)} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| &= \left|\int_{\partial\Delta(a,x,y)} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|\\ &\leq M\cdot L(\partial\Delta(a,x,y)) < M\cdot 4\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ المطلوب في هذه الحالة أيضاً لأن ε عددٌ كيفي موجب تماماً.

- وأخيراً، لنفترض أنّ $\omega \in \Delta(a,b,c)$. عندئذ نطبِّق الحالة السابقة على المثلثات

$$\Delta(a,b,\omega) \text{ و } \Delta(b,c,\omega) \text{ و } \Delta(c,a,\omega)$$

فنجد من جديد أنّ التكامل $\int_{\partial\Delta(a,b,c)} f(z)\,\mathrm{d}\,z$ الذي يساوي المجموع الآتي :

$$\int_{\partial\Delta(a,b,\omega)} f(z)\,\mathrm{d}\,z + \int_{\partial\Delta(b,c,\omega)} f(z)\,\mathrm{d}\,z + \int_{\partial\Delta(c,a,\omega)} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

معدوم أيضاً. وبذا نكون قد أثبتنا النتيجة المطلوبة في جميع الحالات. ❐

5-5. **مبرهنة**. لتكن Ω مجموعة مفتوحة و**نجميّة** من $\mathbb{C}$، ولتكن ω من Ω. وأخيراً ليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعاً مستمراً على Ω وهولومورفياً على $\Omega\backslash\{\omega\}$. عندئذ يوجد تابع $F:\Omega\to\mathbb{C}$ هولومورفيٌّ على Ω ويُحقّق $f=F'$.

الإثبات

لمّا كانت Ω مجموعة نجميّة وجدنا عنصراً a في Ω يُحقّق أنّ جميع القطع المستقيمة $[a,z]$ حيث $z\in\Omega$ محتواة في Ω. لنعرّف إذن التابع

$$F:\Omega\to\mathbb{C},\ F(z)=\int_{[a,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta$$

ليكن z_0 عنصراً من Ω. لمّا كانت Ω مجموعة مفتوحة وجدنا عدداً $0<r$ يُحقّق $D(z_0,r)\subset\Omega$. عندئذ، أيّاً كان z من $D(z_0,r)$ كان المثلث $\Delta(a,z_0,z)$ محتوى في Ω. واستناداً إلى المبرهنة السابقة يكون

$$\int_{[a,z_0]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta+\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta+\int_{[z,a]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta=\int_{\partial\Delta(a,z_0,z)} f(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta=0$$

وذلك أياً كان z من $D(z_0,r)$، أو

$$\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta=F(z)-F(z_0)$$

وبناءً على هذا يمكننا أن نكتب في حالة z من $D(z_0,r)\backslash\{z_0\}$

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)=\frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]}\big(f(\zeta)-f(z_0)\big)\mathrm{d}\,\zeta \qquad ⌘$$

لتكن $0<\varepsilon$. لمّا كان f مستمراً عند z_0 وجدنا η في المجال $]0,r[$ تُحقّق

$$\forall\zeta\in D(z_0,\eta),\quad \big|f(\zeta)-f(z_0)\big|<\varepsilon$$

فإذا استفدنا من ذلك في العلاقة ⌘ وجدنا

$$\forall z\in D(z_0,\eta)\backslash\{z_0\},\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)\right|\leq\frac{\varepsilon}{|z-z_0|}L([z_0,z])=\varepsilon$$

وهذا يُثبت أنّ F هولومورفيٌّ في Ω وأنّ $F'=f$. ❐

6-5. **نتيجة**. لتكن Ω مجموعة مفتوحة و**نجميّة** من $\mathbb{C}$، ولتكن ω من Ω. وأخيراً ليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعاً مستمراً على Ω وهولومورفياً على $\Omega\backslash\{\omega\}$. عندئذ يكون

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=0$$

وذلك أياً كان الطريق المغلق Γ من الصف C^1 قِطَعيّاً المحتوى في Ω.

الإثبات

هذه نتيجة مباشرة من المبرهنتين 5-5. و 5-1. ❐

6. علاقة كوشي ونتائجها

1-6. **مبرهنة –علاقة كوشي في حالة مجموعة نجميّة**. لتكن Ω مجموعة مفتوحة و**نجميّة** من $\mathbb{C}$، وليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً. عندئذ أياً كان الطريق المغلق Γ من الصف C^1 قِطَعيّاً المحتوى في Ω، وأياً كانت ω من $\Omega\backslash\Gamma$ فإنّ

$$f(\omega)\cdot\mathrm{Ind}(\omega,\Gamma)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{f(z)}{z-\omega}\mathrm{d}\,z$$

(بالطبع، الحالة المهمّة هنا هي حالة $\mathrm{Ind}(\omega,\Gamma)=1$).

الإثبات

ليكن Γ طريقاً مغلقاً من الصف C^1 قِطَعيّاً محتوى في Ω، ولتكن ω من $\Omega\backslash\Gamma$. ثُمّ لنعرّف التابع

$$g:\Omega\to\mathbb{C},\ g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega} & : \quad z\neq\omega\\ f'(\omega) & : \quad z=\omega\end{cases}$$

عندئذ يُحقِّق التابع g شروط النتيجة 5-6. وبناءً على ذلك يكون

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\Gamma g(z)\,\mathrm{d}\,z=0$$

وبتعويض g بقيمته بدلالة f نحصل على علاقة كوشي المطلوبة. ❐

تفيدنا المبرهنة السابقة في إثبات نتيجة مهمّة تتعلّق بالتوابع الهولومورفيّة وهي كوْن هذه التوابع تحليلية. وهذه نتيجة مُفاجِئة لعدم وجود ما يُكافئها في التحليل الحقيقي.

6-2. **مبرهنة**. لتكن Ω مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً. عندئذ يكون f تحليلياً في Ω.

الإثبات

ليكن z_0 عنصراً من Ω. وليكن $0<R$ عدداً يُحقّق $D(z_0,R)\subset\Omega$. وأخيراً ليكن $\Gamma=C^+(z_0,r)$ مع $0<r<R$. (أي Γ هو الدائرة الموجّهة التي مركزها z_0 ونصف قطرها r). لمّا كانت $D(z_0,R)$ مجموعة مفتوحة ونجميّة، ولمّا كان f هولومورفياً على $D(z_0,R)$ استنتجنا من المبرهنة السابقة أنّ

$$\forall z\in D(z_0,r),\quad f(z)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int\limits_{C^+(z_0,r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

وذلك لأنّ $C^+(z_0,r)\subset D(z_0,R)$ ولأنّ $\mathrm{Ind}(z,C^+(z_0,r))=1$ في الحالة التي يكون فيها z عنصراً من $D(z_0,r)$. نستنتج إذن أنّ

$$\begin{aligned}\forall z\in D(z_0,r),\ \ f(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{rf(z_0+re^{\mathrm{i}\theta})}{z_0+re^{\mathrm{i}\theta}-z}e^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\,\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{\mathrm{i}\theta})}{1-\left(\frac{z-z_0}{r}\right)e^{-\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\,\theta\end{aligned}$$

ولكن، لتكن z من $D(z_0,r)$، عندئذ، أياً كانت θ من $\mathbb{R}$ و m من $\mathbb{N}^*$، فلدينا

$$\frac{1}{1-\left(\dfrac{z-z_0}{r}\right)e^{-\mathrm{i}\theta}}=\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{z-z_0}{r}\right)^k e^{-\mathrm{i}k\theta}+\frac{\left(\dfrac{z-z_0}{r}\right)^m e^{-\mathrm{i}m\theta}}{1-\left(\dfrac{z-z_0}{r}\right)e^{-\mathrm{i}\theta}}$$

أو

$$\left|\frac{r}{r-(z-z_0)e^{-\mathrm{i}\theta}}-\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{z-z_0}{r}\right)^k e^{-\mathrm{i}k\theta}\right|\le\frac{1}{r^{m-1}}\frac{\left|z-z_0\right|^m}{r-\left|z-z_0\right|}$$

ومن ثَمّ

$$\left|f(z)-\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{z-z_0}{r}\right)^k\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}k\theta}\frac{\mathrm{d}\,\theta}{2\pi}\right|\leq$$
$$\frac{\left|z-z_0\right|^m r^{-m+1}}{r-\left|z-z_0\right|}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+re^{\mathrm{i}\theta})\right|\frac{\mathrm{d}\,\theta}{2\pi}$$

ولكن $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\left|z-z_0\right|^m}{r^m}=0$ حين يكون z عنصراً من $D(z_0,r)$. إذن بجعل m تسعى إلى $+\infty$ نجد

$$\forall z\in D(z_0,r),\quad f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

حيث

$$a_k=\frac{1}{2\pi r^k}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}k\theta}\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{C^+(z_0,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

أيّاً كان k من $\mathbb{N}$. وهذا يُثبتُ أنّ f تابع تحليلي على Ω. ❐

3-6. ملاحظة. لتكن Ω مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً. لقد أثبتنا في المبرهنة السابقة أنّ f تابع تحليلي وأنّ متسلسلة تايلور للتابع f عند z_0 تتقارب على كلِّ قرص مفتوح $D(z_0,r)$ محتوى تماماً في قرص مفتوح $D(z_0,R)$ موجود داخل Ω. وهذا يعني أنّ نصف قطر تقارب متسلسلة تايلور للتابع f عند z_0 أكبر أو يساوي نصف قطر أي قرص مفتوح مركزه z_0 ومحتوى في Ω، أي أكبر أو يساوي المسافة بين z_0 و $\mathbb{C}\backslash\Omega$ في حالة $\Omega\neq\mathbb{C}$، أو يساوي $+\infty$ في حالة $\Omega=\mathbb{C}$ وبناءً على هذا نستنتج

$$\forall z_0\in\Omega,\ \forall z\in D(z_0,d(z_0,\mathbb{C}\backslash\Omega)),\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n\,!}(z-z_0)^n$$

وقد رمزنا بالرمز $d(z_0,\mathbb{C}\backslash\Omega)$ إلى المسافة بين z_0 و $\mathbb{C}\backslash\Omega$، وهي تساوي $+\infty$ في حالة $\Omega=\mathbb{C}$. ولقد أثبتنا أيضاً أنّه في حالة $\overline{D}(z_0,r)\subset\Omega$ يكون

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad f^{(n)}(z_0)=\frac{n\,!}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{C^+(z_0,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

4-6. **نتيجة**. لتكن Ω مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً. عندئذ يكون f' هولومورفيّاً أيضاً.

الإثبات

إنّ هذه النتيجة واضحة، بسبب صحّة الاقتضاءات الآتية

$$(f \text{ هولومورفي}) \overset{(1)}{\Leftarrow} (f \text{ تحليلي}) \overset{(2)}{\Leftarrow} (f' \text{ تحليلي}) \overset{(3)}{\Leftarrow} (f' \text{ هولومورفي})$$

ينتج الاقتضاء (1) من المبرهنة 2-6. وينتج الاقتضاءان (2) و (3) من دراستنا للمتسلسلات الصحيحة. ❐

5-6. **مبرهنة – موريرا** Morera. لتكن Ω مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعاً مستمراً، يُحقِّق $\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}\,z=0$ أياً كان المثلّث Δ المحتوى في Ω. عندئذ يكون f هولومورفيّاً على Ω.

الإثبات

ليكن $\mathcal{D}=D(a,\rho)$ قرصاً مفتوحاً محتوى في Ω. نعرّف كما فعلنا عند إثبات المبرهنة 5-5. التابع

$$F:\mathcal{D}\to\mathbb{C},\ F(z)=\int\limits_{[a,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta$$

وباتباع خطوات إثبات تلك المبرهنة، نستنتج أنّ F هولومورفي على $\mathcal{D}$ وأنّ $F'=f_{|\mathcal{D}}$. ثمّ نستفيد من المبرهنة السابقة لنستنتجَ أنّ f هو أيضاً هولومورفي على $\mathcal{D}$. ولمّا كان هذا محقَّقاً على كلِّ قرص مفتوح محتوى في Ω استنتجنا أنّ f هولومورفي على Ω. ❐

6-6. **نتيجة –متراجحات كوشي**. ليكن $f:D(0,R)\to\mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً. نعلمُ أنّه توجد متسلسلة صحيحة $\sum a_n z^n$ نصف قطر تقاربها أكبر أو يساوي R تُحقّق

$$\forall z\in D(0,R),\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ولقد وجدنا، عند إثبات المبرهنة 6-2. أنّه إذا كانت r من $]0,R[$ كان

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{i}n\theta} f(re^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

وبناءً على هذا، إذا عرّفنا $M(r) = \sup_{|z|=r}|f(z)|$ كان لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |a_n| \le \frac{M(r)}{r^n} \qquad (\text{متراجحات كوشي})$$

6-7. **مبرهنة – ليوفيل** Liouville. ليكن $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً، ومحدوداً على $\mathbb{C}$.
عندئذ يكون التابع f ثابتاً على $\mathbb{C}$.

الإثبات

ليكن $M = \sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|$. نعلم، استناداً إلى الملاحظة 6-3، أنّه توجد متسلسلة صحيحة $\sum a_n z^n$ نصف قطر تقاربها يساوي $+\infty$ تُحقّق

$$\forall z \in \mathbb{C},\quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

واستناداً إلى متراجحات كوشي لدينا

$$\forall r>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\quad |a_n| \le \frac{M}{r^n}$$

فإذا جعلنا r تسعى إلى $+\infty$ استنتجنا أنّ $a_n = 0$ أياً كان $0 < n$. وهذا يقتضي

$$\forall z \in \mathbb{C},\quad f(z) = a_0$$

وهي النتيجة المطلوبة. ❐

6-8. **مبرهنة**. ليكن $f : D(a,R)\to\mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً. نعلمُ أنّه توجد متسلسلة صحيحة $\sum a_n z^n$ نصف قطر تقاربها أكبر أو يساوي R تُحقِّق

$$\forall z \in D(a,R),\quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

وعندئذ يكون

$$\forall r \in\,]0,R[,\quad \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(a+re^{\mathrm{i}\theta})\right|^2\mathrm{d}\theta$$

الإثبات

يمكننا أن نفترض $a = 0$ دون الإخلال بعموميّة الإثبات وهذا ما سنفعله فيما يأتي. لنعرّف في حالة n من $\mathbb{N}$ و z من $D(0,R)$ المقدار $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

ليكن (k,n) عنصراً من $\mathbb{N}^2$ يُحقّق $k \geq n$. عندئذ

$$\forall z \in D(0,R)\backslash\{0\}, \qquad \frac{f(z)-S_n(z)}{z^k} = \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p z^{p-k}$$

فالتابع $z \mapsto \dfrac{f(z)-S_n(z)}{z^k}$ يقبل التمديد إلى تابع هولومورفيّ على $D(0,R)$. نستنتج إذن أنّ

$$\int_{C^+(0,r)} \frac{f(z)-S_n(z)}{z^k}\,\mathrm{d}\,z = 0$$

وذلك أياً كان العدد r الذي يُحقّق $0 < r < R$.

ليكن r من $]0,R[$. نستنتج من المساواة السابقة أنّ

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, \quad k \leq n \Rightarrow \int_0^{2\pi} \Big(f(re^{\mathrm{i}\,\theta}) - S_n(re^{\mathrm{i}\,\theta}) \Big) e^{-\mathrm{i}\,k\theta}\,\mathrm{d}\,\theta = 0$$

وبناءً على ذلك يكون

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{2\pi} \Big(f(re^{\mathrm{i}\,\theta}) - S_n(re^{\mathrm{i}\,\theta}) \Big) \overline{S_n(re^{\mathrm{i}\,\theta})}\,\mathrm{d}\,\theta = 0$$

ولكن، أياً كان z من $D(0,R)$، كان

$$\left|f(z)\right|^2 = \left|f(z)-S_n(z)\right|^2 + \left|S_n(z)\right|^2 + 2\,\mathrm{Re}\Big((f(z)-S_n(z)) \cdot \overline{S_n(z)} \Big)$$

إذن، أياً كان n من $\mathbb{N}$ ،

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^{2\pi} \left|f(re^{\mathrm{i}\,\theta})\right|^2 \mathrm{d}\,\theta - \int_0^{2\pi} \left|S_n(re^{\mathrm{i}\,\theta})\right|^2 \mathrm{d}\,\theta &= \int_0^{2\pi} \left|f(re^{\mathrm{i}\,\theta}) - S_n(re^{\mathrm{i}\,\theta})\right|^2 \mathrm{d}\,\theta \\ &\leq 2\pi \Big(\sup_{z \in \overline{D}(0,r)} \left|f(z)-S_n(z)\right| \Big)^2 \end{aligned}$$

ولمّا كانت $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب بانتظام من f على القرص المغلق $\bar{D}(0,r)$ ، بناءً على خواص المتسلسلات الصحيحة، استنتجنا

$$\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left|S_n(re^{i\theta})\right|^2 d\theta$$

ولكن

$$\left|S_n(re^{i\theta})\right|^2 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{n} a_k\overline{a_p}\, r^{k+p}e^{i(k-p)\theta}$$

والتكامل $\int_0^{2\pi} e^{i(k-p)\theta}\, d\theta$ يساوي 2π في حالة $p = k$ ، ويساوي 0 في حالة $p \neq k$.
نستنتج من ذلك أنّ

$$\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \lim_{n\to\infty} 2\pi\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2 r^{2k}$$

وبذا يتمّ المطلوب. ❐

7. مبدأ الطويلة العظمى

1-7. مبرهنة – مبدأ الطويلة العظمى. لتكن Ω مجموعة مفتوحة ومترابطة غير خالية من $\mathbb{C}$.
وليكن $f : \Omega \to \mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً. ولتكن $\bar{D}(a,r) \subset \Omega$. عندئذ يكون

$$|f(a)| \leq \max_{\theta\in\mathbb{R}}\left|f(a+re^{i\theta})\right|$$

وتحدث المساواة إذا وفقط إذا كان f ثابتاً في Ω .

الإثبات

لنفترض جدلاً أنّ $\forall\theta \in \mathbb{R},\quad \left|f(a+re^{i\theta})\right| \leq |f(a)|$. ولنفترض أنّ

$$\forall z \in \bar{D}(a,r),\quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

عندئذ يكون لدينا استناداً إلى المبرهنة السابقة،

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(a+re^{i\theta})\right|^2 d\theta \leq |f(a)|^2 = |a_0|^2$$

وبناءً على هذا يكون $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 0$ ، إذن $f(z) = f(a)$ مهما تكن z من $\bar{D}(a,r)$ ، ولمّا كانت Ω مترابطة نتج أنّ التابع f ثابتٌ على Ω . ❐

7-2. نتيجة – مبدأ الطويلة العظمى. لتكن Ω مجموعة مفتوحة ومحدودة ومترابطة وغير خالية من $\mathbb{C}$. وليكن $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{C}$ تابعاً مستمرّاً، وهولومورفياً على Ω.نعرّف حدود Ω بالصيغة $\partial\Omega=\overline{\Omega}\backslash\Omega$. عندئذ

$$\forall z\in\Omega,\quad \left|f(z)\right|\leq\sup_{\xi\in\partial\Omega}\left|f(\xi)\right|$$

وتحدث المساواة إذا وفقط إذا كان f ثابتاً في $\overline{\Omega}$.

الإثبات

لمّا كانت $\overline{\Omega}$ مجموعة متراصّة لأنها مغلقة ومحدودة، استنتجنا أنّ $z\mapsto\left|f(z)\right|$ يبلغ حدّه الأعلى على $\overline{\Omega}$. أي يوجد عنصر a في $\overline{\Omega}$ يُحقّق

$$\left|f(a)\right|=\sup_{z\in\overline{\Omega}}\left|f(z)\right|$$

وهنا نناقش حالتين :

- حالة $a\in\partial\Omega$. في هذه الحالة يكون $\left|f(a)\right|=\sup\limits_{\xi\in\partial\Omega}\left|f(\xi)\right|$ وتتحقّق المتراجحة

$$\forall z\in\Omega,\quad \left|f(z)\right|\leq\sup_{\xi\in\partial\Omega}\left|f(\xi)\right|$$

- حالة $a\in\Omega$. عندئذ نستنتج من كون المجموعة Ω مفتوحة، أنّه يوجد عددٌ موجبٌ تماماً r يُحقّق $D(a,r)\subset\Omega$. وعندئذ نستنتج من تعريف a أنّ

$$\left|f(a)\right|\geq\max_{\theta\in\mathbb{R}}\left|f(a+re^{i\theta})\right|$$

ونستنتج من المبرهنة 7-1 أنّ $\left|f(a)\right|\leq\max\limits_{\theta\in\mathbb{R}}\left|f(a+re^{i\theta})\right|$. إذن

$$\left|f(a)\right|=\max_{\theta\in\mathbb{R}}\left|f(a+re^{i\theta})\right|$$

وهذا يقتضي، بناءً على المبرهنة 7-1 نفسها أنّ f ثابتٌ على Ω، ومن ثَمّ على $\overline{\Omega}$ لأنّه مستمر عليها.

وبذا يكتمل الإثبات. ❐

7-3. مبرهنة – دالمبير D'Alembert. ليكن كثير الحدود P من $\mathbb{C}[X]$. نفترض أنّ درجة كثير الحدود P أكبر أو تساوي 1. عندئذ يوجد في $\mathbb{C}$ عددٌ z_0 يُحقّق $P(z_0) = 0$.

الإثبات

يمكننا أن نفترض كثير الحدود P واحدياً، أي

$$P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

مع $\deg P = n > 0$. لنختر عدداً r يُحقِّق $r > 1 + |a_0| + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. عندئذ أياً كان θ من $\mathbb{R}$ فلدينا

$$\begin{aligned}\left|P\left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)\right| &\geq r^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r^k \\ &\geq r^{n-1}\left(r - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right) \geq 1 + |a_0| > |P(0)|\end{aligned}$$

فلو افترضنا جدلاً أنّ $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) \neq 0$ ، استنتجنا أنّ التابع $z \mapsto f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ تابع هولومورفي في $\mathbb{C}$ ، ويُحقّق $|f(0)| > \left|f(r\, e^{\mathrm{i}\theta})\right|$ أياً كان θ من $\mathbb{R}$. وهذا يتناقض مع نتيجة المبرهنة السابقة. ❐

8. متتاليات ومتسلسلات التوابع الهولومورفيّة

نأتي الآن إلى مبرهنة مهمّة ليس لها مُكافئ في التحليل الحقيقي.

8-1. مبرهنة. لتكن Ω مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{C}$ ، ثُمّ لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من التوابع الهولومورفيّة على Ω . نفترض أنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام على كلِّ مجموعة متراصّة من Ω من تابع f . عندئذ يكون f هولومورفياً على Ω وتتقارب المتتالية $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ بانتظام على كلِّ مجموعة متراصّة من Ω من التابع f' .

الإثبات

- لمّا كانت المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام على كلِّ مجموعة متراصّة من Ω من التابع f ، ولمّا كانت التوابع f_n مستمرّة على Ω استنتجنا أنّ f مستمرٌّ على Ω .

▪ ليكن Δ مثلثاً محتوى في Ω. لمّا كانت Δ مجموعة متراصّة في Ω أمكننا أن نكتبَ

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}\,z - \int_{\partial\Delta} f_n(z)\,\mathrm{d}\,z\right| &= \left|\int_{\partial\Delta}\big(f(z)-f_n(z)\big)\,\mathrm{d}\,z\right| \\ &\le L(\partial\Delta)\cdot\sup_{z\in\Delta}\left|f(z)-f_n(z)\right|\end{aligned}$$

ونستنتج من التقارب المنتظم على Δ للمتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من التابع f أنّ

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Delta} f_n(z)\,\mathrm{d}\,z \overset{(1)}{=} 0$$

إذ تنتج المساواة (1) من المبرهنة 5-4. نكون بذلك قد أثبتنا أنّ

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

أياً كان المثلّث Δ المحتوى في Ω. إذن f تابع هولومورفي على Ω بمُقتضى المبرهنة 6-5.

▪ لنُثبت الجزء الثاني من المبرهنة. لتكن K مجموعة متراصّة محتواة في Ω. يوجد عددٌ ν في $\mathbb{N}$ يُحقّق

$$\mathcal{K}_\nu = \{z\in\mathbb{C} : d(z,K)\le 2^{-\nu}\}\subset\Omega$$

(يمكن إثبات ذلك بنقض الفرْض. لأنه إذا لم يكن ذلك صحيحاً وجدنا متتالية $(z_\nu)_{\nu\ge0}$ من عناصر $\mathbb{C}\backslash\Omega$ و متتالية $(t_\nu)_{\nu\ge0}$ من عناصر K تحقّق

$$\forall\nu\ge0,\quad |z_\nu - t_\nu|\le 2^{-\nu+1}$$

ولكنّ المجموعة K متراصّة إذن توجد متتالية جزئيّة $(t_{\varphi(\nu)})_{\nu\ge0}$ متقاربة من عنصر t من K، وعندئذ تتقارب المتتالية $(z_{\varphi(\nu)})_{\nu\ge0}$ من العنصر t أيضاً، ولكنها متتالية من عناصر المجموعة المغلقة $\mathbb{C}\backslash\Omega$، إذن $t\in\mathbb{C}\backslash\Omega$. وهذا يتناقض مع كوْن $K\subset\Omega$).

ولمّا كانت $\mathcal{K}_\nu$ مجموعة مغلقة ومحدودة استنتجنا أنها مجموعة متراصة محتواة في Ω.

ليكن z عنصراً من K. عندئذ يكون $\overline{D}(z,2^{-\nu})\subset\mathcal{K}_\nu$ وبناءً على متراجحات كوشي مطبّقة على التابع الهولومورفي $f_m - f$ نجد

$$\left|f_m'(z)-f'(z)\right|\le 2^\nu\sup_{C(z,2^{-\nu})}|f_m-f|\le 2^\nu\sup_{\mathcal{K}_\nu}|f_m-f|$$

وينتج من ذلك أنّ

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \sup_K |f'_m - f'| \leq 2^\nu \sup_{\mathcal{K}_\nu} |f_m - f|$$

ونستنتج من التقارب المنتظم على $\mathcal{K}_\nu$ للمتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من f أنّ المتتالية $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام على K من f' . وبذلك يتمُّ المطلوب. ❐

وتنتج الخاصّة التالية بالتدريج :

2-8. نتيجة. لتكن Ω مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{C}$، ثُمَّ لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من التوابع الهولومورفيّة على Ω . نفترض أنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام على كلِّ مجموعة متراصّة من Ω من تابع f . عندئذ يكون f هولومورفياً على Ω وتتقارب المتتالية $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ بانتظام على كلِّ مجموعة متراصّة من Ω من التابع $f^{(p)}$ ، وذلك أياً كان p من $\mathbb{N}^*$.

3-8. نتيجة. لتكن Ω مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{C}$، ثُمَّ لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من التوابع الهولومورفيّة على Ω . نفترض أنّ المتسلسلة $\sum f_n$ متقاربة بانتظام (أو بالنظيم) على كلِّ مجموعة متراصّة من Ω . عندئذ يكون مجموعها $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ هولومورفياً على Ω .
ويكون $f^{(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(p)}$ ، وذلك أياً كانت p من $\mathbb{N}^*$.

فمثلاً، نترك للقارئ أن يتيقَّن، بتطبيق النتيجة السابقة، أنّ **تابع ريمان** Riemann المعرَّف بالعلاقة

$$z \mapsto \zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

هو تابع هولومورفيٌّ في نصف المستوي $\mathbb{P}_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$.

9. الصيغة العامّة لعلاقة كوشي

نعمِّم فيما يلي علاقة كوشي التكامليّة الخاصّة بالمجموعات النجميّة (المبرهنة 6-1.) ونحتاج في صياغتها إلى مفهوم التشوّه المستمر للطريق الذي درسناه عند دراسة التوابع لعدّة متحوِّلات. لذلك نُحيلُ القارئ الى تلك الدراسة ليتذكّر التعاريف الأساسيّة.

9-1. **مبرهنة**. لتكن Ω مجموعة مفتوحة ومترابطة وغير خالية من $\mathbb{C}$، ثُمّ ليكن Γ_0 و Γ_1 طريقين مغلقين من الصف C^1 قِطَعيّاً في Ω، وأخيراً ليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً.
نفترض أنّ الطريق Γ_0 هو تشويه مستمرٌّ في Ω للطريق Γ_1. عندئذ

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{\Gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

الإثبات

لنعرِّف كما جرت العادة، أياً كانت $z = x + \mathrm{i}\,y$ من Ω :

$$P(x,y) = \operatorname{Re} f(z) \quad \text{و} \quad Q(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$$

ولنتأمّل الشكلين التفاضليين من المرتبة الأولى $\omega^{\Re}$ و $\omega^{\Im}$ المعرّفين بالعلاقتين:

$$\omega^{\Re}_{(x,y)} = P(x,y)\,\mathrm{d}\,x - Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$\omega^{\Im}_{(x,y)} = Q(x,y)\,\mathrm{d}\,x + P(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

حينئذ نعلم أنّه لدينا بالتعريف

$$k\in\{0,1\},\quad \int_{\Gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{\Gamma_k}\omega^{\Re} + \mathrm{i}\int_{\Gamma_k}\omega^{\Im} \qquad ⌘$$

لمّا كان f تحليلياً على Ω استنتجنا أنّ التابعين P و Q من الصف C^∞، وهما يحقّقان شرطي كوشي–ريمان:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

نستنتج من ذلك أنّ الشكلين التفاضليين $\omega^{\Re}$ و $\omega^{\Im}$ مغلقان في Ω، فهما تامّان محلياً في Ω. فإذا استفدنا من كون الطريق Γ_0 هو تشويه مستمرٌّ في Ω للطريق Γ_1. وجدنا

$$\int_{\Gamma_1}\omega^{\Re} = \int_{\Gamma_0}\omega^{\Re} \quad \text{و} \quad \int_{\Gamma_1}\omega^{\Im} = \int_{\Gamma_0}\omega^{\Im}$$

وبالعودة إلى ⌘ نجد الخاصّة المطلوبة. ❐

9-2. **مبرهنة**. لتكن Ω مجموعة مفتوحة من $\mathbb{C}$، وليكن ω عنصراً من Ω. ثُمّ ليكن Γ طريقاً مغلقاً من الصف C^1 قِطَعيّاً ومحتوى في $\Omega\backslash\{\omega\}$، وأخيراً ليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً. نفترض أنّ الطريق Γ هو تشويه مستمرٌّ لنقطة في Ω. عندئذ

$$f(\omega)\cdot \mathrm{Ind}(\omega,\Gamma)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-\omega}\,\mathrm{d}\,z$$

الإثبات

ليكن التابع المساعد التالي

$$g:\Omega\to\mathbb{C},\quad g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega} & : \quad z\neq\omega\\[2ex] f'(\omega) & : \quad z=\omega\end{cases}$$

عندئذ يكون g هولومورفياً على Ω. (النقطة الوحيدة التي يجب إثبات قابليّة الاشتقاق عندها هي ω ولكن في جوارٍ V للعنصر ω لدينا

$$\forall z\in V,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n+1)}(\omega)}{(n+1)!}(z-\omega)^n$$

والتابع g يقبل الاشتقاق عند ω). وبناءً على المبرهنة السابقة يكون

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int\limits_{\Gamma}g(z)\,\mathrm{d}\,z=0$$

لأنّ Γ تشويه مستمرٌّ في Ω لنقطة. ونحصل على المطلوب بإصلاح العلاقة السابقة والعودة إلى التابع f. ❐

9-3. **نتيجة**. لتكن Ω مجموعة مفتوحة و**بسيطة الترابط** من $\mathbb{C}$، وليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً. عندئذ

① أياً كان الطريق المغلق Γ من الصف C^1 قِطَعيّاً ومحتوى في Ω، فلدينا

$$\int_{\Gamma}f(z)\,\mathrm{d}\,z=0$$

② أياً كانت ω من Ω. وأياً كان الطريق المغلق Γ من الصف C^1 قِطَعيّاً ومحتوى في $\Omega\backslash\{\omega\}$، فلدينا

$$f(\omega)\cdot \mathrm{Ind}(\omega,\Gamma)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-\omega}\,\mathrm{d}\,z$$

تمرينات

التمرين 1. أيُّ التوابع الآتية هولومورفيٌّ ؟

① التابع $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ المعرّف بالعلاقتين

$$\operatorname{Re} f_1(x+\mathrm{i}\,y) = e^x\,(x\cos y - y\sin y)$$
$$\operatorname{Im} f_1(x+\mathrm{i}\,y) = e^x\,(y\cos y + x\sin y)$$

② التابع $f_2 : \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{C}$ معرّف بالعلاقتين

$$\operatorname{Re} f_2(x+\mathrm{i}\,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{x}{2}\ln(x^2+y^2) + y\arctan\frac{y}{x}\right)$$
$$\operatorname{Im} f_2(x+\mathrm{i}\,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\left(x\arctan\frac{y}{x} - \frac{y}{2}\ln(x^2+y^2)\right)$$

③ التابع $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ المعرّف بالعلاقتين

$$\operatorname{Re} f_3(x+\mathrm{i}\,y) = e^x\,(x\cos y + y\sin y)$$
$$\operatorname{Im} f_3(x+\mathrm{i}\,y) = e^x\,(x\sin y - y\cos y)$$

④ التابع $f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ المعرّف بالعلاقتين

$$\operatorname{Re} f_4(x+\mathrm{i}\,y) = e^y(x\cos x + y\sin x) + e^{-y}(x\cos x - y\sin x)$$
$$\operatorname{Im} f_4(x+\mathrm{i}\,y) = e^y(y\cos x - x\sin x) + e^{-y}(y\cos x + x\sin x)$$

الحل

① لنضع $z = x + \mathrm{i}\,y$ ، ولنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} f_1(z) &= e^x\left(x\cos y - y\sin y\right) + \mathrm{i}\,e^x\left(y\cos y + x\sin y\right)\\ &= e^x\left((x+\mathrm{i}\,y)\cos y + \mathrm{i}(x+\mathrm{i}\,y)\sin y\right)\\ &= (x+\mathrm{i}\,y)e^x\left(\cos y + \mathrm{i}\sin y\right) = z\cdot e^z \end{aligned}$$

إذن f_1 هولومورفي في $\mathbb{C}$.

② لنضع $z = x + \mathrm{i}\,y$ ، ولنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{|z|^2}\left(x\ln|z| + y\arctan\frac{y}{x}\right) + \frac{\mathrm{i}}{|z|^2}\left(x\arctan\frac{y}{x} - y\ln|z|\right)\\ &= \frac{\overline{z}}{|z|^2}\left(\ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z\right) = \frac{1}{z}\operatorname{Log}(z) \end{aligned}$$

إذن f_2 هولومورفي في $\left\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\right\}$.

③ لنضع $z = x + \mathrm{i}\,y$، ولنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} f_3(z) &= e^x\left((x-\mathrm{i}\,y)\cos y + (y+\mathrm{i}\,x)\sin y\right) \\ &= \overline{z}\cdot e^x\left(\cos y + \mathrm{i}\sin y\right) = \overline{z}\cdot e^z \end{aligned}$$

ولو كان f_3 هولومورفيّاً لكان $z \mapsto \overline{z}$ هولومورفيّاً أيضاً، وهذا غير صحيح لأنّ النهاية $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\overline{z}}{z}$ غير موجودة.

④ لنضع $z = x + \mathrm{i}\,y$، ولنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} f_4(z) &= e^y(z\cos x + \overline{z}\sin x) + e^{-y}(z\cos x - \overline{z}\sin x) \\ &= z\left(e^y(\cos x - \mathrm{i}\sin x) + e^{-y}(\cos x + \mathrm{i}\sin x)\right) \\ &= z\left(e^{y-\mathrm{i}\,x} + e^{-y+\mathrm{i}\,x}\right) \\ &= z\left(e^{-\mathrm{i}\,z} + e^{\mathrm{i}\,z}\right) = 2z\cos z \end{aligned}$$

إذن f_4 هولومورفي في $\mathbb{C}$. ■

التمرين 2. ليكن $f : \Omega \to \mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً على مجموعة مفتوحة ومترابطة Ω في $\mathbb{C}$. نفترض أنّ التابع $\mathrm{Re}(f)$ تابعٌ ثابت على Ω. أثبت أنّ f ثابتٌ على Ω.

الحل

لنفترض أنّ $P = \mathrm{Re}\, f$ و $Q = \mathrm{Im}\, f$. عندئذ يكون لدينا استناداً إلى دساتير كوشي–ريمان ما يلي :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

فإذا كان P ثابتاً على Ω استنتجنا أنّ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0$ على المجموعة Ω. أو $\mathrm{d}\,Q = 0$ على Ω. وعليه، لأنّ المجموعة Ω مترابطة، يكون Q ثابتاً عليها. ومن ثَمّ يكون التابع f نفسه ثابتاً على Ω. ■

التمرين 3. إذا كان $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعاً معرّفاً على مجموعة مفتوحة ومترابطة Ω في $\mathbb{C}$، عرّفنا أياً كانت $z=x+\mathrm{i}\,y$ من Ω المقدارين

$$Q(x,y)=\operatorname{Im}f(x+\mathrm{i}\,y) \quad \text{و} \quad P(x,y)=\operatorname{Re}f(x+\mathrm{i}\,y)$$

عيّن التوابع الهولومورفيّة f على Ω التي تُحقّق الشرط $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=0$ وذلك أياً كان $z=x+\mathrm{i}\,y$ من Ω.

الحل

ليكن f تابعاً هولومورفيّاً عندئذ نعلم أنّ

$$f'=\frac{1}{\mathrm{i}}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial y}\right)=\frac{\partial P}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial P}{\partial y}$$

وذلك استناداً إلى معادلات كوشي–ريمان. ونستنتج من جديد أنّ

$$f''=\frac{1}{\mathrm{i}}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial^2 P}{\partial^2 y}\right)=-\frac{\partial^2 P}{\partial^2 y}-\mathrm{i}\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}$$

إذ استفدنا هنا من كون P يقبل المفاضلة عدداً لانهائيّاً من المرّات.

إذا افترضنا أنّ $\frac{\partial P}{\partial y}=0$ استنتجنا مما سبق أنّ $f''=0$، ومن ثَمّ يوجد عددان a و b من $\mathbb{C}$ يُحقّقان

$$\forall z\in\Omega,\quad f(z)=az+b$$

ولأنّ $\frac{\partial P}{\partial y}=-\operatorname{Im}(a)$ في هذه الحالة استنتجنا أنّ $\forall z\in\Omega,\ f(z)=\alpha z+b$ حيث α من $\mathbb{R}$ و b من $\mathbb{C}$. وبالطبع إنّ العكس صحيح وضوحاً.

وعليه فإنّ مجموعة التوابع المطلوبة هي المجموعة $\left\{f_{\alpha,b}:(\alpha,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}\right\}$ مع

$$f_{\alpha,b}:\Omega\to\mathbb{C},z\mapsto\alpha z+b$$

وبذا يتمّ تعيين مجموعة التوابع المطلوبة. ■

التمرين 4. ليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعاً هولومورفيّاً على مجموعة مفتوحة مترابطة Ω. نفترض أن التابع $z\mapsto\left|f(z)\right|$ ثابتٌ على Ω، أثبت أنّ f نفسه تابعٌ ثابتٌ.

الحل

لنضع كالعادة $P(x,y)=\operatorname{Re}f(x+\mathrm{i}\,y)$ و $Q(x,y)=\operatorname{Im}f(x+\mathrm{i}\,y)$. استناداً إلى الفرْض، يوجد ثابتٌ حقيقي M يُحقّق

$$\forall(x+\mathrm{i}\,y)\in\Omega,\quad \big(P(x,y)\big)^2+\big(Q(x,y)\big)^2=M$$

فإذا كان $M=0$ استنتجنا مباشرة أنّ $f=0$ وتمّ الإثبات.

لنفترض إذن أنّ $M>0$. بالاشتقاق بالنسبة إلى x ثُمّ بالنسبة إلى y نستنتج

$$\begin{aligned}\forall(x+\mathrm{i}\,y)\in\Omega,\quad & P(x,y)\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)+Q(x,y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=0\\ & P(x,y)\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)+Q(x,y)\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)=0\end{aligned}$$

وبالاستفادة من دستورَي كوشي ريمان : $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ و $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\dfrac{\partial P}{\partial y}$ نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}\forall(x+\mathrm{i}\,y)\in\Omega,\quad & P(x,y)\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)+Q(x,y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=0\\ & P(x,y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-Q(x,y)\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)=0\end{aligned}$$

ولمّا كان $f'(z)=\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y)+\mathrm{i}\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ فإننا نرى أنّ جملة المساواتين السابقتين تُكافئ

$$\forall z\in\Omega,\quad \overline{f(z)}f'(z)=0$$

ولكن $M\neq 0$ يقتضي أنّ

$$\forall z\in\Omega,\ f(z)\neq 0$$

والمساواة السابقة تكافئ إذن $\forall z\in\Omega,\ f'(z)=0$. وهذا يثبتُ أنّ f ثابتٌ لأنّ المجموعة Ω مجموعة مفتوحة ومترابطة. ■

التمرين 5. إذا كان $f : \Omega \to \mathbb{C}$ تابعاً معرّفاً على مجموعة مفتوحة ومترابطة Ω في $\mathbb{C}$، عرّفنا أياً كانت $z = x + \mathrm{i}\, y$ من Ω المقدارين

$$Q(x,y) = \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}\, y) \quad \text{و} \quad P(x,y) = \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}\, y)$$

أوجد التوابع الهولومورفيّة $f : \Omega \to \mathbb{C}$ في الحالات الآتية

1. $f(0) = 0$ و $P(x,y) = x^2 - y^2 + xy$
2. $f(0) = 0$ و $P(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$
3. $f(2) = 0$ و $Q(x,y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$
4. $P(x,y) = \dfrac{\sin x}{\operatorname{ch} y - \cos x}$

الحل

1. لنضع $z = x + \mathrm{i}\, y$، ولنلاحظ أنّ العلاقة $P(x,y) = x^2 - y^2 + xy$ تُكتب بالشكل

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \left(\frac{z + \overline{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z - \overline{z}}{2\,\mathrm{i}}\right)^2 + \frac{z + \overline{z}}{2} \cdot \frac{z - \overline{z}}{2\,\mathrm{i}} \\ &= \frac{z^2 + \overline{z}^2 + 2|z|^2 + z^2 + \overline{z}^2 - 2|z|^2 - \mathrm{i}\, z^2 + \mathrm{i}\, \overline{z}^2}{4} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2 - \mathrm{i}}{2} z^2 + \frac{2 + \mathrm{i}}{2} \overline{z}^2\right) = \operatorname{Re}\left(\left(1 - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\right) z^2\right) \end{aligned}$$

ومنه، لأنّ $f(0) = 0$، نجد $f(z) = \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\right) z^2$.

2. لنضع $z = x + \mathrm{i}\, y$، ولنلاحظ أنّ العلاقة $P(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ تُكتب بالشكل

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \left(\frac{z + \overline{z}}{2}\right)^3 + 6\left(\frac{z + \overline{z}}{2}\right)^2 \left(\frac{z - \overline{z}}{2\,\mathrm{i}}\right) + 3\left(\frac{z + \overline{z}}{2}\right)\left(\frac{z - \overline{z}}{2}\right)^2 - 2\,\mathrm{i}\left(\frac{z - \overline{z}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{(z + \overline{z})^3 - 6\,\mathrm{i}(z + \overline{z})(z^2 - \overline{z}^2) + 3(z - \overline{z})(z^2 - \overline{z}^2) - 2\,\mathrm{i}(z - \overline{z})^3}{8} \\ &= \frac{(z + \overline{z})^3 + 3(z - \overline{z})(z^2 - \overline{z}^2)}{8} - \mathrm{i}\,\frac{(z - \overline{z})^3 + 3(z + \overline{z})(z^2 - \overline{z}^2)}{4} \end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned}P(x,y) &= \frac{z^3+3z^2\overline{z}+3z\overline{z}^2+\overline{z}^3+3z^3-3z\overline{z}^2-3z^2\overline{z}+3\overline{z}^3}{8}\\ &\quad -\mathrm{i}\frac{z^3-3z^2\overline{z}+3z\overline{z}^2-\overline{z}^3+3z^3-3z\overline{z}^2+3z^2\overline{z}-3\overline{z}^3}{4}\\ &= \frac{z^3+\overline{z}^3}{2}-\mathrm{i}(z^3-\overline{z}^3)=\frac{1}{2}\Big((1-2\,\mathrm{i})z^3+(1+2\,\mathrm{i})\overline{z}^3\Big)\end{aligned}$$

ومنه $P(x,y)=\mathrm{Re}((1-2\,\mathrm{i})z^3)$ ، ولأنّ $f(0)=0$ ، وجدنا $f(z)=(1-2\,\mathrm{i})z^3$.

3. لنضع $z=x+\mathrm{i}\,y$ ، ولنلاحظ أنّ العلاقة $Q(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ تُكتب بالشكل

$$Q(x,y)=\frac{z-\overline{z}}{2\,\mathrm{i}\,z\overline{z}}=\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z}\right)=-\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}\right)=-\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)$$

إذن أيّاً كان λ من $\mathbb{R}$ كان $Q(x,y)=\mathrm{Im}(\lambda-z^{-1})$. ويمكننا أن نأخذ في حالة λ من $\mathbb{R}$ ما يلي:

$$f(z)=\lambda-\frac{1}{z}$$

فإذا استفدنا من الشرط $f(2)=0$ استنتجنا أنّ $f(z)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{z}$.

4. لنضع $z=x+\mathrm{i}\,y$ و $\omega=\dfrac{z}{2}$ ، ولنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(\omega+\overline{\omega})=\sin\omega\cos\overline{\omega}+\cos\omega\sin\overline{\omega}\\ \mathrm{ch}\,y &= \cos(\mathrm{i}\,y)=\cos(\omega-\overline{\omega})=\cos\omega\cos\overline{\omega}+\sin\omega\sin\overline{\omega}\\ \cos x &= \cos(\omega+\overline{\omega})=\cos\omega\cos\overline{\omega}-\sin\omega\sin\overline{\omega}\end{aligned}$$

ومنه

$$\mathrm{ch}\,y-\cos x=2\sin\omega\sin\overline{\omega}$$

إذن تُكتب العلاقة $P(x,y)=\dfrac{\sin\,x}{\mathrm{ch}\,y-\cos x}$ بالشكل

$$P(x,y)=\frac{\sin\,x}{\mathrm{ch}\,y-\cos x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\overline{\omega}}{\sin\overline{\omega}}+\frac{\cos\omega}{\sin\omega}\right)=\mathrm{Re}\frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)}$$

ومنه $f(z)=\cot(z/2)+\lambda\,\mathrm{i}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$. ■

التمرين 6. أوجد تابعاً هولومورفيّاً $f:\Omega\to\mathbb{C}$ معرّفاً على مجموعة مفتوحة غير خالية Ω. يُحقّق في حالة $x+\mathrm{i}\,y$ من Ω المساواة التالية :

$$\operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}\,y)=\frac{x(1+x^2+y^2)}{1+2(x^2-y^2)+(x^2+y^2)^2}$$

ملاحظة. يجب إعطاء صيغة $f(z)$ بدلالة z.

الحل

بوضع $z=x+\mathrm{i}\,y$ وملاحظة أنّ $z^2=x^2-y^2+2\,\mathrm{i}\,xy$ نرى أنّ

$$z^2+\overline{z}^2=2(x^2-y^2)$$

ومن ثَمّ يُكتب المقدار $P(x,y)=\operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}\,y)$ بالصيغة

$$P(x,y)=\frac{z+\overline{z}}{2}\times\frac{1+z\overline{z}}{1+z^2+\overline{z}^2+z^2\overline{z}^2}$$

وعليه

$$\begin{aligned}P(x,y)&=\frac{z+z\overline{z}^2+\overline{z}+z^2\overline{z}}{2(1+z^2)(1+\overline{z}^2)}=\frac{z(1+\overline{z}^2)+\overline{z}(1+z^2)}{2(1+z^2)(1+\overline{z}^2)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{1+z^2}+\frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{z}{1+z^2}\right)\end{aligned}$$

إذن يمكن أن نختار للتابع f صيغة من النمط $f(z)=\dfrac{z}{1+z^2}+\mathrm{i}\lambda$ ، حيث $\lambda\in\mathbb{R}$ ، على أيّ مركّبة مترابطة في Ω. ■

التمرين 7. ليكن Log تابع اللوغاريتم الأساسي. أوجد أكبر مجموعة مفتوحة $\mathcal{D}$ يكون عليها التابع التالي هولومورفياً:

$$\arctan:\mathcal{D}\to\mathbb{C},\qquad \arctan z=\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\operatorname{Log}\frac{1+\mathrm{i}\,z}{1-\mathrm{i}\,z}$$

ثُمّ أثبت أنّه

$$\forall z\in\mathcal{D},\qquad \tan(\arctan z)=z$$

وأنّ

$$\forall z\in D(0,1),\qquad \arctan z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1}$$

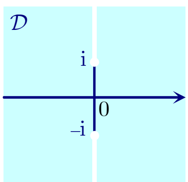
وأخيراً استخدم مبرهنة Abel لتحسب، عندما يكون $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ المجموعين

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\big((2n+1)\theta\big) \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sin\big((2n+1)\theta\big)$$

الحل

لنلاحظ أنّ $\operatorname{Log}\frac{1+\mathrm{i}\,z}{1-\mathrm{i}\,z}$ لا يكون معرّفاً فقط في حالة $z=-\mathrm{i}$ أو $\frac{1+\mathrm{i}\,z}{1-\mathrm{i}\,z}\in\mathbb{R}_-$. ولكن

$$\begin{aligned}(z=-\mathrm{i})\vee\left(\frac{1+\mathrm{i}\,z}{1-\mathrm{i}\,z}\in\mathbb{R}_-\right) &\Leftrightarrow (z=-\mathrm{i})\vee\big(\exists\lambda\geq 0,\ 1+\mathrm{i}\,z=-\lambda+\mathrm{i}\lambda z\big)\\ &\Leftrightarrow (z=-\mathrm{i})\vee\big(\exists\lambda\geq 0,\ 1+\lambda=(1-\lambda)\mathrm{i}\,z\big)\\ &\Leftrightarrow (z=-\mathrm{i})\vee\left(\exists\lambda\geq 0,\ z=\mathrm{i}\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\\ &\Leftrightarrow \big(\exists t\in\mathbb{R}\backslash]-1,1[,\ z=\mathrm{i}\,t\big)\end{aligned}$$



وعليه فإنّ أكبر مجموعة مفتوحة $\mathcal{D}$ يكون التابع arctan معرّفاً عليها هي

$$\mathcal{D}=\mathbb{C}\backslash\big(\mathrm{i}\big(\mathbb{R}\backslash]-1,1[\big)\big)$$

وهي مبيّنة في الشكل المجاور.

لمّا كان تابع اللوغاريتم الأساسي Log يأخذ قيمه في المجموعة $\mathbb{R}+\mathrm{i}\,]-\pi,\pi[$ استنتجنا أنّ التابع arctan يأخذ قيمه في المجموعة $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[+\mathrm{i}\,\mathbb{R}$، وتابع الظل tan معرّف تماماً على هذه المجموعة إذن

$$\begin{aligned}\forall z\in\mathcal{D},\ \tan(\arctan z) &= \frac{1}{\mathrm{i}}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}\arctan z}-e^{-\mathrm{i}\arctan z}}{e^{\mathrm{i}\arctan z}+e^{\mathrm{i}\arctan z}}=-\mathrm{i}\cdot\frac{e^{2\mathrm{i}\arctan z}-1}{e^{2\mathrm{i}\arctan z}+1}\\ &= -\mathrm{i}\cdot\frac{\frac{1+\mathrm{i}\,z}{1-\mathrm{i}\,z}-1}{\frac{1+\mathrm{i}\,z}{1-\mathrm{i}\,z}+1}=-\mathrm{i}\cdot\frac{2\mathrm{i}\,z}{2}=z\end{aligned}$$

نلاحظ باشتقاق طرفي المساواة $\tan(\arctan z)=z$ المحقّقة في $\mathcal{D}$ أنّ

$$\forall z\in\mathcal{D},\quad \tan'\big(\arctan z\big)\cdot\arctan' z=1$$

أو

$$\forall z \in \mathcal{D},\quad \Big(1+\tan^2(\arctan z)\Big)\cdot \arctan' z = 1$$

وهذا يُكتب بالشكل $\forall z \in \mathcal{D},\quad (1+z^2)\cdot \arctan' z = 1$ ، ومن ثَمّ

$$\forall z \in D(0,1),\quad \arctan' z = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

فإذا تنبّهنا إلى أنّ $\arctan 0 = 0$ استنتجنا أنّ

$$\forall z \in D(0,1),\quad \arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$$

واستناداً إلى مبرهنة Abel المتعلّقة بالمتسلسلات العدديّة –راجع الفصل الثالث في الجزء الأوّل– نعلم أنّ المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{(2n+1)\mathrm{i}\theta}$ متقاربة في حالة $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. وعليه بالاستفادة من مبرهنة Abel المتعلّقة بالمتسلسلات الصحيحة–راجع الفصل السابع عشر في هذا الجزء– نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{(2n+1)\mathrm{i}\theta} &= \lim_{r\to 1} \arctan(re^{\mathrm{i}\theta}) = \arctan(e^{\mathrm{i}\theta})\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \operatorname{Log} \frac{1+\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\theta}}{1-\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\theta}}\end{aligned}$$

فإذا عرّفنا $2\varphi = \frac{\pi}{2}-\theta$ صارت $\varphi \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ وصار

$$\frac{1-e^{-2\mathrm{i}\varphi}}{1+e^{-2\mathrm{i}\varphi}} = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi}-e^{-\mathrm{i}\varphi}}{e^{\mathrm{i}\varphi}+e^{-\mathrm{i}\varphi}} = \mathrm{i}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \mathrm{i}\tan\varphi$$

إذن

$$\frac{1}{2\mathrm{i}} \operatorname{Log} \frac{1+\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\theta}}{1-\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\ln\tan\varphi + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\mathrm{i}}{2}\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

ومنه

$$\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{(2n+1)\mathrm{i}\theta} = \frac{\pi}{4} - \frac{\mathrm{i}}{2}\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

وهذا يُكافئ

$$\forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\big((2n+1)\theta\big)=\frac{\pi}{4}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sin\big((2n+1)\theta\big)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

وبذلك يكتمل حلّ التمرين.

التمرين 8. لتكن المجموعات F_1 و F_2 و F_3 التالية :

$$F_1 = [0,1]\cup\left\{e^{\mathrm{i}\theta} : 0<\theta<\tfrac{\pi}{2}\right\}\cup\Big(\mathrm{i}\,[1,+\infty[\Big),$$

$$F_2 = \left\{u+\mathrm{i}\sin 2\pi u : u\in\mathbb{R}\right\},$$

$$F_3 = \left\{re^{2\pi\mathrm{i}r}\in\mathbb{C} : r\in\mathbb{R}\right\},$$

أثبت أنّه، أيّاً كان k من $\{1,2,3\}$ يوجد تعيينٌ مستمرٌّ للزاوية Θ_k على كلٍّ من المجموعات المفتوحة $\Omega_k=\mathbb{C}\backslash F_k$.

الحل

في حالة $z=x+\mathrm{i}y$ من $\mathbb{C}^*$، نكتب $z=re^{\mathrm{i}\theta}$ حيث $r=|z|$ و $\theta\in[0,2\pi[$.

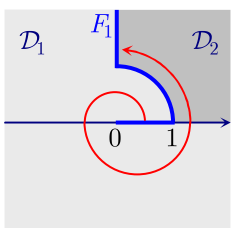
- نعرّف التابع Θ_1 على $\Omega_1=\mathbb{C}\backslash F_1$ كما يأتي:

$$\Theta_1(z)=\begin{cases}\theta & : \quad z\in\mathcal{D}_1\\ \theta+2\pi & : \quad z\in\mathcal{D}_2\end{cases}$$

حيث $\{\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2\}$ هي التجزئة للمجموعة Ω_1 المعرّفة كما يلي :

$$\mathcal{D}_1=\Big\{x+\mathrm{i}y : (x<0)\vee(y<0)\vee\Big((x\geq 0)\wedge(y>0)\wedge(x^2+y^2<1)\Big)\Big\}$$
$$\mathcal{D}_2=\Big\{x+\mathrm{i}y : (x>0)\wedge(y\geq 0)\wedge(x^2+y^2>1)\Big\}$$

والشكل الآتي يوضّح هذا التعريف



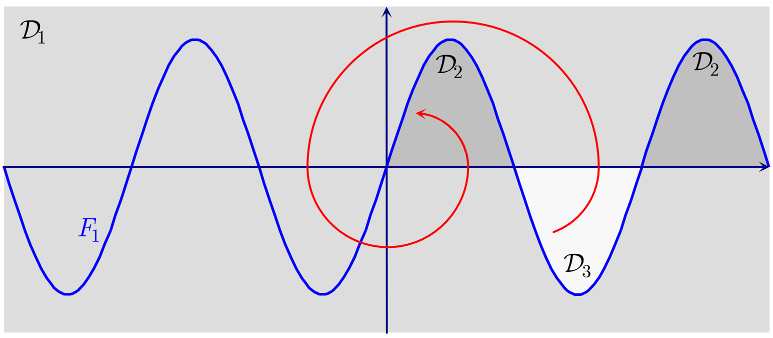
- ونعرّف التابع Θ_2 على $\Omega_2 = \mathbb{C}\backslash F_2$ كما يلي :

$$\Theta_2\left(z\right) = \begin{cases} \theta & : \quad z \in \mathcal{D}_1 \\ \theta + 2\pi & : \quad z \in \mathcal{D}_2 \\ \theta - 2\pi & : \quad z \in \mathcal{D}_3 \end{cases}$$

حيث $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3\}$ هي التجزئة للمجموعة Ω_2 المعرّفة كما يأتي:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2 &= \left\{x + \mathrm{i}\,y : (x > 0) \wedge \left(0 \leq y < \sin 2\pi x\right)\right\} \\ \mathcal{D}_3 &= \left\{x + \mathrm{i}\,y : (x > 0) \wedge \left(\sin 2\pi x < y \leq 0\right)\right\} \\ \mathcal{D}_1 &= \Omega_2 \backslash \left(\mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3\right) \end{aligned}$$

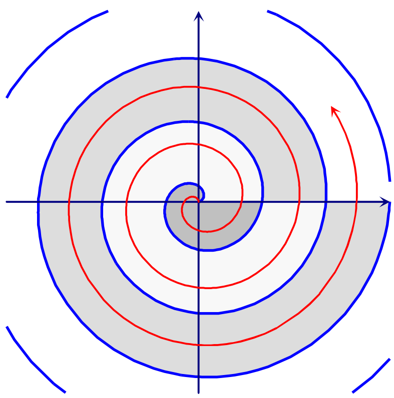
والشكل الآتي يوضّح هذا التعريف.



- وأخيراً نعرّف التابع Θ_2 على $\Omega_3 = \mathbb{C}\backslash F_3$ كما يلي :

$$\Theta_3(z) = \theta + 2\pi\,\mathrm{card}\left([0, z] \cap F_3\right)$$

والشكل الآتي يوضّح هذا التعريف.



وبذا يتمّ المطلوب. ∎

التمرين 9. ليكن z عدداً من $\mathbb{C}^*$. أوجد جميع القيم الممكنة للمقدار $z^{\mathrm{i}/2}$.

الحل

في الحقيقة، لنفترض أنّ $z = re^{\mathrm{i}\theta_0}$، عندئذ

$$\begin{aligned} z^{\mathrm{i}/2} \in \quad & \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\log z\right) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\ln r + \mathrm{i}\,\theta_0 + 2\pi\,\mathrm{i}\,\mathbb{Z}\right)\right) \\ & = \left\{ e^{-\theta_0/2}\left(\cos\frac{\ln r}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\ln r}{2}\right)e^{\pi k} \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

وهي النتيجة المرجوّة.

التمرين 10. ليكن $f : \mathbb{L} \to \mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً على $\mathbb{L} = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$. نعرّف

$$\begin{aligned} \forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi, +\pi\right[, \quad P(r,\theta) &= \mathrm{Re}(f(re^{\mathrm{i}\theta})) \\ Q(r,\theta) &= \mathrm{Im}(f(re^{\mathrm{i}\theta})) \end{aligned}$$

1. أثبت أنّه، على المجموعة $\mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi, +\pi\right[$، يكون لدينا

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} \quad \text{و} \quad \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$$

2. عيِّن التوابع الهولومورفيّة على $\mathbb{L}$ والتي لا يتعلّق جزؤها الحقيقيُّ إلا بالمقدار $|z|$.

الحل

1. لنذكِّر أنّ $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$. ولنلاحظ ما يلي :

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = x\frac{\partial P}{\partial y} - y\frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{و} \quad r\frac{\partial P}{\partial r} = x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = x\frac{\partial Q}{\partial y} - y\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{و} \quad r\frac{\partial Q}{\partial r} = x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y}$$

ولكن استناداً إلى دساتير كوشي–ريمان لدينا

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

إذن بالتعويض نجد

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} \quad \text{و} \quad \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$$

2. ليكن إذن $f:\mathbb{L}\to\mathbb{C}$ تابعاً هولومورفيّاً، ولنفترض أنّ جزأه الحقيقي $(r,\theta)\mapsto P(r,\theta)$ يتبع r فقط أي $\forall r>0,\ P(r,\theta)=\lambda(r)$.

في هذه الحالة نستنتج أنّ $\dfrac{\partial P}{\partial\theta}=0$ ومنه $\dfrac{\partial Q}{\partial r}=0$، وعليه $Q(r,\theta)=\mu(\theta)$ أيّاً كانت θ من $]-\pi,\pi[$. فإذا استفدنا من الدستور $\dfrac{\partial P}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial Q}{\partial\theta}$ المبرهَن عليه آنفاً، استنتجنا أنّ

$$\forall\theta\in\,]-\pi,\pi[,\forall r>0,\quad r\lambda'(r)=\mu'(\theta)$$

وهكذا نستنتج وجود ثابتٍ حقيقي κ يُحقِّق

$$\forall r>0,\ r\lambda'(r)=\kappa \quad \text{و} \quad \forall\theta\in\,]-\pi,\pi[,\ \mu'(\theta)=\kappa$$

وعليه توجد ثوابت حقيقيّة (κ,α,β) تُحقّق

$$\forall r>0,\ \lambda(r)=\kappa\ln r+\beta \quad \text{و} \quad \forall\theta\in\,]-\pi,\pi[,\ \mu(\theta)=\kappa\theta+\alpha$$

وعليه يوجد (κ,ω) في $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ يُحقِّق

$$\forall z\in\mathbb{L},\quad f(z)=\kappa\,\mathrm{Log}\,z+\omega$$

إذن، مجموعة التوابع الهولومورفيّة على $\mathbb{L}$ التي لا يتعلّق جزؤها الحقيقي إلّا بالمقدار $\left|z\right|$ هي

$$\left\{z\mapsto\kappa\,\mathrm{Log}\,z+\omega:(\kappa,\omega)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}\right\}$$

التمرين 11. ليكن Γ_1 و Γ_2 طريقين مغلقين من الصف C^1 قِطَعيّاً، ومحتويَيْن في $\mathbb{C}^*$. ومعرّفين بالتمثيلين الوسيطين $\varphi_1:[0,1]\to\mathbb{C}$ و $\varphi_2:[0,1]\to\mathbb{C}$ على الترتيب.

1. ليكن Γ_3 الطريق المغلق المعرّف بالتمثيل الوسيطي

$$\varphi_3:[0,1]\to\mathbb{C},\ \varphi_3(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t)$$

أثبت أنّ $\mathrm{Ind}(0,\Gamma_3)=\mathrm{Ind}(0,\Gamma_1)+\mathrm{Ind}(0,\Gamma_2)$.

2. نفترض أنّ $\forall t\in[0,1],\ \left|\varphi_1(t)\right|<\left|\varphi_2(t)\right|$. ونعرّف الطريق المغلق Γ_4 بالتمثيل الوسيطي :

$$\varphi_4:[0,1]\to\mathbb{C},\ \varphi_4(t)=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)$$

أثبت أنّ $\mathrm{Ind}(0,\Gamma_4)=\mathrm{Ind}(0,\Gamma_2)$.

3. ليكن Γ_1 و Γ_2 طريقين مغلقين من الصف C^1 قِطَعِيّاً ومعرّفين بالتمثيلين الوسيطين $\varphi_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ و $\varphi_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ على الترتيب. وليكن ω عدداً عقدياً يُحقّق الشرط:

$$\forall t \in [0,1], \quad \left|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\right| < \left|\omega - \varphi_2(t)\right|$$

عندئذ يكون $\mathrm{Ind}(\omega, \Gamma_1) = \mathrm{Ind}(\omega, \Gamma_2)$.

الحل

1. في الحقيقة لدينا

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(0, \Gamma_3) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_3} \frac{\mathrm{d}\, z}{z} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^1 \frac{\varphi_3'(t)}{\varphi_3(t)} \mathrm{d}\, t \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^1 \left(\frac{\varphi_1'(t)}{\varphi_1(t)} + \frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_2(t)} \right) \mathrm{d}\, t \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_1} \frac{\mathrm{d}\, z}{z} + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_2} \frac{\mathrm{d}\, z}{z} = \mathrm{Ind}(0, \Gamma_1) + \mathrm{Ind}(0, \Gamma_2)\end{aligned}$$

2. لنعرّف $\psi_1 : [0,1] \to \mathbb{C},\ \psi_1(t) = 1 + \dfrac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}$. عندئذ يكون ψ_1 التمثيل الوسيطي لطريق مغلق $\tilde{\Gamma}_1$ ينتمي إلى الصف C^1 قِطَعيّاً. وهو يُحقّق المتراجحة

$$\forall t \in [0,1], \quad \left|\psi_1(t) - 1\right| < 1$$

إذن فالطريق $\tilde{\Gamma}_1$ محتوى في القرص المفتوح $D(1,1)$، ومن ثَمّ يكون $\mathrm{Ind}(0, \tilde{\Gamma}_1) = 0$. ولكن لدينا وضوحاً $\varphi_4 = \psi_1 \varphi_2$، فإذا استفدنا من نتيجة السؤال السابق استنتجنا أنّ

$$\mathrm{Ind}(0, \Gamma_4) = \mathrm{Ind}(0, \Gamma_2)$$

3. نلاحظ أنّه إذا وُجدت t_0 تُحقّق $\varphi_2(t_0) = \omega$ لكان $\left|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\right| < 0$ وهذا تناقضٌ، وكذلك إذا وُجدت t_1 تُحقّق $\varphi_1(t_1) = \omega$ لكان $\left|\omega - \varphi_2(t_1)\right| < \left|\omega - \varphi_2(t_1)\right|$ وهذا تناقضٌ أيضاً. نستنتج إذن أنّ الطريقين Γ_1 و Γ_2 محتويان في المجموعة $\mathbb{C} \backslash \{\omega\}$. لنتأمّل إذن الطريقين :

$$\begin{aligned}&\psi_1 : [0,1] \to \mathbb{C},\ \psi_1(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \\ &\psi_2 : [0,1] \to \mathbb{C},\ \psi_1(t) = \varphi_2(t) - \omega\end{aligned}$$

فيكون ψ_2 التمثيل الوسيطي لطريق مغلق في $\mathbb{C}^*$ من الصف C^1 قِطعيّاً، ويكون ψ_1 التمثيل الوسيطي لطريق مغلق من الصف C^1 قِطعيّاً ويُحقِّق هذا التمثيلان المتراجحة

$$\forall t \in [0,1], \quad \left|\psi_1(t)\right| < \left|\psi_2(t)\right|$$

وبالاستفادة من نتيجة الطلب السابق، نجد

$$\operatorname{Ind}\left(0, \operatorname{Im}\psi_2\right) = \operatorname{Ind}\left(0, \operatorname{Im}\left(\psi_2 + \psi_1\right)\right)$$

أو

$$\operatorname{Ind}\left(\omega, \Gamma_2\right) = \operatorname{Ind}\left(\omega, \Gamma_1\right)$$

■

التمرين 12.

1. ليكن a عدداً عقدياً يُحقِّق $0 < |a| < 1$. وليكن التابع

$$m : \mathbb{C}\backslash\left\{-1/\bar{a}\right\} \to \mathbb{C}, \quad m(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$$

أثبت صحة الاقتضاءين:

$$|z| < 1 \Rightarrow \left|m(z)\right| < 1$$
$$|z| = 1 \Rightarrow \left|m(z)\right| = 1$$

2. ليكن $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ تابعاً هولومورفيّاً. نفترض أنّ

$$\forall z \in D(0,1), \quad \left|f(z)\right| < 1$$

ونعرِّف

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}f(z)}$$

① احسب $\varphi'(0)$.

② استنتج، باستخدام تكاملٍ، أنّ $\left|f'(0)\right| \le 1 - \left|f(0)\right|^2$.

③ أثبت أنّه، مهما تكن ω من $D(0,1)$ ، يكن

$$\frac{\left|f'(\omega)\right|}{1 - \left|f(\omega)\right|^2} \le \frac{1}{1 - |\omega|^2} .$$

الحل

1. لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}1-\left|m(z)\right|^2 &= \frac{|1+\bar{a}z|^2 \ - \ |a+z|^2}{|1+\bar{a}z|^2}\\ &= \frac{1+2\,\mathrm{Re}(\bar{a}z)+|a|^2|z|^2 \ -|a|^2 \ -2\,\mathrm{Re}(\bar{a}z)\ -|z|^2}{|1+\bar{a}z|^2}\\ &= \frac{1+|a|^2|z|^2 \ -|a|^2 \ -|z|^2}{|1+\bar{a}z|^2} = \frac{1-|a|^2}{|1+\bar{a}z|^2}\left(1-|z|^2\right)\end{aligned}$$

إذن، لقد أثبتنا في آن معاً التكافؤين التاليين :

$$\begin{aligned}\left|z\right|<1 &\Leftrightarrow \left|m(z)\right|<1\\ \left|z\right|=1 &\Leftrightarrow \left|m(z)\right|=1\end{aligned}$$

2.① لنرمز بالرمز m_a دلالة على التابع m الذي درسناه في الطلب السابق. عندئذ يكون لدينا

$$\varphi = m_{-f(0)}\circ f$$

ولمّا كان $-f(0)$ عنصراً من $D(0,1)$ استنتجنا أنّ φ معرّفٌ على $D(0,1)$ ويأخذ قيمه في $D(0,1)$ وذلك استناداً إلى 1. ونلاحظ بحساب مباشر أنّ

$$\varphi'(0)=\frac{f'(0)}{1-|f(0)|^2}$$

2.② ليكن r عدداً ما من $]0,1[$. لمّا كان φ هولومورفيّاً على $D(0,1)$ استنتجنا من مبرهنة كوشي أنّه مهما يكن ω من $D(0,r)$ يكن

$$\varphi(\omega)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int\limits_{C^+(0,r)}\frac{\varphi(\xi)}{\xi-\omega}\,\mathrm{d}\,\xi$$

ومن ثَمّ

$$\varphi'(\omega)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int\limits_{C^+(0,r)}\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-\omega)^2}\,\mathrm{d}\,\xi$$

إذن

$$\varphi'(0)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int\limits_{C^+(0,r)}\frac{\varphi(\xi)}{\xi^2}\,\mathrm{d}\,\xi=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\varphi(re^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\,\theta$$

ولأنّ φ يأخذ قيمه في القرص $D(0,1)$ نستنتج من النتيجة السابقة أنّ

$$\left|\varphi'(0)\right| \leq \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\left|\varphi(re^{\mathrm{i}\theta})\right|\mathrm{d}\,\theta \leq \frac{1}{r}$$

ولأنّ r عددٌ كيفي من $]0,1[$ نستنتج بجعل r تسعى إلى الواحد أنّ $\left|\varphi'(0)\right| \leq 1$، ومنه

$$\left|f'(0)\right| \leq 1 - \left|f(0)\right|^2$$

③.2 ليكن ω عنصراً من $D(0,1)$. ولنضع $g = f \circ m_\omega$، عندئذ يكون g تابعاً هولومورفيّاً على $D\left(0,1\right)$ ويُحقّق الشرط $\forall z \in D(0,1),\ \left|g(z)\right| < 1$. إذن استناداً إلى ما أثبتناه آنفاً يكون لدينا

$$\left|g'(0)\right| \leq 1 - \left|g(0)\right|^2$$

وهذا يُكافئ، بالعودة إلى f، ما يلي :

$$\frac{\left|f'(\omega)\right|}{1-\left|f(\omega)\right|^2} \leq \frac{1}{1-\left|\omega\right|^2}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 13. ليكن $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ تابعاً هولومورفيّاً. نفترض أنّه يُحقّق الشرطين

$$\forall z \in D(0,1),\quad \left|f(z)\right| \leq 1 \quad \text{و} \quad f(0) = 0$$

1. أثبت أنّ التابع $z \mapsto \dfrac{f(z)}{z}$ يقبل التمديد إلى تابع هولومورفي على $D(0,1)$.
2. لتكن r من $]0,1[$. أثبت أنّ

$$0 < |z| \leq r \Rightarrow \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{r}$$

واستنتج أنّ

$$\forall z \in D(0,1),\quad \left|f(z)\right| \leq |z|$$

3. نفترض أنه يوجد في $D(0,1)$ عنصر $z_0 \neq 0$ يُحقّق $\left|f(z_0)\right| = \left|z_0\right|$. أثبت أنّه يوجد عددٌ حقيقي θ يُحقّق

$$\forall z \in D(0,1),\quad f(z) = e^{\mathrm{i}\theta}z$$

الحل

1. لمّا كان f تحليليّاً في القرص $D(0,1)$ استنتجنا أنّه يُنشر بمتسلسلة صحيحة في هذا القرص أي إنّه يُكتب بالشكل

$$\forall z \in D(0,1), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ولكن $a_0 = f(0) = 0$ إذن

$$\forall z \in D(0,1)\backslash\{0\}, \quad \frac{f(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n$$

ولأنّ التابع $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n$ تحليلي في القرص $D(0,1)$ استنتجنا أنّ $z \mapsto \dfrac{f(z)}{z}$ يقبل التمديد إلى تابع تحليلي في القرص $D(0,1)$.

2. ليكن r عدداً ما من $]0,1[$. بالاستفادة من مبدأ الطويلة العظمى مطبّقاً على التابع g يمكننا أن نكتب

$$\sup_{z \in \bar{D}(0,r)} \left|g(z)\right| = \sup_{|z|=r} \left|g(z)\right| = \sup_{|z|=r} \left|\frac{f(z)}{z}\right| = \frac{1}{r} \sup_{|z|=r} \left|f(z)\right| \leq \frac{1}{r}$$

ومن ثَمّ : $\forall z \in \bar{D}(0,r), \quad \left|f(z)\right| \leq \dfrac{|z|}{r}$. وهذا يقتضي، لأنّ r عددٌ كيفي ما من $]0,1[$، أنّ

$$\forall z \in D(0,1), \quad \left|f(z)\right| \leq |z|$$

3. لقد رأينا أنّ التابع $z \mapsto g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ هولومورفي في $D(0,1)$ وهو يُحقّق استناداً إلى ما سبق

$$\forall z \in D(0,1), \quad \left|g(z)\right| \leq 1$$

لنفترض أنّ z_0 في $D(0,1)\backslash\{0\}$ يُحقّق $\left|f(z_0)\right| = \left|z_0\right|$، عندئذ، نضع $r_0 = \frac{1}{2}(1-|z_0|)$ فيكون

$$\left|g(z_0)\right| \geq \sup_{|\xi|=r_0} \left|g(z_0 + \xi)\right|$$

واستناداً إلى مبدأ الطويلة العظمى، يكون التابع g ثابتاً على القرص $D(0,1)$. وعليه يوجد ثابتٌ λ يُحقّق $\forall z \in D(0,1),\ g(z) = \lambda$، ولأنّ $\left|g(z_0)\right| = 1$ استنتجنا أنّ $\lambda = e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$.

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّه إذا وُجِدَ عددٌ عقدي z_0 في $D(0,1)\setminus\{0\}$ يُحقّق $\left|f(z_0)\right| = \left|z_0\right|$، فيوجد ثابتٌ حقيقي θ يُحقّق

$$\forall z \in D(0,1), \quad f(z) = e^{i\theta} z$$

ملاحظة. إذا كان $f : D(0,1) \to D(0,1)$ تقابلاً هولومورفيّاً هو وتابعه العكسي، مع $f(0) = 0$، استنتجنا بتطبيق ما سبق على التابعين f و f^{-1} أنّه يوجد θ في $\mathbb{R}$ يُحقّق $f(z) = e^{i\theta} z$، وذلك أيّاً كانت z من $D(0,1)$. وبالاستفادة من التابع m_a في التمرين السابق يمكن التخلّص من الشرط $f(0) = 0$ وتعيين جميع التقابلات الهولومورفيّة هي وتوابعها العكسيّة من $D(0,1)$ إلى نفسه.

التمرين 14. ليكن $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ تابعاً هولومورفيّاً نفترض أنّه توجد أعداد حقيقيّة موجبة تماماً (α, β, μ) تحقّق الشرط $\forall z \in \mathbb{C}, \left|f(z)\right| \le \alpha + \beta \left|z\right|^{\mu}$. أثبت أنّه يوجد في $\mathbb{C}[X]$ كثير حدود P يُحقّق: $\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = P(z)$.

الحل

التابع f تحليلي في $\mathbb{C}$ إذن يُكتب متسلسلة صحيحة: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n$ في حالة z من $\mathbb{C}$. ليكن R عدداً موجباً تماماً، إذن استناداً إلى متراجحات كوشي لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|a_n\right| \le \frac{M(R)}{R^n}$$

حيث

$$M(R) = \sup_{|z|=R} \left|f(z)\right| \le \alpha + \beta R^{\mu}$$

فإذا كان $n > \left\lfloor \mu \right\rfloor$ استنتجنا من المتراجحة $\left|a_n\right| \le \alpha R^{-n} + \beta R^{\mu - n}$ بجعل R تسعى إلى اللانهاية أنّ $a_n = 0$. إذن يكفي أن نأخذ $P(X) = \sum_{n=0}^{\lfloor \mu \rfloor} a_n X^n$ ليتمّ الإثبات.

التمرين 15. ليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعاً هولومورفيّاً على مجموعة مفتوحة و**محدّبة** Ω في $\mathbb{C}$.
نفترض أنّ $\forall z\in\Omega,\ \mathrm{Re}(f'(z))>0$. أثبت أنّ f تابع متباين. ثُمّ طبّق هذه النتيجة لتُثبتَ أنّ التابعين الآتيَيْن متباينان:

$$f_1 : D(0,1)\to\mathbb{C} : z\mapsto f_1(z)=a+nz+z^n, \qquad (n\geq 2)$$
$$f_2 : \left\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z<0\right\}\to\mathbb{C} : z\mapsto f_2(z)=z+e^z$$

الحل

لنتأمّل عنصرين ξ و ζ من Ω يُحقّقان $f(\xi)=f(\zeta)$. عندئذ يكون لدينا

$$\int\limits_{[\zeta,\xi]} f'(z)\,\mathrm{d}\,z = f(\xi)-f(\zeta)=0$$

أو

$$(\xi-\zeta)\int\limits_0^1 f'\big(\zeta+t(\xi-\zeta)\big)\,\mathrm{d}\,t=0$$

فإذا كان $\xi\neq\zeta$ استنتجنا مما سبق أنّ $\int_0^1 f'\big(\zeta+t(\xi-\zeta)\big)\,\mathrm{d}\,t=0$ ومن ثَمّ

$$\int\limits_0^1 \mathrm{Re}\, f'\big(\zeta+t(\xi-\zeta)\big)\,\mathrm{d}\,t=0$$

ولكن استناداً إلى الفرضْ، التابع

$$t\mapsto \mathrm{Re}\, f'\big(\zeta+t(\xi-\zeta)\big)$$

تابعٌ مستمرٌّ وموجبٌ تماماً على $[0,1]$ فلا بُدَّ أن يكون تكامله على هذا المجال موجبٌ تماماً أيضاً.
وهذا التناقض يبرهن أنّ $\xi=\zeta$. والتابع f تابعٌ متباينٌ.
وأخيراً نترك تفاصيل التطبيق المُباشر ليُنجزها القارئ. ■

التمرين 16. ليكن $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ تابعاً هولومورفيّاً غير ثابت وليس له أصفار في $\mathbb{C}$. أثبت أنّ

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^{*2},\ \exists z\in\mathbb{C},\quad \big(|z|>\alpha\big)\wedge\big(|f(z)|<\beta\big)$$

الحل

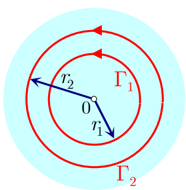
لنتأمّل التابع $g = 1/f$ الهولومورفي في $\mathbb{C}$. وليكن α عدداً من $\mathbb{R}_+^*$. لمّا كان g مستمرّاً على القرص $\bar{D}(0,\alpha)$ استنتجنا أنّه محدودٌ على هذا القرص، وأمكننا أن نعرّف $M_\alpha = \sup\limits_{\bar{D}(0,\alpha)} |g|$.

ليكن β عدداً من $\mathbb{R}_+^*$. إذا كان $\forall z \notin \bar{D}(0,\alpha), \left|g(z)\right| \leq \beta^{-1}$ استنتجنا في هذه الحالة أنّ التابع g محدود في $\mathbb{C}$ بالعدد $\max(M_\alpha, \beta^{-1})$ ، فهو ثابتٌ استناداً إلى مبرهنة Liouville . وهذا يناقض الفرْض. إذن يوجد z خارج $\bar{D}(0,\alpha)$ يُحقّق $\left|g(z)\right| > \beta^{-1}$ أو $\left|f(z)\right| < \beta$. ■

التمرين 17. ليكن $f : D(0,1)\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً. أثبت أنّ قيمة التكامل $\int_0^{2\pi} f(re^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\,\theta$ لا تتعلّق بالعدد r من $]0,1[$.

الحل

ليكن r_1 و r_2 عددين من المجال $]0,1[$، ولنتأمّل التابع الهولومورفي $g : z \mapsto f(z)/z$ على المجموعة $\Omega = D(0,1)\backslash\{0\}$. لمّا كانت الدائرة $\Gamma_2 = C^+(0,r_2)$ تشويهاً مستمرّاً للدائرة $\Gamma_1 = C^+(0,r_1)$ في Ω . استنتجنا أنّ



$$\int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}\,z = \int_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}\,z$$

وهذا يُكتب بالشكل

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(r_1e^{\mathrm{i}\theta})}{r_1e^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{i}\,r_1e^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\,\theta = \int_0^{2\pi} \frac{f(r_2e^{\mathrm{i}\theta})}{r_2e^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{i}\,r_2e^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\,\theta$$

أو

$$\int_0^{2\pi} f(r_1e^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\,\theta = \int_0^{2\pi} f(r_2e^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\,\theta$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 18. ليكن $\rho : [0,2\pi] \to \mathbb{R}_+^*$ تابعاً من الصف C^1 ويُحقِّق $\rho(0) = \rho(2\pi)$.

وليكن Γ الطريق المغلق من الصف C^1 المعرّف بالتمثيل الوسيطي

$$\varphi : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, \varphi(\theta) = \rho(\theta)e^{i\theta}$$

- أثبت أنّ للمجموعة المفتوحة $\Omega = \mathbb{C}\backslash\Gamma$ مركّبتين مترابطتين Ω_0 و Ω_∞، إحداهما، ولتكن Ω_∞، غير محدودة.
- ثُمّ أثبت أنّ

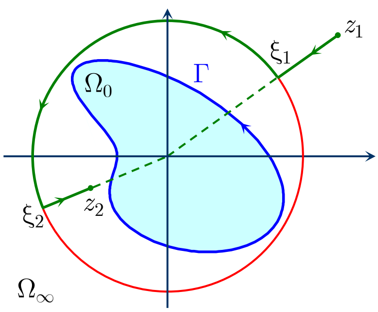
$$\forall z \in \Omega, \quad \mathrm{Ind}(z,\Gamma) = \begin{cases} 0 & : \quad z \in \Omega_\infty \\ 1 & : \quad z \in \Omega_0 \end{cases}$$

الحل

لنعرّف المجموعتين

$$\Omega_0 = \left\{ re^{i\theta} : 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r < \rho(\theta) \right\}$$
$$\Omega_\infty = \left\{ re^{i\theta} : 0 \le \theta \le 2\pi, \rho(\theta) < r \right\}$$

فنلاحظ وضوحاً أنّ $(\Omega_0, \Omega_\infty)$ تجزئة مفتوحة للمجموعة $\Omega = \mathbb{C}\backslash\Gamma$. ونلاحظ أنّ Ω_0 مترابطة لأنّها نجميّة بالنسبة إلى المبدأ 0.



لنثبتْ أنّ Ω_∞ مترابطة أيضاً. لمّا كان التابع ρ مستمرّاً على المجال المتراص $[0,2\pi]$ كان محدوداً، لنختر إذن عدداً R يُحقّق $R > \sup\limits_{[0,2\pi]} \rho$.

ليكن $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ عنصرين من Ω_∞. نعرّف النقطتين $\xi_1 = Re^{i\theta_1}$ و $\xi_2 = Re^{i\theta_2}$ من الدائرة $C(0,R)$، ونتأمّل الطريق

$$\tilde{\Gamma} = \left[z_1, \xi_1 \right] \cup \overset{\frown}{\xi_1, \xi_2} \cup \left[\xi_2, z_2 \right]$$

وقد رمزنا بالرمز $\overset{\frown}{\xi_1, \xi_2}$ إلى القوس من الدائرة $C(0,R)$ الذي يبدأ عند ξ_1 وينتهي عند ξ_2 مرسوماً بالاتجاه الموجب، فنلاحظ أنّ $\tilde{\Gamma}$ طريق يصل z_1 بالنقطة z_2 وموجود كاملاً في Ω_∞. بذا نكون قد أثبتنا أنّ المجموعة Ω_∞ مترابطة، وهي وضوحاً غير محدودة.

نعلم أنّ التابع $\operatorname{Ind}(\cdot,\Gamma)$ ثابتٌ على كلٍّ من المجموعتين Ω_∞ و Ω_0، وهو معدومٌ على Ω_∞ لأنّها غير محدودة. أمّا قيمته على Ω_0 فهي تساوي $\operatorname{Ind}(0,\Gamma)$ لأنّ 0 ينتمي إلى Ω_0.
ولكن

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}(0,\Gamma) &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}\,z}{z} = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_0^{2\pi} \frac{\rho'(\theta)e^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{i}\,\rho(\theta)e^{\mathrm{i}\,\theta}}{\rho(\theta)e^{\mathrm{i}\,\theta}}\,\mathrm{d}\,\theta\\ &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)} + \mathrm{i}\right)\mathrm{d}\,\theta = 1 + \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\frac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)}\,\mathrm{d}\,\theta\\ &= 1 + \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\ln\frac{\rho(2\pi)}{\rho(0)} = 1\end{aligned}$$

وهذا يثبت النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 19. ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{C}^2$، وليكن Γ طريقاً مغلقاً من الصف C^1 قِطَعِيّاً في $\mathbb{C}\backslash\{a,b\}$. نفترض أنّ $\operatorname{Ind}(a,\Gamma) = \operatorname{Ind}(b,\Gamma)$. احسب

$$\mathcal{I} = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}\,z}{(z-a)(z-b)}$$

ثُمّ احسب، أياًكان (n,m) من $\mathbb{N}^{*2}$، التكامل

$$\mathcal{I}_{n,m} = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}\,z}{(z-a)^n(z-b)^m}\ .$$

الحل

- في حالة $a=b$ نعلم أنّ $z\mapsto (z-a)^{-2}$ هو مشتق التابع $z\mapsto -(z-a)^{-1}$ على $\mathbb{C}\backslash\{a\}$، وعليه نستنتج أنّ $\mathcal{I}=0$ في هذه الحالة.
- أمّا في حالة $a\neq b$ فنلاحظ أنّ

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$$

ومنه

$$\mathcal{I} = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}\,z}{(z-a)(z-b)} = 2\pi\,\mathrm{i}\,\frac{\operatorname{Ind}(a,\Gamma) - \operatorname{Ind}(b,\Gamma)}{a-b} = 0$$

- وبوجه عام، في حالة $a=b$ نجد بأسلوب مماثل لما سبق أنّ $\mathcal{I}_{n,m} = 0$.

- لنفترض إذن أنّ $a \neq b$. ولنلاحظ العلاقة التدريجيّة الآتية، في حالة (n,m) من $\mathbb{N}^{*2}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{n,m} &= \int_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}\, z}{(z-a)^n(z-b)^m}\\
&= \frac{1}{b-a}\int_{\Gamma} \frac{(z-a)-(z-b)}{(z-a)^n(z-b)^m}\mathrm{d}\, z\\
&= \frac{1}{b-a}\int_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}\, z}{(z-a)^{n-1}(z-b)^m} - \frac{1}{b-a}\int_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}\, z}{(z-a)^n(z-b)^{m-1}}\\
&= \frac{1}{b-a}\left(\mathcal{I}_{n-1,m} - \mathcal{I}_{n,m-1}\right)
\end{aligned}$$

لتكن $\mathbb{P}_k$ الخاصّة:

$$\mathcal{I}_{n,m} = 0 \text{ في حالة } (n,m) \text{ من } \mathbb{N}^2 \text{ تُحقّق } n+m=k.$$

استناداً إلى الحالة السابقة أثبتنا أنّ $\mathbb{P}_2$ محقّقة. لنفترض أننّا أثبتنا صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_{k-1}$ في حالة $k \geq 3$، وضوحاً لدينا $\mathcal{I}_{k,0} = \mathcal{I}_{0,k} = 0$ حيث يوجد تابع أصلي للتابع $z \mapsto (z-c)^{-k}$ في حالة $c \in \{a,b\}$. لنتأمّل إذن (n,m) من $\mathbb{N}^{*2}$ تحقّق $n+m=k$. عندئذ يكون لدينا استناداً إلى فرض التدريج $\mathcal{I}_{n-1,m} = \mathcal{I}_{n,m-1} = 0$، وبناءً على العلاقة التدريجية السابقة نستنتج أنّ $\mathcal{I}_{n,m} = 0$ في هذه الحالة أيضاً. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $\mathbb{P}_k$ محقّقة مهما كان k أكبر تماماً من 1. ومنه

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^{*2},\ \mathcal{I}_{n,m} = 0$$

وذلك عندما $\mathrm{Ind}(a,\Gamma) = \mathrm{Ind}(b,\Gamma)$. ■

التمرين 20. ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{C}^2$، يُحقِّق $|a| < |b|$، وليكن العدد r من المجال $]|a|,|b|[$. احسب

$$\mathcal{I} = \int_{C^+(0,r)} \frac{\mathrm{d}\, z}{(z-a)(z-b)}$$

ثُمّ احسب، أيّاً كان (n,m) من $\mathbb{N}^{*2}$، التكامل

$$\mathcal{I}_{n,m} = \int_{C^+(0,r)} \frac{\mathrm{d}\, z}{(z-a)^n(z-b)^m}$$

الحل

باتّباع أسلوب التمرين السابق نجد أنّ

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_{C^+(0,r)} \frac{\mathrm{d}\,z}{(z-a)(z-b)}\\ &= \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{a-b}\Big(\operatorname{Ind}(a, C^+(0,r)) - \operatorname{Ind}(b, C^+(0,r))\Big)\\ &= \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{a-b}\big(1-0\big) = \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{a-b}\end{aligned}$$

لدراسة الحالة العامّة نلاحظ أنّ التابع $f : z \mapsto (z-b)^{-m}$ هولومورفي على قرص يحوي $C^+(0,r)$ وأنّ النقطة a تنتمي إلى $D(0,r)$ إذن

$$f^{(n-1)}(a) = \frac{(n-1)!}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{C^+(0,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}\,z = \frac{(n-1)!}{2\pi\,\mathrm{i}}\mathcal{I}_{n,m}$$

ومن ثَمّ

$$\frac{(-1)^{n-1}m\times(m+1)\times\cdots\times(m+n-2)}{(a-b)^{m+n-1}} = \frac{(n-1)!}{2\pi\,\mathrm{i}}\mathcal{I}_{n,m}$$

وعليه

$$\mathcal{I}_{n,m} = 2\pi\,\mathrm{i}\frac{(-1)^{n-1}(m+n-2)!}{(a-b)^{m+n-1}(n-1)!\cdot(m-1)!}$$

أو

$$\mathcal{I}_{n,m} = 2\pi\,\mathrm{i}\frac{(-1)^{n-1}}{(a-b)^{m+n-1}}C_{n+m-2}^{n-1}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 21.

① احسب التكامل $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z\cos z}{(1+z^2)\sin z}\,\mathrm{d}\,z$ في حالة $\Gamma = C^+(2+\mathrm{i},\sqrt{2})$.

② احسب التكامل $\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}\,z}{1+z^2}$ عندما يكون الطريق Γ هو القطع الناقص الذي معادلته $x^2+4y^2=1$ موجهاً بالاتجاه الموجب.

③ احسب التكامل $\int_\Gamma \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}\,z$ عندما $\Gamma = C^+(a,a)$ ، و $a\in\left]+1,+\infty\right[$.

④ احسب التكامل $\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2+a^2}\mathrm{d}\,z$ عندما $\Gamma = C^+(0,2a)$ ، و $a\in\mathbb{R}_+^*$.

⑤ احسب التكامل $\int_\Gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}\,z$ لمّا $\Gamma = C^+(0,\frac12)$ أو $\Gamma = C^+(1,\frac12)$.

الحل

① التابع $f : z\mapsto \frac{e^z\cos z}{(1+z^2)\sin z}$ هولومورفي في $\mathbb{C}\backslash\big(\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}\cup\pi\mathbb{Z}\big)$ وهذه المجموعة تحوي القرص المغلق $\bar{D}\big(2+i,\sqrt{2}\big)$ وعليه يكون $\int_{C^+(2+i,\sqrt{2})}\frac{e^z\cos z}{(1+z^2)\sin z}\mathrm{d}\,z = 0$.

② التابع $f : z\mapsto \frac{1}{1+z^2}$ هولومورفي في $\mathbb{C}\backslash\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$ وهذه المجموعة تحوي القرص القطعي الناقصي الذي معادلته $x^2+4y^2\le 1$ ، وعليه يكون $\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}\,z}{1+z^2} = 0$.

③ التابع $f : z\mapsto \frac{z}{1+z+z^2+z^3}$ هولومورفي في $\mathbb{C}\backslash\{\mathrm{i},-\mathrm{i},-1\}$ وهذه المجموعة تحوي القرص المغلق $\bar{D}(a,a)$ ، ولأنّ العدد 1 ينتمي إلى $D(a,a)$ أمكننا أن نكتب

$$f(1)\,\mathrm{Ind}(1,C^+(a,a)) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{C^+(a,a)}\frac{f(z)}{z-1}\mathrm{d}\,z$$

أو

$$\int_\Gamma \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}\,z = \frac{\pi\,\mathrm{i}}{2}$$

④ لحساب التكامل $\int_{\Gamma}\frac{e^z}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}\,z$ عندما $\Gamma=C^+(0,2a)$ ، و $a\in\mathbb{R}_+^*$. نلاحظ أنّ

$$\frac{e^z}{z^2+a^2}=\frac{1}{2a\,\mathrm{i}}\left(\frac{e^z}{z-\mathrm{i}\,a}-\frac{e^z}{z+\mathrm{i}\,a}\right)$$

ولكن، بالاستفادة من دستور كوشي، لدينا

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{e^z}{z-\mathrm{i}\,a}\,\mathrm{d}\,z=e^{\mathrm{i}\,a}\,\mathrm{Ind}\big(\mathrm{i}\,a,\Gamma\big)=e^{\mathrm{i}\,a}$$

و

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{e^z}{z+\mathrm{i}\,a}\,\mathrm{d}\,z=e^{-\mathrm{i}\,a}\,\mathrm{Ind}\big(-\mathrm{i}\,a,\Gamma\big)=e^{-\mathrm{i}\,a}$$

وعليه

$$\int_{\Gamma}\frac{e^z}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}\,z=\frac{1}{2a\,\mathrm{i}}\big(2\pi\,\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\,a}-2\pi\,\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\,a}\big)=\frac{\pi}{a}\big(e^{\mathrm{i}\,a}-e^{\mathrm{i}\,a}\big)=2\pi\,\mathrm{i}\frac{\sin a}{a}$$

⑤ لحساب التكامل $\int_{\Gamma}\frac{e^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}\,z$ عندما $\Gamma_1=C^+(0,\frac{1}{2})$ أو $\Gamma_2=C^+(1,\frac{1}{2})$.

نلاحظ ما يأتي :

- التابع $f:z\mapsto\frac{e^z}{(1-z)^3}$ هولومورفي على مجموعة مفتوحة تحوي $\bar{D}\big(0,\frac{1}{2}\big)$ إذن

$$\int_{\Gamma_1}\frac{e^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}\,z=\int_{\Gamma_1}\frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}\,z=2\pi\,\mathrm{i}\,f(0)\,\mathrm{Ind}(0,\Gamma_1)=2\pi\,\mathrm{i}$$

- التابع $g:z\mapsto e^z/z$ هولومورفي على مجموعة مفتوحة تحوي القرص $\bar{D}\big(1,\frac{1}{2}\big)$ إذن

$$\int_{\Gamma_2}\frac{e^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}\,z=-\frac{1}{2}\cdot2\int_{\Gamma_2}\frac{g(z)}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}\,z=-\frac{1}{2}g''(1)(2\pi\,\mathrm{i})\,\mathrm{Ind}\big(1,\Gamma_2\big)$$

وعليه

$$\int_{\Gamma_2}\frac{e^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}\,z=-e\pi\,\mathrm{i}$$ ■

التمرين 22. لتكن a من $\mathbb{C}^*$. احسب $\int_0^{2\pi} \ln\left|re^{i\theta} - a\right| d\theta$ في حالة $0 \leq r < |a|$.

الحل

ليكن α عدداً يُحقّق $|\alpha| = 1$. التابع $z \mapsto \operatorname{Log}(1 - \alpha z)$ هولومورفي في القرص $D(0,1)$ إذن، بالاستفادة من نتيجة التمرين 15. نستنتج أنّ التكامل $\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}(1 - \alpha r e^{i\theta})\, d\theta$ لا يتعلّق بالعدد r من المجال $]0,1[$، وبجعل r تسعى إلى الصفر نستنتج أنّ

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}(1 - \alpha r e^{i\theta})\, d\theta = 0$$

وذلك أيّاً كان r من $]0,1[$ وأيّاً كان α يُحقّق $|\alpha| = 1$. نستنتج إذن

$$\forall z \in D(0,1), \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{Log}(1 - z e^{i\theta})\, d\theta = 0$$

وبالنظر إلى الجزء الحقيقي فقط نرى أنّ

$$\forall z \in D(0,1), \quad \int_0^{2\pi} \ln|1 - z e^{i\theta}|\, d\theta = 0$$

فإذا اخترنا $z = r/a$ حيث $0 \leq r < |a|$ استنتجنا أنّ

$$\int_0^{2\pi} \ln|a - r e^{i\theta}|\, d\theta = 2\pi \ln|a|$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 23. لتكن a من $\mathbb{C}^*$ تُحقّق $|a| \neq 1$. احسب

$$\int_{C^+(0,1)} \frac{dz}{(z-a)(z-1/a)}$$

ثُمّ استنتج قيمة التكامل

$$J(a) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}.$$

الحل

لنعرّف في حالة a من $\mathbb{C}^*$ تُحقّق $|a| \neq 1$ التكامل

$$I(a) = \int_{C^+(0,1)} \frac{\mathrm{d}\, z}{(z-a)(z-1/a)}$$

نلاحظ أنّ $I(a) = I(1/a)$ إذن يمكننا أن نفترض $|a| < 1$، عندئذ يكون التابع $f : z \mapsto \dfrac{1}{z - 1/a}$ هولومورفيّاً على مجموعة مفتوحة تحوي $\bar{D}(0,1)$ ومن ثَمّ

$$I(a) = \int_{C^+(0,1)} \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}\, z = 2\pi\,\mathrm{i}\, f(a) \cdot \mathrm{Ind}(a, C^+(0,1)) = 2\pi\,\mathrm{i} \frac{a}{a^2 - 1}$$

إذن

$$I(a) = \int_{C^+(0,1)} \frac{\mathrm{d}\, z}{(z-a)(z-1/a)} = \begin{cases} 2\pi\,\mathrm{i} \dfrac{a}{a^2-1} & : \quad |a| < 1 \\ 2\pi\,\mathrm{i} \dfrac{a}{1-a^2} & : \quad |a| > 1 \end{cases}$$

وإذا تأمّلنا التمثيل الوسيطي $t \mapsto e^{\mathrm{i}\,t}$ للدائرة $C^+(0,1)$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_{C^+(0,1)} \frac{\mathrm{d}\, z}{(z-a)(z-1/a)} = \int_0^{2\pi} \frac{a\,\mathrm{i}\, e^{\mathrm{i}\,t}\, \mathrm{d}\, t}{(e^{\mathrm{i}\,t} - a)(a e^{\mathrm{i}\,t} - 1)} \\ &= -a\,\mathrm{i} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\, t}{1 - 2a\cos t + a^2} = -a\,\mathrm{i}\, J(a) \end{aligned}$$

وهكذا نستنتج أنّ

$$J(a) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\, t}{1 - 2a\cos t + a^2} = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{1-a^2} & : \quad |a| < 1 \\ \dfrac{2\pi}{a^2-1} & : \quad |a| > 1 \end{cases}$$

■

التمرين 24. لتكن z من $D(0,1)$، ولنضع $\forall\theta \in \mathbb{R},\ P_z(\theta) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right)$.

احسب المقدار : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_z(\theta)\,d\theta$.

الحل

لنفترض أنّ $z = re^{it}$، عندئذ

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} &= \frac{e^{i\theta}+re^{it}}{e^{i\theta}-re^{it}}\\ &= \frac{e^{i(\theta-t)}+r}{e^{i(\theta-t)}-r}\\ &= \frac{(e^{i(\theta-t)}+r)(e^{-i(\theta-t)}-r)}{(e^{i(\theta-t)}-r)(e^{-i(\theta-t)}-r)}\\ &= \frac{1-r^2-2\,i\,r\sin(\theta-t)}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\end{aligned}$$

ومن ثَمّ، في حالة $z = re^{it}$، لدينا

$$P_z(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}$$

فإذا استفدنا من كون التابع $\theta \mapsto P_z(\theta)$ يقبل العدد 2π دوراً استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_z(\theta)\,d\theta &= \frac{1-r^2}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\\ &= \frac{1-r^2}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}\end{aligned}$$

وأخيراً إذا استفدنا من نتيجة التمرين السابق استنتجنا أنّ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_z(\theta)\,d\theta = \frac{1-r^2}{2\pi}\cdot J(r) = 1$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 25. ليكن P كثير حدود غير ثابت من $\mathbb{C}[X]$. ولتكن K مجموعة متراصّة في $\mathbb{C}$ تحوي جميع جذور كثير الحدود P ، وأخيراً نعرّف $\Omega = \mathbb{C}\backslash K$.

1. نفترض أنّه يوجد n من $\mathbb{N}^*$ ، وتابعٌ هولومورفي $f : \Omega \to \mathbb{C}$ يُحقّقان
$$\forall z \in \Omega, \quad (f(z))^n = P(z)$$
i. احسب حين يكون $K \subset D(0, R)$ التكامل $\displaystyle\int_{C^+(0,R)} \frac{P'(z)}{P(z)} \,\mathrm{d}\, z$.

ii. بمُقارنة قيمة $\displaystyle\int_{C^+(0,R)} \frac{P'(z)}{P(z)} \,\mathrm{d}\, z$ و $\displaystyle\int_{C^+(0,R)} \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}\, z$ عندما تكون K محتواة في $D(0, R)$. أثبت أنّ n يقسم $\deg P$.

2. هل يوجد تابع هولومورفيّ $g : \Omega \to \mathbb{C}$ يُحقّق $\forall z \in \Omega, \quad e^{g(z)} = P(z)$ ؟

3. نفترض أنّه يوجد n من $\mathbb{N}^*$ ، وتابع مستمرٌّ $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ يُحقّقان
$$\forall z \in \Omega, \quad (\varphi(z))^n = P(z)$$
أثبت أنّ φ تابع هولومورفي واستنتج من جديد أنّ n تقسم $\deg P$.

الحل

$1.i$. لتكن a_1 و a_2 و ... و a_d جذور كثير الحدود P وقد كرّرنا كلّاً منها بقدر درجة مُضاعفته. عندئذ يمكننا أن نكتب
$$P(X) = \lambda(X - a_1)(X - a_2)\cdots(X - a_d)$$
حيث $d = \deg P$. ونجد بسهولة أنّ
$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - a_1} + \frac{1}{z - a_2} + \cdots + \frac{1}{z - a_d}$$
ولكن، أيّاً كانت k من $\{1, 2, \ldots, d\}$ ، لدينا
$$\int_{C^+(0,R)} \frac{1}{z - a_k} \,\mathrm{d}\, z = 2\pi\,\mathrm{i} \cdot \mathrm{Ind}(a_k, C^+(0, R)) = 2\pi\,\mathrm{i}$$
إذن
$$\int_{C^+(0,R)} \frac{P'(z)}{P(z)} \,\mathrm{d}\, z = 2\pi\,\mathrm{i} \cdot \deg P \qquad ❶$$

.ii.1 لمّا كان $(f(z))^n = P(z)$ $\forall z \in \Omega,$ استنتجنا أنّ

$$\forall z \in \Omega, \qquad \frac{P'(z)}{P(z)} = n\frac{f'(z)}{f(z)}$$

ومن ثَمّ

$$\int\limits_{C^+(0,R)} \frac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}\,z = n \int\limits_{C^+(0,R)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}\,z \qquad ❷$$

لنتأمّل الطريق المغلق Γ الذي يقبل التمثيل الوسيطي

$$\varphi : \left[0,2\pi\right] \mapsto \mathbb{C}, t \mapsto f(Re^{\mathrm{i}t})$$

لمّا كان $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega,$ استنتجنا أنّ $0 \notin \Gamma$. ولاحظنا أنّ

$$❸ \quad \int\limits_{C^+(0,R)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}\,z = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(Re^{\mathrm{i}t})}{f(Re^{\mathrm{i}t})}\,\mathrm{i}\,Re^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}\,t = \int\limits_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}\,z}{z} = 2\pi\,\mathrm{i}\cdot\mathrm{Ind}(0,\Gamma)$$

وعليه نستنتج من ❶ و ❷ و ❸ أنّ $\deg P = n \cdot \mathrm{Ind}(0,\Gamma)$ ، أي إنّ n يقسم $\deg P$.

.2 لنفترض جدلاً وجود تابع هولومورفيّ $g : \Omega \to \mathbb{C}$ يُحقّق $\forall z \in \Omega,\ e^{g(z)} = P(z)$. ولتكن $d = \deg P$. عندئذ نعرّف التابع الهولومورفي

$$f : \Omega \to \mathbb{C},\ f(z) = \exp\left(\frac{g(z)}{2d}\right)$$

عندئذ يكون لدينا $f^{2d} = P$ واستناداً إلى .1 لا بُدّ أن يقسم $2d$ العدد d ، وهذا تناقضٌ واضح. إذن لا يوجد تابع هولومورفيّ $g : \Omega \to \mathbb{C}$ يُحقّق $\forall z \in \Omega,\ e^{g(z)} = P(z)$.

.3 لنفترض وجود تابع مستمرّ $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ يُحقّق $\forall z \in \Omega,\ (\varphi(z))^n = P(z)$. ولتكن z_0 نقطة ما من Ω . ينعدم كثير الحدود $P - P(z_0)$ عند z_0 ويقبل عدداً منتهياً من الجذور، فيوجد عددٌ ρ موجبٌ تماماً يُحقّق

$$\forall z \in D(z_0,\rho), \quad z \neq z_0 \Rightarrow P(z) - P(z_0) \neq 0$$

وعندئذ، أيّاً كان z من $D(z_0,\rho)\backslash\{z_0\}$ ، كان

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0} = \frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{(\varphi(z))^n - (\varphi(z_0))^n} \times \frac{P(z)-P(z_0)}{z-z_0}$$

ولكن بوضع $u_0 = \varphi(z_0) \neq 0$ والاستفادة من النهايتين الآتيتين:

$$\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=u_0 \text{ و } \lim_{u\to u_0}\frac{u^n-u_0^n}{u-u_0}=nu_0^{n-1}$$

نجد

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{\big(\varphi(z)\big)^n-\big(\varphi(z_0)\big)^n}=\frac{1}{nu_0^{n-1}}=\frac{\varphi(z_0)}{nP(z_0)}$$

ولمّا كان أيضاً لدينا $\lim_{z\to z_0}\dfrac{P(z)-P(z_0)}{z-z_0}=P'(z_0)$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}=\frac{\varphi(z_0)}{n}\cdot\frac{P'(z_0)}{P(z_0)}$$

وعلى هذا نستنتج أنّ φ هولومورفي في Ω وأنّ $\varphi'(z)=\dfrac{\varphi(z)}{n}\cdot\dfrac{P'(z)}{P(z)}$. ويمكننا من ثَمّ تطبيق نتيجة السؤال الأوّل واستنتاج أنّ n يقسم $\deg P$ أيضاً في هذه الحالة. ∎

التمرين 26. نتأمّل التابع $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=\exp\left(-z^2\right)$. نثبّت عدداً b من $\mathbb{R}^*$، وفي حالة a من $\mathbb{R}_+^*$ نتأمّل النقاط الآتية: $A(a,0)$ و $B(a,b)$ و $C(-a,b)$ و $D(-a,0)$، والمستطيل $\mathcal{R}$ المعرّف كما يأتي

$$\mathcal{R}=[A,B]\cup[B,C]\cup[C,D]\cup[D,A]$$

1. أثبت أنّ كلّاً من المقدارين $\int_{[A,B]}f(z)\,\mathrm{d}z$ و $\int_{[D,C]}f(z)\,\mathrm{d}z$ يسعى إلى 0 عندما تسعى a إلى $+\infty$.
2. علّل صحة المساواة $\int_{\mathcal{R}}f(z)\,\mathrm{d}z=0$، واستنتج أنّ

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{-2\mathrm{i}xb}\,\mathrm{d}x=e^{-b^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

3. نقبل أنّ $\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. استنتج ممّا سبق أنّ

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cos\left(2xb\right)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$$

الحل

1. في الحقيقة، نلاحظ أنّ

$$\int_{[AB]} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \mathrm{i}\int_0^b f(a+\mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}\,y = \mathrm{i}\int_0^b \exp(y^2-a^2-2\,\mathrm{i}\,ay)\,\mathrm{d}\,y$$

ومن ثَمّ،

$$\begin{aligned}\left|\int_{[AB]} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| &= \left|\int_0^b \exp(y^2-a^2-2\,\mathrm{i}\,ay)\,\mathrm{d}\,y\right|\\ &\leq \int_0^{|b|}\left|\exp(y^2-a^2-2\,\mathrm{i}\,ay)\right|\mathrm{d}\,y \leq e^{-a^2}\,|b|e^{b^2}\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ $\lim\limits_{a\to\infty}\int_{[AB]} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$. وبأسلوب مماثل نجد أنّ

$$\int_{[DC]} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \mathrm{i}\int_0^b f(-a+\mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}\,y = \mathrm{i}\int_0^b \exp(y^2-a^2+2\,\mathrm{i}\,ay)\,\mathrm{d}\,y$$

ومن ثَمّ،

$$\left|\int_{[DC]} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \leq e^{-a^2}\,|b|e^{b^2}$$

وهذا يقتضي أنّ $\lim\limits_{a\to\infty}\int_{[DC]} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$.

2. التابع f هولومورفي في $\mathbb{C}$، و $\mathcal{R}$ هو منحنٍ مغلق من الصف C^1 قِطَعيّاً إذن

$$\int_{\mathcal{R}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

وعليه

$$\int_{[DA]} f(z)\,\mathrm{d}\,z - \int_{[CB]} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{[DC]} f(z)\,\mathrm{d}\,z - \int_{[AB]} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

ولكن

$$\int_{[DA]} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

و

$$\int_{[CB]} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{-a}^{a} e^{-(x+\mathrm{i}\,b)^2}\,\mathrm{d}\,x = e^{b^2}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}e^{-2\,\mathrm{i}\,bx}\,\mathrm{d}\,x$$

إذن

$$\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x - e^{b^2}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}e^{-2\,\mathrm{i}\,bx}\,\mathrm{d}\,x = \int_{[DC]} f(z)\,\mathrm{d}\,z - \int_{[AB]} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

فإذا استفدنا من نتيجة 1. وجعلنا a تسعى إلى $+\infty$ استنتجنا أنّ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = e^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-2\,\mathrm{i}\,bx}\,\mathrm{d}\,x$$

وبأخذ الجزء الحقيقي، وملاحظة أنّ التابعين $x \mapsto e^{-x^2}$ و $x \mapsto e^{-x^2}\cos(2bx)$ زوجيّان استنتجنا أنّ

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = e^{b^2}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)\,\mathrm{d}\,x$$

ولأنّ $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ وجدنا

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$$

وبذا يتمّ المطلوب. ■

التمرين 27. عيّن أكبر مجموعة مفتوحة Ω في $\mathbb{C}$ يكون التابع

$$z \mapsto \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

معرّفاً عليها. ثُمّ أثبت أنّه توجد متسلسلة صحيحة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ يُطلب تعيين نصف قطر تقاربها R وتُحقّق

$$\forall z \in D(0,R),\quad \tan z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

الحل

التابعان $\sin$ و $\cos$ هولومورفيان في $\mathbb{C}$، إذن أكبر مجموعة مفتوحة Ω يكون التابع $\tan$ هولومورفيّاً عليها هي $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \cos z \neq 0\}$. ولكن $\cos z = 0$ إذا وفقط إذا كان $e^{\mathrm{i}z} = -e^{-\mathrm{i}z}$ وهذا يُكافئ $e^{2\mathrm{i}z - \mathrm{i}\pi} = 1$، أي انتماء $2\mathrm{i}z - \mathrm{i}\pi$ إلى $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$. إذن

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

وعليه نجد أنّ التابع $\tan$ هولومورفي على المجموعة المفتوحة والمترابطة $\Omega = \mathbb{C}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. نستنتج من ذلك أنّ $\tan$ تحليليّ في Ω، ولأنّ 0 ينتمي إلى Ω و $d(0, \mathbb{C}\backslash\Omega) = \pi/2$ نجد بوجه خاصّ أنّ متسلسلة تايلور عند الصفر

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

تكون متقاربة في القرص $D\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ وأنّ مجموعها يساوي $\tan z$ في هذا القرص. وبالطبع لا يمكن لنصف قطر تقارب هذه المتسلسلة R أن يكون أكبر تماماً من $\pi/2$ وإلا نتج من ذلك أنّ النهاية $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x$ ستكون موجودة، وهذا تناقضٌ واضح. إذن $R = \pi/2$. ■

التمرين 28.

ليكن $R > 0$. احسب

$$M_R = \sup\left\{\left|\frac{\sin z}{z} - 1\right| : z \in \bar{D}(0, R)\right\}$$

في حالة R من $\mathbb{R}_+^*$.

الحل

في حالة $|z| \leq R$ لدينا المتراجحة

$$\left|\frac{\sin z}{z} - 1\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} |z|^{2n}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} R^{2n} = \frac{\operatorname{sh} R}{R} - 1$$

إذن

$$M_R \leq \frac{\operatorname{sh} R}{R} - 1$$

وتتحقّق المساواة عند النقطة $z = \mathrm{i}\, R$ أي

$$\frac{\operatorname{sh} R}{R} - 1 = \left|\frac{\sin(\mathrm{i}\, R)}{\mathrm{i}\, R} - 1\right|$$

وعليه نستنتج أنّ $M_R = \frac{\operatorname{sh} R}{R} - 1$. ■

النشر بمتسلسلات لوران ونظريّة الرواسب

1. متسلسلات لوران

1-1. عموميات

لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ جماعة من الأعداد العقديّة مجموعة أدلّتها هي مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$.

ولنتأمّل كلّاً من المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ التي نرمز إلى نصف قطر تقاربها بالرمز R_1 والمتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ التي نرمز إلى نصف قطر تقاربها بالرمز $1/R_2$. ولنفترض أنّ

$$0 \le R_2 < R_1 \le +\infty \qquad ⌘$$

(مع الاصطلاح المُتعارف : "$R_2 = 0$" يعني "$1/R_2 = +\infty$").

يتيح لنا هذا تعريف التابعين التحليليَّيْن f_1 و g كما يأتي:

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad |z|<R_1,\quad f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$
$$\forall z\in\mathbb{C},\quad |z|<\frac{1}{R_2},\quad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n} z^n$$

فيكون f_1 هولومورفيّاً في القرص المفتوح $D(0,R_1)$، (أو في $\mathbb{C}$ حين يكون $R_1=+\infty$)، ويكون g هولومورفيّاً في القرص المفتوح $D(0,1/R_2)$.

إذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}$ متقاربة حين يكون $|z|>R_2$. لنعرّف التابع f_2 بالعلاقة:

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad |z|>R_2,\quad f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n} z^{-n}$$

فيكون $f_2(z)=g\left(\frac{1}{z}\right)$,$\forall z\notin \bar{D}(0,R_2)$. وهذا يبيّن أنّ f_2 تابع هولومورفي وأنّه مهما كان z الذي يُحقّق $|z|>R_2$ كان

$$f_2'(z)=-\frac{1}{z^2}\,g'\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_{-n}\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-n)\,a_{-n}z^{-n-1}$$

لتكن $\mathcal{A}$ الحلقة المعرّفة كما يلي:

$$\mathcal{A} = \left\{ z \in \mathbb{C} : R_2 < |z| < R_1 \right\}$$

حينئذ تتقارب كلتا المتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}$ عند كلِّ نقطة z من $\mathcal{A}$. نعرِّف إذن الرمز $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ أو $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ للدلالة على

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \right)$$

وذلك مهما تكن z من $\mathcal{A}$.

نسمي $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ متسلسلة لوران Laurent ذات الثوابت $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. ونقول إن متسلسلة لوران متقاربة إذا وفقط إذا تقاربت المتسلسلتان $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}$. لقد وجدنا أنّه عند تحقُّق الشرط ⌘ تتقارب متسلسلة لوران $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ عند كلِّ نقطة من نقاط الحلقة $\mathcal{A}$ التي نسمّيها حلقة تقارب المتسلسلة $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$.

فإذا كانت z من $\mathcal{A}$ وعرّفنا $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$، كان f تابعاً هولومورفياً في $\mathcal{A}$ لأنّ

$$\forall z \in \mathcal{A}, \quad f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

ونحصل على مُشتقّ f باشتقاق المتسلسلة $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ حدّاً حدّاً ويكون

$$\forall z \in \mathcal{A}, \quad f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

بناءً على المناقشة السابقة نرى أنّ مفهوم متسلسلات لوران يُعمِّم مفهوم المتسلسلات الصحيحة الذي درسناه سابقاً.

2-1. **تعريف**. ليكن (R_1, R_2) من $\overline{\mathbb{R}}^2$ يُحقّق $0 \leq R_2 < R_1 \leq +\infty$. ولتكن $\mathcal{A}$ **الحلقة** المعرّفة بالصيغة $\mathcal{A} = \left\{ z \in \mathbb{C} : R_2 < |z| < R_1 \right\}$. وأخيراً ليكن f تابعاً عقدياً معرّفاً على مجموعة مفتوحة Ω تحوي الحلقة $\mathcal{A}$. نقول إنّ f **يقبل النشر بمتسلسلة لوران** في $\mathcal{A}$، إذا وُجِدتْ متسلسلة لوران $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ متقاربة في $\mathcal{A}$ تُحقّق

$$\forall z \in \mathcal{A}, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

3-1. **مبرهنة**. ليكن $f : \Omega \to \mathbb{C}$ تابعاً عقدياً يقبل النشر بمتسلسلة لوران $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ في حلقة $\mathcal{A} = \left\{ z \in \mathbb{C} : R_2 < |z| < R_1 \right\}$. عندئذ يكون هذا النشرُ وحيداً.

الإثبات

ليكن r عدداً حقيقياً يُحقّق الشرط $R_2 < r < R_1$. عندئذ أياً كان θ من المجال $[0, 2\pi]$ فلدينا

$$f(r\,e^{\mathrm{i}\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^n e^{\mathrm{i}\,n\theta}$$

ولكنّ متسلسلتي التوابع

$$\theta \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} r^{-n} e^{-\mathrm{i}\,n\theta} \quad \text{و} \quad \theta \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{\mathrm{i}\,n\theta}$$

متقاربتان بالنظيم على $[0, 2\pi]$. ينتج من ذلك أنّه، مهما تكن p من $\mathbb{Z}$، يكن :

$$\int_0^{2\pi} f(r e^{\mathrm{i}\theta}) e^{-\mathrm{i}\,p\theta}\,\mathrm{d}\,\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(n-p)\theta}\,\mathrm{d}\,\theta = 2\pi\, a_p\, r^p$$

إذ استفدنا من كوْن $\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(n-p)\theta}\,\mathrm{d}\,\theta = 0$ عندما $n \neq p$. ينتج من ذلك أنّ

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad a_p = \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} f(re^{\mathrm{i}\theta}) e^{-\mathrm{i}\,p\theta}\,\mathrm{d}\,\theta$$

فثوابت نشر لوران للتابع f تتعيَّن بأسلوب وحيد انطلاقاً من التابع f، وبناءً على هذا يتم إثبات المبرهنة. ❐

لقد وجدنا فيما سبق أنّ مجموع متسلسلة لوران متقاربة في حلقة $\mathcal{A}$ هولومورفيّ عليها، وبناءً عليه إذا قَبِلَ تابعٌ f النشر بمتسلسلة لوران في حلقة $\mathcal{A}$، كان f تابعاً هولومورفيّاً في $\mathcal{A}$. تُبيِّن المبرهنة التالية صحّة عكس هذه الخاصّة.

4-1. مبرهنة. ليكن (R_1, R_2) من $\overline{\mathbb{R}}^2$ يُحقّق $0 \leq R_2 < R_1 \leq +\infty$. ولتكن $\mathcal{A}$ الحلقة المعرّفة بالصيغة $\mathcal{A} = \left\{ z \in \mathbb{C} : R_2 < |z| < R_1 \right\}$. وأخيراً ليكن $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ تابعاً هولومورفيّاً في $\mathcal{A}$. عندئذ يقبل f النشرَ بمتسلسلة لوران في الحلقة $\mathcal{A}$.

الإثبات

لتكن p من $\mathbb{Z}$. ولنعرّف في حالة $R_2 < r < R_1$ المقدار

$$A_p(r) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C^+(0,r)} \frac{f(\omega)}{\omega^{p+1}} \,\mathrm{d}\,\omega$$

وليكن r_1 و r_2 عددين من $]R_2, R_1[$. لمّا كان $\omega \mapsto \dfrac{f(\omega)}{\omega^{p+1}}$ هولومورفيّاً في $\mathcal{A}$، ولمّا كان $C^+(0, r_1)$ تشويهاً مستمرّاً للمنحني $C^+(0, r_2)$ في $\mathcal{A}$، استنتجنا أنّ

$$A_p(r_1) = A_p(r_2)$$

إذن التابع $r \mapsto A_p(r)$ تابعٌ ثابتٌ على المجال $]R_2, R_1[$ لنرمز إلى قيمته بالرمز a_p.

ليكن z عدداً من $\mathbb{C}$ يُحقّق $R_2 < |z| < R_1$. عندئذ نختار أعداداً حقيقيّة ρ_1 و ρ_2 تُحقّق

$$R_2 < \rho_2 < |z| < \rho_1 < R_1$$

لمّا كان التابع $g : \omega \mapsto \dfrac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z}$ يقبل التمديد إلى تابع هولومورفيّ في $\mathcal{A}$، ولمّا كان $\Gamma_2 = C^+(0, \rho_2)$ تشويهاً مستمراً للطريق $\Gamma_1 = C^+(0, \rho_1)$ في $\mathcal{A}$، استنتجنا أنّ

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_1} g(\omega) \,\mathrm{d}\,\omega = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_2} g(\omega) \,\mathrm{d}\,\omega$$

لكن $\mathrm{Ind}(z, \Gamma_1) = 1$ و $\mathrm{Ind}(z, \Gamma_2) = 0$ إذن

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \,\mathrm{d}\,\omega - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \,\mathrm{d}\,\omega \qquad ⌘$$

ولكن، من جهة أولى،

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\omega)}{\omega-z}\,\mathrm{d}\,\omega=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{\omega}\cdot\frac{f(\omega)}{1-(z/\omega)}\,\mathrm{d}\,\omega$$

والتابع $\omega\mapsto\dfrac{1}{\omega}\cdot\dfrac{f(\omega)}{1-(z/\omega)}$ هو مجموع متسلسلة توابع متقاربة بالنظيم على Γ_1، هي $\omega\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f(\omega)}{\omega^{n+1}}z^n$ لأنّ التابع f محدود على المجموعة المتراصّة $C(0,\rho_1)$ و $\left|z/\rho_1\right|<1$.

نستنتج إذن أنّ

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\omega)}{\omega-z}\,\mathrm{d}\,\omega=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\omega)}{\omega^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\omega\right)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

ومن جهة ثانية

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\omega)}{\omega-z}\,\mathrm{d}\,\omega=-\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\Gamma_2}\frac{1}{z}\cdot\frac{f(\omega)}{1-(\omega/z)}\,\mathrm{d}\,\omega$$

والتابع $\omega\mapsto\dfrac{f(\omega)}{1-(\omega/z)}$ هو مجموع متسلسلة توابع متقاربة بالنظيم على Γ_2، هي $\omega\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}f(\omega)\dfrac{\omega^n}{z^n}$ لأنّ التابع f محدود على المجموعة المتراصّة $C(0,\rho_2)$ و $\left|\rho_2/z\right|<1$.

نستنتج أنّ

$$-\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\omega)}{\omega-z}\,\mathrm{d}\,\omega=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\Gamma_2}\omega^n f(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega\right)\frac{1}{z^{n+1}}=\sum_{n<0}a_n z^n$$

وبالعودة إلى ⌘ نستنتج أنّه أيّاً كانت z من $\mathbb{C}$ التي تُحقّق الشرط $R_2<|z|<R_1$ كان

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n z^n$$

إذ تُعطى الثوابت $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ بالعلاقة

$$a_n=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{C^+(0,r)}\frac{f(\omega)}{\omega^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\omega$$

إذن توجد متسلسلة لوران متقاربة في الحلقة $\mathcal{A}$، ومجموعها يساوي f. وبذا يتم الإثبات. ❐

1-5. **تعريف**. لتكن U مجموعة جزئيّة من $\mathbb{C}$، نفترض أنها تحوي $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ عند قيمة r من $\mathbb{R}_+^*$، وليكن $f : U \to \mathbb{C}$ تابعاً عقدياً. نقول إنّ التابع f يقبل العدد ℓ من $\mathbb{C}$ نهايةً عندما تسعى $|z|$ إلى $+\infty$، ونكتب $\lim\limits_{|z|\to+\infty} f(z) = \ell$، إذا، وفقط إذا تحقّق الشرط التالي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > r, \quad |z| \geq A \Rightarrow \left|f(z) - \ell\right| < \varepsilon$$

1-6. **نتيجة**. ليكن (R_1, R_2) من $\overline{\mathbb{R}}^2$ يُحقّق $0 \leq R_2 < R_1 \leq +\infty$. ولتكن $\mathcal{A}$ الحلقة $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : R_2 < |z| < R_1\}$. وليكن التابع الهولومورفيّ $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. عندئذ يوجد تابع وحيد f_1 هولومورفيّ على المجموعة $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R_1\}$، ويوجد تابع وحيد f_2 هولومورفيّ على $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R_2\}$، ويحقّقان الشرطين الآتيين:

$$\lim_{|z|\to\infty} f_2(z) = 0 \quad \text{و} \quad \forall z \in \mathcal{A}, \quad f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

الإثبات

- نعلم أنّه توجد متسلسلة لوران $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ متقاربة في الحلقة $\mathcal{A}$، تُحقّق

$$\forall z \in \mathcal{A}, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

ولمّا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متقاربة حين يكون z عنصراً من D_1 عرّفنا

$$\forall z \in D_1, \quad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

فيكون f_1 هولومورفياً في D_1.

ومن جهة أخرى، لمّا كانت المتسلسلة $\sum\limits_{n<0} a_n z^n$ متقاربة حين يكون z عنصراً من D_2 عرّفنا

$$\forall z \in D_2, \quad f_2(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n z^n$$

عندئذ يكون f_2 هولومورفيّاً في D_2، ويُحقّق $\lim\limits_{|z|\to\infty} f_2(z) = 0$. وأخيراً يكون لدينا

$$\forall z \in \mathcal{A}, \quad f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

▪ لنثبت وحدانيّة التفريق السابق. ليكن g_1 تابعاً هولومورفيّاً على المجموعة المفتوحة D_1، وليكن g_2 تابعاً هولومورفيّاً على المجموعة المفتوحة D_2، يُحقّقان الشرطين

$$\forall z \in \mathcal{A},\ f(z) = g_1(z) + g_2(z) \quad \text{و} \quad \lim_{|z|\to\infty} g_2(z) = 0$$

عندئذ يكون لدينا

$$\forall z \in \mathcal{A}, \quad f_1(z) - g_1(z) = g_2(z) - f_2(z)$$

لنعرّف إذن التابع العقديّ

$$h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad h(z) = \begin{cases} f_1(z) - g_1(z) & : \quad z \in D_1 \\ g_2(z) - f_2(z) & : \quad z \in D_2 \end{cases}$$

إنّ h تابعٌ هولومورفي في $\mathbb{C}$، ومحدود عليها، لأنّ $\lim_{|z|\to\infty} h(z) = 0$. نستنتج إذن أنه ثابتٌ في $\mathbb{C}$ بمُقتضى مبرهنة Liouville، والشرط $\lim_{|z|\to\infty} h(z) = 0$ يقتضي

$$\forall z \in \mathbb{C},\ h(z) = 0$$

وهذه النتيجة تُكافئ قولنا $f_1 = g_1$ و $f_2 = g_2$. ❐

7-1. تعريف. ليكن z_0 عنصراً من $\mathbb{C}$، وليكن R عدداً حقيقيّاً موجباً تماماً. نسمّي المجموعة $\widetilde{D}(z_0, R) = D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ **قرصاً منقوصاً** مركزه z_0 ونصف قطره R.

8-1. نتيجة. ليكن z_0 عنصراً من $\mathbb{C}$، و R من $\mathbb{R}_+^*$. وليكن $f : \widetilde{D}(z_0, R) \to \mathbb{C}$ تابعاً هولومورفيّاً، إذن توجد متسلسلة لوران $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ متقاربة في الحلقة $\widetilde{D}(0, R)$، وتُحقّق

$$\forall z \in \widetilde{D}(z_0, R),\ \ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

إضافة إلى ذلك يكون

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall r \in \left]0, R\right[, \quad a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\mathrm{i}\theta}) e^{-\mathrm{i}n\theta}\, d\theta$$

الإثبات

يكفي أن نطبّق المبرهنة 4-1. على التابع $z \mapsto f(z + z_0)$. ❐

1-9. **ملاحظة**. ليكن z_0 عنصراً من $\mathbb{C}$، و R من $\mathbb{R}_+^*$. وليكن $f:\widetilde{D}(z_0,R)\to\mathbb{C}$ تابعاً هولومورفيّاً. وجدنا أنّه توجد متسلسلة لوران $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ متقاربة في الحلقة $\widetilde{D}(0,R)$، تُحقّق

$$\forall z\in\widetilde{D}(z_0,R),\quad f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

وإذا عرّفنا $M(r)=\sup_{z\in C(z_0,r)}\left|f(z)\right|$ في حالة r من $]0,R[$ استنتجنا مما سبق أنّ

$$\forall n\in\mathbb{Z},\quad \left|a_n\right|\le\frac{M(r)}{r^n}$$

وهذه النتيجة تُعمّم متراجحات كوشي.

2. تصنيف النقاط الشاذّة المعزولة

لتكن U مجموعة مفتوحة من $\mathbb{C}$، وليكن z_0 عنصراً من U. ثُمّ لنتأمّل تابعاً هولومورفياً f على $U\backslash\{z_0\}$. لمّا كانت U مجموعة مفتوحة وجدنا $0<R$ يُحقِّق $D(z_0,R)\subset U$. وعندئذ يكون f تابعاً هولومورفياً على القرص المنقوص $\widetilde{D}(z_0,R)$، وهذا ما يتيح لنا تطبيق النتيجة 1-8. على $f_{|\widetilde{D}(z_0,R)}$.

السؤال الذي يُمكن أن يُطرحَ علينا في مثل هذا الوضع هو: أَيمكنُ تمديد التابع f عند z_0 ليصبح تابعاً هولومورفياً في القرص المفتوح $D(z_0,R)$ ؟ فإذا لم يكن هذا التمديد ممكناً قلنا إنّ النقطة z_0 **نقطة شاذّة معزولة** للتابع f، وإلا فإنها تكون **نقطة شاذّة كاذبة** لهذا التابع. لنتفحّص فيما يأتي هاتين الحالتين.

❶ z_0 نقطة شاذّة كاذبة للتابع f

في هذه الحالة يُمكن تمديد التابع f إلى تابع مستمرٍّ في جوار للنقطة z_0، فهو إذن تابع محدودٌ في جوار النقطة z_0.

وبالعكس، لو افترضنا أنّ التابع f محدودٌ في جوارٍ للنقطة z_0، عندئذ يوجد ρ في $]0,R[$، ويوجد عددٌ M في $\mathbb{R}_+^*$، يُحقّق $\left|f(z)\right|\le M$ أياً كانت z من $\widetilde{D}(z_0,\rho)$.

ولمّا كانت ثوابت منشور لوران $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ للتابع f في القرص المنقوص $\tilde{D}(z_0,R)$ تُحقِّق

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ \ \forall r\in\left]0,\rho\right[,\quad \left|a_n\right|\le\frac{M}{r^n}$$

استنتجنا، بجعل r تسعى إلى 0 في حالة $n>0$، أنّ $\forall n<0,\ a_n=0$. وبناءً على هذا يكون

$$\forall z\in\tilde{D}(z_0,R),\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

فإذا مدّدنا f عند النقطة z_0 بوضع $f(z_0)=a_0$ صار التابع المُمدَّد هولومورفيّاً في القرص $D(z_0,R)$.

إذن أثبتنا أنّ النقطة z_0 تكون نقطة شاذّة كاذبة للتابع f، إذا وفقط إذا كان التابع f محدوداً في جوار z_0، وعندئذ يصبح منشور f بمتسلسلة لوران في جوار z_0 متسلسلة صحيحة.

❷ z_0 نقطة شاذّة معزولة للتابع f

نرى، بناءً على المناقشة السابقة، أنّ الشرط اللازم والكافي حتّى تكون z_0 نقطة شاذّة معزولة للتابع f هو ألّا يكون هذا التابع محدوداً في جوار z_0، أو ألّا تكون جميع ثوابت منشور لوران ذات الدليل السالب تماماً للتابع f في $\widetilde{D}(z_0,R)$ صفريّةً.

وهنا نميِّز بين حالتين:

- ❖ إنّ عدد ثوابت منشور لوران $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ للتابع f في القرص المنقوص $\widetilde{D}(z_0,R)$ ذات الدليل السالب تماماً وغير الصفرية منته.

في هذه الحالة نعرِّف العدد الطبيعيّ

$$m=\max\{k\in\mathbb{N}^*:a_{-k}\neq 0\}$$

ويكون عندئذ،

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

وذلك مهما يكن z من $\widetilde{D}(z_0,R)$.

وبناءً على هذا يقبل التابع

$$g:\widetilde{D}(z_0,R)\to\mathbb{C},\ g(z)=(z-z_0)^m f(z)$$

التمديد إلى تابع هولومورفي على $D(z_0,R)$، نرمز إليه أيضاً بالرمز g. إذن يوجد تابع g هولومورفي في القرص المفتوح $D(z_0,R)$ ويُحقِّق الشرطين

$$g(z_0) \neq 0 \quad \text{و} \quad \forall z \in \widetilde{D}(z_0,R), \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

نقول في هذه الحالة إنّ التابع f تابعٌ **ميرومورفي في جوار** z_0، ونقول إنّ النقطة z_0 **قطبٌ من المرتبة** m **للتابع** f، ونسمي التابع الكسري

$$z \mapsto \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0}$$

الجزء القطبيّ للتابع f **عند** z_0.

وهكذا، فحتى يقبل تابعٌ f هولومورفي على $U\backslash\{z_0\}$ قطباً من مرتبة أصغر أو تساوي p عند z_0، يلزم ويكفي أن تكون النقطة z_0 نقطة شاذّة كاذبة للتابع المعرّف بالعلاقة $z \mapsto (z-z_0)^p f(z)$، أو أن يكون التابع $z \mapsto (z-z_0)^p f(z)$ محدوداً في جوار النقطة z_0.

❖ إنّ عدد ثوابت منشور لوران $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ للتابع f في القرص المنقوص $\widetilde{D}(z_0,R)$ ذات الدليل السالب تماماً وغير المعدومة لانهائي.

نقول في هذه الحالة إنّ z_0 **نقطة شاذّة أساسيّة معزولة** للتابع f. وفي مثل هذه الحالة لا يكون أيٌّ من التوابع $z \mapsto (z-z_0)^n f(z)$، $(n \in \mathbb{N})$، محدوداً في جوار النقطة z_0.

توضّح المبرهنتان الآتيتان الفرق بين النوعين السابقين من النقاط الشاذّة المعزولة.

2-1. **مبرهنة**. لتكن U مجموعة مفتوحة من $\mathbb{C}$، وليكن z_0 عنصراً من U. ثُمّ لنتأمّل تابعاً هولومورفيّاً f على $U\backslash\{z_0\}$. حتى تكون النقطة z_0 قطباً للتابع f يلزم ويكفي أن يتحقّق الشرط $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$.

الإثبات

- لنفترض أنّ z_0 قطبٌ من المرتبة m للتابع f. عندئذ يوجد تابع $g : U \to \mathbb{C}$ هولوموريّ ويُحقّق الشرطين

$$g(z_0) \neq 0 \quad \text{و} \quad \forall z \in U \backslash \{z_0\}, \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

ونستنتج من ذلك أنّ

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^m} = +\infty$$

وهذا يُثبت لزوم الشرط.

- وبالعكس، لنفترض أنّ $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$. إذن يوجد $0 < R$ تُحقّق

$$\forall z \in \tilde{D}(z_0, R), \quad \left|f(z)\right| \geq 1$$

وبناءً على ذلك يكون التابع

$$h : \tilde{D}(z_0, R) \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \frac{1}{f(z)}$$

تابعاً هولومورفياً مُحقّقاً الشرط $\lim_{z \to z_0} h(z) = 0$. فهو يقبل إذن التمديد إلى تابع هولومورفي (نرمز إليه بالرمز h نفسه) على القرص المفتوح $D(z_0, R)$ ، ويكون $h(z_0) = 0$.

لنعرّف إذن العدد m بأنّه رتبة مضاعفة الصفر المعزول z_0 للتابع h. حينئذ يوجد تابع k هولومورفي على القرص المفتوح $D(z_0, R)$ ، ويُحقّق

$$k(z_0) \neq 0 \quad \text{و} \quad \forall z \in D(z_0, R), \quad h(z) = (z - z_0)^m \cdot k(z)$$

إنّ استمرار التابع k عند z_0 يُبرّر وجود عددٍ ρ من $]0, R[$ يجعل التابع k لا ينعدم على القرص المفتوح $D(z_0, \rho)$. وبناءً على هذا يكون

$$\forall z \in \tilde{D}(z_0, \rho), \quad f(z) = \frac{1/k(z)}{(z - z_0)^m}$$

وهذا يُثبتُ أنّ z_0 قطبٌ من المرتبة m للتابع f لأنّ $z \mapsto 1/k(z)$ تابع هولومورفي على $D(z_0, \rho)$.
□

2-2. مبرهنة -Weierstrass . لتكن U مجموعة مفتوحة من $\mathbb{C}$، وليكن z_0 عنصراً من U. ثُمّ لنتأمّل تابعاً هولومورفياً f على $U\setminus\{z_0\}$ ويقبل النقطة z_0 نقطة شاذّة أساسية ومعزولة للتابع f . عندئذ مهما يكن القرص المنقوص $\tilde{D}(z_0,\varepsilon)$ المحتوى في U، تكن صورته $f(\tilde{D}(z_0,\varepsilon))$ مجموعة كثيفة في المستوي العقدي $\mathbb{C}$.

الإثبات

ليكن $0 < \varepsilon$ يُحقّق $\tilde{D}(z_0,\varepsilon) \subset U$. ولنفترض جدلاً أنّ $\overline{f(\tilde{D}(z_0,\varepsilon))} \neq \mathbb{C}$. عندئذ يوجد عدد عقدي a غير لاصق بالمجموعة $f(\tilde{D}(z_0,\varepsilon))$. أي يوجد a في $\mathbb{C}$، ويوجد $0 < r$ يُحقّقان $f(\tilde{D}(z_0,\varepsilon)) \cap D(a,r) = \varnothing$ ، أي

$$\forall z \in \tilde{D}(z_0,\varepsilon), \quad \left|f(z) - a\right| \geq r$$

لنعرّف إذن التابع

$$h : \tilde{D}(z_0,\varepsilon) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{f(z) - a}$$

لمّا كان h تابعاً هولومورفياً ومحدوداً على $\tilde{D}(z_0,\varepsilon)$ استنتجنا أنّ z_0 نقطة شاذّة كاذبة للتابع h، ويمكننا تمديده إلى تابع هولومورفي على القرص المفتوح $D(z_0,\varepsilon)$ (نرمز إليه بالرمز h نفسه). وبناءً على ذلك يكون

$$\forall z \in \tilde{D}(z_0,\varepsilon), \quad f(z) = a + \frac{1}{h(z)}$$

إذا كان $h(z_0) \neq 0$ استنتجنا أنّ z_0 نقطة شاذّة كاذبة للتابع f وهذا يتناقض مع الفرْض، إذن لا بُدَّ أن يكون $h(z_0) = 0$، والنقطة z_0 صفر معزول للتابع h . ولكن إذا كانت p رتبةَ مضاعفة الصفر z_0 للتابع h، استنتجنا أنّ z_0 قطبٌ من المرتبة p للتابع f ، وهذا يناقض من جديد الفرْض. نستنتج من هذه المناقشة أنّ

$$\overline{f(\tilde{D}(z_0,\varepsilon))} = \mathbb{C}$$

وبذا يتم الإثبات. ❐

وهنا نشير إلى أنّه بالإمكان إثبات نتيجة أعمق من المبرهنة السابقة فنثبتُ أنّ المجموعة $f(\tilde{D}(z_0,\varepsilon))$ تساوي $\mathbb{C}$، أو $\mathbb{C}$ محذوفاً منها نقطة واحدة، وهذا ما تنصُّ عليه **مبرهنة بيكار** Picard الكبرى.

2-3. **مثال**. لنتأمّل التابع الهولومورفي $f:\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, f(z)=\exp\left(\frac{1}{z}\right)$. نعلم أنّ

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}$$

نستنتج من ذلك أنّ النقطة $z_0=0$ نقطة شاذّة أساسيّة للتابع f.

ليكن a من $\mathbb{C}^*$، عندئذ يوجد في المجال $[0,2\pi[$ عددٌ α يُحقّق $a=|a|e^{i\alpha}$. نعرّف إذن المتتالية $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ بالعلاقة

$$z_n=\frac{1}{\ln|a|+\mathrm{i}(\alpha+2n\pi)}$$

فنلاحظ بسهولة أنّ $f(z_n)=a$ أياً كان n من $\mathbb{N}^*$، وكذلك أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$. نستنتج، بناءً على ذلك أنّ

$$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists m\in\mathbb{N}^*,\quad \big(|z_m|<\varepsilon\big)\wedge\big(f(z_m)=a\big)$$

ومن ثَمّ، لأنّ a عنصر كيفيّ من $\mathbb{C}^*$، نستنتج أنّ

$$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ f(\tilde{D}(0,\varepsilon))=\mathbb{C}^*$$

وهذا ما يتفق مع مبرهنة بيكار.

2-4. **تعريف**. لتكن Ω مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$. ولتكن $\mathcal{P}$ مجموعة جزئيّة من Ω. وأخيراً ليكن $f:\Omega\backslash\mathcal{P}\to\mathbb{C}$ تابعاً عقدياً. نقول إنّ f **تابعٌ ميرومورفيٌّ** في Ω أقطابه هي نقاط المجموعة $\mathcal{P}$. إذا تحقّقت الشروط التالية :

- ليس في Ω أي نقطة تجمّع للمجموعة $\mathcal{P}$، أي

$$\forall \omega\in\Omega,\ \exists\varepsilon>0,\ \tilde{D}(\omega,\varepsilon)\cap\mathcal{P}=\varnothing$$

- التابع f هولومورفي على $\Omega\backslash\mathcal{P}$.
- كلُّ نقطة من $\mathcal{P}$ هي قطبٌ للتابع f.

لاحظ أنّ الشرط الأوّل يقتضي كوْن عناصر $\mathcal{P}$ نقاطاً معزولة، وأنّ كلَّ مجموعة متراصّة في Ω لا تحوي إلّا عدداً منتهياً من عناصر $\mathcal{P}$. ثُمّ إنّنا لم نستثنِ الحالة التي تكون فيها المجموعة $\mathcal{P}$ خالية، وهكذا نرى أنّ مفهوم التابع الميرومورفي يعمّم مفهوم التابع الهولومورفي.

فمثلاً ليكن كثيرا الحدود P و Q من $\mathbb{C}[X]$. ولنفترض أنّ $Q \neq 0$. عندئذ يكون التابع الكسري $z \mapsto \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ ميرومورفياً في $\mathbb{C}$. وإذا كان $f : \Omega \to \mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً على المجموعة المفتوحة والمترابطة Ω، وكان $f \neq 0$، استنتجنا أنّ التابع $\dfrac{1}{f}$ تابع ميرومورفي في Ω أقطابه هي أصفار التابع f، وهي معزولة كما نعلم.

5-2. **ملاحظة**. لقد اقتصرنا في دراستنا السابقة على النقاط الشاذّة المعزولة، بالطبع قد تكون لتابع هولومورفي $f : \Omega \to \mathbb{C}$ نقاطٌ شاذة غير معزولة في $\overline{\Omega}\backslash\Omega$.

فمثلاً إذا تأمّلنا التابع f المعرّف على القرص الواحدي $\mathbb{D} = D(0,1)$ بالمتسلسلة الصحيحة $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$، لاحظنا أنّ $\lim_{z\to 1} f(z) = +\infty$، فالنقطة 1 نقطة شاذّة للتابع f. ونجد مباشرة أنّ

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad f(z) = z + f(z^2) \qquad (*)$$

وهذا يبرهن أيضاً أنّ النقطة -1 هي أيضاً نقطة شاذّة إذْ إنّ $\lim_{z\to -1} f(z) = +\infty$ لأنّ $\lim_{z\to -1} z^2 = 1$. وبوجه عام، في حالة m من $\mathbb{N}^*$، نستنتج من $(*)$ أنّ

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad f(z) = z + z^2 + \cdots + z^{2^{m-1}} + f(z^{2^m})$$

وهذا يبرهن أنّ جميع النقاط $(z_{p,m})_{p\in\{0,\ldots,2^m-1\}}$، حيث $z_{p,m} = \exp(\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,p}{2^m})$، هي أيضاً نقاط شاذّة، إذْ إنّ $\lim_{z\to z_{p,m}} |f(z)| = +\infty$، وذلك لأنّ $\lim_{z\to z_{p,m}} z^{2^m} = 1$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ جميع عناصر المجموعة

$$\mathcal{S} = \{\exp\left(\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,p}{2^m}\right) : m \in \mathbb{N}^*, 0 \leq p < 2^m\}$$

هي نقاط شاذّة للتابع f، ونرى أنّ $\mathcal{S}$ مجموعة كثيفة في الدائرة $\mathcal{U} = \{z : |z| = 1\}$. وبالطبع هذه النقاط الشاذّة ليست نقاطاً شاذّة معزولة ولا تنطبق عليها دراستنا للنقاط الشاذّة المعزولة.

3. نظريّة الرواسب

1-3. تعريف. لتكن Ω مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{C}$. وليكن f تابعاً ميرومورفياً في Ω مجموعة أقطابه هي $\mathcal{P}$. إذا كان p قطباً من $\mathcal{P}$ وكان الجزء القطبيّ للتابع f الموافق للقطب p معطى بالعلاقة

$$Q_p(z) = \frac{a_{-m}}{(z-p)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-p)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-p} = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-p)^k}$$

(عندها تصبح p نقطة شاذّة كاذبة للتابع $f - Q_p$)، أسمينا العدد a_{-1} **راسب التابع f عند p**، ورمزنا إليه بالرمز $\mathrm{Res}(f,p)$.

2-3. مبرهنة. لتكن Ω مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{C}$. وليكن f تابعاً ميرومورفياً في Ω مجموعة أقطابه هي $\mathcal{P}$. وليكن Γ طريقاً مغلقاً من الصف C^1 قِطَعِيّاً محتوى في $\Omega \backslash \mathcal{P}$. نفترض أنّ Γ تشويه مستمرٌّ في Ω لنقطة. عندئذ يكون

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}\, z = \sum_{p\in\mathcal{P}} \mathrm{Res}(f,p)\,\mathrm{Ind}(p,\Gamma)$$

الإثبات

لمّا كان Γ تشويهاً مستمراً في Ω لنقطة، فإنّنا نجد عنصراً a في Ω ونجد تابعاً مستمرّاً

$$H : [0,1]\times[0,1] \to \Omega, \quad (t,u) \mapsto H(t,u)$$

يُحقّقان الشروط التالية

- التابع $t \mapsto H(t,0)$ تمثيل وسيطيٌّ من الصف C^1 قِطَعِيّاً للطريق Γ.
- $\forall t \in [0,1], \quad H(t,1) = a$.
- $\forall u \in [0,1], \quad H(0,u) = H(1,u)$.

وبناءً على ذلك تكون المجموعة $K = H([0,1]\times[0,1])$ مجموعة متراصّة محتواة في Ω.

فإذا كانت المجموعة المغلقة $\mathbb{C}\backslash\Omega$ غير خالية، نتج من استمرار تابع المسافة

$$z \mapsto d(z,\mathbb{C}\backslash\Omega) = \inf_{\omega\notin\Omega} |z-\omega|$$

على المجموعة المتراصّة K، ومن ثمّ بلوغه حده الأدنى عليها، أنّه يوجد z_0 في K يُحقّق

$$\forall z \in K, \quad \rho_0 = d(z_0,\mathbb{C}\backslash\Omega) \le d(z,\mathbb{C}\backslash\Omega)$$

ولمّا كانت z_0 لا تنتمي إلى المجموعة المغلقة $\mathbb{C}\backslash\Omega$ استنتجنا أنّ $0 < \rho_0$. أمّا في الحالة التي يكون فيها $\mathbb{C}\backslash\Omega = \varnothing$، فإننا نعرّف $\rho_0 = 1$ مثلاً، (أو أية قيمة حقيقيّة موجبة تماماً).

لتكن ρ من $]0,\rho_0[$ ولنعرّف المجموعتين

$$K_\rho = \left\{z \in \mathbb{C} : d(z,K) \leq \rho\right\} \quad \text{و} \quad \Omega_\rho = \left\{z \in \mathbb{C} : d(z,K) < \rho\right\}$$

فتكون Ω_ρ مجموعة مفتوحة[①]، وتكون K_ρ مجموعة مغلقة[①] ومحدودة[②]، فهي متراصّة، ويتحقّق القارئ بسهولة صحةَ الاحتواءات

$$K \subset \Omega_\rho \subset K_\rho \subset \Omega$$

ليكن z عنصراً لا ينتمي إلى Ω_ρ، عندئذ يكون التابع $\omega \mapsto \dfrac{1}{\omega - z}$ هولومورفياً على Ω_ρ والطريق المغلق Γ تشويه مستمرٌّ في Ω_ρ لنقطة، إذن

$$\operatorname{Ind}(z,\Gamma) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}\,\omega}{\omega - z} = 0$$

نستنتج من هذه الملاحظة، أنّه يمكن أن يقتصر المجموع الوارد في نص المبرهنة على الأقطاب الواقعة في Ω_ρ أي على عناصر المجموعة $\mathcal{P} \cap \Omega_\rho = \mathcal{P}_1$. ولكنّ المجموعة $\mathcal{P}_1$ **منتهية**، لأنّ K_ρ مجموعة متراصّة محتواة في Ω. وهذا ما يُعطي للمجموع الوارد في نص المبرهنة معناه.

لنرمز في حالة p من $\mathcal{P}_1$ بالرمز Q_p إلى الجزء القطبي للتابع f الموافق للقطب p. ولنعرّف

$$g : \Omega_\rho \to \mathbb{C}, \quad g(z) = f(z) - \sum_{p\in\mathcal{P}_1} Q_p(z)$$

(في حالة $\mathcal{P}_1 = \varnothing$ يكون $g = f|_{\Omega_\rho}$). يمكننا القول إنّ g هولومورفيٌّ في Ω_ρ لأنّ جميع نقاطه الشاذة كاذبة. ولمّا كان Γ تشويهاً مستمراً في Ω_ρ لنقطة، استنتجنا أنّ

$$\int_\Gamma g(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

وبناءً على هذا نستنتج أنّ

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{p\in\mathcal{P}_1}\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\Gamma Q_p(z)\,\mathrm{d}\,z$$ ⌘

[①] لأنّ $z \mapsto d(z,K)$ تابع مستمر على $\mathbb{C}$.

[②] لأنّ K مجموعة متراصّة. **11**

ليكن إذن p من $\mathcal{P}_1$، ولنفترض أنّ الجزء القطبيّ للتابع f الموافق للقطب p معطى بالعلاقة :

$$Q_p(z) = \frac{a_{-m}}{(z-p)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-p)^{m-1}} + \cdots + \frac{\operatorname{Res}(f,p)}{z-p} = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-p)^k}$$

عندئذ، لمّا كان

$$z \mapsto F(z) = \sum_{k=2}^{m} \frac{a_{-k}}{(1-k)(z-p)^{k-1}}$$

تابعاً هولومورفياً في $\Omega \backslash \{p\}$، يُحقّق

$$F'(z) = Q_p(z) - \frac{\operatorname{Res}(f,p)}{z-p}$$

استنتجنا، أنّ

$$0 = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma F'(z)\,\mathrm{d}\,z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma Q_p(z)\,\mathrm{d}\,z - \operatorname{Res}(f,p)\ \operatorname{Ind}(p,\Gamma)$$

أو

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma Q_p(z)\,\mathrm{d}\,z = \operatorname{Res}(f,p) \operatorname{Ind}(p,\Gamma)$$

فإذا عوّضنا هذه النتيجة في العلاقة ⌘ وجدنا:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{p\in\mathcal{P}_1} \operatorname{Res}(f,p) \operatorname{Ind}(p,\Gamma) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \operatorname{Res}(f,p) \operatorname{Ind}(p,\Gamma)$$

إذ نتجت المساواة الأخيرة من كوْن $\operatorname{Ind}(p,\Gamma) = 0$ حين يكون $p \notin \mathcal{P}_1$. وبذلك يتمّ الإثبات. ❐

3-3. **ملاحظة**. لنذكر بعض الطرائق العمليّة لحساب الراسب عند قطبٍ لتابع ميرومورفي. في الحقيقة، إذا كان p قطباً من المرتبة k لتابع ميرومورفي f، نُجري نشراً محدوداً للتابع $g : z \mapsto (z-p)^k f(z)$ في جوار p حتى المرتبة $k-1$، وعندئذ يكون الراسب $\operatorname{Res}(f,p)$ هو ثابتُ الحد $(z-p)^{k-1}$ في هذا النشر. وغالباً ما نُجري تغيير المتحوّل $t = z - p$ لتحقيق ذلك.

أمّا في الحالة الخاصّة التي يكون فيها p قطباً بسيطاً (من المرتبة 1) لتابع ميرومورفي f، فيمكننا ملاحظة أنّ $\operatorname{Res}(f,p) = \lim\limits_{z\to p} (z-p)f(z)$، وهي نتيجة مفيدة في بعض الأحيان.

فعلى سبيل المثال، إذا كان التابع f معطى بالشكل $\frac{A}{B}$، و A و B تابعان هولومورفيّان في جوار p، وكان p صفراً بسيطاً للتابع B، و $A(p) \neq 0$، استنتجنا أنّ

$$\operatorname{Res}(f,p) = \lim_{z\to p} \frac{(z-p)}{B(z)} A(z) = \frac{A(p)}{B'(p)}$$

وهكذا إذا طبّقنا هذه الملاحظة على التابع

$$f : \mathbb{C}\backslash\{0,\mathrm{i},-\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z^2+z+1}{z\,(z^2+1)^2}$$

وجدنا أنّ 0 قطب بسيط للتابع f راسبه $\operatorname{Res}(f,0) = 1$، وأنّ كلّاً من i و $-\mathrm{i}$ قطبٌ مضاعفٌ و $\operatorname{Res}(f,\mathrm{i}) = -\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{4}$ و $\operatorname{Res}(f,-\mathrm{i}) = -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{4}$.

4. تطبيقات نظريّة الرواسب في حساب بعض التكاملات

ندرس في هذه الفقرة بعض الأنماط التقليديّة لتكاملات يؤول حسابها إلى حساب رواسب. ولكن نحتاج في مثل هذه المسائل إلى بعض التوطئات التي سنذكرها في البداية تثبيتاً للأفكار.

4-1. توطئة. ليكن (θ_1,θ_2) عنصراً من $\mathbb{R}^2$ يُحقّق $\theta_1 < \theta_2$. وليكن $f : S \to \mathbb{C}$ تابعاً معرّفاً على المجموعة $S = \left\{ re^{\mathrm{i}\theta} : r \in \mathbb{R}_+^*,\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \right\}$. وأخيراً ليكن Γ_R، $(R > 0)$، الطريق الممثّل وسيطياً كما يلي

$$\varphi_R : [\theta_1,\theta_2] \to \mathbb{C}, \quad \varphi_R(\theta) = Re^{\mathrm{i}\theta}$$

عندئذ

① إذا كان f مستمراً على مجموعة من النمط $\{z \in S : |z| > a\}$ و a من $\mathbb{R}_+^*$، وكان $\lim_{|z|\to\infty} z f(z) = 0$، فإنّ $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

② إذا كان f مستمراً على مجموعة من النمط $\{z \in S : |z| < a\}$ و a من $\mathbb{R}_+^*$، وكان $\lim_{z\to 0} z f(z) = 0$، فإنّ $\lim_{R\to 0} \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

الإثبات

الإثبات بسيط ومتروك للقارئ. ❑

2-4. توطئة : ليكن (θ_1,θ_2) من $\mathbb{R}^2$ يُحقّق $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le \pi$. ولتكن

$$S = \left\{ re^{\mathrm{i}\theta} : r \in \mathbb{R}_+^*,\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \right\}$$

وليكن $f : S \to \mathbb{C}$ تابعاً مستمراً على مجموعة من النمط $\left\{ z \in S : |z| > a \right\}$، حيث a من $\mathbb{R}_+^*$، ويُحقّق $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. وأخيراً ليكن Γ_R، $(R > 0)$، الطريق الممثّل وسيطياً بالصيغة $\varphi_R : [\theta_1,\theta_2] \to \mathbb{C},\ \varphi_R(\theta) = Re^{\mathrm{i}\theta}$ عندئذ

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}\,z = 0$$

الإثبات

لتكن $0 < \alpha$، ولنعرّف $M(R) = \sup\limits_{z\in\Gamma_R} \left| f(z) \right|$. عندئذ يكون

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma_R} f(z) e^{\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}\,z \right| &\le \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{i}\,Rf(Re^{\mathrm{i}\theta}) e^{\mathrm{i}\,\alpha R(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)} e^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\,\theta \right| \\
&\le M(R) \int_{\theta_1}^{\theta_2} Re^{-\alpha R\sin\theta}\,\mathrm{d}\,\theta
\end{aligned}$$

ولكن $\dfrac{2}{\pi}\theta \le \sin\theta \quad \forall\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, . نستنتج إذن أنّ

$$\begin{aligned}
\int_{\theta_1}^{\theta_2} Re^{-\alpha R\sin\theta}\,\mathrm{d}\,\theta &\le \int_0^{\pi} Re^{-\alpha R\sin\theta}\,\mathrm{d}\,\theta = 2\int_0^{\pi/2} Re^{-\alpha R\sin\theta}\,\mathrm{d}\,\theta \\
&\le 2\int_0^{\pi/2} Re^{-2\alpha R\theta/\pi}\,\mathrm{d}\,\theta = \frac{\pi}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha R}\right) \le \frac{\pi}{\alpha}
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) e^{\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}\,z \right| \le \frac{\pi}{\alpha} M(R)$$

ولمّا كان $\lim\limits_{R\to\infty} M(R) = 0$ ، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}\,z = 0$. ❐

3-4. **توطئة**. لتكن R من $\mathbb{R}_+^*$، وليكن $f : \tilde{D}(0,R) \to \mathbb{C}$ تابعاً هولومورفياً يقبل قطباً بسيطاً عند 0. وليكن Γ_ε، مع $0 < \varepsilon < R$، الطريق المعطى بالتمثيل الوسيطي :

$$\varphi_\varepsilon : [0,\pi] \to \mathbb{C},\ \varphi_\varepsilon(\theta) = \varepsilon\, e^{\mathrm{i}\theta}$$

عندئذ

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,0)$$

الإثبات

لمّا كان 0 قطباً بسيطاً للتابع f، استنتجنا أنّه يوجد تابع هولومورفي

$$g : D(0,R) \to \mathbb{C}$$

يُحقّق

$$\forall z \in \tilde{D}(0,R),\quad f(z) = \frac{a}{z} + g(z)$$

إذ رمزنا بالرمز a إلى $\mathrm{Res}(f,0)$. وبناءً على ذلك يكون

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{a}{z}\,\mathrm{d}\,z + \int_{\Gamma_\varepsilon} g(z)\,\mathrm{d}\,z \qquad ⌘$$

ولكن، من جهة أولى،

$$\left|\int_{\Gamma_\varepsilon} g(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \le \pi\varepsilon \sup_{|z|=\varepsilon}\left|g(z)\right|$$

وكوْن g محدوداً في جوار 0 يقتضي $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} g(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$.

ومن جهة ثانية،

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{a}{z}\,\mathrm{d}\,z = a\int_0^\pi \mathrm{i}\,\mathrm{d}\,\theta = \mathrm{i}\,\pi a$$

وبالعودة إلى ⌘ نستنتج المطلوب. ❐

4-4. التكاملات المثلّثيّة

نريد حساب التكاملات من النمط

$$I = \int_0^{2\pi} F(\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}\,t$$

إذ F تابع كسري بمتحوِّلين x و y ليس له أقطاب على الدائرة الواحديّة

$$\mathbb{S}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

إذا وضعنا $z = e^{\mathrm{i}\,t}$ حين يكون $0 \leq t \leq 2\pi$، وجدنا أنّ

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathrm{i}\,z(t)} F\left(\tfrac{1}{2\mathrm{i}}(z(t) - \frac{1}{z(t)}), \tfrac{1}{2}(z(t) + \frac{1}{z(t)})\right) z'(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_\Gamma \frac{1}{\mathrm{i}\,z} F\left(\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \mathrm{d}\,z \end{aligned}$$

و Γ هو الطريق $C^+(0,1)$. وبناءً على هذا نرى أنّ I يساوي جداء ضرب $2\pi\,\mathrm{i}$ بمجموع رواسب التابع $z \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}\,z} F\left(\dfrac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(z - \dfrac{1}{z}\right), \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)\right)$ عند أقطابه الواقعة في القرص $D(0,1)$.

لنحسب، على سبيل المثال، التكامل الآتي

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\,t}{1 - a\cos t}$$

حيث a من $]-1,+1[\setminus\{0\}$. نعلم استناداً إلى مناقشتنا السابقة أنّ

$$I(a) = \int_{C^+(0,1)} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

و f هو التابع المعطى بالصيغة:

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{i}\,z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{2}\left(z + z^{-1}\right)} = \frac{2\,\mathrm{i}}{az^2 - 2z + a}$$

إنّ للتابع f قطبين بسيطين هما $p_1 = \dfrac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}$ و $p_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}$، والقطب p_2 هو القطب الوحيد الواقع داخل $D(0,1)$.

وبناءً على ذلك

$$I(a) = \int_{C^+(0,1)} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,p_2)$$

ولكن

$$\mathrm{Res}(f,p_2) = \frac{2\,\mathrm{i}}{2ap_2 - 2} = \frac{-\,\mathrm{i}}{\sqrt{1-a^2}}$$

إذن $I(a) = \dfrac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$، وتبقى هذه النتيجة صحيحة في حالة $a = 0$.

5-4. التكاملات المعمّمة لتوابع كسريّة

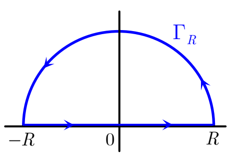
نريد حساب التكاملات من النمط

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}\,x$$

إذ ينتمي كثيرا الحدود S و Q إلى $\mathbb{R}[X]$. ونفترض حتّى يتقارب التكامل I أنّ Q ليس له أصفار حقيقيّة، وأنّ $\deg Q \geq 2 + \deg S$.

لحساب I نطبّق نظرية الرواسب على التابع $z \mapsto \dfrac{S(z)}{Q(z)}$ وهو تابع ميرومورفي في $\mathbb{C}$ وعلى الطريق Γ_R من الصف C^1 قطعياً المعرّف بالتمثيل الوسيطي

$$\varphi_R : [-R, R+\pi] \to \mathbb{C},\quad t \mapsto \begin{cases} t & : \quad t \in [-R,R] \\ R\,e^{\mathrm{i}(t-R)} & : \quad t \in [R, R+\pi] \end{cases}$$



وهو مكوّن إذن من القطعة المستقيمة $[-R,R]$، ونصف الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها R الموجود في نصف المستوي العلوي $\mathbb{P}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,z \geq 0\}$ والموجهة بالاتجاه الموجب.

كما سنفترض عند تطبيق نظريّة الرواسب أنّ R كبيرة بقدر كاف حتى تقع جميع أقطاب f، (عددها أصغر أو يساوي $\deg Q$)، داخل القرص $D(0,R)$. لنرمز بالرمز $\mathcal{P}^+$ إلى مجموعة أقطاب f الموجودة في نصف المستوي $\mathbb{P}^+$ أي $\mathcal{P}^+ = \mathbb{P}^+ \cap \mathcal{P}$. عندئذ نجد استناداً إلى نظريّة الرواسب أنّ

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 2\pi\,\mathrm{i}\left(\sum_{p\in\mathcal{P}^+} \mathrm{Res}\,(f,p)\right)$$

وبناءً على ذلك نستنتج

$$\int_{\Gamma_R} \frac{S(z)}{Q(z)} \mathrm{d}\, z + \int_{-R}^{R} \frac{S(x)}{Q(x)} \mathrm{d}\, x = 2\pi \mathrm{i} \left(\sum_{p \in \mathcal{P}^+} \operatorname{Res}\left(\frac{S}{Q}, p \right) \right)$$

لمّا كانت $\deg Q \geq 2 + \deg S$ استنتجنا أنّ $\lim_{|z| \to \infty} \left| z \frac{S(z)}{Q(z)} \right| = 0$ ، وإذا استخدمنا التوطئة 1-4. وجدنا $\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{S(z)}{Q(z)} \mathrm{d}\, z = 0$. وينجم عن هذا أنّ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(x)}{Q(x)} \mathrm{d}\, x = 2\pi \mathrm{i} \left(\sum_{p \in \mathcal{P}^+} \operatorname{Res}\left(\frac{S}{Q}, p \right) \right)$$

☜ لنحسب، على سبيل المثال، التكامل التالي

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\, x}{1 + x^4}$$

نلاحظ أوّلاً أنّ $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\, x}{1 + x^4}$ ، فإذا طبّقنا الدراسة السابقة على التابع الكسري

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^4}$$

الذي يقبل قطبين بسيطين في نصف المستوي $\mathbb{P}^+$ هما

$$p_1 = e^{\mathrm{i}\pi/4} \quad \text{و} \quad p_2 = e^{3\mathrm{i}\pi/4}$$

وتعطى رواسبهما بالعلاقة

$$\operatorname{Res}(f, p_k) = \frac{1}{4p_k^3} = -\frac{p_k}{4}, \qquad k = 1, 2$$

وجدنا، استناداً إلى ما سبق ما يأتي:

$$\begin{aligned} I &= \pi \mathrm{i}(\operatorname{Res}(f, p_1) + \operatorname{Res}(f, p_2)) \\ &= -\frac{\pi \mathrm{i}}{4}(e^{\mathrm{i}\pi/4} + e^{3\mathrm{i}\pi/4}) = -\frac{\pi \mathrm{i}}{4}\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

6-4. التكاملات المعمّمة من النمط : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$.

مع α من $\mathbb{R}_+^*$ ، و f تابع ميرومورفي وله عدد منته من الأقطاب في مجموعة مفتوحة تحوي نصف المستوي العلوي $\mathbb{P}^+$ على ألاّ يحتوي المحور الحقيقي على أقطاب للتابع f . نفترض أيضاً أنّ $f(x) \in \mathbb{R}$ أياً كانت x من $\mathbb{R}$ ، وأنّ $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ ، وأنّ التكامل I متقاربٌ. وهذا ما يتيح لنا أن نكتب:

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$$

نطبّق نظرية الرواسب على التابع $z \to g(z) = f(z)e^{i\alpha z}$ الميرومورفي في مجموعة مفتوحة تحوي نصف المستوي العلوي، وعلى الطريق $\tilde{\Gamma}_R$ الذي درسناه في الفقرة السابقة، فنجد

$$\int_{\Gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = 2\pi i\left(\sum_{p\in\mathcal{P}^+} \operatorname{Res}(g,p)\right)$$

و $\mathcal{P}^+$ هي مجموعة أقطاب f الموجودة في نصف المستوي العلوي $\mathbb{P}^+$. وإذا استخدمنا التوطئة 2-4 وجدنا $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}\,dz = 0$. وينجم عن هذا أنّ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = 2\pi i\left(\sum_{p\in\mathcal{P}^+} \operatorname{Res}(z \mapsto f(z)e^{i\alpha z}, p)\right)$$

☜ لنحسب، على سبيل المثال، التكامل

$$I(\alpha) = \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^4}\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

نلاحظ أوّلاً أنّ التكامل المدروس متقارب بالإطلاق. وكذلك فإنّ التابع

$$z \mapsto f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

ميرومورفيٌّ في $\mathbb{C}$ ، ويقبل أربعة أقطابٍ بسيطة هي

$$p_1 = e^{i\pi/4} \quad \text{و} \quad p_2 = e^{3i\pi/4} \quad \text{و} \quad p_3 = e^{5i\pi/4} \quad \text{و} \quad p_4 = e^{7i\pi/4}$$

وهو يُحقّق $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. فإذا كان $1 < R$، وكان Γ_R هو الطريق الذي درسناه سابقاً والمكوّن من القطعة المستقيمة $[-R, R]$، متبوعة بنصف الدائرة التي مركزها 0، ونصف قطرها R، المتوضّع في نصف المستوي العلوي $\mathbb{P}^+$، وجدنا استناداً إلى نظرية الرواسب

$$\text{⌘} \quad \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^4}\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^4}\,dx = 2\pi i\Big(\operatorname{Res}(g, p_1) + \operatorname{Res}(g, p_2)\Big)$$

حيث $g : z \mapsto \dfrac{e^{i\alpha z}}{1+z^4}$. ولكن

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^4}\,dx = \int_{0}^{R} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^4}\,dx + \int_{0}^{R} \frac{e^{-i\alpha x}}{1+x^4}\,dx = 2\int_{0}^{R} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^4}\,dx$$

فإذا جعلنا R تسعى إلى $+\infty$ في ⌘ وجدنا

$$2I(\alpha) = 2\pi i\Big(\operatorname{Res}(g, p_1) + \operatorname{Res}(g, p_2)\Big)$$

ولكن

$$\operatorname{Res}(g, p_k) = \frac{e^{i\alpha p_k}}{4p_k^3} = -\frac{p_k e^{i\alpha p_k}}{4}, \qquad k = 1,2$$

وبناءً على ذلك نجد

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= -\frac{\pi i}{4}\Big(e^{i\pi/4}\exp(i\alpha e^{i\pi/4}) + e^{3i\pi/4}\exp(i\alpha e^{3i\pi/4})\Big) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-\alpha/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{-\alpha/\sqrt{2}} \cdot \left(\cos\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

4-7. ملاحظة. يمكن تعميم الطريقة السابقة لحساب بعض التكاملات المعمّمة من النمط:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx \quad \text{و} \quad 0 < \alpha$$

عندما يقبل f قطباً بسيطاً على المحور الحقيقي، ولتوضيح ذلك سنحسب التكامل

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

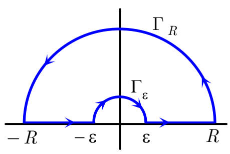
وهو من التكاملات الشهيرة التي أثبتنا تقاربها في دراستنا السابقة.

☜ لنتأمّل التابع الهولومورفي

$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{e^{\mathrm{i}\,z}}{z}$$

إنّ f تابع ميرومورفي في $\mathbb{C}$، ويقبلُ قطباً بسيطاً عند 0. ليكن R و ε عددين يُحقّقان $0 < \varepsilon < R$، وليكن الطريق $\tilde{\Gamma}_{\varepsilon,R}$ من الصف C^1 قِطَعِيّاً المعرّف بالتمثيل الوسيطي $\varphi : [-R, R+2\pi-2\varepsilon] \to \mathbb{C}$ مع

$$\varphi(t) = \begin{cases} t & : \; t \in [-R, -\varepsilon] \\ -\varepsilon e^{-\mathrm{i}(t+\varepsilon)} & : \; t \in [-\varepsilon, \pi-\varepsilon] \\ t-\pi+2\varepsilon & : \; t \in [\pi-\varepsilon, R+\pi-2\varepsilon] \\ -Re^{\mathrm{i}(t-R+2\varepsilon)} & : \; t \in [R+\pi-2\varepsilon, R+2\pi-2\varepsilon] \end{cases}$$



وهو مكوّن إذن من القطعة المستقيمة $[-R, -\varepsilon]$، ونصف الدائرة Γ_ε التي مركزها 0 ونصف قطرها ε والموجود في نصف المستوي $\mathbb{P}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$، موجهاً بالاتجاه السالب، متبوعة بالقطعة المستقيمة $[\varepsilon, R]$، ثُمّ بنصف الدائرة Γ_R التي مركزها النقطة 0 ونصف قطرها R والموجود في نصف المستوي $\mathbb{P}^+$ موجّهاً بالاتجاه الموجب.

بتطبيق نظريّة الرواسب على التابع f والطريق $\tilde{\Gamma}_{\varepsilon,R}$ نستنتج أنّ

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{\mathrm{i}\,x}}{x} \,\mathrm{d}\,x + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{\mathrm{i}\,z}}{z} \,\mathrm{d}\,z + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{\mathrm{i}\,x}}{x} \,\mathrm{d}\,x + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{\mathrm{i}\,z}}{z} \,\mathrm{d}\,z = 0$$

ولكن، من جهة أولى، لدينا

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{\mathrm{i}\,x}}{x} \,\mathrm{d}\,x + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{\mathrm{i}\,x}}{x} \,\mathrm{d}\,x = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{\mathrm{i}\,x} - e^{-\mathrm{i}\,x}}{x} \,\mathrm{d}\,x = 2\,\mathrm{i} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}\,x$$

ومن جهة ثانية $\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{\mathrm{i}\,z}}{z}\,\mathrm{d}\,z=0$ استناداً إلى التوطئة 2-4. وأخيراً نجد استناداً إلى التوطئة 3-4. أنّ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{e^{\mathrm{i}\,z}}{z}\,\mathrm{d}\,z=-\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,0).$$

ولمّا كان $\mathrm{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0}\frac{ze^{\mathrm{i}\,z}}{z}=1$ استنتجنا أنّ

$$2\,\mathrm{i}\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x-\pi\,\mathrm{i}=0$$

وبناءً على هذا نجد $\frac{\pi}{2}=I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x$.

8-4. حساب بعض التكاملات من النمط $I=\int_0^{+\infty}\frac{F(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}\,x$ مع α من $]0,1[$.

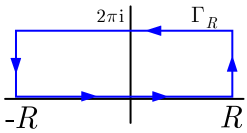
نفترض أنّ F تابع كسري درجته تُحقّق الشرط $\deg F\leq -1$، ولا يقبل أقطاباً في $\mathbb{R}_+$ وذلك حتّى نضمن تقارب التكامل المعمّم I.

في الحقيقة، من المفيد في مثل هذه الحالة أن نبدأ بتغيير المتحوّل في التكامل المدروس I وذلك بوضع $x=e^t$، فيصبح

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^tF(e^t)e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}\,t$$

ولحساب هذا التكامل نتأمّل التابع الميرومورفي $f:z\mapsto f(z)=e^zF(e^z)e^{-\alpha z}$ الذي يقبل عدداً منتهياً من الأقطاب داخل الشريط $S=\left\{z\in\mathbb{C}:0\leq\mathrm{Im}\,z\leq 2\pi\right\}$ (لماذا؟). ثمّ ليكن الطريق Γ_R من الصف C^1 قِطَعِيّاً والمكوَّن من

$$\Gamma_R=[-R,R]\cup[R,R+2\pi\,\mathrm{i}]\cup[R+2\pi\,\mathrm{i},-R+2\pi\,\mathrm{i}]\cup[-R+2\pi\,\mathrm{i},-R]$$



إذ نختار R_0 كبيرة بقدر كافٍ لتقع جميع أقطاب التابع f الموجودة في S داخل المستطيل $]0,2\pi[\times]-R_0,R_0[$. (هذا ممكن لأنّ عدد هذه الأقطاب منته ولا يقع أيٌّ منها على المستقيم $\operatorname{Im} z=0$ أو على المستقيم $\operatorname{Im} z=2\pi$).

فإذا كانت $\mathcal{P}_S$ هي مجموعة أقطاب f الموجودة في S استنتجنا باستخدام نظريّة الرواسب أنّه أياً كانت $R>R_0$ كان

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}\,x+\mathrm{i}\int_{0}^{2\pi} f(R+\mathrm{i}\,t)\,\mathrm{d}\,t-\int_{-R}^{R} f(x+2\pi\,\mathrm{i})\,\mathrm{d}\,x$$
$$-\mathrm{i}\int_{0}^{2\pi} f(-R+\mathrm{i}\,t)\,\mathrm{d}\,t=2\pi\,\mathrm{i}\left(\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\operatorname{Res}(f,p)\right)$$

ولكن، من جهة أولى، لدينا

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}\,x-\int_{-R}^{R} f(x+2\pi\,\mathrm{i})\,\mathrm{d}\,x=(1-e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\alpha})\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

ومن جهة ثانية

$$\begin{aligned}\left|\int_{0}^{2\pi} f(R+\mathrm{i}\,t)\,\mathrm{d}\,t\right| &\le e^{-\alpha R}\int_{0}^{2\pi}\left|e^{R+\mathrm{i}\,t}F(R+\mathrm{i}\,t)\right|\mathrm{d}\,t\\ &\le 2\pi e^{-\alpha R}\sup_{|z|=e^R}\left|zF(z)\right|\end{aligned}$$

والتابع $z\mapsto zF(z)$ محدود عندما يكون $|z|$ في جوار اللانهاية لأنّ $\deg F\le -1$ إذن الشرط $\alpha>0$ يقتضي: $\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi} f(R+\mathrm{i}\,t)\,\mathrm{d}\,t=0$. وأخيراً

$$\begin{aligned}\left|\int_{0}^{2\pi} f(-R+\mathrm{i}\,t)\,\mathrm{d}\,t\right| &\le e^{-(1-\alpha)R}\int_{0}^{2\pi}\left|F(-R+\mathrm{i}\,t)\right|\mathrm{d}\,t\\ &\le 2\pi\cdot e^{-(1-\alpha)R}\sup_{|z|=e^{-R}}\left|F(z)\right|\end{aligned}$$

والتابع $z\mapsto F(z)$ محدود في جوار 0 فالشرط $\alpha<1$ يقتضي

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi} f(-R+\mathrm{i}\,t)\,\mathrm{d}\,t=0$$

وبناءً على ما سبق، نستنتج بجعل R تسعى إلى $+\infty$، أنّ

$$(1-e^{-2\pi\mathrm{i}\alpha})\int_0^{+\infty}\frac{F(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}\,x = 2\pi\mathrm{i}\left(\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\mathrm{Res}(z\mapsto e^{(1-\alpha)z}F(e^z),p)\right)$$

وهذا ما يتيح لنا حساب التكامل المطلوب.

☜ لنحسب على سبيل المثال التكامل

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x^\alpha(1+x^2)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(1-\alpha)t}}{1+e^{2t}}\,\mathrm{d}\,t$$

إنّ للتابع $f:z\mapsto\dfrac{e^{(1-\alpha)z}}{1+e^{2z}}$ قطبين بسيطين هما $p_1=\dfrac{\mathrm{i}\,\pi}{2}$ و $p_2=\dfrac{3\,\mathrm{i}\,\pi}{2}$ في الشريط S،
واستناداً إلى ما سبق يكون

$$(1-e^{-2\pi\mathrm{i}\alpha})I=2\pi\mathrm{i}\big(\mathrm{Res}\big(f,p_1\big)+\mathrm{Res}\big(f,p_2\big)\big)$$

ولكن في حالة $k=1,2$ لدينا

$$\mathrm{Res}\left(z\mapsto\frac{e^{(1-\alpha)z}}{1+e^{2z}},p_k\right)=\frac{e^{(1-\alpha)p_k}}{2e^{2p_k}}=-\frac{e^{(1-\alpha)p_k}}{2}$$

ومنه

$$(1-e^{-2\pi\mathrm{i}\alpha})I=-\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{i}\,e^{-\mathrm{i}\pi\alpha/2}-\mathrm{i}\,e^{-3\mathrm{i}\pi\alpha/2}\right)$$

وبالإصلاح نجد $I=\dfrac{\pi}{2\cos\left(\dfrac{\pi\alpha}{2}\right)}$.

9-4. حساب بعض التكاملات من النمط $I=\int_0^{+\infty}F(x)\cdot\ln x\,\mathrm{d}\,x$

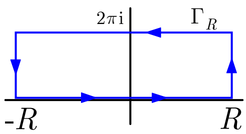
إذ نفترض أنّ F تابع كسري من $\mathbb{R}(X)$ درجته تُحقِّق الشرط $\deg F\leq -2$، ولا يقبل أقطاباً في $\mathbb{R}_+$ وذلك حتّى نضمن تقارب التكامل المعمّم I.

من المفيد في مثل هذه الحالة أيضاً أن نبدأ بتغيير المتحوّل في التكامل المدروس I وذلك بوضع $x=e^t$، فيصبح

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}t\,F(e^t)\,e^t\,\mathrm{d}\,t$$

ولحساب هذا التكامل نتأمّل التابع الميرومورفي $z \overset{f}{\mapsto} f(z) = z^2F(e^z)e^z$ الذي يقبل عدداً منتهياً من الأقطاب داخل الشريط $S = \left\{z \in \mathbb{C} : 0 \le \operatorname{Im} z \le 2\pi\right\}$. ثُمّ ليكن الطريق Γ_R من الصف C^1 قِطَعِيّاً والمكوَّن من

$$\Gamma_R = [-R,R] \cup [R, R+2\pi\,\mathrm{i}] \cup [R+2\pi\,\mathrm{i}, -R+2\pi\,\mathrm{i}] \cup [-R+2\pi\,\mathrm{i}, -R]$$



إذ نختار R_0 كبيرة بقدر كافٍ لتقع جميع أقطاب التابع f الموجودة في S داخل المستطيل $]-R_0, R_0[\times]0, 2\pi[$. (هذا ممكن لأنّ عدد هذه الأقطاب منته ولا يقع أيٌّ منها على المستقيم $\operatorname{Im} z = 0$ أو على المستقيم $\operatorname{Im} z = 2\pi$) .

فإذا كانت $\mathcal{P}_S$ هي مجموعة أقطاب f الموجودة في S استنتجنا باستخدام نظريّة الرواسب أنّه أياً كانت $R > R_0$ فلدينا

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}\,x + \mathrm{i}\int_{0}^{2\pi} f(R+\mathrm{i}\,t)\,\mathrm{d}\,t - \int_{-R}^{R} f(x+2\pi\,\mathrm{i})\,\mathrm{d}\,x$$
$$-\mathrm{i}\int_{0}^{2\pi} f(-R+\mathrm{i}\,t)\,\mathrm{d}\,t = 2\pi\,\mathrm{i}\left(\sum_{p\in\mathcal{P}_S} \operatorname{Res}(f,p)\right)$$

ولكن، من جهة أولى، لدينا

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_{-R}^{R} f(x+2\pi\,\mathrm{i})\,\mathrm{d}\,x &= \int_{-R}^{R} (x^2 - (x+2\pi\,\mathrm{i})^2 F(e^x)e^x\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int_{-R}^{R} (-4\pi\,\mathrm{i}\,x + 4\pi^2)\,F(e^x)\,e^x\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

ومن جهة ثانية

$$\begin{aligned}\left|\int_{0}^{2\pi} f(R+\mathrm{i}\,t)\,\mathrm{d}\,t\right| &\le \int_{0}^{2\pi} (R+2\pi)^2\left|e^{R+\mathrm{i}\,t}F(R+\mathrm{i}\,t)\right|\mathrm{d}\,t \\ &\le 2\pi(R+2\pi)^2e^{-R}\sup_{|z|=e^R}\left|z^2F(z)\right|\end{aligned}$$

والتابع $z \mapsto z^2F(z)$ محدود عندما يكون $|z|$ في جوار اللانهاية لأنّ $\deg F \le -2$ إذن

$$\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{2\pi} f(R+\mathrm{i}\,t)\,\mathrm{d}\,t = 0$$

وأخيراً

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi} f(-R+\mathrm{i}\,t)\,\mathrm{d}\,t\right| &\leq (R+2\pi)^2 e^{-R}\int_0^{2\pi}\left|F(-R+\mathrm{i}\,t)\right|\mathrm{d}\,t\\ &\leq 2\pi\cdot(R+2\pi)^2 e^{-R}\sup_{|z|=e^{-R}}\left|F(z)\right|\end{aligned}$$

والتابع $F(z) \mapsto z$ محدود في جوار 0، إذن $\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi} f(-R+\mathrm{i}\,t)\,\mathrm{d}\,t = 0$. بناءً على ما سبق، نستنتج بجعل R تسعى إلى $+\infty$، أنّ

$$\begin{aligned}-4\pi\,\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} xF(e^x)e^x\,\mathrm{d}\,x + 4\pi^2\int_{-\infty}^{+\infty} F(e^x)e^x\,\mathrm{d}\,x\\ = 2\pi\,\mathrm{i}\left(\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\operatorname{Res}(z\mapsto z^2F(e^z)e^z, p)\right)\end{aligned}$$

أو

$$\int_0^{+\infty} F(x)\ln x\,\mathrm{d}\,x + \pi\,\mathrm{i}\int_0^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{2}\left(\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\operatorname{Res}(z\mapsto z^2F(e^z)e^z, p)\right)$$

وهذا ما يتيح حساب التكامل المطلوب.

☜ لنحسب على سبيل المثال التكامل

$$I = \int_0^{\infty}\frac{\ln x}{1+x^4}\,\mathrm{d}\,x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{te^t}{1+e^{4t}}\,\mathrm{d}\,t$$

إنّ للتابع $\frac{z^2e^z}{1+e^{4z}} \overset{f}{\mapsto} z$ أربعة أقطاب بسيطة في الشريط S، هي

$$p_k = \frac{\mathrm{i}\,\pi}{4} + \frac{\mathrm{i}\,\pi k}{2} \quad \text{مع} \quad 0\leq k\leq 3$$

واستناداً إلى ما سبق يكون

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^4}\,\mathrm{d}\,x + \pi\,\mathrm{i}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^4} = -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{3}\operatorname{Res}(z\mapsto \frac{z^2e^z}{1+e^{4z}}, p_k)\right)$$

ولكن

$$\operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{z^2e^z}{1+e^{4z}}, p_k\right) = \frac{p_k^2e^{p_k}}{4e^{4p_k}} = -\frac{p_k^2e^{p_k}}{4}$$ مع $k \in \{0,1,2,3\}$.

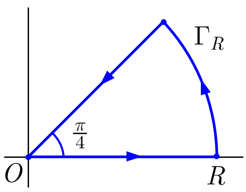
ومنه

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^4}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{8}\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{3} p_k^2e^{p_k}\right)$$

وبالإصلاح نجد $I = -\dfrac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$.

4-10. مثال – تكاملا فرنيل Fresnel. نهدف إلى حساب التكاملين

$$J = \int_0^{+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}\,x \quad \text{و} \quad I = \int_0^{+\infty} \cos x^2\,\mathrm{d}\,x$$



لنتأمّل التابع الهولومورفيّ $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=e^{-z^2}$، وليكن $0<R$، و $\tilde{\Gamma}_R$ الطريق المغلق المكوَّن من القطعة المستقيمة $[0,R]$ متبوعة بالقوس Γ_R من الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها R، والتي تصل بين النقطتين R و $Re^{\mathrm{i}\pi/4}$، ثُمّ بالقطعة المستقيمة $[Re^{\mathrm{i}\pi/4},0]$.

لمّا كان f هولومورفياً في $\mathbb{C}$ استنتجنا أنّ $\int_{\tilde{\Gamma}_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$ ، أو

$$\int_{[0,R]} f(z)\,\mathrm{d}\,z + \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z - \int_{[0,Re^{\mathrm{i}\pi/4}]} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0 \qquad ①$$

ولكن من جهة أولى

$$\int_{[0,R]} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

ومن جهة ثانية

$$\int_{[0,Re^{\mathrm{i}\pi/4}]} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_0^R e^{-(re^{\mathrm{i}\pi/4})^2}\,e^{\mathrm{i}\pi/4}\,\mathrm{d}\,r = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\int_0^R \exp(-\mathrm{i}r^2)\,\mathrm{d}\,r \qquad ②$$

وأخيراً، لمّا كان

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_0^{\pi/4} \exp\Big(-(Re^{\mathrm{i}\theta})^2\Big)\,\mathrm{i}\,Re^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\,\theta$$

استنتجنا

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \leq R\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\,\theta \overset{\varphi=\frac{\pi}{2}-2\theta}{=} \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\sin\varphi}\,\mathrm{d}\,\varphi$$

ومنه

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \leq \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-2R^2\varphi/\pi}\,\mathrm{d}\,\varphi \leq \frac{\pi}{4R}$$

إذن

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0 \qquad ③$$

ومن ① و ② و ③، وبجعل R تسعى إلى $+\infty$، نستنتج

$$\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\exp(-\mathrm{i}\,r^2)\,\mathrm{d}\,r = \int_0^{+\infty}\exp(-x^2)\,\mathrm{d}\,x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

وقد استخدمنا النتيجة المعروفة $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. بفصل الجزأين الحقيقي والتخيّلي في العلاقة السابقة نستنتج أنّ

$$I + J = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{و} \quad I = J$$

ومنه

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}\,x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

تمرينات

التمرين 1. أوجد النشر بمتسلسلة لوران للتابع الآتي $z \mapsto \dfrac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$.

أوّلاً في الحلقة $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3\}$.

ثُمّ في الحلقة $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 3 < |z|\}$.

الحل

لنلاحظ أوّلاً أنّ

$$\frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)} = \frac{(z+2)(z+3)-8(z+2)+3(z+3)}{(z+2)(z+3)}$$
$$= 1 - \frac{8}{z+3} + \frac{3}{z+2}$$

في حالة $z \in \Delta_1$ نلاحظ أنّ $\frac{2}{|z|} < 1$ و $\frac{|z|}{3} < 1$ ومنه

$$\frac{3}{z+2} = \frac{3}{z} \cdot \frac{1}{1+2/z} = \frac{3}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}(-1)^n 2^n z^{-n}$$
$$\frac{8}{z+3} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{1+z/3} = \frac{8}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^{-n} z^n$$

إذن

$$\forall z \in \Delta_1, \quad \frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$$

حيث

$$a_n = \begin{cases} 8(-3)^{-n-1} & : \quad n > 0 \\ -5/3 & : \quad n = 0 \\ 3(-2)^{-n-1} & : \quad n < 0 \end{cases}$$

■ أمّا في حالة $z\in\Delta_2$ فنلاحظ أنّ $\frac{2}{|z|}<1$ و $\frac{3}{|z|}<1$ ومنه

$$\begin{aligned}\frac{3}{z+2}&=\frac{3}{z}\cdot\frac{1}{1+2/z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3\cdot 2^n z^{-n-1}\\ \frac{8}{z+3}&=\frac{8}{z}\cdot\frac{1}{1+3/z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 8\cdot 3^n z^{-n-1}\end{aligned}$$

إذن

$$\forall z\in\Delta_2,\quad \frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3\cdot 2^n-8\cdot 3^n}{z^{n+1}}$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 2. نفترض أنّ (a,b) عنصراً من $\mathbb{C}^2$ يُحقّق $0<|a|<|b|$، أوجد النشر بمتسلسلة لوران للتابع $z\mapsto\frac{1}{(z-a)(z-b)}$، في كلٍّ من الحلقتين Δ_1 و Δ_2 الآتيتين :
$\Delta_1=\{z\in\mathbb{C}:|a|<|z|<|b|\}$ و $\Delta_2=\{z\in\mathbb{C}:|b|<|z|\}$.

الحل

لنلاحظ أوّلاً أنّ

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)$$

في حالة $z\in\Delta_1$ نلاحظ أنّ $|a|<|z|<|b|$ إذن

$$\begin{aligned}\forall z\in\Delta_1,\quad f(z)&=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-a/z}+\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1-z/b}\right)\\ &=\frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}}\right)\\ &=\frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{a^{n+1}}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}}\right)\\ &=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{z^n}{(a-b)c^{n+1}}:\qquad c=\begin{cases}b & : & n\ge 0\\ a & : & n<0\end{cases}\end{aligned}$$

- وفي حالة $z \in \Delta_2$ نلاحظ أنّ $|b| < |z|$ إذن

$$\begin{aligned}\forall z \in \Delta_2, \quad f(z) &= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-a/z} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-b/z}\right)\\ &= \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{z^{n+1}}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n-b^n}{a-b}\right)\cdot\frac{1}{z^{n+1}}\end{aligned}$$

وهي النتيجة المرجوّة.

التمرين 3. أوجد النشر بمتسلسلة لوران للتابع $z \mapsto \dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+2)}$.

أولاً في $\Delta_1 = \left\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \sqrt{2}\right\}$،

ثُمّ في $\Delta_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : \sqrt{2} < |z|\right\}$.

الحل

لنلاحظ أوّلاً أنّ

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+2)} = \frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{z^2+2}$$

- في حالة $z \in \Delta_1$ نلاحظ أنّ $1 < |z|^2 < 2$ إذن

$$\begin{aligned}\forall z \in \Delta_1, \quad f(z) &= \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+1/z^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+z^2/2}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+2}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{2^{n+1}}\\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n-1}z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}}z^{2n}\right)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^{n-1}}{c^{n+1}}z^{2n} : \qquad c = \begin{cases}2 & : \quad n \ge 0\\ 1 & : \quad n < 0\end{cases}\end{aligned}$$

- وفي حالة $z \in \Delta_2$ نلاحظ أنّ $2 < |z|^2$ إذن

$$\begin{aligned}\forall z \in \Delta_2, \quad f(z) &= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1+1/z^2} - \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1+2/z^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+2}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{z^{2n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - (-2)^n}{z^{2n+2}}\end{aligned}$$

وهي النتيجة المرجوّة.

التمرين 4. أوجد النشر بمتسلسلة لوران للتابع $z \mapsto \operatorname{Log} \dfrac{z^2}{z^2-1}$ في الحلقة
$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z|\}$$

الحل

لنلاحظ أوّلاً أنّ $\dfrac{z^2}{z^2-1} \in \mathbb{R}_-$ يُكافئ $z \in]-1,1[$ وعليه يكون مهما تكن z من Δ فإن المقدار $\dfrac{z^2}{z^2-1}$ ينتمي إلى مجموعة تعريف تابع اللوغاريتم الأساسي التي رمزنا إليها $\mathbb{L}$. ولأنّ $\operatorname{Log}(w) = -\operatorname{Log}\left(\dfrac{1}{w}\right)$، في حالة w من $\mathbb{L}$، استنتجنا

$$\forall z \in \Delta, \quad f(z) = \operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-1/z^2}\right) = -\operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$$

إذن

$$\forall z \in \Delta, \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nz^{2n}}$$

وهي النتيجة المرجوّة.

التمرين 5. عبّر عن ثوابت النشر بمتسلسلة لوران للتابع $z \mapsto \exp\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ بواسطة تكاملات مثلّثيّة، ثمّ بالاستفادة من المتطابقة $\exp\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = e^z \cdot e^{1/z}$.

الحل

في الحقيقة، لدينا في $\mathbb{C}^*$ النشر الآتي بمتسلسلة لوران:

$$f(z) = \exp\left(z + \frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

وعلى الخصوص

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \exp(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

حيث يكون التقارب منتظماً بالنسبة إلى θ. ومنه

$$\begin{aligned}
\forall p \in \mathbb{Z}, \quad a_p &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) e^{-ip\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2\cos\theta}\left(\cos p\theta + i\sin p\theta\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2\cos\theta}\cos p\theta\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^{2\cos\theta}\cos p\theta\, d\theta
\end{aligned}$$

ومن ناحية أخرى

$$\exp\left(z + \frac{1}{z}\right) = e^z \cdot e^{1/z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k\right)\cdot\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}z^{-p}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$$

وعليه في حالة $n \geq 0$ لدينا

$$a_n = \sum_{k-p=n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{p!} = \sum_{k=p+n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\cdot\frac{1}{(n+p)!}$$

وفي حالة $n < 0$ لدينا

$$a_n = \sum_{k-p=n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{p!} = \sum_{k-n=p}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{p!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(k-n)!}$$

وعليه

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{\left(k + |n|\right)!}$$

■

التمرين 6. نتأمّل التابعين

$$g : z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \quad و \quad f : z \mapsto \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$$

أثبت أنّهما هولومورفيّان في $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$، وأثبت أنّ الأجزاء القطبيّة لهذين التابعين عند كلٍّ نقطة من $\mathbb{Z}$ متساوية. ثُمّ أثبت أنّ $z \mapsto g(z) - f(z)$ محدود في $\mathbb{C}$. ماذا تستنتج ؟

الحل

- ليكن z عنصراً من $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. عندئذ نستنتج من كون

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|n|^2}{|z-n|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|n|^2}{|z+n|^n} = 1$$

أنّ المتسلسلتين $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$ متقاربتان بالإطلاق. وهذا يتيح لنا تعريف التابع

$$g : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{C},\ g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

لنبرهن أنّ g تابعٌ هولومورفي في $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

لتكن m من $\mathbb{N}$، ولنتأمّل القرص $K_m = D\left(0, m+\frac{1}{2}\right)$. عندئذ، مهما كان z من K_m ومهما كان العدد الصحيح n الذي يحقّق $|n| > m$ كان

$$|z-n| \geq |n| - |z| \geq |n| - m - \frac{1}{2} > 0$$

ومن ثَمّ

$$\sup_{z\in K_m} \frac{1}{|z-n|^2} \leq \frac{1}{\left(|n| - m - 1/2\right)^2}$$

إذن تتقارب المتسلسلتان

$$\sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2} \quad و \quad \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

بالنظيم على K_m، فمجموعهما هولومورفي في K_m. ولمّا كان المجموع المنتهي $\sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{(z-n)^2}$ هولومورفيّاً في $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ استنتجنا أنّ g الذي يمثّل مجموع التوابع الثلاثة السابقة هو أيضاً هولومورفي في $K_m\backslash\mathbb{Z}$. وأخيراً، لأنّ هذا الأمر محقَّقٌ أيّاً كانت قيمة m من $\mathbb{N}^*$،

استنتجنا أنّ g هولومورفي في $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$، وأنّ g ميرومورفي في $\mathbb{C}$ ومجموعة أقطابه هي مجموعة الأعداد الصحيحة، والجزء القطبي المتعلّق بالقطب n من $\mathbb{Z}$ هو $\dfrac{1}{(z-n)^2}$.

■ ومن جهة أخرى، من الواضح أنّ التابع f هولومورفي في $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. لتكن n من $\mathbb{Z}$ عندئذ نرى، بالاستفادة من النشر $\cos 2w = 1 - 2w^2 + \frac{2}{3}w^4 + O\left(w^6\right)$ أنّ

$$\begin{aligned} f(z) - \frac{1}{(z-n)^2} &= \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(z-n))} - \frac{1}{(z-n)^2} \\ &= \pi^2\left(\frac{1}{\sin^2 w} - \frac{1}{w^2}\right) \qquad w \leftarrow \pi(z-n) \\ &= \pi^2\left(\frac{2w^2 - 1 + \cos 2w}{2w^2 \sin^2 w}\right) \xrightarrow[w\to 0]{} \frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

إذن التابع $z \mapsto f(z) - \dfrac{1}{(z-n)^2}$ تابعٌ هولومورفي في الجوار المحذوف $\tilde{D}\left(n,\frac{1}{2}\right)$ ومحدودٌ في هذا الجوار، فهو يقبل التمديد إلى تابع هولومورفي في جوار النقطة n. ومن ثَمّ يكون المقدار $\dfrac{1}{(z-n)^2}$ هو الجزء القطبي للتابع f عند القطب n.

■ التابع $z \mapsto h(z) = g(z) - f(z)$ هولومورفي في $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$، ونقاط $\mathbb{Z}$ نقاط شاذّة كاذبة استناداً إلى ما سبق، إذن يمكن تمديد التابع h إلى تابع هولومورفي في $\mathbb{C}$. بملاحظة أنّ

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left|\sin(x + \mathrm{i}\, y)\right|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$$

نرى، في حالة $z = x + \mathrm{i}\, y$، حيث $\left|x\right| \le \dfrac{1}{2}$ و $z \ne 0$، يكون لدينا

$$\begin{aligned} \left|h(z)\right| &\le \frac{\pi^2}{\left|\sin(\pi x + \mathrm{i}\,\pi y)\right|^2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left|x - n + \mathrm{i}\, y\right|^2} \\ &\le \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x + \operatorname{sh}^2 \pi y} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n-x)^2 + y^2} \\ &\le \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x + \operatorname{sh}^2 \pi y} + \frac{1}{x^2 + y^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1/2)^2 + y^2} \end{aligned}$$

أو

$$\left|h(z)\right| \leq \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x + \operatorname{sh}^2 \pi y} + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

فإذا كان R_α هو داخل ومحيط المستطيل الذي رؤوسه $A\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\,\alpha\right)$ و $B\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\,\alpha\right)$ و $C\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\,\alpha\right)$ و $D\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\,\alpha\right)$ في حالة $\alpha \geq 1$ ، كان

$$\sup_{z\in[CD]}\left|h(z)\right| = \sup_{z\in[AB]}\left|h(z)\right| \leq 1 + \frac{\pi^2}{\operatorname{sh}^2 \pi} + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \equiv M_1$$

$$\sup_{z\in[DA]}\left|h(z)\right| = \sup_{z\in[BC]}\left|h(z)\right| \leq 4 + \pi^2 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \equiv M_2$$

فإذا عرّفنا $M = \max\left(M_1, M_2\right)$ كان لدينا $\sup\limits_{z\in\partial R_\alpha}\left|h(z)\right| \leq M$ ، واستناداً إلى مبدأ الطويلة العظمى يكون لدينا $\sup\limits_{z\in R_\alpha}\left|h(z)\right| \leq M$ وذلك مهما كانت قيمة α التي تُحقّق الشرط $\alpha \geq 1$ ، وعليه

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \left|\operatorname{Re} z\right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left|h(z)\right| \leq M$$

ولكن نجد بحساب بسيط ومباشر أنّ العدد 1 دورٌ للتابع h : $\forall z \in \mathbb{C}, h(z+1) = h(z)$ ، وعليه يكون $\left|h(z)\right| \leq M$ أيّاً كان z من $\mathbb{C}$. إذن التابع h تابعٌ هولومورفي ومحدود في $\mathbb{C}$ ، فهو ثابت. ولكن من اليسير التحقّق أنّ $\lim\limits_{y\to+\infty} h(\mathrm{i}\,y) = 0$ ، إذن $\forall z \in \mathbb{C}, h(z) = 0$ ، أو

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}, \quad \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2} \; .$$

■

ملاحظة. يمكن الوصول إلى هذه النتيجة بأسلوب أسرع إذا لاحظنا أنّ

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad h\left(\frac{z}{2}\right) + h\left(\frac{z+1}{2}\right) = 4h(z)$$

فإذا عرّفنا $M_R = \sup\limits_{|z|\leq R}\left|h(z)\right|$. استنتجنا مما سبق أنّ $4M_R \leq 2M_R$ في حالة $R \geq 1$ ومنه $M_R = 0$.

التمرين 7. اذكر طبيعة النقاط الشاذّة للتوابع الآتية:

$$1.\quad z\mapsto\frac{1}{z-z^3},\qquad 2.\quad z\mapsto\frac{z^5}{(1-z)^2},$$
$$3.\quad z\mapsto\frac{e^z}{1+z^2},\qquad 4.\quad z\mapsto\frac{1-e^z}{1+e^z},$$
$$5.\quad z\mapsto\exp\frac{z}{1-z},\qquad 6.\quad z\mapsto\frac{1}{e^z-1}\exp\left(\frac{1}{1-z}\right),$$
$$7.\quad z\mapsto\exp\left(\tan\frac{1}{z}\right),\qquad 8.\quad z\mapsto\sin\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)},$$

الحل

1. النقاط الشاذّة للتابع $z\mapsto\dfrac{1}{z-z^3}$، هي $\{0,1,-1\}$ وهي أقطابٌ بسيطة.
2. النقاط الشاذّة للتابع $z\mapsto\dfrac{z^5}{(1-z)^2}$، هي فقط $\{1\}$، وهو قطبٌ رتبة مضاعفته 2.
3. النقاط الشاذّة للتابع $z\mapsto\dfrac{e^z}{1+z^2}$، هي $\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$، وهما قطبان بسيطان.
4. النقاط الشاذّة للتابع $z\mapsto\dfrac{1-e^z}{1+e^z}$، هي $\{\mathrm{i}\pi(2k+1):k\in\mathbb{Z}\}$ وهي أقطابٌ بسيطة.
5. النقاط الشاذّة للتابع $z\mapsto\exp\dfrac{z}{1-z}$، هي $\{1\}$ وهي نقطة شاذّة أساسيّة. لأنّه لدينا

$$\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{1\},\qquad \exp\frac{z}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!e}\cdot\frac{1}{(z-1)^n}$$

6. النقاط الشاذّة للتابع $z\mapsto\dfrac{1}{e^z-1}\exp\dfrac{1}{1-z}$، تتكوّن من النقطة $\{1\}$ وهي نقطة شاذّة أساسيّة، ومن النّقاط $\left\{2\pi\mathrm{i}k:k\in\mathbb{Z}\right\}$ وهي أقطابٌ بسيطة.
7. النقاط الشاذّة للتابع $z\mapsto\exp\tan\dfrac{1}{z}$، هي النقاط $\left\{\dfrac{2}{\pi(1+2k)}:k\in\mathbb{Z}\right\}$ وهي جميعاً نقاط شاذّة أساسيّة، والنقطة $\{0\}$ وهي نقطة شاذّة غير معزولة.

.8 النقاط الشاذّة للتابع $z \mapsto \sin\dfrac{1}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}$ ، هي النقاط $\left\{\dfrac{2}{\pi(1+2k)} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ وهي جميعاً نقاط شاذّة أساسيّة، والنقطة $\{0\}$ وهي نقطة شاذّة غير معزولة.

التمرين 8. عيِّن أقطاب التوابع الآتية، واحسب رواسب هذه التوابع عند كلٍّ من أقطابها :

1. $z \mapsto \dfrac{1}{z^3 - z^5}$,
2. $z \mapsto \dfrac{z^2}{(1+z^2)^2}$,
3. $z \mapsto \dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}, n \in \mathbb{N}^*$
4. $z \mapsto \dfrac{e^z}{z^2(9+z^2)}$,
5. $z \mapsto \dfrac{e^z}{z(z-1)}$,
6. $z \mapsto \dfrac{1}{z^4 + a^4}, a \neq 0$
7. $z \mapsto \dfrac{e^{\pi z}}{1+z^2}$,
8. $z \mapsto \dfrac{z^{n-1}}{z^n + a^n}, n \in \mathbb{N}^*$

الحل

.1 لنتأمّل التابع $z \mapsto f(z) = \dfrac{1}{z^3 - z^5}$. نلاحظ أنّ

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5} = \frac{1}{z^3(1-z^2)} = \frac{1}{z^3}\left(1 + z^2 + \frac{z^4}{1-z^2}\right)$$
$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{\frac{1}{2}}{1-z} - \frac{\frac{1}{2}}{1+z}$$

وأخيراً

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} - \frac{\frac{1}{2}}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}}{z+1}$$

إذن أقطاب f هي $\{0,1,-1\}$ ، ولدينا

$$\operatorname{Res}(f,-1) = -\frac{1}{2} \text{ و } \operatorname{Res}(f,1) = -\frac{1}{2} \text{ و } \operatorname{Res}(f,0) = 1$$

.2 لنتأمّل التابع $z \mapsto f(z) = \dfrac{z^2}{(1+z^2)^2}$. نلاحظ أنّ

$$\left(\frac{z}{1+z^2}\right)' = \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{1+z^2} - 2\frac{z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{1+z^2} - 2f\left(z\right)$$

إذن

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{1+z^2}\right)' \\ &= \frac{1}{4\,\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{z+\mathrm{i}}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}} + \frac{1}{z+\mathrm{i}}\right)' \\ &= \frac{\mathrm{i}}{4}\left(\frac{1}{z+\mathrm{i}} - \frac{1}{z-\mathrm{i}}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} + \frac{1}{(z+\mathrm{i})^2}\right) \end{aligned}$$

فأقطاب f هي $\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$ ولدينا

$$\operatorname{Res}(f,-\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{i}}{4} \text{ و } \operatorname{Res}(f,\mathrm{i}) = -\frac{\mathrm{i}}{4}$$

3. لنتأمّل في حالة $n \in \mathbb{N}^*$ التابع $z \mapsto f(z) = \dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$. نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^{2n}}{(1+z)^n} = \frac{(1+z-1)^{2n}}{(1+z)^n} \\ &= \frac{1}{(1+z)^n}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k(-1)^k\left(1+z\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k(-1)^k\frac{1}{(1+z)^{n-k}} \end{aligned}$$

إذن للتابع f قطبٌ وحيد $\{-1\}$ ولدينا $\operatorname{Res}(f,-1) = (-1)^{n-1}C_{2n}^{n-1}$.

4. لنتأمّل التابع $z \mapsto f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(9+z^2)}$. إنّ أقطاب التابع f هي $\{0,3\mathrm{i},-3\mathrm{i}\}$.
الصفر قطبٌ مضاعفٌ، ولدينا

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^z-1-z}{z^2}\cdot\frac{1}{9+z^2} + \frac{1+z}{z^2(9+z^2)} \\ &= \frac{e^z-1-z}{z^2}\cdot\frac{1}{9+z^2} + \frac{1+z}{z^2}\left(\frac{1}{9+z^2} - \frac{1}{9}\right) + \frac{1+z}{9z^2} \\ &= \frac{e^z-1-z}{z^2}\cdot\frac{1}{9+z^2} + \frac{1+z}{9(9+z^2)} + \frac{1}{9z^2} + \frac{1}{9z} \end{aligned}$$

إذن، لأنّ التابع

$$z \mapsto \frac{e^z - 1 - z}{z^2} \cdot \frac{1}{9+z^2} + \frac{1+z}{9(9+z^2)}$$

هولومورفي عند 0، استنتجنا أنّ الجزء القطبي الموافق للصفر هو $Q_0(z) = \frac{1}{9z} + \frac{1}{9z^2}$ ومن ثَمّ

$$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{9}$$

أمّا الرواسب عند الأقطاب البسيطة، فتُحسب كما يأتي :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,3\mathrm{i}) &= \left[\frac{e^z}{(9z^2+z^4)'}\right]_{z=3\mathrm{i}} = \frac{e^{3\mathrm{i}}}{18(3\mathrm{i}) + 4(3\mathrm{i})^3} = \frac{\mathrm{i}\, e^{3\mathrm{i}}}{54}\\
\operatorname{Res}(f,-3\mathrm{i}) &= \left[\frac{e^z}{(9z^2+z^4)'}\right]_{z=-3\mathrm{i}} = \frac{e^{-3\mathrm{i}}}{18(-3\mathrm{i}) + 4(-3\mathrm{i})^3} = -\frac{\mathrm{i}\, e^{-3\mathrm{i}}}{54}
\end{aligned}$$

5. لنتأمّل التابع $z \mapsto f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)}$. نلاحظ أنّ أقطاب التابع f هي $\{0,1\}$. وهما قطبان بسيطان للتابع f، إذن

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,0) &= \left[\frac{e^z}{(z^2-z)'}\right]_{z=0} = \frac{e^0}{2\times 0 - 1} = -1\\
\operatorname{Res}(f,1) &= \left[\frac{e^z}{(z^2-z)'}\right]_{z=1} = \frac{e^1}{2\times 1 - 1} = e
\end{aligned}$$

6. لنتأمّل التابع $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z^4+a^4}$. نلاحظ أنّ أقطاب التابع f هي

$$\left\{p_k : k \in \{0,1,2,3\}\right\}$$

وقد عرّفنا $p_k = a e^{\mathrm{i}\theta_k}$ حيث $\theta_k = \frac{\pi}{4}(1+2k)$. وهي أقطاب بسيطة إذن نجد

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,p_k) &= \frac{1}{4p_k^3} = -\frac{p_k}{4a^4}\\
&= -\frac{1}{4a^3} e^{\mathrm{i}(2k+1)\pi/4}, \quad k \in \left\{0,1,2,3\right\}
\end{aligned}$$

7. لنتأمّل التابع $f(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{1+z^2}$ ↦ z . نلاحظ أنّ أقطاب التابع f هي $\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$. وهي أقطاب بسيطة إذن نجد

$$\operatorname{Res}(f,-\mathrm{i})=\frac{e^{-\mathrm{i}\pi}}{-2\,\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{i}}{2} \quad \text{و} \quad \operatorname{Res}(f,\mathrm{i})=\frac{e^{\mathrm{i}\pi}}{2\,\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{2}$$

8. لنتأمّل، في حالة $n\in\mathbb{N}^*$ ، التابع $z\mapsto f(z)=\dfrac{z^{n-1}}{z^n+a^n}$. نلاحظ أنّ أقطاب التابع f أقطاب بسيطة وهي $\left\{p_k : k\in\{0,1,\ldots,n-1\}\right\}$. وقد عرّفنا $p_k=ae^{\mathrm{i}\theta_k}$ مع $\theta_k=\pi(1+2k)/n$. إذن نجد

$$\operatorname{Res}(f,p_k)=\frac{p_k^{n-1}}{np_k^{n-1}}=\frac{1}{n},\quad k\in\left\{0,1,\ldots,n-1\right\}$$

وبذا يكتمل حلّ التمرين. ■

التمرين 9. لتكن k من $\mathbb{N}^*$ ، وليكن f تابعاً هولومورفياً في جوار a من $\mathbb{C}$. أثبت أنّ

$$\operatorname{Res}\left(z\mapsto\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}},a\right)=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

الحل

لمّا كان f هولومورفيّاً في جوار a وُجِدَ عددٌ موجبٌ تماماً r يُحقّق

$$\forall z\in D(a,r),\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

وعليه يعطى منشور لوران للتابع $z\mapsto\dfrac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}$ في جوار a بالصيغة الآتية

$$\forall z\in\tilde{D}(a,r),\quad \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-k-1}$$

وأمثال $\dfrac{1}{z-a}$ هي $\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ ومنه

$$\operatorname{Res}\left(z\mapsto\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}},a\right)=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$ ■

التمرين 10. احسب الرواسب الآتية :

1. $\operatorname{Res}\left(z\mapsto\dfrac{\sin\alpha z}{z^3\sin\beta z},0\right),\ \beta\neq 0$

2. $\operatorname{Res}\left(z\mapsto\dfrac{e^z}{(z-1)^4},1\right)$

3. $\operatorname{Res}\left(z\mapsto\dfrac{e^{a\operatorname{Log} z}}{\left(z^2+1\right)^2},\mathrm{i}\right),\ a\in\mathbb{R}$

4. $\operatorname{Res}\left(z\mapsto\dfrac{e^{\mathrm{i}mz}}{\left(z^2+a^2\right)^2},a\,\mathrm{i}\right)$

5. $\operatorname{Res}\left(z\mapsto\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\pi z}{2}\right)},\mathrm{i}\right)$

6. $\operatorname{Res}\left(z\mapsto\dfrac{1}{(z-a)^n(z-b)},a\right)$

7. $\operatorname{Res}\left(z\mapsto\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^n},\mathrm{i}\right),\ n\in\mathbb{N}^*$

8. $\operatorname{Res}\left(z\mapsto\dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}},n^2\pi^2\right)$

الحل

1. لنتأمّل التابع $z\mapsto f(z)=\dfrac{\sin\alpha z}{z^3\sin\beta z}$. ولنلاحظ أنّ 0 قُطبٌ مضاعف من المرتبة 3 لهذا لتابع، بافتراض أنّ $\alpha\neq 0$ طبعاً، وإلاّ كانت المسألة تافهة. التابع $z\mapsto\dfrac{\sin\alpha z}{\sin\beta z}$ تابعٌ هولومورفي زوجي في جوار 0، فيوجد عددٌ حقيقي موجبٌ تماماً r يُحقّق

$$\forall z\in D(0,r),\quad \frac{\sin\alpha z}{\sin\beta z}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}z^{2n}$$

والراسب المطلوب هو الثابت a_2 . نستنتج من المساواة السابقة أنّه في جوار الصفر لدينا

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\beta^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}z^{2n}\right)$$

وبمُقارنة الحدّين الثابتين والحدّين اللذين يحويان z^2 نستنتج أنّ

$$a_2=\frac{\alpha\beta}{6}-\frac{\alpha^3}{6\beta}\quad \text{و}\quad a_0=\frac{\alpha}{\beta}$$

ومن ثَمّ يكون لدينا

$$\operatorname{Res}\left(z\mapsto\frac{\sin\alpha z}{z^3\sin\beta z},0\right)=\frac{\alpha\beta^2-\alpha^3}{6\beta}$$

2. لنتأمّل التابع $z \mapsto f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^4}$. ولنلاحظ أنّ 1 قُطبٌ مضاعف من المرتبة 4 لهذا لتابع. ولكنّ خواص التابع الأسّي تنقذنا:

$$\forall z \neq 1, \quad f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^4} = \frac{e}{(z-1)^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}$$

إذن

$$.\operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{e^z}{(z-1)^4}, 1\right) = \frac{e}{6}$$

3. لنتأمّل التابع $z \mapsto f(z) = \dfrac{e^{a\operatorname{Log} z}}{(z^2+1)^2}$ في حالة $a \in \mathbb{R}$. ولنلاحظ أنّ i قُطبٌ مضاعف من المرتبة 2 لهذا لتابع. ولكن

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{z+\mathrm{i}}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+z^2)^2} &= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{z+\mathrm{i}}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} + \frac{1}{(z+\mathrm{i})^2} - \frac{2}{z^2+1}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} + \frac{1}{(z+\mathrm{i})^2} - \frac{1}{\mathrm{i}(z-\mathrm{i})} + \frac{1}{\mathrm{i}(z+\mathrm{i})}\right)\end{aligned}$$

إذن في جوار i لدينا

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{4(z-\mathrm{i})^2} + \frac{1}{4\,\mathrm{i}(z-\mathrm{i})} + O\big(1\big)$$

وفي جوار i لدينا أيضاً

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}\big(\mathrm{i}\big) + \operatorname{Log}\left(1 + \frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right) = \mathrm{i}\frac{\pi}{2} - \mathrm{i}(z-\mathrm{i}) + O\Big((z-\mathrm{i})^2\Big)$$

إذن

$$e^{a\operatorname{Log} z} = e^{\mathrm{i}\pi a/2}(1 - \mathrm{i}\,a(z-\mathrm{i}) + O((z-\mathrm{i})^2))$$

ومن ثَمّ فإنّ أمثال $\dfrac{1}{z-\mathrm{i}}$ في منشور لوران للتابع $z \mapsto \dfrac{e^{a\operatorname{Log} z}}{(1+z^2)^2}$ تساوي:

$$\operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{z^a}{(1+z^2)^2}, \mathrm{i}\right) = \frac{\mathrm{i}(a-1)}{4}e^{\mathrm{i}\pi a/2}$$

4. لنتأمّل التابع $f(z)=\dfrac{e^{\mathrm{i}mz}}{(z^2+a^2)^2}$ في حالة $a\in\mathbb{R}$. ولنلاحظ أنّ $\mathrm{i}a$ قُطبٌ مضاعف من المرتبة 2 لهذا لتابع. ولكن كما فعلنا في 3. لدينا

$$\frac{1}{(a^2+z^2)^2}=-\frac{1}{4a^2}\left(\frac{1}{(z-\mathrm{i}a)^2}+\frac{1}{(z+\mathrm{i}a)^2}-\frac{1}{\mathrm{i}a(z-\mathrm{i}a)}+\frac{1}{\mathrm{i}a(z+\mathrm{i}a)}\right)$$

إذن في جوار $\mathrm{i}a$ لدينا

$$\frac{1}{(a^2+z^2)^2}=\frac{1}{4\mathrm{i}a^3(z-\mathrm{i}a)}-\frac{1}{4a^2(z-\mathrm{i}a)}+O\big(1\big)$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$e^{\mathrm{i}mz}=e^{-ma}\cdot e^{\mathrm{i}m(z-\mathrm{i}a)}=e^{-ma}+\mathrm{i}me^{-ma}(z-\mathrm{i}a)+O\Big((z-\mathrm{i}a)^2\Big)$$

ومن ثَمّ فإنّ أمثال $\dfrac{1}{z-\mathrm{i}a}$ في منشور لوران للتابع $z\mapsto\dfrac{e^{\mathrm{i}mz}}{(z^2+a^2)^2}$ تساوي

$$\operatorname{Res}\left(z\mapsto\frac{e^{\mathrm{i}mz}}{(z^2+a^2)^2},\mathrm{i}a\right)=-\mathrm{i}\,\frac{(ma+1)e^{-ma}}{4a^3}$$

5. لنتأمّل التابع $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)\operatorname{ch}\big(\pi z/2\big)}$ ، $z\mapsto$ ولنلاحظ أنّ i قُطبٌ لهذا لتابع.

لنُجرِ إذن تغيير المتحوّل $z=\mathrm{i}+w$ ، فنجد أنّ

$$\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{(w^2+2\mathrm{i}w)\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\mathrm{i}}{2}+\frac{\pi w}{2}\right)}=\frac{1}{\mathrm{i}w(w+2\mathrm{i})\operatorname{sh}\left(\frac{\pi w}{2}\right)}\\
&=-\frac{1}{2w\left(1+\frac{w}{2\mathrm{i}}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi w}{2}\right)}\\
&=-\frac{1}{2w\left(1+\frac{w}{2\mathrm{i}}\right)\left(\frac{\pi w}{2}+\frac{\pi^3w^3}{48}+O(w^5)\right)}\\
&=-\frac{1}{\pi w^2\left(1+\frac{w}{2\mathrm{i}}\right)\left(1+\frac{\pi^2w^2}{24}+O(w^4)\right)}\\
&=-\frac{1}{\pi w^2\left(1+\frac{w}{2\mathrm{i}}+O(w^2)\right)}=-\frac{1}{\pi w^2}\left(1-\frac{w}{2\mathrm{i}}+O(w^2)\right)\\
&=-\frac{1}{\pi w^2}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}w}+O(1)
\end{aligned}$$

وعليه يكون

$$\operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{1}{(z^2+1)\operatorname{ch}(\pi z/2)}, \mathrm{i}\right) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}$$

6. لنتأمّل التابع $z \mapsto f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n(z-b)}$، ولنلاحظ أنّ a قُطبٌ لهذا لتابع، سنفترض أنّ $a \neq b$. نجري عندئذ تغيير المتحوّل $z = a + w$، فنجد في جوار $w = 0$ أنّ

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{w^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{w}{b-a}} \\ &= \frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{w^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(b-a)^k}w^k \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(b-a)^{k+1}}w^{k-n} \end{aligned}$$

ومنه

$$\operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}, a\right) = \frac{-1}{(b-a)^n}$$

7. لنتأمّل التابع $z \mapsto f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^n}$، ولنلاحظ أنّ i قُطبٌ لهذا لتابع، لنجرِ إذن تغيير المتحوّل $z = \mathrm{i} + w$، فنجد في جوار $w = 0$ أنّ

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(2\,\mathrm{i})^n w^n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{w}{2\,\mathrm{i}}\right)^n} \\ &= \frac{1}{(2\,\mathrm{i})^n w^n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{k+n-1}^k\left(\frac{w}{2\,\mathrm{i}}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k C_{k+n-1}^k}{(2\,\mathrm{i})^{k+n}}w^{k-n} \end{aligned}$$

وعليه

$$\operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{1}{(z^2+1)^n}, \mathrm{i}\right) = -\frac{\mathrm{i}}{2^{2n-1}}C_{2n-2}^{n-1}$$

8. لنتأمّل التابع $f(z)=\dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$ ، $z\mapsto$ ولنلاحظ أنّ $n^2\pi^2$ قُطبٌ لهذا لتابع في حالة $n\in\mathbb{N}^*$ ، في الحقيقة، إنّ هذا القطب قطبٌ بسيط، ومن ثمّ

$$\operatorname{Res}\left(z\mapsto\frac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}},n^2\pi^2\right)=\frac{\sqrt{n^2\pi^2}}{\dfrac{1}{2\sqrt{n^2\pi^2}}\cos\sqrt{n^2\pi^2}}=(-1)^n2n^2\pi^2$$ ■

التمرين 11. احسب التكاملات الآتية مستفيداً من نظرية الرواسب:

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}\,\mathrm{d}\,\theta,$ ☞ $0<b<a$
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta}{1+a^2-2a\cos(\theta-\varphi)},$ ☞ $0<|a|<1$
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\,\theta}{(1+a\cos\theta)^2},$ ☞ $|a|<1$
4. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\theta\,\mathrm{d}\,\theta}{1+a^2-2a\cos2\theta},$ ☞ $0<|a|<1$
5. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\,\theta}{1+a^2-2a\cos\theta},$ ☞ $|a|\neq1$
6. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\,\theta}{(1+a\cos^2\theta)^2},$ ☞ $a>0$

الحل

1. حساب $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}\,\mathrm{d}\,\theta$ في حالة $0<b<a$. لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}I&=\int_{C^+(0,1)}\frac{\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-z^{-1})\right)^2}{a+\frac{b}{2}(z+z^{-1})}\cdot\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{i}\,z}\\&=\frac{\mathrm{i}}{2b}\int_{C^+(0,1)}\frac{1-2z^2+z^4}{z^2(z^2+\frac{2a}{b}z+1)}\,\mathrm{d}\,z\end{aligned}$$

لنتأمّل إذن التابع الميرومورفي $f(z)=\dfrac{1-2z^2+z^4}{z^2(z^2+\frac{2a}{b}z+1)}$ ، $z\mapsto$ الذي يقبل في القرص $D(0,1)$ قطبين هما 0 و $p=(-a+\sqrt{a^2-b^2})/b$.

◆ لحساب راسب f عند 0 نلاحظ أنّ

$$f(z)=\frac{1}{z^2(1+\frac{2a}{b}z+z^2)}+\frac{-2+z^2}{1+\frac{2a}{b}z+z^2}=\frac{1}{z^2}-\frac{2a}{bz}+O(1)$$

ومن ثَمّ نجد أنّ $\operatorname{Res}(f,0)=-2a/b$.

◆ ولحساب راسب f عند p نستفيد من كون p قطباً بسيطاً فنكتب

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,p)&=\left[\frac{1-2z^2+z^4}{z^2(z^2+\frac{2a}{b}z+1)'}\right]_{z=p}=\frac{1-2p^2+p^4}{p^2\left(2p+\frac{2a}{b}\right)}\\&=\frac{\frac{1}{p2}-2+p^2}{2\left(p+\frac{a}{b}\right)}=\frac{-4-\frac{2a}{b}\left(p+\frac{1}{p}\right)}{2\left(p+\frac{a}{b}\right)}\\&=\frac{-4+\frac{4a^2}{b^2}}{\frac{2}{b}\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{4(a^2-b^2)}{2b\sqrt{a^2-b^2}}=2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}I&=2\pi\,\mathrm{i}\times\frac{\mathrm{i}}{2b}\big(\operatorname{Res}(f,0)+\operatorname{Res}(f,p)\big)=-\frac{\pi}{b}\left(2\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}-\frac{2a}{b}\right)\\&=\frac{2\pi}{b^2}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)\end{aligned}$$

وأخيراً

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{2\pi}{a+\sqrt{a^2-b^2}},\qquad 0<b<a$$

2. حساب $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta}{1+a^2-2a\cos(\theta-\varphi)}$ في حالة $0<|a|<1$. لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}I&=\int_{C^+(0,1)}\frac{\left(\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)\right)^2}{1+a^2-a\left(ze^{-\mathrm{i}\varphi}+e^{\mathrm{i}\varphi}z^{-1}\right)}\cdot\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{i}\,z}\\&=\frac{\mathrm{i}\,e^{-\mathrm{i}\varphi}}{4a}\int_{C^+(0,1)}\frac{1+2z^2+z^4}{z^2\left(z^2e^{-2\mathrm{i}\varphi}-\frac{a^2+1}{a}ze^{-\mathrm{i}\varphi}+1\right)}\mathrm{d}\,z\end{aligned}$$

لنتأمّل إذن التابع الميرومورفي

$$z \mapsto f(z) = \frac{1+2z^2+z^4}{z^2\left(z^2 e^{-2\mathrm{i}\varphi} - \frac{a^2+1}{a} z e^{-\mathrm{i}\varphi} + 1\right)}$$

الذي يقبل في القرص $D(0,1)$ قطبين هما 0 و $p = ae^{\mathrm{i}\varphi}$.

- لحساب راسب f عند 0 نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,0) &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2\left(z^2 e^{-2\mathrm{i}\varphi} - \frac{a^2+1}{a} z e^{-\mathrm{i}\varphi} + 1\right)}, 0\right)\\ &= \frac{a^2+1}{a} e^{-\mathrm{i}\varphi}\end{aligned}$$

- ولحساب راسب f عند p نستفيد من كون p قطباً بسيطاً فنكتب

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,p) &= \frac{\frac{1}{p^2} + 2 + p^2}{2pe^{-2\mathrm{i}\varphi} - \frac{a^2+1}{2a} e^{-\mathrm{i}\varphi}}\\ &= \frac{a}{a^2-1} e^{\mathrm{i}\varphi}\left(a^2 e^{2\mathrm{i}\varphi} + e^{-2\mathrm{i}\varphi} a^{-2} + 2\right)\end{aligned}$$

وعليه يكون لدينا

$$\begin{aligned}I &= 2\pi\,\mathrm{i} \times \frac{\mathrm{i}\,e^{-\mathrm{i}\varphi}}{4a}\left(\operatorname{Res}\left(f,0\right) + \operatorname{Res}\left(f,p\right)\right)\\ &= -\frac{\pi e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2a}\left(\frac{a}{a^2-1} e^{\mathrm{i}\varphi}\left(a^2 e^{2\mathrm{i}\varphi} + \frac{e^{-2\mathrm{i}\varphi}}{a^2} + 2\right) + \frac{a^2+1}{a} e^{-\mathrm{i}\varphi}\right)\\ &= \frac{\pi}{1-a^2}\left(1 + a^2 \cos 2\varphi\right)\end{aligned}$$

وأخيراً نجد

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{1+a^2-2a\cos(\theta-\varphi)} = \frac{\pi}{1-a^2}\left(1 + a^2\cos 2\varphi\right), \quad 0 < \left|a\right| < 1$$

3. حساب $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\,\theta}{(1+a\cos\theta)^2}$ في حالة $a\in\left]0,1\right[$. لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}I&=\int_{C^+(0,1)}\frac{1}{\left(1+\frac{a}{2}(z+z^{-1})\right)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{i}\,z}=\frac{1}{\mathrm{i}}\int_{C^+(0,1)}\frac{z}{\left(\frac{a}{2}z^2+z+\frac{a}{2}\right)^2}\mathrm{d}\,z\\&=\frac{4}{\mathrm{i}\,a^2}\int_{C^+(0,1)}\frac{z}{\left(z^2+\frac{2}{a}z+1\right)^2}\mathrm{d}\,z=\frac{4}{\mathrm{i}\,a^2}\int_{C^+(0,1)}\frac{z}{\left((z+\frac{1}{a})^2-(\frac{1}{a^2}-1)\right)^2}\mathrm{d}\,z\\&=\frac{4}{\mathrm{i}\,a^2}\int_{C^+(0,1)}\frac{z}{\left(z+\frac{1}{a}-\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}\right)^2\left(z+\frac{1}{a}+\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}\right)^2}\mathrm{d}\,z\end{aligned}$$

فإذا عرّفنا $G(z)=\dfrac{z}{(z+a^{-1}+\sqrt{a^{-2}-1})^2}$ وهو هولومورفي في مجموعة مفتوحة تحوي $\bar{D}(0,1)$ ، ووضعنا $p=-a^{-1}+\sqrt{a^{-2}-1}$ استنتجنا أنّ

$$I=\frac{4}{\mathrm{i}\,a^2}\int_{C^+(0,1)}\frac{G(z)}{(z-p)^2}\mathrm{d}\,z=\frac{8\pi}{a^2}G'(p)=\frac{2\pi}{(1-a^2)\sqrt{1-a^2}}$$

وهي النتيجة المرجوّة.

4. حساب $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\theta\,\mathrm{d}\,\theta}{1+a^2-2a\cos 2\theta}$ في حالة $0<|a|<1$. لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 6\theta}{1+a^2-2a\cos 2\theta}\mathrm{d}\,\theta=\frac{1}{4}\int_0^{4\pi}\frac{1+\cos 3\varphi}{1+a^2-2a\cos\varphi}\mathrm{d}\,\varphi\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 3\varphi}{1+a^2-2a\cos\varphi}\mathrm{d}\,\varphi=\frac{1}{2}\int_{C^+(0,1)}\frac{1+\frac{1}{2}(z^3+z^{-3})}{1+a^2-a(z+z^{-1})}\cdot\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{i}\,z}\\&=-\frac{1}{4\,\mathrm{i}}\int_{C^+(0,1)}\frac{z^6+2z^3+1}{z^3(z-a)(az-1)}\mathrm{d}\,z\end{aligned}$$

لنتأمّل إذن التابع الميرومورفي

$$z\mapsto f(z)=\frac{z^6+2z^3+1}{z^3(z-a)(az-1)}$$

الذي يقبل في القرص $D\left(0,1\right)$ قطبين هما 0 و a .

◆ لحساب راسب f عند 0 نلاحظ أنّ

$$\operatorname{Res}(f,0)=\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3(z-a)(az-1)},0\right)=\frac{1+a^2+a^4}{a^3}$$

◆ ونجد راسب f عند a ببساطة

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{a^6+2a^3+1}{a^3(a^2-1)}=\frac{(a^3+1)(1-a+a^2)}{a^3(a-1)}$$

وعليه يكون لدينا

$$\begin{aligned}
I&=2\pi\mathrm{i}\times-\frac{1}{4\mathrm{i}}\big(\operatorname{Res}(f,0)+\operatorname{Res}(f,a)\big)\\
&=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{(a^3+1)(1-a+a^2)}{a^3(a-1)}+\frac{1+a^2+a^4}{a^3}\right)\\
&=-\frac{\pi(1-a+a^2)}{2a^3\left(a-1\right)}\big(a^3+1+(a-1)(1+a+a^2)\big)\\
&=\pi\left(\frac{1-a+a^2}{1-a}\right)
\end{aligned}$$

وأخيراً نجد

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\theta\,\mathrm{d}\,\theta}{1+a^2-2a\cos 2\theta}=\pi\left(\frac{1}{1-a}-a\right),\qquad 0<|a|<1$$

5. حساب $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\,\theta}{1+a^2-2a\cos\theta}$ في حالة $\left|a\right|\neq 1$. لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{\mathrm{i}}\int_{C^+(0,1)}\frac{1}{1+a^2-a(z+z^{-1})}\cdot\frac{\mathrm{d}\,z}{z}=\frac{\mathrm{i}}{a}\int_{C^+(0,1)}\frac{1}{z^2-\frac{1+a^2}{a}z+1}\mathrm{d}\,z\\
&=\frac{\mathrm{i}}{a}\int_{C^+(0,1)}\frac{1}{(z-a)(z-a^{-1})}\mathrm{d}\,z=\frac{\mathrm{i}}{a(a-a^{-1})}\int_{C^+(0,1)}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-a^{-1}}\right)\mathrm{d}\,z\\
&=\frac{2\pi}{1-a^2}\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C^+(0,1)}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-a^{-1}}\right)\mathrm{d}\,z\\
&=\frac{2\pi}{1-a^2}\Big(\operatorname{Ind}(a,C^+(0,1))-\operatorname{Ind}(a^{-1},C^+(0,1))\Big)
\end{aligned}$$

وعليه

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\,\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = \frac{2\pi}{a^2-1}\operatorname{sgn}(|a|-1)$$

6. حساب $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\,\theta}{(1+a\cos^2\theta)^2}$ في حالة $0 < a$. لنلاحظ أنّ

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\,\theta}{(1+\frac{a}{2}(1+\cos 2\theta))^2} = \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \frac{d\,\varphi}{(1+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\varphi)^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\,\varphi}{(1+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\varphi)^2} = \frac{4}{a^2}\int_0^{2\pi} \frac{d\,\varphi}{(\underbrace{\tfrac{2}{a}+1}_{b}+\cos\varphi)^2}$$

$$= \frac{4}{a^2}\int_{C^+(0,1)} \frac{1}{\left(b+\frac{1}{2}(z+z^{-1})\right)^2}\cdot\frac{d\,z}{i\,z} = \frac{16}{i\,a^2}\int_{C^+(0,1)} \frac{z}{\left(z^2+2bz+1\right)^2}\,d\,z$$

$$= \frac{32\pi}{a^2}\cdot\frac{1}{2\pi\,i}\int_{C^+(0,1)} \frac{z}{(z+b-\sqrt{b^2-1})^2(z+b+\sqrt{b^2-1})^2}\,d\,z$$

$$= \frac{32\pi}{a^2}\cdot\left[\left(\frac{z}{(z+b+\sqrt{b^2-1})^2}\right)'\right]_{z=\sqrt{b^2-1}-b} = \frac{8\pi}{a^2}\cdot\frac{b}{(b^2-1)\sqrt{b^2-1}}$$

وعليه

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\,\theta}{(1+a\cos^2\theta)^2} = \frac{\pi(a+2)}{(1+a)\sqrt{1+a}}$$

وبذا يتم المطلوب. ■

التمرين 12. بمُكاملة التابع $z \mapsto f(z) = \frac{z}{a-e^{-iz}}$ على الطريق Γ_n الذي يمثّل محيط المستطيل الذي رؤوسه هي النقاط $\pm\pi, \pm\pi+i\,n$، حيث $n \in \mathbb{N}^*$، احسب التكامل

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+a^2-2a\cos x}\,d\,x$$

(ابدأ أولاً بحالة $1 < a$ ثمّ عالج حالة $0 < a < 1$).

الحل

لنفترض أنّ $a>1$. ولنلاحظ أنّ التابع f ميرومورفي أقطابه هي $\{\mathrm{i}\ln a+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\}$ وهي جميعاً بسيطة. أمّا داخل المستطيل Γ_n فيوجد قطبٌ واحدٌ هو $\mathrm{i}\ln a$ بافتراض أنّ $n>\ln a$. ولمّا كان

$$\operatorname{Res}\big(f,\mathrm{i}\ln a\big)=\frac{\mathrm{i}\ln a}{\mathrm{i}\,e^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}\ln a)}}=\frac{\ln a}{a}$$

استنتجنا أنّ

$$\int_{\Gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}\,z=2\pi\,\mathrm{i}\frac{\ln a}{a}$$

ولكن

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}\,z&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\,\mathrm{d}\,x}{a-e^{-\mathrm{i}x}}+\mathrm{i}\int_0^n\frac{(\pi+\mathrm{i}x)\,\mathrm{d}\,x}{a-e^{-\mathrm{i}(\pi+\mathrm{i}x)}}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(x+\mathrm{i}n)\,\mathrm{d}\,x}{a-e^{-\mathrm{i}(x+\mathrm{i}n)}}-\mathrm{i}\int_0^n\frac{(-\pi+\mathrm{i}x)\,\mathrm{d}\,x}{a-e^{-\mathrm{i}(-\pi+\mathrm{i}x)}}\\&=\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\,\mathrm{d}\,x}{a-e^{-\mathrm{i}x}}}_{A}+2\pi\,\mathrm{i}\underbrace{\int_0^n\frac{\mathrm{d}\,x}{a+e^{x}}}_{B_n}-\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(x+\mathrm{i}n)\,\mathrm{d}\,x}{a-e^{n-\mathrm{i}x}}}_{C_n}\end{aligned}$$

ولكن $$\left|C_n\right|\le\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{x+\mathrm{i}n}{a-e^{n-\mathrm{i}x}}\right|\mathrm{d}\,x\le\frac{2\pi(\pi+n)}{e^n-a}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

إذن بجعل n تسعى إلى اللانهاية نستنتج

$$2\pi\,\mathrm{i}\frac{\ln a}{a}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\,\mathrm{d}\,x}{a-e^{-\mathrm{i}x}}+2\pi\,\mathrm{i}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{a+e^{x}}$$

ولكن

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\,\mathrm{d}\,x}{a-e^{-\mathrm{i}x}}&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x(a-e^{\mathrm{i}x})}{(a-e^{-\mathrm{i}x})(a-e^{\mathrm{i}x})}\,\mathrm{d}\,x\\&=\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x(a-\cos x)}{1+a^2-2a\cos x}\,\mathrm{d}\,x}_{0\text{ل}}-\mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+a^2-2a\cos x}\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

التكامل الأوّل معدوم لأنّ التابع المُكامل فرديٌّ.

وعليه نستنتج أنّ

$$2\pi\frac{\ln a}{a}=-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+a^2-2a\cos x}\,\mathrm{d}\,x+2\pi\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{a+e^x}$$

أو

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+a^2-2a\cos x}\,\mathrm{d}\,x=2\pi\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{a+e^x}-2\pi\frac{\ln a}{a}$$

ومن جهة ثانية

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{a+e^x}=\int_0^{1}\frac{\mathrm{d}\,t}{1+at}=\left[\frac{\ln(1+at)}{a}\right]_0^1=\frac{\ln(1+a)}{a}$$

إذن

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+a^2-2a\cos x}\,\mathrm{d}\,x=\frac{2\pi}{a}\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)$$

أمّا في حالة $0<a<1$ فنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+a^2-2a\cos x}\,\mathrm{d}\,x&=\frac{1}{a^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\left(\frac{1}{a}\right)^2-\frac{2}{a}\cos x}\,\mathrm{d}\,x\\&=\frac{1}{a^2}\times 2\pi a\ln(1+a)\\&=\frac{2\pi}{a}\ln(1+a)\end{aligned}$$

وهكذا نستنتج أنّ

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+a^2-2a\cos x}\,\mathrm{d}\,x=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{a}\ln(1+a) & : \quad 0<a<1\\ \dfrac{2\pi}{a}\ln(1+a^{-1}) & : \quad 1<a\end{cases}$$

ونجد بدراسة بسيطة أنّ التابع المُكامل مستمرٌّ بالنسبة إلى a عند $a=1$، إذن تبقى النتيجة التي وجدناها صالحة عند هذه القيمة، ونستنتج من ذلك أنّ

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{u}{\tan u}\,\mathrm{d}\,u=\ln 2$$

■

التمرين 13. احسب التكاملات الآتية مستفيداً من نظرية الرواسب:

$$1.\ \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,\mathrm{d}\,x,\quad 2.\ \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x^6+1},$$

$$3.\ \int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}\,x,\quad 4.\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2},$$

☞ $a>0$ ☞ $(a,b)\in\mathbb{R}_+^{*2}$

$$5.\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^6}{(x^4+a^4)^2}\,\mathrm{d}\,x,\quad 6.\ \int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}\,x,$$

☞ $a>0$ ☞ $(n,m)\in\mathbb{N}^{*2}, n>m$

الحل

1. حساب $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,\mathrm{d}\,x$. التابع المُكامَل زوجي، والتكامل متقاربٌ، إذن بالاستفادة من الفقرة 3-5. يمكننا أن نكتب

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,\mathrm{d}\,x=\pi\,\mathrm{i}\sum_{p\in\mathcal{P}^+}\mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+6z^2+13},p\right)$$

علينا إذن تعيين أقطاب التابع $f(z)=\dfrac{z^2}{z^4+6z^2+13}$. ولكن

$$z^4+6z^2+13=(z^2+3)^2+4=(z^2+3+2\,\mathrm{i})(z^2+3-2\,\mathrm{i})$$

علينا إذن إيجاد الجذر التربيعي $x+\mathrm{i}\,y$ للعددين العقديين $-3+\mathrm{i}\,2\varepsilon$ في حالة $\varepsilon\in\{-1,1\}$. وهذا يُكافئ حلّ جملة المعادلتين: $y^2-x^2=3$ و $xy=\varepsilon$. أي $y^4-3y^2-1=0$ و $xy=\varepsilon$. إذن مجموعة أقطاب التابع f هي

$$\left\{\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\omega}+\mathrm{i}\,\varepsilon'\omega:(\varepsilon,\varepsilon')\in\{-1,1\}^2\right\}$$

حيث $\omega=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}$. أمّا القطبان الموجودان في نصف المستوي العلوي فهما

$$p_1=\frac{1}{\omega}+\mathrm{i}\,\omega\quad\text{و}\quad p_2=-\frac{1}{\omega}+\mathrm{i}\,\omega$$

أو $p_k = \dfrac{\varepsilon_k}{\omega} + \mathrm{i}\,\omega$ حيث $\varepsilon_1 = 1$ و $\varepsilon_2 = -1$. ولأنّ هذين القطبين بسيطان استنتجنا أنّ

$$\operatorname{Res}(f, p_k) = \frac{p_k^2}{4p_k^3 + 12p_k} = \frac{p_k}{4p_k^2 + 12} = -\mathrm{i}\frac{\varepsilon_k p_k}{8}$$

ومنه

$$\operatorname{Res}\big(f, p_1\big) + \operatorname{Res}\big(f, p_2\big) = -\frac{\mathrm{i}}{8}\big(\varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_2\big) = -\frac{\mathrm{i}}{4\omega}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 6x^2 + 13}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}}$$

2. حساب $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^6 + 1}$. التابع المُكامَل زوجي، والتكامل متقاربٌ، إذن بالاستفادة من الفقرة 3-5. يمكننا أن نكتب

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^6 + 1} = \pi\,\mathrm{i} \sum_{p \in \mathcal{P}^+} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^6 + 1}, p\right)$$

وتتكون المجموعة $\mathcal{P}^+$ من الأقطاب $p_1 = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{6}\right)$ و $p_2 = \mathrm{i}$ و $p_3 = \exp\left(\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}\right)$ ، ولكن

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^6 + 1}, p\right) = \frac{1}{6p^5} = -\frac{p}{6}, \qquad p \in \mathcal{P}$$

إذن

$$I = -\frac{\pi\,\mathrm{i}}{6}\big(p_1 + p_2 + p_3\big) = \frac{\pi}{6}\left(1 + 2\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

3. حساب $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3}\,\mathrm{d}\,x$ حيث $0 < a$. التابع المُكامَل زوجي، والتكامل متقاربٌ، إذن بالاستفادة من الفقرة 4-5. يمكننا أن نكتب

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3}\,\mathrm{d}\,x = \pi\,\mathrm{i} \sum_{p \in \mathcal{P}^+} \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2 + a^2)^3}, p\right)$$

أو

$$I = \pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2+a^2)^3}, \mathrm{i}\,a\right)$$

لأنّ $\mathcal{P}^+ = \{\mathrm{i}\,a\}$. ولكن، بوضع $z = \mathrm{i}\,a + w$ يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{(z^2+a^2)^3} &= \frac{(\mathrm{i}\,a+w)^2}{w^3(w+\mathrm{i}2a)^3} = \frac{1}{\mathrm{i}8a}\cdot\frac{1}{w^3}\cdot\left(1+\frac{w}{\mathrm{i}\,a}\right)^2\left(1+\frac{w}{2\,\mathrm{i}\,a}\right)^{-3}\\ &= \frac{1}{\mathrm{i}8a}\cdot\frac{1}{w^3}\left(1+\frac{2w}{\mathrm{i}\,a}-\frac{w^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{3w}{2\,\mathrm{i}\,a}-\frac{3w^2}{2a^2}+O\left(w^3\right)\right)\\ &= \frac{1}{\mathrm{i}8a}\cdot\frac{1}{w^3}\left(1+\frac{w}{2\,\mathrm{i}\,a}+\frac{w^2}{2a^2}+O\left(w^3\right)\right)\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2+a^2)^3}, \mathrm{i}\,a\right) = -\frac{\mathrm{i}}{16a^3}$$

ومنه

$$I = \int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{16a^3}$$

4. حساب $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}$ حيث $0 < a$ و $0 < b$. التكامل متقاربٌ. لنحسب بوجه أعمّ $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}$ فنجد

$$I = 2\pi\,\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}\left(f,\mathrm{i}\,a\right)+\mathrm{Res}\left(f,\mathrm{i}\,b\right)+\mathrm{Res}\left(f,\mathrm{i}\,c\right)\right)$$

وقد عرّفنا

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)(z^2+c^2)}$$

ولكن

$$\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}\,a) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,a(b^2-a^2)(c^2-a^2)}$$

إذن

$$I = \pi\left(\frac{1}{a(b^2-a^2)(c^2-a^2)} + \frac{1}{b(c^2-b^2)(a^2-b^2)} + \frac{1}{c(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\right)$$

فإذا عرّفنا

$$J = \frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{\pi} I$$

وجدنا بعد الإصلاح والاختصار ما يأتي

$$\begin{aligned}
J &= \frac{bc(b+c)}{(b-a)(c-a)} + \frac{ac(c+a)}{(c-b)(a-b)} + \frac{ab(a+b)}{(a-c)(b-c)} \\
&= \frac{c}{b-a}\left(\frac{b(b+c)}{c-a} - \frac{a(a+c)}{c-b}\right) + \frac{ab(a+b)}{(a-c)(b-c)} \\
&= \frac{cb(c^2-b^2) + ca(a^2-c^2) + ab(b^2-a^2)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \\
&= \frac{c^3(b-a) - c(b^3-a^3) + ab(b^2-a^2)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \\
&= \frac{c^3 - c(b^2+ab+a^2) + ab(b+a)}{(c-a)(c-b)} \\
&= \frac{(c-a)(c-b)(c+a+b)}{(c-a)(c-b)} = c+a+b
\end{aligned}$$

إذن

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)} = \frac{\pi(b+c+a)}{abc(b+a)(c+a)(c+b)}$$

ومنه، بوضع $c = b$ نجد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = \frac{\pi(2b+a)}{2ab^3(b+a)^2}$$

5. حساب $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6}{(x^4+a^4)^2}\,\mathrm{d}\,x$ حيث $0 < a$. التكامل متقاربٌ. ولدينا

$$I = 2\pi\,\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}\left(\frac{z^6}{(z^4+a^4)^2}, \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}a\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{z^6}{(z^4+a^4)^2}, \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}a\right)\right)$$

ليكن p يُحقّق $p^4 + a^4 = 0$ ولنجر تغيير المتحوّل $z = p + w$. عندئذ

$$\begin{aligned}
\frac{z^6}{(z^4+a^4)^2} &= \frac{(p+w)^6}{((p+w)^4+a^4)^2} \\
&= \frac{p^6 + 6p^5w + O(w^2)}{\left(p^4 + 4p^3w + 6p^2w^2 + O(w^2) + a^4\right)^2} \\
&= \frac{p^6 + 6p^5w + O(w^2)}{\left(4p^3w + 6p^2w^2 + O(w^2)\right)^2} \\
&= \frac{1 + \frac{6}{p}w + O(w^2)}{16w^2\left(1 + \frac{3}{2p}w + O(w^2)\right)^2} \\
&= \frac{1}{16w^2}\left(1 + \tfrac{6}{p}w\right)\left(1 - \tfrac{3}{p}w\right) + O(1) \\
&= \frac{1}{16w^2} + \frac{3}{16pw} + O(1)
\end{aligned}$$

إذن

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^6}{(z^4+a^4)^2}, p\right) = \frac{3}{16p}$$

ومنه

$$I = \frac{3\pi\,\mathrm{i}}{8a}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} + \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8a}$$

6. حساب $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}\,x$ حيث $(n,m) \in \mathbb{N}^{*2}$ و $n > m$. التكامل متقاربٌ والتابع المُكامَل زوجي.

إذن

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}\,x = \pi\,\mathrm{i}\sum_{p\in\mathcal{P}^+} \mathrm{Res}\left(\frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}, p\right)$$

الأقطاب الموجودة في $\mathcal{P}^+$ هي $p_k = \exp\left(\mathrm{i}\,\theta_k\right)$ حيث $\theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi$ و $0 \leq k < n$.

ولكن

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}, p_k\right) = \frac{p_k^{2m}}{2np_k^{2n-1}} = -\frac{p_k^{2m+1}}{2n}$$

وعليه

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}\,x \\ &= -\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\mathrm{i}\frac{(2m+1)(2k+1)}{2n}\pi\right) \\ &= -\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2n}\exp\left(\mathrm{i}\frac{2m+1}{2n}\pi\right)\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\mathrm{i}\frac{(2m+1)k}{n}\pi\right) \\ &= -\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2n}e^{\mathrm{i}(2m+1)\pi/(2n)}\frac{e^{\mathrm{i}(2m+1)\pi}-1}{e^{\mathrm{i}(2m+1)\pi/n}-1} \\ &= \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{2\,\mathrm{i}}{e^{\mathrm{i}(2m+1)\pi/(2n)}-e^{-\mathrm{i}(2m+1)\pi/(2n)}} = \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)} \end{aligned}$$

وبالنتيجة، في حالة (n,m) من $\mathbb{N}^{*2}$ يحقّقان $m < n$ تتحقّق المساواة

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 14. فيما يلي الوسيطان α و β عددان حقيقيّان موجبان تماماً. احسب التكاملات الآتية مستفيداً من نظرية الرواسب:

$$1.\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x,\qquad 2.\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x,$$

$$3.\ \int_{0}^{\infty}\frac{x\sin(\alpha x)}{x^2+\beta^2}\,\mathrm{d}\,x,\qquad 4.\ \int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}\,x}{(x^2+1)^2},$$

$$5.\ \int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x(x^2+\beta^2)^2}\,\mathrm{d}\,x,\qquad 6.\ \int_{0}^{+\infty}\frac{x^2-\alpha^2}{x^2+\alpha^2}\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x,$$

الحل

سنستخدم في هذا التمرين ما درسناه في الفقرة 4-6.

1. و 2. لحساب

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x$$

نلاحظ أنّهما متقاربان ولدينا

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}\,x}}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x &= 2\,\mathrm{i}\,\pi\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\,z}}{z^2+z+1},\exp\left(\tfrac{2\pi\,\mathrm{i}}{3}\right)\right)\\ &= 2\,\mathrm{i}\,\pi\frac{\exp\left(\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}{2\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1}\\ &= 2\pi\frac{\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{1}{2}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

ومنه

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}/2}\cos\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}/2}\sin\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

3. حساب $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{x\sin(\alpha x)}{x^2+\beta^2}\,\mathrm{d}\,x$. التكامل متقاربٌ والتابع المُكامَل زوجي. إذن

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{\mathrm{i}\,\alpha x}}{x^2+\beta^2}\,\mathrm{d}\,x\right)=\pi\operatorname{Re}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{ze^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{z^2+\beta^2},\mathrm{i}\,\beta\right)\right)=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}$$

4. حساب $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}\,x}{(x^2+1)^2}$. التكامل متقاربٌ والتابع المُكامَل زوجي. إذن

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\mathrm{i}\,\alpha x}}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x\right)=-\pi\operatorname{Im}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{(z^2+1)^2},\mathrm{i}\right)\right)$$

ولكن بوضع $z=\mathrm{i}+w$ نجد بجوار $w=0$ ما يلي

$$\begin{aligned}\frac{e^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{(z^2+1)^2}&=\frac{e^{\alpha(-1+\mathrm{i}\,w)}}{w^2(w+2\,\mathrm{i})^2}=-e^{-\alpha}\frac{e^{\mathrm{i}\,\alpha w}}{4w^2(1-\frac{w\,\mathrm{i}}{2})^2}\\&=-\frac{e^{-\alpha}}{4w^2}(1+\mathrm{i}\,\alpha w)(1+\mathrm{i}\,w)+O(1)\\&=-\frac{e^{-\alpha}}{4w^2}\big(1+\mathrm{i}(\alpha+1)w\big)+O(1)\end{aligned}$$

ومنه

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{(z^2+1)^2},\mathrm{i}\right)=-\frac{\mathrm{i}}{4}(\alpha+1)e^{-\alpha}$$

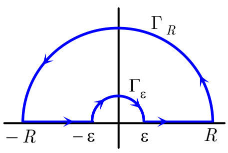
إذن

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}\,x}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{4}(\alpha+1)e^{-\alpha},\quad \alpha>0$$

5. حساب $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x(x^2+\beta^2)^2}\,\mathrm{d}\,x$. التكامل متقاربٌ والتابع المُكامَل زوجي. لنتأمّل إذن التابع الميرومورفي

$$f:z\mapsto\frac{e^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{z(z^2+\beta^2)^2}$$

الذي يقبل النقاط 0 و $\mathrm{i}\,\beta$ و $-\mathrm{i}\,\beta$ أقطاباً.



ليكن R و ε عددين يُحقّقان $0 < \varepsilon < R$، وليكن الطريق $\tilde{\Gamma}_{\varepsilon,R}$ من الصف C^1 قِطَعيّاً المكوّن من القطعة المستقيمة $[-R,-\varepsilon]$، ونصف الدائرة Γ_ε التي مركزها 0 ونصف قطرها ε، والموجود في نصف المستوي $\mathbb{P}^+$، موجهاً بالاتجاه السالب، متبوعة بالقطعة المستقيمة $[\varepsilon, R]$، ثُمّ بنصف الدائرة Γ_R التي مركزها النقطة 0 ونصف قطرها R والموجود في نصف المستوي $\mathbb{P}^+$ موجّهاً بالاتجاه الموجب.

بتطبيق نظريّة الرواسب على التابع f والطريق $\tilde{\Gamma}_{\varepsilon,R}$ نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{\mathrm{i}\alpha x}}{x(x^2+\beta^2)^2}\,\mathrm{d}\,x + \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}\,z\\ +\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{\mathrm{i}\alpha x}}{x(x^2+\beta^2)^2}\,\mathrm{d}\,x + \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 2\,\mathrm{i}\,\pi\,\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}\,\beta)\end{aligned}$$

ولكن، من جهة أولى، لدينا

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{\mathrm{i}\alpha x}}{x(x^2+\beta^2)^2}\,\mathrm{d}\,x + \int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{\mathrm{i}\alpha x}}{x(x^2+\beta^2)^2}\,\mathrm{d}\,x &= \int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{\mathrm{i}\alpha x}-e^{-\mathrm{i}\alpha x}}{x(x^2+\beta^2)^2}\,\mathrm{d}\,x\\ &= 2\,\mathrm{i}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sin(\alpha x)}{x(x^2+\beta^2)^2}\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

ومن جهة ثانية $\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$ استناداً إلى التوطئة 2-4. وأخيراً نجد استناداً إلى التوطئة 3-4 أنّ $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}\,z = -\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,0)$. وعليه

$$2\,\mathrm{i}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ R\to\infty}}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sin(\alpha x)}{x(x^2+\beta^2)^2}\,\mathrm{d}\,x - \pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,0) = 2\,\mathrm{i}\,\pi\,\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}\,\beta)$$

أو

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x(x^2+\beta^2)^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}\mathrm{Res}(f,0) + \pi\,\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}\,\beta)$$

ولكن، من جهة أولى

$$\operatorname{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{e^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{(z^2+\beta^2)^2}=\frac{1}{\beta^4}$$

ومن جهة ثانية، بوضع $z=\mathrm{i}\,\beta+w$ نجد في جوار $w=0$ ما يلي

$$\begin{aligned} f(z)&=\mathrm{i}\,\frac{e^{-\alpha\beta}}{4\beta^3}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}\,\alpha w}}{w^2\left(1-\mathrm{i}\,\frac{w}{\beta}\right)\left(1-\mathrm{i}\,\frac{w}{2\beta}\right)^2}\\ &=\mathrm{i}\,\frac{e^{-\alpha\beta}}{4\beta^3 w^2}\cdot\left(1+\mathrm{i}\left(\alpha+\tfrac{2}{\beta}\right)w\right)+O\big(1\big)\end{aligned}$$

إذن

$$\operatorname{Res}\big(f,\mathrm{i}\,\beta\big)=-\frac{e^{-\alpha\beta}}{4\beta^3}\left(\alpha+\frac{2}{\beta}\right)$$

ومنه

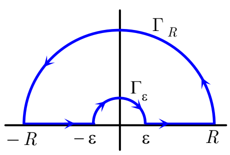
$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x(x^2+\beta^2)^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi(1-e^{-\alpha\beta})}{2\beta^4}-\frac{\pi\alpha e^{-\alpha\beta}}{4\beta^3},\quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^{*2}$$

6. حساب $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2-\alpha^2}{x^2+\alpha^2}\cdot\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x$. التكامل متقاربٌ والتابع المُكامَل زوجي. لنتأمّل

إذن التابع الميرومورفي

$$f\,:\,z\mapsto\frac{z^2-\alpha^2}{z^2+\alpha^2}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}\,z}}{z}$$

الذي يقبل النقاط 0 و $\mathrm{i}\,\alpha$ و $-\mathrm{i}\,\alpha$ أقطاباً.



ليكن R و ε عددين يُحقّقان $0<\varepsilon<R$، وليكن الطريق $\tilde{\Gamma}_{\varepsilon,R}$ من الصف C^1 قِطَعِيّاً المكوّن من القطعة المستقيمة $[-R,-\varepsilon]$، ونصف الدائرة Γ_ε التي مركزها 0 ونصف قطرها ε، والموجود في نصف المستوي $\mathbb{P}^+$، موجهاً بالاتجاه السالب، متبوعة بالقطعة المستقيمة $[\varepsilon,R]$، ثُمّ بنصف الدائرة Γ_R التي مركزها النقطة 0 ونصف قطرها R والموجود في نصف المستوي $\mathbb{P}^+$ موجّهاً بالاتجاه الموجب.

بتطبيق نظريّة الرواسب على التابع f والطريق $\tilde{\Gamma}_{\varepsilon,R}$ نستنتج أنّ

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}\,z + \int_{\varepsilon}^{R} f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 2\,\mathrm{i}\,\pi\,\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}\,\alpha)$$

ولكن، من جهة أولى، لدينا

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_{\varepsilon}^{R} f(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int_{\varepsilon}^{R} \big(f(-x) + f(x)\big)\,\mathrm{d}\,x\\ &= 2\,\mathrm{i}\int_{\varepsilon}^{R} \frac{x^2-\alpha^2}{x^2+\alpha^2}\cdot\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

ومن جهة ثانية $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$ استناداً إلى التوطئة 3-2. وأخيراً نجد استناداً إلى التوطئة 3-3. أنّ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}\,z = -\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,0)$. وعليه

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2-\alpha^2}{x^2+\alpha^2}\cdot\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}\mathrm{Res}(f,0) + \pi\,\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}\,\alpha)$$

ولكن، من جهة أولى

$$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = -1$$

ومن جهة ثانية،

$$\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}\,\alpha) = \lim_{z\to\mathrm{i}\,\alpha} \frac{z^2-\alpha^2}{z+\mathrm{i}\,\alpha}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}\,z}}{z} = e^{-\alpha}$$

إذن

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2-\alpha^2}{x^2+\alpha^2}\cdot\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{\pi}{2} + \pi e^{-\alpha}$$

■

التمرين 15. نفترض أنّ $0 < \alpha < 1$. احسب مستخدماً نظرية الرواسب التكاملات التالية :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{(x+1)(x^2+1)x^\alpha},$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{(x^2+a^2)x^\alpha}, a\in\mathbb{R}_+^*$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{(x^3+a^3)x^\alpha}, a\in\mathbb{R}_+^*$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{(x+1)^n x^\alpha}, n\in\mathbb{N}^*$

الحل

سنتبع في هذه التمرين الطريقة المبيّنة في الفقرة 4-8.

1. لحساب التكامل $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{(x+1)(x^2+1)x^\alpha}$ نُجري تغيير المتحوِّل $x=e^t$ فنجد

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(1-\alpha)t}}{(e^t+1)(e^{2t}+1)}\mathrm{d}\,t$$

فإذا عرّفنا

$$f:z\mapsto\frac{e^{(1-\alpha)z}}{(e^z+1)(e^{2z}+1)}$$

استنتجنا بناءً على 4-8. أنّ

$$(1-e^{-2\pi\mathrm{i}\alpha})I=2\pi\mathrm{i}\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\mathrm{Res}(f,p)$$

و $\mathcal{P}_S$ هي مجموعة أقطاب f الموجودة في الشريط $0\leq\mathrm{Im}\,z\leq2\pi$. أي

$$\mathcal{P}_S=\left\{\mathrm{i}\tfrac{\pi}{2},\mathrm{i}\,\pi,\mathrm{i}\tfrac{3\pi}{2}\right\}$$

وهي أقطاب بسيطة للتابع f إذن

$$\mathrm{Res}\left(f,\mathrm{i}\tfrac{\pi}{2}\right)=\frac{e^{\mathrm{i}(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}}{3e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}+2e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{2}}+e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}=\frac{(-1-\mathrm{i})e^{-\mathrm{i}\alpha\frac{\pi}{2}}}{4}$$
$$\mathrm{Res}\left(f,\mathrm{i}\,\pi\right)=\frac{e^{\mathrm{i}(1-\alpha)\pi}}{3e^{\mathrm{i}\,3\pi}+2e^{\mathrm{i}\,2\pi}+e^{\mathrm{i}\,\pi}}=\frac{e^{-\mathrm{i}\alpha\pi}}{2}$$
$$\mathrm{Res}\left(f,\mathrm{i}\tfrac{3\pi}{2}\right)=\frac{e^{\mathrm{i}(1-\alpha)\frac{3\pi}{2}}}{3e^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{2}}+2e^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{2}}+e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}}=\frac{(-1+\mathrm{i})e^{-\mathrm{i}\alpha\frac{3\pi}{2}}}{4}$$

إذن

$$(1-e^{-2\pi\mathrm{i}\alpha})I=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{(-1-\mathrm{i})e^{-\mathrm{i}\alpha\frac{\pi}{2}}}{4}+\frac{e^{-\mathrm{i}\alpha\pi}}{2}+\frac{(-1+\mathrm{i})e^{-\mathrm{i}\alpha\frac{3\pi}{2}}}{4}\right)$$

أو

$$\left(\frac{e^{\pi\mathrm{i}\alpha}-e^{-\pi\mathrm{i}\alpha}}{2\mathrm{i}}\right)I=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{e^{\mathrm{i}\alpha\frac{\pi}{2}}+e^{-\mathrm{i}\alpha\frac{\pi}{2}}}{2}+\frac{e^{\mathrm{i}\alpha\frac{\pi}{2}}-e^{-\mathrm{i}\alpha\frac{\pi}{2}}}{2\mathrm{i}}+1\right)$$

وبصيغة مُكافئة

$$\sin(\pi\alpha)I = \frac{\pi}{2}\left(1 - \cos\frac{\alpha\pi}{2} + \sin\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

أو

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{(x+1)(x^2+1)x^\alpha} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-\cos(\alpha\pi/2)+\sin(\alpha\pi/2)}{\sin(\pi\alpha)}$$

.2 لحساب التكامل $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{(x^2+a^2)x^\alpha}$ و $0 < a$. نُجري تغيير المتحوِّل $x = e^t$

فنجد

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(1-\alpha)t}}{e^{2t}+a^2}\mathrm{d}\,t$$

فإذا عرّفنا

$$f : z \mapsto \frac{e^{(1-\alpha)z}}{e^{2z}+a^2}$$

استنتجنا بناءً على 4-8. أنّ

$$(1-e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\alpha})I = 2\pi\,\mathrm{i}\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\mathrm{Res}(f,p)$$

و $\mathcal{P}_S$ هي مجموعة أقطاب f الموجودة في الشريط $0 \le \operatorname{Im} z \le 2\pi$. أي

$$\mathcal{P}_S = \left\{\ln a + \mathrm{i}\tfrac{\pi}{2}, \ln a + \mathrm{i}\tfrac{3\pi}{2}\right\}$$

وهي أقطاب بسيطة للتابع f إذن

$$\mathrm{Res}\left(f, \ln a + \mathrm{i}\tfrac{\pi}{2}\right) = \frac{a^{1-\alpha}e^{\mathrm{i}(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}}{-2a^2} = -\mathrm{i}\frac{e^{-\mathrm{i}\alpha\frac{\pi}{2}}}{2a^{1+\alpha}}$$

$$\mathrm{Res}\left(f, \ln a + \mathrm{i}\tfrac{3\pi}{2}\right) = \frac{a^{1-\alpha}e^{\mathrm{i}(1-\alpha)\frac{3\pi}{2}}}{-2a^2} = \mathrm{i}\frac{e^{-\mathrm{i}\alpha\frac{3\pi}{2}}}{2a^{1+\alpha}}$$

ومنه

$$\left(1-e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\alpha}\right)I = 2\pi\,\mathrm{i}\left(-\mathrm{i}\frac{e^{-\mathrm{i}\alpha\frac{\pi}{2}}}{2a^{1+\alpha}} + \mathrm{i}\frac{e^{-\mathrm{i}\alpha\frac{3\pi}{2}}}{2a^{1+\alpha}}\right)$$

أو

$$\frac{e^{\pi\,\mathrm{i}\,\alpha}-e^{-\pi\,\mathrm{i}\,\alpha}}{2\,\mathrm{i}}\cdot I=\frac{\pi}{a^{1+\alpha}}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}\,\alpha\frac{\pi}{2}}-e^{-\mathrm{i}\,\alpha\frac{\pi}{2}}}{2\,\mathrm{i}}$$

وبصيغة مُكافئة

$$\sin(\pi\alpha)I=\frac{\pi}{a^{1+\alpha}}\sin\frac{\alpha\pi}{2}$$

أو

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{(x^2+a^2)x^\alpha}=\frac{\pi}{2a^{1+\alpha}}\cdot\frac{1}{\cos(\alpha\pi/2)}$$

3. لحساب التكامل $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{(x^3+a^3)x^\alpha}$ حيث $0<a$، نُجري تغيير المتحوّل $x=e^t$ فنجد

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(1-\alpha)t}}{e^{3t}+a^3}\mathrm{d}\,t$$

فإذا عرّفنا $f:z\mapsto\frac{e^{(1-\alpha)z}}{e^{3z}+a^3}$ استنتجنا بناءً على 4-8. أنّ

$$(1-e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\alpha})I=2\pi\,\mathrm{i}\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\operatorname{Res}(f,p)$$

و $\mathcal{P}_S$ هي مجموعة أقطاب f الموجودة في الشريط $0\leq\operatorname{Im}z\leq 2\pi$. أي

$$\mathcal{P}_S=\left\{\ln a+\mathrm{i}\tfrac{\pi}{3},\ln a+\mathrm{i}\,\pi,\ln a+\mathrm{i}\tfrac{5\pi}{3}\right\}$$

وهي أقطاب بسيطة للتابع f إذن

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(f,\ln a+\mathrm{i}\tfrac{\pi}{3}\right)&=\frac{a^{1-\alpha}e^{\mathrm{i}(1-\alpha)\frac{\pi}{3}}}{-3a^3}=-\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{e^{-\mathrm{i}\,\alpha\frac{\pi}{3}}}{3a^{2+\alpha}}\\
\operatorname{Res}\left(f,\ln a+\mathrm{i}\,\pi\right)&=\frac{a^{1-\alpha}e^{\mathrm{i}(1-\alpha)\pi}}{-3a^3}=\frac{e^{-\mathrm{i}\,\alpha\pi}}{3a^{2+\alpha}}\\
\operatorname{Res}\left(f,\ln a+\mathrm{i}\tfrac{5\pi}{3}\right)&=\frac{a^{1-\alpha}e^{\mathrm{i}(1-\alpha)\frac{5\pi}{3}}}{-3a^3}=-\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{e^{-\mathrm{i}\,\alpha\frac{5\pi}{3}}}{3a^{2+\alpha}}
\end{aligned}$$

ومنه

$$\left(1-e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\alpha}\right)I=-2\pi\,\mathrm{i}\left(\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{e^{-\mathrm{i}\,\alpha\frac{\pi}{3}}}{3a^{2+\alpha}}-\frac{e^{-\mathrm{i}\,\alpha\pi}}{3a^{2+\alpha}}+\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{e^{-\mathrm{i}\,\alpha\frac{5\pi}{3}}}{3a^{2+\alpha}}\right)$$

أو

$$\sin(\alpha\pi)I=\frac{\pi}{3a^{2+\alpha}}\left(1-\cos\frac{2\pi\alpha}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{2\pi\alpha}{3}\right)$$

وعليه

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{(x^3+a^3)x^\alpha}=\frac{\pi}{3a^{2+\alpha}}\cdot\frac{1-\cos(2\pi\alpha/3)+\sqrt{3}\sin(2\pi\alpha/3)}{\sin(\alpha\pi)}$$

أو بصيغة مُكافِئة

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{(x^3+a^3)x^\alpha}=\frac{4\pi}{3a^{2+\alpha}}\cdot\frac{\sin(\pi\alpha/3)\sin(\pi(1+\alpha)/3)}{\sin\alpha\pi}$$

4. لحساب التكامل $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{(x+1)^n x^\alpha}$ و $n\in\mathbb{N}^*$. نُجري تغيير المتحوِّل $x=e^t$

فنجد

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(1-\alpha)t}}{(e^t+1)^n}\,\mathrm{d}\,t$$

فإذا عرّفنا

$$F:z\mapsto\frac{e^{(1-\alpha)z}}{(e^z+1)^n}$$

استنتجنا بناءً على 4-8. أنّ

$$(1-e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\alpha})I=2\pi\,\mathrm{i}\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\mathrm{Res}(f,p)$$

و $\mathcal{P}_S$ هي مجموعة أقطاب f الموجودة في الشريط $0\leq\mathrm{Im}\,z\leq 2\pi$. أي $\mathcal{P}_S=\{\mathrm{i}\,\pi\}$، وهو قطب مضاعف n مرّة. ولكنّ حساب الراسب هنا صعبٌ لذلك سنلجأ إلى طريقة أخرى.

ليكن t عدداً من المجال $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ ولنرمز بالرمز I_n إلى التكامل المطلوب عندئذ

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} t^n I_n &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{t}{1+x}\right)^n \frac{\mathrm{d}\,x}{x^\alpha} = \int_0^\infty \frac{\frac{t}{1+x}-\left(\frac{t}{1+x}\right)^{m+1}}{1-\frac{t}{1+x}}\cdot\frac{\mathrm{d}\,x}{x^\alpha}\\ &= \int_0^\infty \frac{t}{x+1-t}\cdot\frac{\mathrm{d}\,x}{x^\alpha} - \int_0^\infty \frac{t\left(\frac{t}{1+x}\right)^m}{1+x-t}\cdot\frac{\mathrm{d}\,x}{x^\alpha}\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{m} t^{n-1} I_n - \int_0^\infty \frac{1}{x+1-t}\cdot\frac{\mathrm{d}\,x}{x^\alpha}\right| &\leq \int_0^\infty \left(\frac{t}{1+x}\right)^m \frac{1}{1+x-t}\cdot\frac{\mathrm{d}\,x}{x^\alpha}\\ &\leq \frac{1}{2^m}\int_0^\infty \frac{1}{x+1-t}\cdot\frac{\mathrm{d}\,x}{x^\alpha}\end{aligned}$$

وعليه فالمتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} I_n$ متقاربة في المجال $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ ولدينا

$$\forall t \in \left]-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right[,\quad \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} I_n = \int_0^\infty \frac{1}{x+1-t}\cdot\frac{\mathrm{d}\,x}{x^\alpha} = J(t)$$

لحساب التكامل $J(t) = \int_0^\infty \frac{1}{x+1-t}\cdot\frac{\mathrm{d}\,x}{x^\alpha}$. نُجري تغيير المتحوّل $x = e^u$ فنجد

$$J(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(1-\alpha)u}}{e^u + 1 - t}\,\mathrm{d}\,u$$

فإذا عرّفنا

$$f : z \mapsto \frac{e^{(1-\alpha)z}}{e^z + 1 - t}$$

استنتجنا بناءً على 4-8. أنّ

$$(1-e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\alpha})J(t) = 2\pi\,\mathrm{i}\sum_{p\in\mathcal{P}_S} \mathrm{Res}(f,p)$$

و $\mathcal{P}_S$ هي مجموعة أقطاب f الموجودة في الشريط $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\pi$. ولكن هناك قطب واحد لهذا التابع في هذا الشريط هو $\ln(1-t) + \mathrm{i}\,\pi$ ، هو قطب بسيط للتابع f .

إذن

$$\operatorname{Res}\bigl(f,\ln(1-t)+\mathrm{i}\,\pi\bigr)=\frac{e^{(1-\alpha)\left(\ln(1-t)+\mathrm{i}\,\pi\right)}}{t-1}=(1-t)^{-\alpha}e^{-\mathrm{i}\,\alpha\pi}$$

ومنه

$$\sin(\pi\alpha)J(t)=\pi(1-t)^{-\alpha}$$

أو

$$\begin{aligned}J(t)&=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}(1-t)^{-\alpha}\\&=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-n+1)}{n\,!}(-t)^n\right)\\&=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n\,!}t^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}I_{n+1}t^n\end{aligned}$$

وبسبب وحدانيّة النشر نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}\\I_n&=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)}{(n-1)\,!},\qquad n\geq 2\end{aligned}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ∎

التمرين 16. احسب التكاملات الآتية مستفيداً من نظرية الرواسب:

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}\,x,$ 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)(x+1)}\,\mathrm{d}\,x,$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x,$ 4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x+a)^3}\,\mathrm{d}\,x, a\in\mathbb{R}_+^*$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}\,x,$ 6. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}\,x, a\in\mathbb{R}_+^*$

الحل

سنتبع في هذا التمرين طرائق الحلّ المشار إليها في الفقرة 4-9.

1. لحساب التكامل $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$، نُجري تغيير المتحوِّل $x=e^t$ فنجد

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{te^t}{e^{4t}+e^{2t}+1}\,\mathrm{d}x$$

فإذا عرّفنا $f:z\mapsto\frac{z^2e^z}{e^{4z}+e^{2z}+1}$ استنتجنا بناءً على 4-9. أنّ

$$I+\mathrm{i}\pi\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}=-\frac{1}{2}\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\operatorname{Res}(f,p)$$

و $\mathcal{P}_S$ هي مجموعة أقطاب f الموجودة في الشريط $0\le\operatorname{Im}z\le 2\pi$. أي

$$\mathcal{P}_S=\left\{\mathrm{i}\tfrac{\pi}{3},\mathrm{i}\tfrac{2\pi}{3},\mathrm{i}\tfrac{4\pi}{3},\mathrm{i}\tfrac{5\pi}{3}\right\}$$

و

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(f,\mathrm{i}\tfrac{\pi}{3}\right)&=\frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2+e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}&&=\frac{\pi^2}{108}\cdot\left(3+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\\
\operatorname{Res}\left(f,\mathrm{i}\tfrac{2\pi}{3}\right)&=\frac{4\pi^2}{18}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}{2+e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}}&&=\frac{4\pi^2}{108}\cdot\left(-3+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\\
\operatorname{Res}\left(f,\mathrm{i}\tfrac{4\pi}{3}\right)&=\frac{16\pi^2}{18}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}}{2+e^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{3}}}&&=\frac{16\pi^2}{108}\cdot\left(-3-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\\
\operatorname{Res}\left(f,\mathrm{i}\tfrac{5\pi}{3}\right)&=\frac{25\pi^2}{18}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}}{2+e^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{3}}}&&=\frac{25\pi^2}{108}\cdot\left(3-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$

ومنه

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\operatorname{Res}(f,p)=\frac{\pi^2}{6}\cdot\left(1-2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$$

$$I+\mathrm{i}\pi\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}=-\frac{\pi^2}{12}\cdot\left(1-2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$$

وأخيراً

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x^4+x^2+1}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \quad \text{و} \quad \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}\,x=-\frac{\pi^2}{12}$$

2. لحساب التكامل $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)(x+1)}\mathrm{d}\,x$ ، نُجري تغيير المتحوّل $x=e^t$ فنجد

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{te^t}{e^{3t}+e^{2t}+e^t+1}\mathrm{d}\,t$$

وإذا عرّفنا $f:z\mapsto\frac{z^2e^z}{(e^{2z}+1)(e^z+1)}$ استنتجنا بناءً على 4-9. أنّ

$$I+\mathrm{i}\pi\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x^3+x^2+x+1}=-\frac{1}{2}\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\mathrm{Res}(f,p)$$

حيث $\mathcal{P}_S$ هي مجموعة أقطاب f الموجودة في الشريط $0\le\mathrm{Im}\,z\le2\pi$. أي

$$\mathcal{P}_S=\left\{\mathrm{i}\tfrac{\pi}{2},\mathrm{i}\pi,\mathrm{i}\tfrac{3\pi}{2}\right\}$$

وهي أقطاب بسيطة للتابع f . فنجد

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(f,\mathrm{i}\tfrac{\pi}{2}\right)&=\frac{\pi^2}{16}\cdot(1+\mathrm{i})\\
\mathrm{Res}\left(f,\mathrm{i}\pi\right)&=-\frac{\pi^2}{2}\\
\mathrm{Res}\left(f,\mathrm{i}\tfrac{3\pi}{2}\right)&=\frac{9\pi^2}{16}\cdot(1-\mathrm{i})
\end{aligned}$$

ومنه $\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\mathrm{Res}(f,p)=\frac{\pi^2}{8}(1-4\,\mathrm{i})$ أي

$$I+\mathrm{i}\pi\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x^3+x^2+x+1}=-\frac{\pi^2}{16}(1-4\,\mathrm{i})$$

وأخيراً

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x^3+x^2+x+1}=\frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}\,x=-\frac{\pi^2}{16}$$

3. لحساب التكامل $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$ ، نُجري تغيير المتحوِّل $x=e^t$ فنجد

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{te^t}{(e^{2t}+1)^2}\,\mathrm{d}\,t$$

وإذا عرّفنا $f:z\mapsto\frac{z^2e^z}{(e^{2z}+1)^2}$ استنتجنا بناءً على 4-9. أنّ

$$I+\mathrm{i}\pi\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\mathrm{Res}(f,p)$$

و $\mathcal{P}_S$ هي مجموعة أقطاب f الموجودة في الشريط $0\le\mathrm{Im}\,z\le 2\pi$. أي

$$\mathcal{P}_S=\left\{\mathrm{i}\tfrac{\pi}{2},\mathrm{i}\tfrac{3\pi}{2}\right\}$$

ليكن p أحد هذين القطبين ولنضع $z=p+w$ عندئذ

$$\begin{aligned}
f(z)&=e^p\frac{(p+w)^2e^w}{(1-e^{2w})^2}\\
&=p^2e^p\frac{\left(1+\frac{2}{p}w+O(w^2)\right)\left(1+w+O(w^2)\right)}{4w^2\left(1+w+O(w^2)\right)^2}\\
&=\frac{p^2e^p}{4w^2}\left(1+\tfrac{2}{p}w\right)(1+w)(1-2w)+O(1)\\
&=\frac{p^2e^p}{4w^2}\left(1+\left(\tfrac{2}{p}-1\right)w\right)+O(1)
\end{aligned}$$

ومنه

$$\mathrm{Res}(f,p)=\frac{p(2-p)e^p}{4}$$

وعليه

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\mathrm{Res}(f,p)=-\frac{\pi(2-\mathrm{i}\frac{\pi}{2})}{8}+\frac{3\pi(2-\mathrm{i}\frac{3\pi}{2})}{8}=\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\frac{\pi^2}{2}$$

إذن

$$I + \mathrm{i}\pi\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{i}\frac{\pi^2}{2}\right)$$

وأخيراً

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{\pi}{4}$$

4. لحساب التكامل $\mathrm{d}\,x$ $I = \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x+a)^3}\,\mathrm{d}\,x$ مع $a \in \mathbb{R}_+^*$، نُجري تغيير المتحوِّل $x = e^t$ فنجد

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{te^t}{(e^t+a)^3}\,\mathrm{d}\,t$$

وإذا عرّفنا $f : z \mapsto \dfrac{z^2e^z}{(e^z+a)^3}$ استنتجنا بناءً على 4-9. أنّ

$$I + \mathrm{i}\pi\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{(x+a)^3} = -\frac{1}{2}\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\mathrm{Res}(f,p)$$

حيث $\mathcal{P}_S$ هي مجموعة أقطاب f الموجودة في الشريط $0 \leq \mathrm{Im}\,z \leq 2\pi$. وهي تقتصر على قطب واحد $p = \ln a + \mathrm{i}\,\pi$ رتبة مضاعفته تساوي 3. لنضع إذن $z = p + w$ عندئذ

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{p^2}{a^2}\cdot\frac{(1+w/p)^2e^w}{(e^w-1)^3}\\
&= \frac{p^2}{a^2w^3}\cdot\frac{(1+w/p)^2e^w}{(1+w/2+w^2/6+O(w^3))^3}\\
&= \frac{p^2}{a^2w^3}\left(1+\frac{2w}{p}+\frac{w^2}{p^2}\right)\left(1+w+\frac{w^2}{2}\right)\left(1+\frac{w}{2}+\frac{w^2}{6}\right)^{-3} + O(1)\\
&= \frac{p^2}{a^2w^3}\left(1+\frac{2w}{p}+\frac{w^2}{p^2}\right)\left(1+w+\frac{w^2}{2}\right)\left(1-\frac{3w}{2}+w^2\right) + O(1)\\
&= \frac{p^2}{a^2w^3}\left(1+\frac{4-p}{2p}w+\frac{1-p}{p^2}w^2\right) + O(1)
\end{aligned}$$

ومنه $\operatorname{Res}(f,p)=(1-p)/a^2$ ، إذن

$$I+\mathrm{i}\pi\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{(x+a)^3}=\frac{\ln a-1+\mathrm{i}\pi}{2a^2}$$

وأخيراً

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x+a)^3}\mathrm{d}\,x=\frac{\ln a-1}{2a^2}$$

5. لحساب التكامل $I=\int_0^{+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x^4+1}\mathrm{d}\,x$ ، نُجري تغيير المتحوّل $x=e^t$ فنجد

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2e^t}{e^{4t}+1}\mathrm{d}\,t=\frac{1}{64}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u^2e^{u/4}}{e^u+1}\mathrm{d}\,u$$

لنعرّف تابعاً

$$f:z\mapsto\frac{P(z)e^{z/4}}{e^z+1}$$

حيث P هو كثير حدود سيجري تعيينه لاحقاً. ولنتأمّل المستطيل $\Gamma=ABCD$ الذي رؤوسه بالترتيب ممثّلة بالأعداد $-R$ و R و $R+2\mathrm{i}\pi$ وأخيراً $-R+2\mathrm{i}\pi$. عندئذ يكون للتابع f قطب وحيد داخل الشريط $0\le\operatorname{Im}z\le2\pi$ هو $p=\mathrm{i}\pi$ وهو قطبٌ بسيطٌ. واستناداً إلى مبرهنة الرواسب يكون لدينا

$$\int_{\Gamma}f(z)\mathrm{d}\,z=2\mathrm{i}\pi\operatorname{Res}(f,\mathrm{i}\pi)=-2\mathrm{i}\pi\frac{P(\mathrm{i}\pi)(1+\mathrm{i})}{\sqrt{2}}$$

ولكن

$$\int_{\Gamma}f(z)\mathrm{d}\,z=\int_{-R}^{R}\big(f(x)-f(x+2\mathrm{i}\pi)\big)\mathrm{d}\,x+T(R)+S(R)$$

حيث

$$S(R)=-\mathrm{i}\int_0^{2\pi}f(-R+\mathrm{i}y)\mathrm{d}\,y \quad \text{و} \quad T(R)=\mathrm{i}\int_0^{2\pi}f(R+\mathrm{i}y)\mathrm{d}\,y$$

هنا نلاحظ أنّ

$$f(x)-f(x+2\,\mathrm{i}\,\pi)=\frac{P(x)-\mathrm{i}\,P(x+2\pi\,\mathrm{i})}{e^{x}+1}\cdot e^{x/4}$$

ولكي نحصل على التكامل المطلوب يجب أن نختار P بحيث تتحقّق المساواة

$$P(x)-\mathrm{i}\,P(x+2\pi\,\mathrm{i})=x^2$$

إذن P من الدرجة الثانية، ولو افترضنا أنّ $P(x)=ax^2+bx+c$ أمكننا تعيين الأمثال من المساواة السابقة، بمقارنة أمثال x^2 نجد أنّ $a(1-\mathrm{i})=1$ أو $a=(1+i)/2$. وبمقارنة أمثال x نجد $b=-2\pi\,\mathrm{i}$ وأخيراً بمقارنة الحدين الثابتين نجد $c=2\pi^2\,\mathrm{i}$. أي

$$P(x)=\frac{1+\mathrm{i}}{2}x^2-2\pi\,\mathrm{i}\,x+2\pi^2\,\mathrm{i}$$

وعلى الخصوص

$$P(\mathrm{i}\,\pi)=\frac{3\pi^2}{2}(1+\mathrm{i})$$

وبهذا الاختيار يكون إذن

$$\int_{-R}^{R}\frac{x^2e^{x/4}}{e^{x}+1}\cdot\mathrm{d}\,x+T(R)+S(R)=-2\,\mathrm{i}\,\pi\frac{P(\mathrm{i}\,\pi)(1+\mathrm{i})}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}\pi^3$$

ولكن

$$\begin{aligned}\left|T(R)\right|&=\left|\mathrm{i}\int_0^{2\pi}f(R+\mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}\,y\right|=\left|\int_0^{2\pi}\frac{P(R+\mathrm{i}\,y)e^{R/4}e^{\mathrm{i}\,y/4}}{1+e^{R+\mathrm{i}\,y}}\mathrm{d}\,y\right|\\&\leq\frac{e^{R/4}}{e^{R}-1}\int_0^{2\pi}\left|P(R+\mathrm{i}\,y)\right|\mathrm{d}\,y=O(R^2e^{-3R/4})\end{aligned}$$

إذن $\lim_{R\to\infty}T(R)=0$. وكذلك نجد $\lim_{R\to\infty}S(R)=0$ لأنّ

$$\begin{aligned}\left|S(R)\right|&=\left|\mathrm{i}\int_0^{2\pi}f(-R+\mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}\,y\right|=\left|\int_0^{2\pi}\frac{P(-R+\mathrm{i}\,y)e^{-R/4}e^{\mathrm{i}\,y/4}}{1+e^{-R+\mathrm{i}\,y}}\mathrm{d}\,y\right|\\&\leq\frac{e^{-R/4}}{1-e^{-R}}\int_0^{2\pi}\left|P(-R+\mathrm{i}\,y)\right|\mathrm{d}\,y=O(R^2e^{-R/4})\end{aligned}$$

وعليه بجعل R تسعى إلى $+\infty$ نجد

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{x/4}}{e^x + 1} \cdot \mathrm{d}\, x = 3\sqrt{2}\pi^3$$

والتكامل المطلوب

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^4+1} \mathrm{d}\, x = \frac{1}{64}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2 e^{u/4}}{e^u+1} \mathrm{d}\, u = \frac{3\sqrt{2}\pi^3}{64}$$

.6 لحساب التكامل $I = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^2+a^2} \mathrm{d}\, x$ حيث $a > 0$، نُجري تغيير المتحوّل $x = e^{t/2}$ فنجد

$$I = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 e^{t/2}}{e^t + a^2} \mathrm{d}\, t$$

لنعرّف تابعاً

$$f : z \mapsto \frac{P(z) e^{z/2}}{e^z + a^2}$$

حيث P هو كثير حدود سيجري تعيينه لاحقاً. ولنتأمّل المستطيل $\Gamma = ABCD$ الذي رؤوسه بالترتيب ممثّلة بالأعداد $-R$ و R و $R + 2\,\mathrm{i}\,\pi$ وأخيراً $-R + 2\,\mathrm{i}\,\pi$. عندئذ يكون للتابع f قطب وحيد داخل الشريط $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\pi$ هو $p = 2\ln a + \mathrm{i}\,\pi$ وهو قطبٌ بسيطٌ.

واستناداً إلى مبرهنة الرواسب يكون لدينا

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\, z = 2\,\mathrm{i}\,\pi \operatorname{Res}(f, p) = \frac{2\pi}{a} P(2\ln a + \mathrm{i}\,\pi)$$

ولكن

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\, z = \int_{-R}^{R} \big(f(x) - f(x + 2\,\mathrm{i}\,\pi)\big)\,\mathrm{d}\, x + T(R) + S(R)$$

حيث

$$S(R) = -\mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(-R + \mathrm{i}\, y)\,\mathrm{d}\, y \quad \text{و} \quad T(R) = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(R + \mathrm{i}\, y)\,\mathrm{d}\, y$$

هنا نلاحظ أنّ

$$f(x) - f(x + 2\,\mathrm{i}\,\pi) = \frac{P(x) + P(x + 2\,\mathrm{i}\,\pi)}{e^x + a^2} e^{x/2}$$

ولكي نحصل على التكامل المطلوب يجب أن نختار P بحيث تتحقّق المساواة

$$P(x) + P(x + 2\pi\,\mathrm{i}) = x^2$$

إذن P من الدرجة الثانية، ولو افترضنا أنّ $P(x) = ax^2 + bx + c$ أمكننا تعيين الأمثال من المساواة السابقة، بمقارنة أمثال x^2 نجد أنّ $a = 1/2$. وبمقارنة أمثال x نجد $b = -\pi\,\mathrm{i}$ وأخيراً بمقارنة الحدين الثابتين نجد $c = 0$. أي

$$P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \pi\,\mathrm{i}\,x$$

وعلى الخصوص

$$P(2\ln a + \mathrm{i}\,\pi) = \frac{4\ln^2 a + \pi^2}{2}$$

وبهذا الاختيار يكون إذن

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2 e^{x/2}}{e^x + a^2} \cdot \mathrm{d}\,x + T(R) + S(R) = \frac{\pi}{a}(4\ln^2 a + \pi^2)$$

ولكن

$$\begin{aligned}
\left|T(R)\right| &= \left|\mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(R + \mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}\,y\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{P(R + \mathrm{i}\,y)e^{R/2}e^{\mathrm{i}\,y/2}}{a^2 + e^{R+\mathrm{i}\,y}}\,\mathrm{d}\,y\right| \\
&\leq \frac{e^{R/2}}{e^R - a^2}\int_0^{2\pi}\left|P(R + \mathrm{i}\,y)\right|\mathrm{d}\,y = O(R^2 e^{-R/2})
\end{aligned}$$

إذن $\lim_{R\to\infty} T(R) = 0$. وكذلك نجد $\lim_{R\to\infty} S(R) = 0$ لأنّ

$$\begin{aligned}
\left|S(R)\right| &= \left|\mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(-R + \mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}\,y\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{P(-R + \mathrm{i}\,y)e^{-R/2}e^{\mathrm{i}\,y/2}}{a^2 + e^{-R+\mathrm{i}\,y}}\,\mathrm{d}\,y\right| \\
&\leq \frac{e^{-R/2}}{a^2 - e^{-R}}\int_0^{2\pi}\left|P(-R + \mathrm{i}\,y)\right|\mathrm{d}\,y = O(R^2 e^{-R/2})
\end{aligned}$$

وعليه بجعل R تسعى إلى $+\infty$ نجد

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{x/2}}{e^x + a^2} \cdot \mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{a}(4\ln^2 a + \pi^2)$$

والتكامل المطلوب

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^2 + a^2} \mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{8a}(4\ln^2 a + \pi^2)$$

وهي النتيجة المرجوّة.

التمرين 17. نفترض أنّ $-1 < \alpha < 2$. احسب التكاملات الآتية مستفيداً من نظرية الرواسب، بعد إجراء تغيير مناسب للمتحوِّل:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^\alpha}{(x+1)^3} \mathrm{d}\,x,$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^\alpha}{1+x^2} \mathrm{d}\,x,$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^\alpha}{(x+\beta)^2} \mathrm{d}\,x, \quad \beta > 0$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^\alpha}{x+1} \mathrm{d}\,x,$
5. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{1-\alpha}(1-x)^\alpha}{1+x^2} \mathrm{d}\,x$

الحل

1. لحساب التكامل $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^\alpha}{(x+1)^3} \mathrm{d}\,x$، نُجري تغيير المتحوِّل $x = \dfrac{e^t}{e^t + 1}$ فنجد

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^t}{e^t+1}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{1}{e^t+1}\right)^{\alpha} \left(\frac{e^t+1}{2e^t+1}\right)^{3} \frac{e^t}{(e^t+1)^2} \mathrm{d}\,t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2-\alpha)t}}{(2e^t+1)^3} \mathrm{d}\,t \end{aligned}$$

لنعرّف

$$f : z \mapsto \frac{e^{(2-\alpha)z}}{(2e^z+1)^3}$$

عندئذ يكون للتابع f قطبٌ واحد هو $-\ln 2+\mathrm{i}\,\pi$ داخل الشريط $0\le \operatorname{Im} z\le 2\pi$ وهو قطبٌ بسيطٌ. ولنتأمّل المستطيل $\Gamma=ABCD$ الذي رؤوسه بالترتيب ممثّلة بالأعداد $-R$ و R و $R+2\mathrm{i}\,\pi$ وأخيراً $-R+2\mathrm{i}\,\pi$. استناداً إلى مبرهنة الرواسب يكون لدينا

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=2\,\mathrm{i}\,\pi\operatorname{Res}(f,-\ln 2+\mathrm{i}\,\pi)$$

ولكن

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=\int_{-R}^{R}\big(f(x)-f(x+2\,\mathrm{i}\,\pi)\big)\,\mathrm{d}\,x+T(R)+S(R)$$

حيث

$$S(R)=-\mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(-R+\mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}\,y \quad \text{و} \quad T(R)=\mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(R+\mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}\,y$$

ولدينا

$$\begin{aligned}\big|T(R)\big|&=\left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{(2-\alpha)(R+\mathrm{i}\,y)}}{(2e^{R+\mathrm{i}\,y}+1)^3}\,\mathrm{d}\,y\right|\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{(2-\alpha)(R+\mathrm{i}\,y)}}{(2e^{R+\mathrm{i}\,y}+1)^3}\right|\mathrm{d}\,y\\&\le 2\pi\frac{e^{R(2-\alpha)}}{(2e^R-1)^3}=O(e^{-(1+\alpha)R})\end{aligned}$$

إذن $\lim_{R\to\infty}T(R)=0$ لأن $1+\alpha>0$. وكذلك

$$\begin{aligned}\big|S(R)\big|&=\left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{(2-\alpha)(-R+\mathrm{i}\,y)}}{(2e^{-R+\mathrm{i}\,y}+1)^3}\,\mathrm{d}\,y\right|\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{(2-\alpha)(-R+\mathrm{i}\,y)}}{(2e^{R+\mathrm{i}\,y}+1)^3}\right|\mathrm{d}\,y\\&\le 2\pi\frac{e^{-R(2-\alpha)}}{(1-e^{-R})^3}=O(e^{-(2-\alpha)R})\end{aligned}$$

إذن نجد $\lim_{R\to\infty}S(R)=0$ لأنّ $2-\alpha>0$. وأخيراً نلاحظ أنّ

$$f(x)-f(x+2\,\mathrm{i}\,\pi)=(1-e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\alpha})\frac{e^{(2-\alpha)x}}{(2e^x+1)^3}$$

إذن بجعل R تسعى إلى اللانهاية نستنتج أنّ

$$(1-e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\alpha})I=2\,\mathrm{i}\,\pi\operatorname{Res}(f,-\ln 2+\mathrm{i}\,\pi)$$

بقي إذن حساب الراسب. لحساب راسب f عند p نضع $z = p + w$ فيكون

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{(2-\alpha)(p+w)}}{(2e^{p+w}+1)^3} = e^{(2-\alpha)p}\,\frac{e^{(2-\alpha)w}}{(-e^{w}+1)^3} \\ &= -\frac{e^{(2-\alpha)p}}{w^3}\cdot\frac{1+(2-\alpha)w+\frac{1}{2}(2-\alpha)^2w^2+O(w^3)}{(1+\frac{1}{2}w+\frac{1}{6}w^2+O(w^3))^3} \\ &= -\frac{e^{(2-\alpha)p}}{w^3}\cdot\Big(1+(2-\alpha)w+\tfrac{1}{2}(2-\alpha)^2w^2\Big)\Big(1+\tfrac{1}{2}w+\tfrac{1}{6}w^2\Big)^{-3}+O(1) \\ &= -\frac{e^{(2-\alpha)p}}{w^3}\cdot\Big(1+(2-\alpha)w+\tfrac{1}{2}(2-\alpha)^2w^2\Big)\Big(1-\tfrac{3}{2}w+w^2\Big)+O(1) \\ &= -\frac{e^{(2-\alpha)p}}{w^3}\cdot\Big(1+(\tfrac{1}{2}-\alpha)w+\tfrac{1}{2}(\alpha^2-\alpha)w^2\Big)+O(1) \end{aligned}$$

ومنه

$$\operatorname{Res}\big(f,p\big) = \frac{\alpha-\alpha^2}{8}2^{\alpha}e^{-\mathrm{i}\pi\alpha}$$

إذن

$$(\sin\pi\alpha)I = \pi(\alpha-\alpha^2)2^{\alpha-3}$$

وأخيراً

$$\int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}(1-\alpha)2^{\alpha-3}$$

2. لحساب التكامل $I = \int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ نُجري تغيير المتحوّل $x = \frac{e^t}{e^t+1}$ فنجد

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^t}{e^t+1}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{e^t+1}\right)^{\alpha}\frac{(e^t+1)^2}{(e^t+1)^2+e^{2t}}\cdot\frac{e^t}{(e^t+1)^2}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(2-\alpha)t}}{(e^t+1)(2e^{2t}+2e^t+1)}\,\mathrm{d}\,t \end{aligned}$$

لنعرّف

$$f : z \mapsto \frac{e^{(2-\alpha)z}}{(e^z+1)(2e^{2z}+2e^z+1)}$$

ولنتأمّل المستطيل $\Gamma = ABCD$ الذي رؤوسه بالترتيب ممثّلة بالأعداد $-R$ و R و $R + 2\mathrm{i}\,\pi$ وأخيراً $-R + 2\mathrm{i}\,\pi$. عندئذ يكون للتابع f ثلاثة أقطاب داخل الشريط $0 \le \operatorname{Im} z \le 2\pi$ هي

$$\mathcal{P}_S = \{p_0 = \mathrm{i}\,\pi, p_1 = -\tfrac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}\tfrac{3}{4}\pi, p_2 = -\tfrac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}\tfrac{5}{4}\pi\}$$

وهي أقطابٌ بسيطة. واستناداً إلى مبرهنة الرواسب يكون لدينا

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = 2\,\mathrm{i}\,\pi \sum_{p\in\mathcal{P}_S} \operatorname{Res}(f,p)$$

ولكن

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = (1 - e^{-2\mathrm{i}\,\pi\alpha})\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}\,x + T(R) + S(R)$$

حيث

$$S(R) = -\mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(-R + \mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}\,y \quad \text{و} \quad T(R) = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(R + \mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}\,y$$

ولكن

$$\begin{aligned}
\left|T(R)\right| &= \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{(2-\alpha)(R+\mathrm{i}y)}}{(e^{R+\mathrm{i}y}+1)(2e^{2(R+\mathrm{i}y)} + 2e^{R+\mathrm{i}y}+1)}\,\mathrm{d}\,y\right| \\
&\le \int_0^{2\pi} \left|\frac{e^{(2-\alpha)(R+\mathrm{i}y)}}{(e^{R+\mathrm{i}y}+1)(2e^{2(R+\mathrm{i}y)} + 2e^{R+\mathrm{i}y}+1)}\right|\mathrm{d}\,y \\
&\le 2\pi \frac{e^{R(2-\alpha)}}{(e^R-1)(2e^{2R}-2e^R-1)} = O(e^{-(1+\alpha)R})
\end{aligned}$$

إذن $\lim_{R\to\infty} T(R) = 0$ لأنّ $1+\alpha > 0$. وكذلك $\lim_{R\to\infty} S(R) = 0$ لأنّ $2-\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}
\left|S(R)\right| &= \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{(2-\alpha)(-R+\mathrm{i}y)}}{(e^{-R+\mathrm{i}y}+1)(2e^{2(-R+\mathrm{i}y)} + 2e^{-R+\mathrm{i}y}+1)}\,\mathrm{d}\,y\right| \\
&\le \int_0^{2\pi} \left|\frac{e^{(2-\alpha)(R+\mathrm{i}y)}}{(e^{-R+\mathrm{i}y}+1)(2e^{2(-R+\mathrm{i}y)} + 2e^{-R+\mathrm{i}y}+1)}\right|\mathrm{d}\,y \\
&\le 2\pi \frac{e^{-R(2-\alpha)}}{(1-e^{-R})(1-2e^{-2R}-2e^{-R})} = O(e^{-(2-\alpha)R})
\end{aligned}$$

إذن

$$(1-e^{-2\mathrm{i}\pi\alpha})\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 2\,\mathrm{i}\,\pi\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\mathrm{Res}(f,p)$$

ولكنّ أقطاب f بسيطة، فإذا كان p أحدها كان

$$\mathrm{Res}(f,p)=\frac{e^{(2-\alpha)p}}{6e^{3p}+8e^{2p}+3e^{p}}=\frac{e^{p}}{6e^{2p}+8e^{p}+3}e^{\alpha p}$$

ومنه، بملاحظة أنّ $\exp\left(\mathcal{P}_S\right)=\left\{\frac{-1+\mathrm{i}}{2},\frac{-1-\mathrm{i}}{2},-1\right\}$ نجد

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left(f,-\tfrac{1}{2}\ln 2+\mathrm{i}\,\tfrac{3\pi}{4}\right)&=\frac{1}{2}\cdot 2^{\alpha/2}\exp\left(-\mathrm{i}\,\tfrac{3\pi\alpha}{4}\right)\\ \mathrm{Res}\left(f,-\tfrac{1}{2}\ln 2+\mathrm{i}\,\tfrac{5\pi}{4}\right)&=\frac{1}{2}\cdot 2^{\alpha/2}\exp\left(-\mathrm{i}\,\tfrac{5\pi\alpha}{4}\right)\\ \mathrm{Res}\left(f,\mathrm{i}\,\pi\right)&=-\exp\left(-\mathrm{i}\,\pi\alpha\right)\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\mathrm{Res}(f,p)&=\left(2^{\alpha/2}\,\frac{e^{\mathrm{i}\pi\alpha/4}+e^{-\mathrm{i}\pi\alpha/4}}{2}-1\right)e^{-\mathrm{i}\,\pi\alpha}\\ &=\left(2^{\alpha/2}\cos\frac{\pi\alpha}{4}-1\right)e^{-\mathrm{i}\,\pi\alpha}\end{aligned}$$

إذن

$$\sin\pi\alpha\cdot I=\pi\cdot\left(2^{\alpha/2}\cos\frac{\pi\alpha}{4}-1\right)$$

وأخيراً

$$\int_0^1\frac{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\cdot\left(2^{\alpha/2}\cos\frac{\pi\alpha}{4}-1\right)$$

3. لحساب التكامل $I=\int_0^1\frac{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}{(x+\beta)^2}\,\mathrm{d}\,x$ حيث $\beta>0$ ، نُجري كما سبق تغيير المتحوِّل $x=\dfrac{e^{t}}{e^{t}+1}$ فنجد

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^t}{e^t+1}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{1}{e^t+1}\right)^{\alpha} \frac{(e^t+1)^2}{((1+\beta)e^t+\beta)^2} \cdot \frac{e^t}{(e^t+1)^2}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{(1+\beta)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2-\alpha)t}}{(e^t+1)(e^t+\gamma)^2}\,\mathrm{d}\,t \end{aligned}$$

حيث وضعنا $\gamma = \dfrac{\beta}{1+\beta}$. لنعرّف

$$f : z \mapsto \frac{e^{(2-\alpha)z}}{(e^z+1)(e^z+\gamma)^2}$$

ولنتأمّل المستطيل $\Gamma = ABCD$ الذي رؤوسه بالترتيب ممثّلة بالأعداد $-R$ و R و $R+2\mathrm{i}\,\pi$ وأخيراً $-R+2\mathrm{i}\,\pi$، حيث R كبيرة بقدر كافٍ. عندئذ يكون للتابع f قطبان داخل الشريط $0 \le \operatorname{Im} z \le 2\pi$ هما

$$\mathcal{P}_S = \left\{ p_0 = \mathrm{i}\,\pi, p_1 = \ln\gamma + \mathrm{i}\,\pi \right\}$$

واستناداً إلى مبرهنة الرواسب يكون لدينا

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 2\,\mathrm{i}\,\pi \sum_{p\in\mathcal{P}_S} \operatorname{Res}(f,p)$$

ولكن

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}\,z = (1-e^{-2\,\mathrm{i}\,\pi\alpha}) \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}\,x + T(R) + S(R)$$

حيث

$$S(R) = -\mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(-R+\mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}\,y \quad \text{و} \quad T(R) = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(R+\mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}\,y$$

ولكن

$$\begin{aligned} \left|T(R)\right| &= \left|\int_0^{2\pi} f(R+\mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}\,y\right| \le \int_0^{2\pi} \left|\frac{e^{(2-\alpha)(R+\mathrm{i}\,y)}}{(e^{R+\mathrm{i}\,y}+1)(e^{R+\mathrm{i}\,y}+\gamma)^2}\right| \mathrm{d}\,y \\ &\le 2\pi \frac{e^{(2-\alpha)R}}{(e^R-1)(e^R-\gamma)^2} = O(e^{-(1+\alpha)R}) \end{aligned}$$

إذن $\lim\limits_{R\to\infty} T(R) = 0$ لأنّ $1+\alpha > 0$.

وكذلك

$$\begin{aligned}\left|S(R)\right| &= \left|\int_0^{2\pi} f(-R+\mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}\,y\right| \le \int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{(2-\alpha)(-R+\mathrm{i}\,y)}}{(e^{-R+\mathrm{i}\,y}+1)(e^{-R+\mathrm{i}\,y}+\gamma)^2}\right|\mathrm{d}\,y\\ &\le 2\pi\frac{e^{-(2-\alpha)R}}{(1-e^{-R})(\gamma-e^{-R})^2} = O(e^{-(2-\alpha)R})\end{aligned}$$

إذن $\lim_{R\to\infty} S(R) = 0$ لأنّ $2-\alpha>0$. وعليه

$$(1-e^{-2\mathrm{i}\,\pi\alpha})\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 2\,\mathrm{i}\,\pi\Big(\operatorname{Res}(f,p_0)+\operatorname{Res}(f,p_1)\Big)$$

ولكن $p_0=\mathrm{i}\,\pi$ قطب بسيط للتابع f إذن،

$$\operatorname{Res}(f,p_0) = \frac{e^{(2-\alpha)\mathrm{i}\,\pi}}{e^{\mathrm{i}\,\pi}(e^{\mathrm{i}\,\pi}+\gamma)^2} = -\frac{e^{-\mathrm{i}\,\pi\alpha}}{(\gamma-1)^2} = -(1+\beta)^2 e^{-\mathrm{i}\,\pi\alpha}$$

أمّا $p_1=\ln\gamma+\mathrm{i}\,\pi$ فهو من المرتبة الثانية وإذا عرّفنا $z=p_1+w$ وجدنا

$$\begin{aligned}f(z) &= e^{-\alpha p}\cdot\frac{e^{(2-\alpha)w}}{(1-\gamma e^{w})(e^{w}-1)^2}\\ &= \frac{e^{-\alpha p}}{w^2}\cdot\frac{1+(2-\alpha)w+O(w^2)}{\Big(1-\gamma-\gamma\omega+O(w^2)\Big)\Big(1+\frac12 w+O(w^2)\Big)^2}\\ &= \frac{e^{-\alpha p}(1+\beta)}{w^2}\cdot\Big(1+(2-\alpha)w\Big)\Big(1-\beta w\Big)^{-1}\Big(1+\tfrac12 w\Big)^{-2}+O(1)\\ &= \frac{e^{-\alpha p}(1+\beta)}{w^2}\cdot\Big(1+(2-\alpha)w\Big)\Big(1+\beta w\Big)\Big(1-w\Big)+O(1)\\ &= \frac{e^{-\alpha p}(1+\beta)}{w^2}\cdot\Big(1+(1+\beta-\alpha)w\Big)+O(1)\end{aligned}$$

ومنه

$$\operatorname{Res}\Big(f,p_1\Big) = \beta^{-\alpha}(1+\beta)^{\alpha+1}(1+\beta-\alpha)e^{-\mathrm{i}\,\pi\alpha}$$

إذن

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\operatorname{Res}(f,p) = \beta^{-\alpha}(1+\beta)^{\alpha+1}(1+\beta-\alpha)e^{-\mathrm{i}\,\pi\alpha}-(1+\beta)^2e^{-\mathrm{i}\,\pi\alpha}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\sin\alpha\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \pi\Big(\beta^{-\alpha}(1+\beta)^{\alpha+1}(1+\beta-\alpha)-(1+\beta)^2\Big)$$

ومنه

$$\frac{1}{(1+\beta)^2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\left(\frac{1+\beta-\alpha}{\beta^{\alpha}(1+\beta)^{1-\alpha}}-1\right)$$

وأخيراً

$$\int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}{(x+\beta)^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\left(\frac{1+\beta-\alpha}{\beta^{\alpha}(1+\beta)^{1-\alpha}}-1\right)$$

4. لحساب التكامل $I=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}{x+1}\,\mathrm{d}\,x,$ ، نُجري تغيير المتحوِّل $x=\dfrac{e^t}{e^t+1}$

فنجد

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(2-\alpha)t}}{(e^t+1)^2(2e^t+1)}\,\mathrm{d}\,t$$

لنعرّف إذن

$$f : z\mapsto \frac{e^{(2-\alpha)z}}{(e^z+1)^2(2e^z+1)}$$

عندئذ يكون للتابع f قطبان هما

$$\mathcal{P}_S=\left\{p_0=\mathrm{i}\,\pi, p_1=-\ln 2+\mathrm{i}\,\pi\right\}$$

داخل الشريط $0\le \operatorname{Im} z\le 2\pi$. لنتأمّل المستطيل $\Gamma = ABCD$ الذي رؤوسه بالترتيب ممثّلة بالأعداد $-R$ و R و $R+2\,\mathrm{i}\,\pi$ وأخيراً $-R+2\,\mathrm{i}\,\pi$، حيث R كبيرة بقدر كافٍ.

استناداً إلى مبرهنة الرواسب يكون لدينا

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 2\,\mathrm{i}\,\pi\Big(\operatorname{Res}(f,p_0)+\operatorname{Res}(f,p_1)\Big)$$

ولكن

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}\,z = (1-e^{-2\,\mathrm{i}\,\pi\alpha})\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}\,x + T(R) + S(R)$$

حيث

$$S(R) = -\mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(-R+\mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}\,y \quad \text{و} \quad T(R) = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(R+\mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}\,y$$

وهنا نلاحظ أنّ

$$\left|T(R)\right| \le 2\pi\frac{e^{(2-\alpha)R}}{(e^R-1)^2(2e^R-1)} = O(e^{-(1+\alpha)R})$$

إذن $\lim\limits_{R\to\infty} T(R) = 0$ لأنّ $0 < 1+\alpha$. وكذلك

$$\left|S(R)\right| \le 2\pi\frac{e^{-(2-\alpha)R}}{(1-e^{-R})^2(1-2e^{-R})} = O(e^{-(2-\alpha)R})$$

لأنّ $0 < 2-\alpha$. إذن

$$(1-e^{-2\,\mathrm{i}\,\pi\alpha})\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 2\,\mathrm{i}\,\pi\Big(\mathrm{Res}(f,p_0)+\mathrm{Res}(f,p_1)\Big)$$

ولكن $p_1 = -\ln 2 + \mathrm{i}\,\pi$ قطب بسيط للتابع f إذن،

$$\mathrm{Res}(f,p_1) = -2^\alpha e^{-\mathrm{i}\,\pi\alpha}$$

أمّا $p_0 = \mathrm{i}\,\pi$ فهو جذر مضاعف، لنضع $z = p_0 + w$ فنجد

$$\begin{aligned}
f(z) &= e^{-\mathrm{i}\,\alpha\pi}\,\frac{e^{(2-\alpha)w}}{(e^w-1)^2(-2e^w+1)}\\
&= -\frac{e^{-\mathrm{i}\,\alpha\pi}}{w^2}\Big(1+(2-\alpha)w\Big)\Big(1+\tfrac{1}{2}\,w\Big)^{-2}\Big(1+2w\Big)^{-1} + O(1)\\
&= -\frac{e^{-\mathrm{i}\,\alpha\pi}}{w^2}\Big(1+(2-\alpha)w\Big)\Big(1-w\Big)\Big(1-2w\Big) + O(1)\\
&= -\frac{e^{-\mathrm{i}\,\alpha\pi}}{w^2}\Big(1-(1+\alpha)w\Big) + O(1)
\end{aligned}$$

ومنه

$$\mathrm{Res}(f,p_0) = (1+\alpha)e^{-\mathrm{i}\,\pi\alpha}$$

إذن

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_S}\operatorname{Res}(f,p)=(1+\alpha-2^{\alpha})e^{-\mathrm{i}\,\pi\alpha}$$

ومنه

$$\left(1-e^{-\mathrm{i}2\pi\alpha}\right)I=2\,\mathrm{i}\,\pi(1+\alpha-2^{\alpha})e^{-\mathrm{i}\,\pi\alpha}$$

أو

$$\sin\alpha\pi\cdot I=\pi(1+\alpha-2^{\alpha})$$

وأخيراً

$$\int_0^1\frac{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}{x+1}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}(1+\alpha-2^{\alpha})$$

5. لحساب $I=\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$، نُجري تغيير المتحوِّل $x=\frac{e^t-1}{e^t+1}$

فنجد

$$I=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(2-\alpha)t}}{(e^t+1)(e^{2t}+1)}\,\mathrm{d}\,t$$

لنعرّف

$$f:z\mapsto\frac{e^{(2-\alpha)z}}{(e^z+1)(e^{2z}+1)}$$

عندئذ يكون للتابع f ثلاثة أقطاب بسيطة هي

$$\mathcal{P}_S=\left\{p_0=\mathrm{i}\,\pi,p_1=\mathrm{i}\tfrac{\pi}{2},p_2=\mathrm{i}\tfrac{3\pi}{2}\right\}$$

داخل الشريط $0\le\operatorname{Im}z\le2\pi$. لنتأمّل المستطيل $\Gamma=ABCD$ الذي رؤوسه بالترتيب ممثّلة بالأعداد $-R$ و R و $R+2\,\mathrm{i}\,\pi$ وأخيراً $-R+2\,\mathrm{i}\,\pi$. عندئذ

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=2\,\mathrm{i}\,\pi\Big(\operatorname{Res}(f,p_0)+\operatorname{Res}(f,p_1)+\operatorname{Res}(f,p_2)\Big)$$

ولكن

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=(1-e^{-2\,\mathrm{i}\,\pi\alpha})\int_{-R}^{R}f(x)\,\mathrm{d}\,x+T(R)+S(R)$$

حيث

$$S(R) = -\mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(-R+\mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}\,y \quad \text{و} \quad T(R) = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(R+\mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}\,y$$

وهنا نلاحظ أنّ

$$\left|T(R)\right| \leq 2\pi \frac{e^{(2-\alpha)R}}{(e^R-1)(e^{2R}-1)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

لأنّ $0 < 1+\alpha$. وكذلك

$$\left|S(R)\right| \leq 2\pi \frac{e^{-(2-\alpha)R}}{(1-e^{-R})(1-e^{-2R})} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

لأنّ $0 < 2-\alpha$. إذن

$$(1-e^{-2\mathrm{i}\pi\alpha})\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 2\,\mathrm{i}\,\pi \sum_{p\in\mathcal{P}_S} \mathrm{Res}(f,p)$$

ولكن أقطاب التابع f بسيطة، وإذا كان p أحدها كان

$$\mathrm{Res}(f,p) = \frac{e^p}{3e^{2p}+2e^p+1}e^{-p\alpha}$$

إذن

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(f,\mathrm{i}\tfrac{\pi}{2}\right) &= \frac{1-\mathrm{i}}{4}e^{-\mathrm{i}\pi\alpha/2}\\
\mathrm{Res}\left(f,\mathrm{i}\,\pi\right) &= \frac{-1}{2}e^{-\mathrm{i}\pi\alpha}\\
\mathrm{Res}\left(f,\mathrm{i}\tfrac{3\pi}{2}\right) &= \frac{1+\mathrm{i}}{4}e^{-3\mathrm{i}\pi\alpha/2}
\end{aligned}$$

إذن

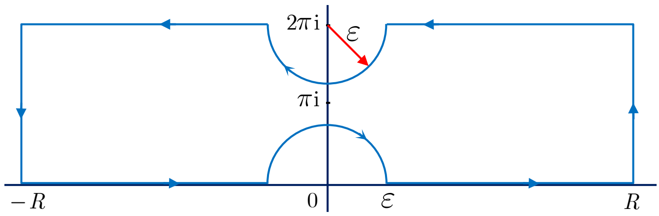
$$\sin\alpha\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\alpha\pi}{2}+\sin\frac{\alpha\pi}{2}-1\right)$$

وأخيراً

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\left(\cos\frac{\alpha\pi}{2}+\sin\frac{\alpha\pi}{2}-1\right)$$
$$=\frac{\pi}{1+\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}+\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}}$$

وبذا يتم المطلوب.

التمرين 18. ليكن a من $\mathbb{R}$، احسب التكامل $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{\operatorname{sh}x}\,\mathrm{d}\,x$ وذلك بمُكاملة التابع الميرومورفي $z\mapsto\dfrac{e^{\mathrm{i}\,az}}{\operatorname{sh}z}$ على طول الطريق المبيّن في الشكل التالي:



الحل

سنرمز بالرمز $\Gamma_{R,\varepsilon}$ إلى الطريق المبيَّن في الشكل، حيث $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ و $\varepsilon<R$. عندئذ يكون $\mathrm{i}\,\pi$ القطب الوحيد، وهو بسيط، للتابع $z\mapsto f(z)=\dfrac{e^{\mathrm{i}\,az}}{\operatorname{sh}z}$، وعليه

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}\,z=2\,\mathrm{i}\,\pi\operatorname{Res}(f,\mathrm{i}\,\pi)$$

ولكن لدينا من جهة أولى : $\operatorname{Res}(f,\mathrm{i}\,\pi)=\dfrac{e^{\mathrm{i}\,a(\mathrm{i}\,\pi)}}{\operatorname{ch}(\mathrm{i}\,\pi)}=-e^{-a\pi}$. ومن جهة ثانية:

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}\,z=2\,\mathrm{i}(1-e^{-2\pi a})\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sin(ax)}{\operatorname{sh}x}\,\mathrm{d}\,x-\int_{\gamma_\varepsilon^1} f(z)\,\mathrm{d}\,z-\int_{\gamma_\varepsilon^2} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

وقد رمزنا بالرمز γ_ε^1 إلى نصف الدائرة الممثَّلة وسيطيّاً بالتمثيل

$$\varphi:\left[0,\pi\right]\to\mathbb{C},\theta\mapsto\varepsilon e^{\mathrm{i}\,\theta}$$

وبالرمز γ_ε^2 إلى نصف الدائرة الممثَّلة وسيطيّاً بالتمثيل

$$\psi:\left[\pi,2\pi\right]\to\mathbb{C},\theta\mapsto 2\,\mathrm{i}\,\pi+\varepsilon e^{\mathrm{i}\,\theta}$$

ولكنّ التابع $z \mapsto f(z) - \dfrac{1}{z}$ يقبل نهاية عند 0 فهو محدود في جوار الصفر، ولأنّ طول الطريق γ_ε^1 يسعى إلى الصفر استنتجنا أنّ

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon^1} \left(f(z) - \frac{1}{z} \right) \mathrm{d}\, z = 0$$

ولكن $\displaystyle\int_{\gamma_\varepsilon^1} \frac{\mathrm{d}\, z}{z} = \mathrm{i} \int_0^\pi \mathrm{d}\, \theta = \mathrm{i}\, \pi$ إذن

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon^1} f(z)\, \mathrm{d}\, z = \mathrm{i}\, \pi$$

وكذلك التابع $z \mapsto f(z) - \dfrac{e^{-2\pi a}}{z - 2\,\mathrm{i}\,\pi}$ يقبل نهاية عند $2\,\mathrm{i}\,\pi$ فهو محدود في جوار $2\,\mathrm{i}\,\pi$، ولأنّ طول الطريق γ_ε^2 يسعى إلى الصفر استنتجنا أنّ

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon^2} \left(f(z) - \frac{e^{-2\pi a}}{z - 2\,\mathrm{i}\,\pi} \right) \mathrm{d}\, z = 0$$

ولكن $\displaystyle\int_{\gamma_\varepsilon^2} \frac{e^{-2\pi a}}{z - 2\,\mathrm{i}\,\pi} \mathrm{d}\, z = e^{-2\pi a} \cdot \mathrm{i} \int_\pi^{2\pi} \mathrm{d}\, \theta = \mathrm{i}\, \pi e^{-2\pi a}$ إذن

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon^2} f(z)\, \mathrm{d}\, z = \mathrm{i}\, \pi e^{-2\pi a}$$

وهكذا نستنتج أنّ

$$2\,\mathrm{i} \left(1 - e^{-2\pi a} \right) \lim_{\substack{R \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_\varepsilon^R \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} x} \mathrm{d}\, x = \mathrm{i}\, \pi + \mathrm{i}\, \pi e^{-2\pi a} - 2\,\mathrm{i}\, \pi e^{-a\pi}$$

ومن ثَمّ

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} x} \mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\operatorname{ch} \pi a - 1}{\operatorname{sh} \pi a} \right) = \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \frac{\pi a}{2}$$

وبذا نجد النتيجة المطلوبة. ∎

تحويلات لابلاس وتطبيقاتها

1. فضاء توابع الأصل

1-1. تعريف. لتكن $\mathcal{W}$ مجموعة التوابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ التي تُحقِّق الخواص الآتية:

① أيّاً كانت t من $\mathbb{R}_-^*$ كان $f(t)=0$.

② التابع f ينتمي إلى الصف $\mathcal{R}^{\text{loc}}$.[1]

③ توجد ثوابت M من $\mathbb{R}_+^*$، و σ و T من $\mathbb{R}$، تتعلّق بالتابع f، تُحقّق

$$\forall t\geq T,\quad |f(t)|\leq M\exp(\sigma t)$$

من الواضح أنّ المجموعة $\mathcal{W}$ هي فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{C}$، نسمّيه **فضاء توابع الأصل** لتحويل لابلاس Laplace.

2-1. تعريف. ليكن f عنصراً من $\mathcal{W}$. نسمّي الحدَّ الأدنى في $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ لمجموعة قيم σ من $\mathbb{R}$ التي تجعل التابع $t\mapsto e^{-\sigma t}|f(t)|$ محدوداً في جوار $+\infty$، **فاصلة تزايد** التابع f ونرمز إليها بالرمز $\sigma(f)$.

3-1. مبرهنة. ليكن f و g عنصرين من $\mathcal{W}$، ولتكن λ من $\mathbb{C}$. عندئذ ينتمي التابعان λf و $f+g$ إلى $\mathcal{W}$. ويكون $\sigma(\lambda f)=\sigma(f)$ في حالة $\lambda\neq 0$، وكذلك تتحقّق المتراجحة $\sigma(f+g)\leq\max(\sigma(f),\sigma(g))$، مع مساواة عندما $\sigma(f)\neq\sigma(g)$.

الإثبات

- الجزء المتعلّق بالتابع λf بسيط وواضح.
- من جهة أخرى، مهما تكن σ أكبر تماماً من $\max(\sigma(f),\sigma(g))$، يكن التابعان

$$t\mapsto e^{-\sigma t}|f(t)| \text{ و } t\mapsto e^{-\sigma t}|g(t)|$$

محدودين في جوار $+\infty$، ومن ثَمّ يكون التابع $t\mapsto e^{-\sigma t}|f(t)+g(t)|$ محدوداً في جوار $+\infty$، إذن $\sigma(f+g)\leq\sigma$. ونكون قد أثبتنا صحّة المتراجحة.

[1] أي إنّه يقبل نهاية من اليمين ونهاية من اليسار عند كلّ نقطة من $\mathbb{R}$.

- وأخيراً إذا افترضنا على سبيل المثال أنّ $\sigma(g) < \sigma(f)$، استنتجنا، بالاستفادة مما سبق وبملاحظة أنّ $f = (f+g) - g$، المتراجحة الآتية:

$$\sigma(f) \leq \max(\sigma(f+g), \sigma(g))$$

ومن ثَمّ $\sigma(f) \leq \sigma(f+g)$، ونحصل على المساواة $\sigma(f) = \sigma(f+g)$ لأنّ المتراجحة المعاكسة محقَّقةٌ دوماً بناءً على ما أثبتناه آنفاً. ❐

4-1. أمثلة

- ينتمي كلُّ تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ صفري على $\mathbb{R}_-^*$، ومستمرّ ومحدود على $\mathbb{R}_+$ إلى فضاء توابع الأصل $\mathcal{W}$ ويُحقِّق $\sigma(f) \leq 0$.

- يُؤدّي التابع التالي **تابع هِفيسايد** Heaviside دوراً متميِّزاً في نظريّة تحويلات لابلاس:

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad H(t) = \begin{cases} 0 & : \ t < 0 \\ 1 & : \ t \geq 0 \end{cases}$$

إذ يتيقَّن القارئ بسهولة أنّ $\sigma(H) = 0$.

- إذا رمزنا بالرمز X^m إلى التابع $t \mapsto t^m$ مع m من $\mathbb{N}$، عندئذ مهما تكن m من $\mathbb{N}$، ينتمِ التابع $X^m H$ إلى $\mathcal{W}$ ويُحقِّق $\sigma(X^m H) = 0$.

في الحقيقة، إنّ النقطة السابقة نتيجة مباشرة من المبرهنة الآتية.

5-1. مبرهنة. أيّاً كان التابع f من $\mathcal{W}$، وأيّاً كانت m من $\mathbb{N}$، كان $X^m f$ عنصراً من $\mathcal{W}$، وكان $\sigma(X^m f) = \sigma(f)$.

الإثبات

لتكن $\sigma(f) < \alpha$ عندئذ يوجد، استناداً إلى تعريف $\sigma(f)$، عددٌ β من المجال $]\sigma(f), \alpha[$، وعددان حقيقيّان موجبان M و T بحيث يتحقّق الاقتضاء الآتي:

$$t \geq T \Rightarrow |f(t)| \leq M e^{\beta t}$$

ومن ثَمّ

$$t \geq T \Rightarrow |t^m f(t)| \leq M\left(t^m e^{(\beta-\alpha)t}\right) e^{\alpha t}$$

ولكن، بناءً على تعريف التابع الأسّي، يقتضي الشرط $(\alpha-\beta)t \geq 0$ ما يأتي

$$\frac{(\alpha-\beta)^m t^m}{m!} \leq e^{(\alpha-\beta)t}$$

وعليه

$$t \geq T \Rightarrow |t^m f(t)| \leq \underbrace{\frac{M(m!)}{(\alpha-\beta)^m}}_{\widetilde{M}} e^{\alpha t} = \widetilde{M} e^{\alpha t}$$

ومن ثَمّ، نرى أنّ التابع $X^m f$ ينتمي إلى $\mathcal{W}$، وأنّ $\sigma(X^m f) \leq \alpha$ وذلك مهما تكن α أكبر تماماً من $\sigma(f)$ إذن $\sigma(X^m f) \leq \sigma(f)$.

وبالعكس، لتكن $\sigma(X^m f) < \alpha$، عندئذ يوجد عددان حقيقيان موجبان M و T يُحقّقان

$$t \geq T \Rightarrow |t^m f(t)| \leq M e^{\alpha t}$$

ومن ثَمّ

$$t \geq \max(T,1) \Rightarrow |f(t)| \leq |t^m f(t)| \leq M e^{\alpha t}$$

وهذا يُثبت أنّ التابع $t \mapsto |f(t)| e^{-\alpha t}$ محدود في جوار $+\infty$، إذن $\sigma(f) \leq \alpha$. ولمّا كان هذا الأمر صحيحاً مهما تكن $\sigma(X^m f) < \alpha$، استنتجنا أنّ $\sigma(f) \leq \sigma(X^m f)$. بذا نكون قد أثبتنا أنّ $\sigma(f) = \sigma(X^m f)$. ❒

1-6. مبرهنة وتعريف. ليكن f و g عنصرين من $\mathcal{W}$، عندئذ أيّاً كانت x من $\mathbb{R}$ فإنّ التابع $t \mapsto f(x-t)g(t)$ ينتمي إلى الصف $\mathcal{R}^{\text{loc}}$ على $\mathbb{R}$، وهذا يتيح لنا تعريف التابع $f * g$ كما يأتي:

$$f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

وعندئذ يكون $f * g$ تابعاً مستمراً، نسمّيه **جداء التلافّ** للتابعين f و g. ونتيقّن بسهولة أنّ $f * g = g * f$.

الإثبات

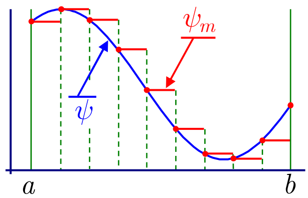
نحتاج في هذا الإثبات إلى التوطئتين الآتيتين.

التوطئة 1. ليكن $\psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ تابعاً مستمرّاً، عندئذ تتقارب متتالية التوابع $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ المعرّفة على $[a,b]$ بالصيغة

$$\psi_m(x) = \psi\left(a + \frac{b-a}{m}\left\lfloor m\frac{x-a}{b-a}\right\rfloor\right)$$

بانتظام من التابع ψ.

إثبات التوطئة 1. لنرمز بالرمز δ_m إلى المقدار $\dfrac{b-a}{m}$. ولنلاحظ أنّه في حالة x من المجال $\left[a+k\delta_m, a+(k+1)\delta_m\right[$ حيث $0 \le k < m$ لدينا $\psi_m(x) = \psi(a+k\delta_m)$.



ليكن ε عدداً موجباً تماماً. عندئذ نستنتج من الاستمرار المنتظم للتابع ψ على $[a,b]$ أنّه يوجد عددٌ موجبٌ تماماً η_ε يُحقّق

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2,\quad \left|x-y\right| < \eta_\varepsilon \Rightarrow \left|\psi(x)-\psi(y)\right| < \varepsilon$$

وعليه، إذا اخترنا $m_0 = 1 + \lfloor (b-a)/\eta_\varepsilon \rfloor$ تحقّق الاقتضاء $m \ge m_0 \Rightarrow \delta_m < \eta_\varepsilon$.

لنفترض إذن أنّ $m \ge m_0$، ولنتأمّل x من $[a,b[$، عندئذ باختيار $k_x = \left\lfloor (x-a)/\delta_m \right\rfloor$ يكون لدينا

$$a + k_x\delta_m \le x < a + (k_x+1)\delta_m$$

أو $\left|x-(a+k_x\delta_m)\right| < \delta_m < \eta_\varepsilon$ ومن ثَمّ

$$\left|\psi(x)-\psi_m(x)\right| = \left|\psi(x)-\psi(a+k_x\delta_m)\right| < \varepsilon$$

وهذا صحيح في حالة $x = b$ أيضاً. إذن

$$m \ge m_0 \Rightarrow \sup_{[a,b]}\left|\psi-\psi_m\right| \le \varepsilon$$

وبذا يكتمل إثبات التوطئة 1. ❐

التوطئة 2. ليكن $h:[a,b]\to\mathbb{C}$ تابعاً من الصف $\mathcal{R}$، وليكن ε عدداً موجباً تماماً. عندئذ يوجد عددٌ n من $\mathbb{N}^*$، ومتتالية منتهية $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_n\cup\{0\}}$ وتابعٌ $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ بحيث تتحقّق الخواص الآتية:

① $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

② يأخذ التابع φ قيمةً ثابتةً، ولتكن λ_i، على $]x_{i-1},x_i[$ حيث i من $\mathbb{N}_n$.

③ تتحقّق المتراجحة $\sup\limits_{[a,b]}|h-\varphi|<\varepsilon$.

إثبات التوطئة 2. استناداً إلى تعريف التوابع من الصف $\mathcal{R}$، يوجد تابع $\tilde{h}$ مستمرٌّ قِطَعيّاً على $[a,b]$ يُحقّق $\sup\limits_{[a,b]}\left|h-\tilde{h}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. توجد إذن متتالية منتهية $(t_j)_{j\in\mathbb{N}_p\cup\{0\}}$ تحقّق

❶ $a=t_0<t_1<\cdots<t_p=b$.

❷ في حالة i من $\mathbb{N}_p$. يقبل مقصور التابع $\tilde{h}$ على $]t_{i-1},t_i[$ التمديد إلى تابع مستمرٍّ على $[t_{i-1},t_i]$، نرمز إليه بالرمز $\tilde{h}_i$ مثلاً.

لمّا كان $\tilde{h}_i$ مستمرّاً على $[t_{i-1},t_i]$ استنتجنا من التوطئة 1. أنّ متتالية التوابع $(\tilde{h}_{i,m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ المعرّفة بالصيغة

$$\tilde{h}_{i,m}(x)=\tilde{h}_i\left(t_{i-1}+\frac{t_i-t_{i-1}}{m}\left\lfloor m\frac{x-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right\rfloor\right)$$

تتقارب بانتظام على $[t_{i-1},t_i]$ من التابع $\tilde{h}_i$. نختار إذن العدد m_i ليتحقّق الشرط

$$\sup_{[t_{i-1},t_i]}\left|\tilde{h}_i-\tilde{h}_{i,m_i}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

عندئذ نعرّف المتتالية المتزايدة تماماً $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_n\cup\{0\}}$ بالمساواة

$$\{x_k:0\le k\le n\}=\{b\}\cup\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_p}\left\{t_{i-1}+\tfrac{j}{m_i}(t_i-t_{i-1}):0\le j<m_i\right\}\right)$$

ونعرّف $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ بوضع $\varphi(x_k)=h(x_k)$ في حالة $0\le k\le n$، ووضع $\varphi(x)=\tilde{h}_{i,m_i}(x)=\tilde{h}_{i,m_i}\left(t_{i-1}+\frac{j}{m_i}(t_i-t_{i-1})\right)$ في حالة $x_k<x<x_{k+1}$ و $x_k=t_{i-1}+\frac{j}{m_i}(t_i-t_{i-1})$.

عندئذ نتيقّن مباشرة أنّ التابع φ يُحقّق الخواص ① و ② و ③ المطلوبة. ❐

إثبات المبرهنة 1-6.

لنبرهن استمرار التابع $f * g$ على كلّ مجال من النمط $[0, A]$ مع A من $\mathbb{R}_+^*$، وهذا كافٍ لإثبات استمرار التابع $f * g$ على كامل $\mathbb{R}$ لأنّ $f * g$ صفري على $\mathbb{R}_-$.

ليكن $I = [0, A]$ و A من $\mathbb{R}_+^*$. لمّا كان المقصور $g_{|I}$ ينتمي إلى الصف $\mathcal{R}$ استنتجنا، بناءً على التوطئة 2، أنّه يوجد في حالة $\varepsilon = 2^{-m}$ عددٌ n_m ينتمي إلى $\mathbb{N}^*$، وتوجد متتالية منتهية $(x_k^{(m)})_{k\in\mathbb{N}_{n_m}\cup\{0\}}$ وتابعٌ $\varphi_m : I \to \mathbb{C}$ بحيث تتحقّق الخواص الآتية :

① $0 = x_0^{(m)} < x_1^{(m)} < \cdots < x_{n_m}^{(m)} = A$.

② يأخذ التابع φ_m قيمةً ثابتةً، ولتكن $\lambda_i^{(m)}$، على $\left]x_{i-1}^{(m)}, x_i^{(m)}\right[$ عندما i من $\mathbb{N}_{n_m}$.

③ تتحقّق المتراجحة $\sup_I |g - \varphi_m| < 2^{-m}$.

لنعرّف إذن h_m على I بالصيغة

$$\forall x \in I,\ \ h_m(x) = \int_0^x f(x-t)\varphi_m(t)\,\mathrm{d}\,t$$

ولنلاحظ ما يأتي :

- يمكن حساب h_m بأسلوب بسيط بدلالة تابعٍ أصلي F للتابع f، وهو موجود لأنّ التابع f ينتمي إلى الصف $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}$. في الحقيقة:

$$\begin{aligned}
\forall x \in I, h_m(x) &= \int_0^A f(x-t)\varphi_m(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \sum_{i=0}^{n_m-1} \lambda_i^{(m)} \int_{x_i^{(m)}}^{x_{i+1}^{(m)}} f(x-t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \sum_{i=0}^{n_m-1} \lambda_i^{(m)} \int_{x-x_{i+1}^{(m)}}^{x-x_i^{(m)}} f(u)\,\mathrm{d}\,u \\
&= \sum_{i=0}^{n_m-1} \lambda_i^{(m)} \left(F(x-x_i^{(m)}) - F(x-x_{i+1}^{(m)}) \right)
\end{aligned}$$

وهذا يبرهن أنّ التابع h_m تابعٌ مستمرٌّ على I.

- كما نلاحظ أنّه في حالة x من I و m من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned}
\left|h_m(x) - f * g(x)\right| &= \left|\int_0^x f(x-t)\big(\varphi_m(t) - g(t)\big)\,\mathrm{d}\,t\right| \\
&\le \int_0^x \left|f(x-t)\right|\left|\varphi_m(t) - g(t)\right|\mathrm{d}\,t \\
&\le \sup_{[0,x]}\left|\varphi_m - g\right| \cdot \int_0^x \left|f(u)\right|\mathrm{d}\,u \\
&\le 2^{-m} \cdot \int_0^A \left|f(u)\right|\mathrm{d}\,u
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \sup_I\left|h_m - f * g\right| \le 2^{-m} \cdot \int_0^A \left|f(u)\right|\mathrm{d}\,u$$

وهذا يبرهن التقارب المنتظم على I لمتتالية التوابع المستمرّة $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ من التابع $f * g_{|I}$، فهو إذن تابعٌ مستمرٌّ على I. ❐

1-7. **مبرهنة**. ليكن f و g من $\mathcal{W}$، عندئذ ينتمي $f * g$ إلى الفضاء $\mathcal{W}$، ويحقِّق

$$\sigma(f * g) \le \max(\sigma(f), \sigma(g))$$

الإثبات

ليكن $\alpha > \max(\sigma(f), \sigma(g))$، وليكن β عدداً يُحقّق

$$\max(\sigma(f), \sigma(g)) < \beta < \alpha$$

عندئذ هناك عددان حقيقيّان موجبان تماماً M و T يُحقّقان

$$t \ge T \Rightarrow \begin{cases} |f(t)| \le M e^{\beta t} \\ |g(t)| \le M e^{\beta t} \end{cases}$$

وينجم عن ذلك تقارب التكاملين:

$$I_g = \int_0^{+\infty} |g(t)| e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}\,t \quad \text{و} \quad I_f = \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}\,t$$

ليكن $x > 2T$، عندئذ، بملاحظة أنّ

$$\begin{aligned} f*g(x) &= \int_0^{x-T} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x-T}^{x} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{x-T} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{T} f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

نجد

$$\begin{aligned} |f*g(x)| &\le \int_0^{x-T} |f(x-t)||g(t)|\mathrm{d}t + \int_0^{T} |f(t)||g(x-t)|\mathrm{d}t \\ &\le \int_0^{x-T} Me^{\beta(x-t)}|g(t)|\mathrm{d}t + \int_0^{T} |f(t)|Me^{\beta(x-t)}\,\mathrm{d}t \\ &\le M\,e^{\alpha x}\left(\int_0^{x-T} |g(t)|e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{T} |f(t)|e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &\le M\,(I_f + I_g)e^{\alpha x} \end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ أنّ $f*g$ ينتمي إلى $\mathcal{W}$، وأنّ $\sigma(f*g) \le \alpha$، أيّاً كانت قيمة α أكبر تماماً من $\max(\sigma(f),\sigma(g))$. بذا نكون قد أثبتنا صحّة المتراجحة المطلوبة. ❐

2. تحويلات لابلاس

أيّاً كانت σ من $\mathbb{R}$، رمزنا $\mathbb{P}_\sigma$ للدلالة على **نصف المستوي** $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > \sigma\}$، ونكتب أيضاً $\overline{\mathbb{P}}_\sigma$ للدلالة على المجموعة $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \ge \sigma\}$.

2-1. **مبرهنة وتعريف**. ليكن f من $\mathcal{W}$، عندئذ مهما تكن p من $\mathbb{P}_{\sigma(f)}$، يكن التكامل

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

متقارباً بالإطلاق. وعندئذ نسمّي التابع

$$\mathcal{L}(f) : \mathbb{P}_{\sigma(f)} \to \mathbb{C}, \quad p \mapsto F(p)$$

تحويل لابلاس للتابع f، ونسمّي التابع f تابع الأصل للتابع $\mathcal{L}(f)$.

الإثبات

لتكن $p=\mu+\mathrm{i}\,\nu$ من $\mathbb{P}_{\sigma(f)}$، عندئذ يكون $\sigma(f)<\mu$، ولتكن α من $]\sigma(f),\mu[$. يوجد، استناداً إلى تعريف $\sigma(f)$، عددان موجبان تماماً T و M يُحقّقان

$$\forall t\geq T,\quad |f(t)|\leq Me^{\alpha t}$$

وعندئذ

$$\forall t\geq T,\quad \left|f(t)\cdot e^{-pt}\right|\leq Me^{-(\mu-\alpha)t}$$

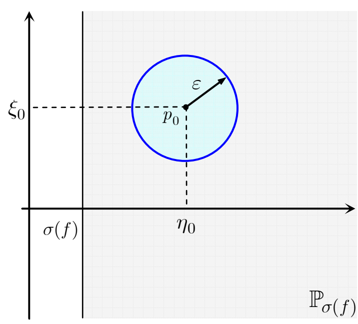
وعليه يكون التكامل $\int_T^{\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ متقارباً بالإطلاق لأنّ التكامل $\int_T^{\infty} e^{(\mu-\alpha)t}\,\mathrm{d}t$ متقارب. ونصل إلى النتيجة المطلوبة بمُلاحظة أنّ التكامل $\int_0^{T}\left|f(t)e^{-pt}\right|\mathrm{d}t$ ليس تكاملاً معتلاً. ❐

2-2. مبرهنة. ليكن f من $\mathcal{W}$، وليكن $\mathcal{L}(f)$ تحويل لابلاس للتابع f. عندئذ يكون التابع $\mathcal{L}(f)$ تابعاً هولومورفيّاً في نصف المستوي $\mathbb{P}_{\sigma(f)}$. ويكون

$$\forall m\in\mathbb{N},\quad (\mathcal{L}(f))^{(m)}=(-1)^m\mathcal{L}(X^m f)$$

الإثبات

لتكن $p_0=\eta_0+\mathrm{i}\,\xi_0$ من $\mathbb{P}_{\sigma(f)}$ ولنعرّف $\varepsilon=\frac{1}{2}(\eta_0-\sigma(f))>0$. عندئذ يكون القرص المفتوح $D(p_0,\varepsilon)$ الذي مركزه p_0 ونصف قطره ε محتوى في $\mathbb{P}_{\sigma(f)}$.



ثُمَّ لنعرّف، في حالة p من $D(p_0,\varepsilon)$، المقدار

$$\Delta(p)=\mathcal{L}(f)(p)-\mathcal{L}(f)(p_0)+(p-p_0)\mathcal{L}(Xf)(p_0)$$

عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned}\Delta(p) &= \int_0^\infty \left(e^{-pt} - e^{-p_0 t} + (p - p_0)\, t e^{-p_0 t}\right) f(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^\infty \Big(e^{(p_0-p)t} - 1 - (p - p_0)\, t\Big) f(t)\, e^{-p_0 t}\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

وبالاستفادة من المتراجحة المعروفة:

$$\forall z \in \mathbb{C},\quad \left|e^z - 1 - z\right| \le \frac{|z|^2}{2} e^{|z|}$$

نستنتج أنّه، مهما تكن p من $D(p_0,\varepsilon)$ ، يكن

$$\begin{aligned}|\Delta(p)| &\le \int_0^\infty \frac{1}{2}|p_0 - p|^2\, t^2 \exp(|p_0 - p|t)|f(t)|e^{-\eta_0 t}\,\mathrm{d}\,t \\ &\le \frac{1}{2}|p_0 - p|^2 \int_0^\infty t^2 e^{\varepsilon t}\,|f(t)|e^{-\eta_0 t}\,\mathrm{d}\,t \\ &\le |p_0 - p|^2 \times \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^\infty t^2\,|f(t)|\,e^{-(\sigma(f)+\varepsilon)t}\,\mathrm{d}\,t}_{M} = M|p_0 - p|^2\end{aligned}$$

وقد استفدنا من كوْن $\sigma(X^2 f) = \sigma(f)$ لنستنتج تقارب التكامل الذي يعرّف M . وهكذا نرى أنّ $0 = \lim\limits_{\substack{p\to p_0\\ p\neq p_0}} \dfrac{\Delta(p)}{p - p_0}$ ، وهذا يُكافئ

$$\lim_{\substack{p\to p_0\\ p\neq p_0}} \frac{\mathcal{L}(f)(p) - \mathcal{L}(f)(p_0)}{p - p_0} = -\mathcal{L}(Xf)(p_0)$$

وعلى هذا فالتابع $\mathcal{L}(f)$ قابل للاشتقاق عند p_0 ، ومشتقُّه $-\mathcal{L}(Xf)(p_0)$. ولكنّ p_0 عددٌ كيفيّ من نصف المستوي $\mathbb{P}_{\sigma(f)}$ إذن التابع $\mathcal{L}(f)$ هولومورفي في $\mathbb{P}_{\sigma(f)}$ ومشتقُّه $-\mathcal{L}(Xf)$.

ثُمّ نبرهن بالتدريج على m من $\mathbb{N}$ أنّ

$$(\mathcal{L}(f))^{(m)} = (-1)^m \mathcal{L}(X^m f)$$

فيتم إثبات المطلوب. ❐

3-2. أمثلة

❖ ليكن H تابع Heaviside عندئذ، أيّاً كان p من $\mathbb{P}_0$، كان

$$\mathcal{L}(H)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{p}$$

❖ وبالاستفادة من المبرهنة السابقة نجد أنّه، مهما تكن p من $\mathbb{P}_0$، ومهما تكن m من $\mathbb{N}$، يكن

$$\mathcal{L}(X^m H)(p) = (-1)^m \left(\frac{1}{p}\right)^{(m)} = \frac{m\,!}{p^{m+1}}$$

❖ لتكن α من $\mathbb{C}$، وليكن $\mathcal{E}^{[\alpha]} : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{\alpha t}$. عندئذ ينتمي $H\mathcal{E}^{[\alpha]}$ إلى الفضاء $\mathcal{W}$، ويكون $\sigma(H\mathcal{E}^{[\alpha]}) = \mathrm{Re}(\alpha)$. ومهما تكن p من $\mathbb{P}_{\mathrm{Re}(\alpha)}$، فإنّ

$$\mathcal{L}(H\mathcal{E}^{[\alpha]})(p) = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-p)t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{p-\alpha}$$

❖ ومن جديد نجد، مهما تكن p من $\mathbb{P}_{\mathrm{Re}(\alpha)}$، ومهما تكن m من $\mathbb{N}$، يكن

$$\mathcal{L}(H\,X^m\mathcal{E}^{[\alpha]})(p) = \frac{m\,!}{(p-\alpha)^{m+1}}$$

❖ لتكن α من $\mathbb{C}$، وليكن $\mathrm{ch}^{[\alpha]} : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto \mathrm{ch}(\alpha t)$. عندئذ ينتمي $H\,\mathrm{ch}^{[\alpha]}$ إلى الفضاء $\mathcal{W}$، ويكون $\sigma(H\,\mathrm{ch}^{[\alpha]}) = |\mathrm{Re}(\alpha)|$. ومهما تكن p من $\mathbb{P}_{|\mathrm{Re}(\alpha)|}$، فإنّ

$$\mathcal{L}(H\,\mathrm{ch}^{[\alpha]})(p) = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{L}(H\mathcal{E}^{[\alpha]}) + \mathcal{L}(H\mathcal{E}^{[-\alpha]})\Big)(\,p\,) = \frac{p}{p^2-\alpha^2}$$

❖ لتكن α من $\mathbb{C}$، وليكن $\mathrm{sh}^{[\alpha]} : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto \mathrm{sh}(\alpha t)$. عندئذ ينتمي $H\,\mathrm{sh}^{[\alpha]}$ إلى الفضاء $\mathcal{W}$، ويكون $\sigma(H\,\mathrm{sh}^{[\alpha]}) = |\mathrm{Re}(\alpha)|$. ومهما تكن p من $\mathbb{P}_{|\mathrm{Re}(\alpha)|}$، فإنّ

$$\mathcal{L}(H\,\mathrm{sh}^{[\alpha]})(p) = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{L}(H\mathcal{E}^{[\alpha]}) - \mathcal{L}(H\mathcal{E}^{[-\alpha]})\Big)(\,p\,) = \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$$

❖ لتكن α من $\mathbb{C}$، وليكن $\cos^{[\alpha]} : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto \cos(\alpha t)$. عندئذ ينتمي $H\cos^{[\alpha]}$ إلى الفضاء $\mathcal{W}$، ويكون $\sigma(H\cos^{[\alpha]}) = |\mathrm{Im}(\alpha)|$. ومهما تكن p من $\mathbb{P}_{|\mathrm{Im}(\alpha)|}$، فإنّ

$$\mathcal{L}(H\cos^{[\alpha]})(p) = \mathcal{L}(H\,\mathrm{ch}^{[\mathrm{i}\,\alpha]})(p) = \frac{p}{p^2+\alpha^2}$$

❖ لتكن α من $\mathbb{C}$، وليكن $\sin^{[\alpha]} : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto \sin(\alpha t)$. عندئذ ينتمي $H\sin^{[\alpha]}$ إلى الفضاء $\mathcal{W}$، ويكون $\sigma(H\sin^{[\alpha]}) = |\mathrm{Im}(\alpha)|$. ومهما تكن p من $\mathbb{P}_{|\mathrm{Im}(\alpha)|}$، فإنّ

$$\mathcal{L}(H\sin^{[\alpha]})(p) = \frac{1}{\mathrm{i}}\mathcal{L}(H\,\mathrm{sh}^{[\mathrm{i}\,\alpha]})(p) = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$$

3. خواص تحويلات لابلاس

تلخّص المبرهنة الآتية بعض الخواص البسيطة لتحويلات لابلاس.

3-1. مبرهنة

① ليكن f و g عنصرين من $\mathcal{W}$، ولتكن λ من $\mathbb{C}$. عندئذ

$$\forall p \in \mathbb{P}_{\max(\sigma(f),\sigma(g))},\quad \mathcal{L}(\lambda f+g)(p) = \lambda\mathcal{L}(f)(p) + \mathcal{L}(g)(p)$$

② ليكن f عنصراً من $\mathcal{W}$، ولتكن α من $\mathbb{R}_+^*$. نعرّف التابع $f^{[\alpha]}$ على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f^{[\alpha]}(t) = f(\alpha t)$. فينتمي $f^{[\alpha]}$ إلى $\mathcal{W}$ ويحقّق $\sigma(f^{[\alpha]}) = \alpha\sigma(f)$، ويكون

$$\forall p \in \mathbb{P}_{\alpha\sigma(f)},\quad \mathcal{L}(f^{[\alpha]})(p) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}(f)\Big(\frac{p}{\alpha}\Big)$$

③ ليكن f عنصراً من $\mathcal{W}$، ولتكن τ من $\mathbb{R}_+^*$. نعرّف التابع f_τ على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f_\tau(t) = f(t-\tau)$. عندئذ يكون f_τ عنصراً من $\mathcal{W}$ يُحقّق $\sigma(f_\tau) = \sigma(f)$، و

$$\forall p \in \mathbb{P}_{\sigma(f)},\quad \mathcal{L}(f_\tau)(p) = e^{-p\tau}\mathcal{L}(f)(p)$$

④ ليكن f عنصراً من $\mathcal{W}$، ولتكن ω من $\mathbb{C}$، و $\mathcal{E}^{[\omega]} : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{\omega t}$. عندئذ يكون $\mathcal{E}^{[\omega]} f$ عنصراً من $\mathcal{W}$ يُحقّق $\sigma(\mathcal{E}^{[\omega]}f) = \sigma(f) + \mathrm{Re}(\omega)$، ويكون

$$\forall p \in \mathbb{P}_{\sigma(f)+\mathrm{Re}(\omega)},\quad \mathcal{L}(\mathcal{E}^{[\omega]}f)(p) = \mathcal{L}(f)(p-\omega)$$

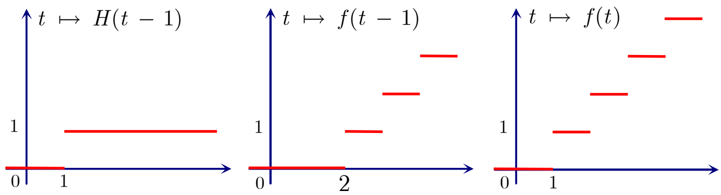
الإثبات

الإثبات بسيط ومباشر انطلاقاً من التعريف، نترك تفاصيله تمريناً للقارئ. ❐

2-3. مثال. ليكن $E:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto E(x)=\lfloor x\rfloor$ تابع الجزء الصحيح، عندئذ من الواضح أنّ التابع $f=H\cdot E$ ينتمي إلى فضاء توابع الأصل $\mathcal{W}$ وأنّ $\sigma(f)=0$. والمطلوب هو حساب تحويل لابلاس للتابع f. وهنا نلاحظ أنّ

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad f(t)=H(t-1)+f(t-1)$$

كما يوضّح الشكل الآتي:



فإذا استخدمنا رموز المبرهنة السابقة كتبنا $f=H_1+f_1$. وعلى هذا يكون

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(p)&=\mathcal{L}(f_1)(p)+\mathcal{L}(H_1)(p)\\&=e^{-p}\mathcal{L}(f)(p)+e^{-p}\mathcal{L}(H)(p)\\&=e^{-p}\mathcal{L}(f)(p)+\frac{e^{-p}}{p}\end{aligned}$$

ومنه نجد

$$\forall p\in\mathbb{P}_0,\quad \mathcal{L}(f)(p)=\frac{1}{p(e^p-1)}$$

3-3. مبرهنة. ليكن f من $\mathcal{W}$. ولنفترض أنّ f قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$، وأنّ المشتق f' ينتمي إلى فضاء توابع الأصل $\mathcal{W}$. عندئذ

$$\forall p\in\mathbb{P}_{\max(\sigma(f),\sigma(f'))},\quad \mathcal{L}(f')(p)=p\,\mathcal{L}(f)(p)-f(0^+)$$

حيث $f(0^+)=\lim\limits_{\substack{>\\ t\to 0}} f(t)$.

الإثبات

تنتج هذه النتيجة من مُكاملة بالتجزئة. في الحقيقة، لتكن $p = \eta + \mathrm{i}\,\xi$ ، تُحقّق المتراجحة $\max(\sigma(f), \sigma(f')) < \eta$. عندئذ، أيّاً كانت (ε, A) من $\mathbb{R}_+^{*2}$ ، فلدينا

$$\int_{\varepsilon}^{A} f'(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t = f(A)e^{-pA} - f(\varepsilon)e^{-p\varepsilon} + p\cdot\int_{\varepsilon}^{A} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t \tag{1}$$

ولكن، من جهة أولى، لدينا

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} f(\varepsilon)e^{-p\varepsilon} = f(0^+)$$

ومن جهة ثانية، نختار β تُحقّق $\max(\sigma(f), \sigma(f')) < \beta < \eta$ فنجد عددين T و M موجبين تماماً يُحقّقان

$$t \geq T \Rightarrow |f(t)| \leq M\,e^{\beta t}$$

وعندئذ

$$t \geq T \Rightarrow \left|f(t)e^{-pt}\right| \leq M\,e^{-(\eta-\beta)t}$$

ومن ثَمّ

$$\lim_{A\to+\infty} f(A)e^{-pA} = 0$$

وبجعل ε تسعى إلى 0، و A تسعى إلى $+\infty$ في العلاقة (1)، نجد

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\cdot\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$$

وهي النتيجة المطلوبة. ❐

4-3. ملاحظة. لتكن α من $\mathbb{R}$، ولنتأمّل التابع $h_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّف كما يأتي :

$$h_\alpha(t) = \begin{cases} 0 & : \ t < 0 \\ \cos(e^{\alpha t}) & : \ t \geq 0 \end{cases}$$

فنلاحظ من جهة أولى أنّ h_α ينتمي إلى $\mathcal{W}$، وأنّ $\sigma(h_\alpha) = 0$.

ومن جهة ثانية، لدينا على $\mathbb{R}^*$:

$$h'_\alpha(t) = \begin{cases} 0 & : \ t < 0 \\ -e^{\alpha t}\sin(e^{\alpha t}) & : \ t > 0 \end{cases}$$

ومن ثَمّ ينتمي h'_α إلى $\mathcal{W}$، وفاصلة تزايده معطاة بالعلاقة الآتية، التي نترك للقارئ إثبات صحتها:

$$\sigma(h'_\alpha) = \begin{cases} \alpha & : \quad \alpha \geq 0 \\ 2\alpha & : \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

وهكذا نرى، على سبيل المثال، أنّ $\sigma(h'_1) > \sigma(h_1)$ و $\sigma(h'_{-1}) < \sigma(h_{-1})$.

لذلك، فإنّه من الطبيعي أن نشترط انتماء p إلى المجموعة $\mathbb{P}_{\max(\sigma(f),\sigma(f'))}$ لتحقُّق العلاقة الواردة في المبرهنة السابقة.

ومن جهة أخرى، يمكن أن ينتمي تابع قابل للاشتقاق إلى $\mathcal{W}$، دون أن ينتمي مشتقُّه إلى $\mathcal{W}$، كما يبيِّن ذلك مثال التابع $t \mapsto H(t)\cos(e^{t^2})$.

يمكن تعميم نتيجة المبرهنة السابقة، بالتدريج، كما يأتي.

3-5. مبرهنة. ليكن التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$، ولنفترض أنّه قابل للاشتقاق n مرّة على $\mathbb{R}^*$، وأنّ التوابع $\left(f^{(k)}\right)_{0\leq k\leq n}$ تنتمي إلى الفضاء $\mathcal{W}$. ولتكن $\sigma = \max\limits_{0\leq k\leq n} \sigma(f^{(k)})$، عندئذ

$$\forall p \in \mathbb{P}_\sigma, \quad \mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n\,\mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0^+)$$

حيث

$$f^{(k)}(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f^{(k)}(t)$$
في حالة $0 \leq k < n$.

3-6. مبرهنة. ليكن التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$، ولنفترض أنّ f ينتمي إلى فضاء توابع الأصل $\mathcal{W}$. ولنعرّف

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}\,u$$

عندئذ ينتمي F إلى $\mathcal{W}$ ويكون $\sigma(F) \leq \max(\sigma(f), 0)$. وكذلك يكون لدينا

$$\forall p \in \mathbb{P}_{\max(\sigma(f),0)}, \quad \mathcal{L}(F)(p) = \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{p}$$

الإثبات

نلاحظ أنّ $F = H * f$، وهذا يُثبت انتماء F إلى $\mathcal{W}$، وصحّة الخاصّة

$$\sigma(F) \leq \max(\sigma(f), 0)$$

بناءً على المبرهنة 1-7. فإذا افترضنا أنّ f مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+^*$ كان $F' = f$ و $F(0) = 0$، ومن ثَمّ استنتجنا، بمُقتضى المبرهنة 3-4. أنّ

$$\forall p \in \mathbb{P}_{\max(\sigma(f),0)}, \quad \mathcal{L}(f)(p) = p\,\mathcal{L}(F)(p)$$

أمّا الحالة العامة فتنتج من المبرهنة الآتية. ❐

في الحقيقة، إنّ النتيجة السابقة حالة خاصّة من المبرهنة الآتية، وهي المبرهنة الأساسيّة التي تقف وراء الدور المهم والأساسي الذي تؤدّيه التحويلات التكامليّة بوجه عام، وتحويل لابلاس بوجه خاص.

3-7. مبرهنة. ليكن f و g عنصرين من $\mathcal{W}$. عندئذ

$$\forall p \in \mathbb{P}_{\max(\sigma(f),\sigma(g))}, \quad \mathcal{L}(f * g)(p) = \mathcal{L}(f)(p) \cdot \mathcal{L}(g)(p)$$

الإثبات

لتكن p من $\mathbb{P}_{\max(\sigma(f),\sigma(g))}$ عندئذ

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f * g)(p) &= \int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}\,t \right) e^{-px}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_0^\infty \left(\int_t^\infty f(t)g(x-t)e^{-px}\,\mathrm{d}\,x \right) \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^\infty f(t)e^{-pt} \left(\int_t^\infty g(x-t)e^{-p(x-t)}\,\mathrm{d}\,x \right) \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^\infty f(t)e^{-pt} \left(\int_0^\infty g(u)e^{-pu}\,\mathrm{d}\,u \right) \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathcal{L}(g)(p)\,\mathrm{d}\,t = \mathcal{L}(f)(p) \cdot \mathcal{L}(g)(p)
\end{aligned}$$

وهذه هي النتيجة المطلوبة. ❐

8-3. مبرهنة القيمة النهائيّة. ليكن f عنصراً من $\mathcal{W}$، ولنفترض وجود النهاية $\lim\limits_{+\infty} f$. عندئذ يكون $\sigma(f) \leq 0$، ويكون لدينا $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{p\to 0, p\in\mathbb{R}_+^*} p\,\mathcal{L}(f)(p)$.

الإثبات

لأنّ النهاية $\lim\limits_{+\infty} f$ موجودة استنتجنا أنّ التابع f محدود في جوار اللانهاية، وهذا يقتضي أنّ $\sigma(f) \leq 0$. لنضع $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$، ولتكن $0 < \varepsilon$، عندئذ نجد عدداً $0 < T$ يُحقّق

$$t \geq T \Rightarrow |f(t) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

ثُمَّ لنضع بالتعريف

$$p_0 = \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{1}{1 + \int_0^T |f(t) - \ell|\,\mathrm{d}t} > 0 \tag{2}$$

بملاحظة أنّ $p\int_0^\infty e^{-pt}\,\mathrm{d}t = 1$، وذلك أيّاً كانت p من $\mathbb{R}_+^*$، نستنتج

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \quad p\mathcal{L}(f)(p) - \ell = p\int_0^\infty (f(t) - \ell)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

وبالاستفادة من (1) و (2) نجد، أياً كانت p من $]0, p_0[$ ما يلي :

$$\begin{aligned}
|p\mathcal{L}(f)(p) - \ell| &\leq p\int_0^T |f(t) - \ell|\,\mathrm{d}t + p\int_T^\infty |f(t) - \ell|e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&\leq p\int_0^T |f(t) - \ell|\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}p\int_T^\infty e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&\leq p_0\int_0^T |f(t) - \ell|\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}p\int_0^\infty e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\int_0^T |f(t) - \ell|\,\mathrm{d}t}{1 + \int_0^T |f(t) - \ell|\,\mathrm{d}t} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon
\end{aligned}$$

إذن لقد أثبتنا أنّه

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 > 0, \quad 0 < p < p_0 \Rightarrow |p\mathcal{L}(f)(p) - \ell| < \varepsilon$$

أي $\lim\limits_{p\to 0, p\in\mathbb{R}_+^*} p\mathcal{L}(f)(p) = \ell$ ، وهي النتيجة المطلوبة. ❐

3-9. مبرهنة القيمة الابتدائيّة. ليكن f عنصراً من $\mathcal{W}$، ولنفترض أنّ التابع f **محدودٌ**. عندئذ يكون لدينا

$$\lim_{p\to\infty, p\in\mathbb{R}} p\mathcal{L}(f)(p) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+)$$

الإثبات

لنضع $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \ell$، ولنعرّف $M = \sup_{\mathbb{R}}|f|$. ليكن $0 < \varepsilon$، عندئذ هناك عدد حقيقي $0 < \eta$ يُحقّق

$$0 < t \leq \eta \Rightarrow |f(t) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

ثُمّ نختار عدداً حقيقياً $0 < p_0$ يُحقّق الشرط

$$2M\, e^{-p_0\eta} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

ولمّا كان

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \quad p\mathcal{L}(f)(p) - \ell = p\int_0^\infty (f(t) - \ell)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

وجدنا، بالاستفادة من (1) و (2)، وأيّاً كانت $p_0 < p$:

$$\begin{aligned}
|p\mathcal{L}(f)(p) - \ell| &\leq p\int_0^\eta |f(t) - \ell|e^{-pt}\,\mathrm{d}t + p\int_\eta^\infty |f(t) - \ell|e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}p\int_0^\eta e^{-pt}\,\mathrm{d}t + 2M\,p\int_\eta^\infty e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}p\int_0^\infty e^{-pt}\,\mathrm{d}t + 2M\,e^{-p\eta} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M\,e^{-p_0\eta} < \varepsilon
\end{aligned}$$

إذن لقد أثبتنا أنّه

$$\forall\varepsilon > 0, \exists p_0 > 0, \quad p_0 < p \Rightarrow |p\mathcal{L}(f)(p) - \ell| < \varepsilon$$

أي $\lim_{p\to\infty, p\in\mathbb{R}} p\mathcal{L}(f)(p) = \ell$، وهي النتيجة المطلوبة. ❐

10-3. مبرهنة. لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متسلسلة صحيحة، نصف قطر تقاربها $0 < R$. عندئذ يكون نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ مساوياً $+\infty$ ، وينتمي التابع

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad f(t) = H(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

إلى فضاء توابع الأصل $\mathcal{W}$ ، ويُحقِّق تحويل لابلاس لهذا التابع العلاقة الآتية:

$$\forall p \in \mathbb{P}_{1/R}, \quad \mathcal{L}(f)(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}}$$

الإثبات

لتكن r من $]0, R[$. عندئذ تكون المتتالية $(a_n r^n)_{n \geq 0}$ محدودة، وهذا يتيح لنا أنّ نعرّف $M = \sup_{n \geq 0} |a_n r^n| \in \mathbb{R}_+^*$. وعلى هذا يكون

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{a_n}{n!} \right| \leq M \frac{(1/r)^n}{n!}$$

وهذا يُثبتُ أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة التي تعرّف التابع f يساوي $+\infty$. ومن جهة أخرى، نرى أنّ

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |f(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n!} \right| t^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{n!} \left(\frac{t}{r} \right)^n = M e^{t/r}$$

وهذا يُثبت أنّ f من $\mathcal{W}$ وأنّ $\sigma(f) \leq \frac{1}{r}$. ولكنّ هذه المتراجحة محقّقة أيّاً كانت r من $]0, R[$. إذن $\sigma(f) \leq \frac{1}{R}$.

لتكن p من $\mathbb{P}_{1/R}$. لمّا كانت المتسلسلة التي تعرّف f متقاربة بانتظام على كلِّ مجال مغلق ومحدود، استنتجنا

$$\forall T > 0, \quad \int_0^T f(t) e^{-pt} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{\frac{1}{n!} \int_0^T t^n e^{-pt} \, \mathrm{d}t}_{\psi_n(T)}$$

ولكن من جهة أولى لدينا

$$\lim_{T \to \infty} \psi_n(T) = \frac{1}{n!} \mathcal{L}(X^n H) = \frac{1}{p^{n+1}}$$

ومن جهة ثانية

$$|\psi_n(T)| \leq \frac{1}{n!}\int_0^\infty t^n e^{-\operatorname{Re}(p)t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{(\operatorname{Re}(p))^{n+1}}$$

وعلى هذا نجد أنّ المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\psi_n$ متقاربة بانتظام، بالنسبة إلى المتحوّل T، ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(p) &= \lim_{T\to\infty}\int_0^T f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t\\ &= \lim_{T\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\psi_n(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lim_{T\to\infty}\psi_n(T) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{n+1}}\end{aligned}$$

وبذا يتمّ الإثبات. ❐

11-3. مبرهنة. ليكن f من $\mathcal{W}$، ولنفترض أنّ f تابعٌ مستمرٌّ يحقّق الشرط $\mathcal{L}(f) \equiv 0$. عندئذ يكون التابع f صفرياً.

الإثبات

يحتاج الإثبات إلى بعض التمهيد تلخصه التوطئة الآتية.

توطئة : ليكن $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً يُحقّق الشرطين

- ❖ التكامل $\int_0^1 |g(t)|\mathrm{d}\,t$ متقارب.
- ❖ $\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_0^1 t^n g(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$.

عندئذ يكون التابع g معدوماً.

إثبات التوطئة. لنفترض جدلاً أنّ هناك a من $]0,1[$ يُحقّق $g(a) \neq 0$. يمكننا أن نفترض أنّ $g(a) > 0$، على أن نطبّق الدراسة اللاحقة على $-g$ بدلاً من g في حالة $g(a) < 0$.

ينتج من استمرار g عند a أنّه يوجد η من المجال $]0, \frac{1}{2}\min(a, 1-a)[$ يُحقّق

$$\forall x \in \left]a-2\eta, a+2\eta\right[,\quad \left|g(x)-g(a)\right| < \frac{g(a)}{2}$$

ولأنّ $g(x) \geq g(a) - \left|g(x)-g(a)\right|$، فإنّ المتراجحة السابقة تقتضي

$$\forall x \in \left]a-2\eta, a+2\eta\right[,\quad g(x) > \frac{g(a)}{2}$$

ثُمّ لنتأمّل التابع المستمرّ

$$h:[0{,}1]\to\mathbb{R},\ h(x)=\frac{g(a)}{2}\cdot\max\Big(\min(1{,}2-|x-a|/\eta),0\Big)$$

فنرى أنّ التابع h تابعٌ موجبٌ، معدوم خارج المجال $[a-2\eta,a+2\eta]$، ويساوي حدَّه الأعلى وهو $\dfrac{g(a)}{2}$ على المجال $[a-\eta,a+\eta]$.

بناءً على مبرهنة Weirstrass[2]، توجد متتالية من كثيرات الحدود $(P_n)_{n\geq 0}$ متقاربة بانتظام على المجال $[0,1]$ من التابع المستمر h. ولكن بمُقتضى الفرْض لدينا

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_0^1 P_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t=0$$

إذن

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\quad \left|\int_0^1 h(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^1 (h(t)-P_n(t))g(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leq \sup_{[0,1]}|h-P_n|\cdot\int_0^1|g(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

وبجعل n تسعى إلى اللانهاية نجد $\int_0^1 h(t)g(t)\,\mathrm{d}t=0$، ولكنّ التابع $t\mapsto h(t)g(t)$ تابع موجب، وهو أكبر من $\frac{1}{4}(g(a))^2$ على المجال $[a-\eta,a+\eta]$، إذن

$$\int_0^1 h(t)g(t)\,\mathrm{d}t\geq\int_{a-\eta}^{a+\eta} h(t)g(t)\,\mathrm{d}t\geq\eta\frac{(g(a))^2}{2}>0$$

وبهذا التناقض، يكتمل إثبات التوطئة. ❐

لنلاحظ أنّ نتيجة التوطئة السابقة تبقى صحيحة، في حالة تابع مستمرٍّ g يأخذ قيمه في $\mathbb{C}$، وتكامله على $]0{,}1[$ متقارب بالإطلاق، ويُحقِّق $\forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^1 t^n g(t)\,\mathrm{d}t=0$ ؛ إذ يكفي تطبيق التوطئة على كلٍّ من الجزأين الحقيقي والتخيّلي للتابع g.

[2] راجع بحث متتاليات ومتسلسلات التوابع في الجزء الثاني

إثبات المبرهنة 3-11.

نعلم أنّه توجد أعداد **موجبة تماماً** σ و M و T تُحقّق :

$$t \geq T \Rightarrow |f(t)| \leq M e^{\sigma t} \qquad (1)$$

لنعرّف التابع

$$g :]0,1] \to \mathbb{R}, \ u \mapsto u f\left(\frac{1}{\sigma}\ln\frac{1}{u}\right)$$

فنرى أنّ g تابع مستمرٌّ ويُحقِّق، بناءً على (1)، ما يلي :

$$0 < u \leq e^{-\sigma T} \Rightarrow \left|g(u)\right| \leq M$$

نستنتج من ذلك تقارب التكامل $\int_0^1 |g(u)|\,\mathrm{d}u$. ومن جهة أخرى، أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$، فلدينا

$$\int_0^1 u^n g(u)\,\mathrm{d}u \underset{u\mapsto e^{-\sigma t}}{=} -\sigma\int_0^{+\infty} e^{-\sigma(n+2)t} f(t)\,\mathrm{d}t = -\sigma\mathcal{L}(f)((n+2)\sigma) = 0$$

وبناءً على التوطئة، نستنتج، من ثَمّ، أنّ

$$\forall u \in]0,1], \quad g(u) = 0$$

وهذا يقتضي

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) = 0$$

أي إنّ التابع f صفري لأنه عنصر من $\mathcal{W}$. وبذا يتم الإثبات. ❐

3-12. نتيجة. ليكن f تابعاً من $\mathcal{W}$، ولنفترض أنّ f يحقّق الشرط $\mathcal{L}(f) \equiv 0$. عندئذ يكون التابع f معدوماً عند كلِّ نقطة من نقاط استمراره.

الإثبات

ليكن $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$، عندئذ يكون التابع F تابعاً مستمراً من $\mathcal{W}$ ويُحقِّق

$$\forall p \in \mathbb{P}_{\max(0,\sigma(f))}, \quad \mathcal{L}(F)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p) = 0$$

وعملاً بالمبرهنة السابقة نجد $F \equiv 0$، ونحصل على المطلوب بملاحظة أنّ $F'(x) = f(x)$ عند كلِّ نقطة استمرار x للتابع f . ❐

3-13. نتيجة. ليكن f و g تابعين مستمرّين من فضاء توابع الأصل $\mathcal{W}$، ولنفترض أنّ هناك عنصر ω من نصف المستوي $\mathbb{P}_{\max(\sigma(f),\sigma(g))}$، ومتتالية $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathbb{P}_{\max(\sigma(f),\sigma(g))}\backslash\{\omega\}$ متقاربة من ω وتُحقّق

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}(f)(\omega_n) = \mathcal{L}(g)(\omega_n)$$

عندئذ يكون $f = g$.

الإثبات

لنضع $h = f - g$. عندئذ تكون حدود المتتالية $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أصفاراً للتابع التحليليّ $\mathcal{L}(h)$ المعرّف على المجموعة المفتوحة المترابطة $\mathbb{P}_{\sigma(h)}$. واستناداً إلى الفرْض ليست هذه الأصفار أصفاراً معزولة لهذا التابع. إذن لا بُدّ أن يكون $\mathcal{L}(h) \equiv 0$، وعليه $h = 0$. ❐

3-14. مثال. لنتأمّل **تابع بِسِل** Bessel من النوع الأوّل والمرتبة 0 المعرّف بالصيغة:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\mathrm{i}\,x\cos t}\,\mathrm{d}\,t$$

لتكن x من $\mathbb{R}$، لمّا كانت متسلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\,x)^n}{n\,!}\cos^n(\cdot)$ متقاربة بانتظام أمكننا أن نكتبَ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\mathrm{i}\,x\cos t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\,x)^n}{n\,!}\int_0^\pi \cos^n(t)\,\mathrm{d}\,t$$

ولكن $\int_0^\pi \cos^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$ و $\int_0^\pi \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}\,t = \pi\frac{(2n)\,!}{2^{2n}(n\,!)^2}$ إذن

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n\,!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

وبالاستفادة من المبرهنة 3-10. نرى أنّ تحويل لابلاس للتابع HJ_0 يُحقّق العلاقة

$$\mathcal{L}(HJ_0)(p) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}C_{2n}^n\frac{1}{p^{2n+1}} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+1/p^2}} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$$

في حالة $p \in \left]1,+\infty\right[$. وبالتمديد التحليلي تبقى هذه المساواة صحيحة في حالة p من $\mathbb{P}_1$.

نستنتج، بالاستفادة من المبرهنة 3-7. أنّه في حالة p من $\mathbb{P}_1$

$$\mathcal{L}((HJ_0)*(HJ_0))(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\times\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{1}{p^2+1}=\mathcal{L}(H\sin)(p)$$

وبناءً على النتيجة 3-13. نجد $(HJ_0)*(HJ_0)=H\sin$.

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ التابع J_0 يُحقِّق المساواة التابعيّة الآتية:

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \sin x=\int_0^x J_0(t)J_0(x-t)\,\mathrm{d}t$$

4. بعض تطبيقات تحويلات لابلاس

سنبيِّن في هذه الفقرة، بدراسة بعض الأمثلة، كيف يمكن الاستفادة من تحويلات لابلاس في حلِّ بعض أنواع المعادلات التفاضليّة.

① المطلوب هو إيجاد حلِّ المعادلة التفاضليّة $y'-5y=1$ الذي يُحقِّق شرط البدء $y(0)=2$.

لنفترض أنّ Hy و Hy' ينتميان إلى الفضاء $\mathcal{W}$، ولنعرّف $Y=\mathcal{L}(Hy)$. عندئذ بالاستفادة من المبرهنة 3-3. نجد أنّ

$$\mathcal{L}(Hy')(p)=pY(p)-2$$

ولأنّ y هو حلٌّ للمعادلة التفاضليّة يكون

$$\mathcal{L}(Hy')(p)=\mathcal{L}(5Hy+H)(p)=5Y(p)+\frac{1}{p}$$

إذن

$$pY(p)-2=5Y(p)+\frac{1}{p}$$

وبحل هذه المعادلة الجبريّة نجد

$$Y(p)=\frac{1}{p-5}\left(2+\frac{1}{p}\right)=\frac{2p+1}{p(p-5)}$$

ثُمّ نحلِّل الكسر الموجود في الطرف الأيمن من المساواة السابقة إلى عناصر بسيطة فجد

$$Y(p)=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p}+\frac{11}{5}\cdot\frac{1}{p-5}$$

وأخيراً نستفيد من نتائج الأمثلة 2-3. لنرى أنّ

$$Y(p) = \mathcal{L}\Big(H\Big(-\frac{1}{5} + \frac{11}{5}\mathcal{E}^{[5]}\Big)\Big)(p)$$

وبناءً على المبرهنة 3-13. نجد $y(t) = -\frac{1}{5} + \frac{11}{5}e^{5t}$. ونتحقّق بسهولة أنّ y هو الحلُّ المطلوب.

② لنبحث عن حلٍّ جملة المعادلات التفاضليّة

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} &= y\\ \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} &= z\\ \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} &= -6x - 11y - 6z + e^{-t}\end{aligned}$$

الذي يُحقّق شرط البدء $x(0) = 0$ ، $y(0) = 0$ ، $z(0) = 0$.

نعرّف كما في المثال السابق

$$X = \mathcal{L}(Hx) \text{ و } Y = \mathcal{L}(Hy) \text{ و } Z = \mathcal{L}(Hz)$$

عندئذ نجد بالاستفادة من المبرهنة 3-3. أنّ الجملة السابقة وشروط البدء الموضوعة تُكافئ

$$\begin{aligned}pX(p) &= Y(p)\\ pY(p) &= Z(p)\\ pZ(p) &= -6X(p) - 11Y(p) - 6Z(p) + \frac{1}{p+1}\end{aligned}$$

وبالحلِّ المشترك نجد أنّ

$$\begin{aligned}X(p) &= \frac{1}{(p+1)^2(p+2)(p+3)}\\ Y(p) &= \frac{p}{(p+1)^2(p+2)(p+3)}\\ Z(p) &= \frac{p^2}{(p+1)^2(p+2)(p+3)}\end{aligned}$$

وبتحليل هذه الكسور إلى عناصر بسيطة نجد

$$
\begin{aligned}
X(p) &= -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+3}\\
Y(p) &= \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{2}{p+2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p+3}\\
Z(p) &= -\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{4}{p+2} - \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{p+3}
\end{aligned}
$$

نستفيد من نتائج الأمثلة 2-3. لنجد

$$
\begin{aligned}
x(t) &= (\tfrac{1}{2}t-\tfrac{3}{4})e^{-t} + e^{-2t} - \tfrac{1}{4}e^{-3t}\\
y(t) &= (-\tfrac{1}{2}t+\tfrac{5}{4})e^{-t} - 2e^{-2t} + \tfrac{3}{4}e^{-3t}\\
z(t) &= (\tfrac{1}{2}t-\tfrac{7}{4})e^{-t} + 4e^{-2t} - \tfrac{9}{4}e^{-3t}
\end{aligned}
$$

③ لنبحث عن التوابع φ من الفضاء $\mathcal{W}$ التي تُحقِّق **"المعادلة التكامليّة"** التالية:

$$\forall x \geq 0, \quad \varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}\,t$$

ليكن $\Phi = \mathcal{L}(\varphi)$ ولنلاحظ أنّه، مهما تكن p من $\mathbb{P}_0$، يكن

$$\mathcal{L}(H\cos)(p) = \frac{p}{1+p^2} \quad \text{و} \quad \mathcal{L}(H\sin)(p) = \frac{1}{1+p^2}$$

عندئذ بحساب تحويل لابلاس لطرفي المعادلة التكامليّة، والاستفادة من المبرهنة 2-7. نجد

$$\Phi(p) = \frac{1}{1+p^2} + 2\frac{p}{1+p^2}\Phi(p)$$

وعليه يكون

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p-1)^2}$$

ومن ثَمّ نجد بناءً على المبرهنة 3-13. أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = H(x)\,x\,e^x$$

وهو الحلّ المنشود.

④ في حالة α من $\mathbb{R}_+$، نعرّف التابع X^α من $\mathcal{W}$ كما يلي :

$$X^\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, X^\alpha(t) = \begin{cases} t^\alpha & : \quad t > 0 \\ 0 & : \quad t \leq \alpha \end{cases}$$

نتيقّن بسهولة أنّ $\sigma(X^\alpha) = 0$. وفي حالة p من $\mathbb{R}_+^*$ نجد أنّ

$$\mathcal{L}(X^\alpha)(p) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t \underset{u \leftarrow pt}{=} \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^\infty u^\alpha e^{-u}\,\mathrm{d}\,u = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$$

وفي الحقيقة، يبقى التعريف صحيحاً، وكذلك النتيجة في حالة α من $\mathbb{C}$ تُحقّق $\operatorname{Re}\alpha \geq 0$. بل يمكن توسيع فضاء توابع الأصل $\mathcal{W}$ ليشمل حالة $\operatorname{Re}\alpha > -1$، ولكننا لن نفعل ذلك.

نستنتج مما سبق أنّه في حالة α و β من $\mathbb{R}_+$ يكون لدينا

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(X^\alpha * X^\beta\right)(p) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{p^{\alpha+\beta+2}} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \mathcal{L}\left(X^{\alpha+\beta+1}\right)(p) \end{aligned}$$

وهذا يبرهن على أنّ

$$X^\alpha * X^\beta = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} X^{\alpha+\beta+1}$$

وبالعودة إلى تعريف جداء التلافّ، وأخذ قيمة الطرفين عند 1 نستنتج أنّ

$$\forall(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta\,\mathrm{d}\,t = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

ولأنّ طرفي المساواة السابقة تحليليّان بالنسبة إلى α على $\mathbb{P}_{-1}$، استنتجنا أنّ

$$\forall\beta \in \mathbb{R}_+, \forall\alpha \in \mathbb{P}_{-1}, \quad \int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta\,\mathrm{d}\,t = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

ومن جديد، ولأنّ طرفي المساواة السابقة تحليليّان بالنسبة إلى β على $\mathbb{P}_{-1}$، وجدنا أنّ

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{P}_{-1}^2, \quad \int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta\,\mathrm{d}\,t = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

ويمكن إصلاح هذه النتيجة لنجد عبارة التابع β بدلالة التابع Γ:

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{P}_0^2, \quad \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

5. كلمة عن تحويل لابلاس ثنائي الجانب

نجد في بعض الكتب إشارة إلى تحويل لابلاس ثنائي الجانب، لذلك سنذكر تعريفه على قلّة أهميته.

إذا كان $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ تابعاً حقيقيّاً عرّفنا $\overleftarrow{f}$ بأنّه التابع

$$\overleftarrow{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, t\mapsto f(-t)$$

1-5. تعريف. نقول إنّ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ينتمي إلى $\mathcal{W}_B$، أي فضاء **توابع الأصل لتحويل لابلاس ثنائي الجانب**، إذا تحقّق الشرطان الآتيان:

❶ ينتمي كلٌّ من Hf و $H\overleftarrow{f}$ إلى $\mathcal{W}$.

❷ تتحقّق المتراجحة $\sigma(Hf)<-\sigma(H\overleftarrow{f})$.

وعندها نعرّف **تحويل لابلاس ثنائي الجانب** $\mathcal{L}_B(f)$ لتابع من $\mathcal{W}_B$ بأنّه التابع المعرّف على المجموعة $\mathbb{D}_f=\left\{z:\sigma(Hf)<\operatorname{Re} z<\sigma(H\overleftarrow{f})\right\}$ بالصيغة

$$\mathcal{L}_B(f)(p)=\mathcal{L}(Hf)(p)+\mathcal{L}(H\overleftarrow{f})(-p)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

إذن يرتبط $\mathcal{L}_B(f)$ ارتباطاً وثيقاً بتحويلَيْ لابلاس للتابعين Hf و $H\overleftarrow{f}$، وتنتج خواصّه من خواصهما.

فمثلاً إذا تأمّلنا التابع

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, t\mapsto e^{-t^2}$$

وجدنا أنّ f ينتمي إلى $\mathcal{W}_B$، وأنّ $\mathbb{D}_f=\mathbb{C}$، وأخيراً، في حالة s من $\mathbb{R}$ يكون لدينا

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2-st}\,\mathrm{d}t\\ &= e^{s^2/4}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\left(t+\frac{s}{2}\right)^2\right)\mathrm{d}t\\ &= e^{s^2/4}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-u^2)\,\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}e^{s^2/4}\end{aligned}$$

وبالاستفادة من التمديد التحليلي نجد $\forall p\in\mathbb{C},\quad \mathcal{L}_B(f)(p)=\sqrt{\pi}e^{p^2/4}$.

إنّ قلّة الاهتمام بتحول لابلاس ثنائي الجانب ناتجة من الصعوبات التقنيّة التي ترتبط باستخدامه، وذلك مُقارنة بتحويلات لابلاس. فمثلاً لا يحوي الفضاء $\mathcal{W}_B$ توابع كثيرات الحدود، ولا يحوي التوابع الدوريّة غير الصفرية.

وإذا تأمّلنا مثلاً التابعين

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto -2H(t)\mathrm{sh}(t)$ و $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto e^{-|t|}$

وجدنا أنّ f_1 و f_2 ينتميان إلى $\mathcal{W}_B$ وبحساب بسيط نتركه للقارئ نجد

$$\forall p \in \mathbb{D}_{f_1}, \mathcal{L}_B(f_1)(p) = \frac{2}{1-p^2}$$

$$\forall p \in \mathbb{D}_{f_2}, \mathcal{L}_B(f_2)(p) = \frac{2}{1-p^2}$$

وهذا هو كلُّ ما سنذكره بشأن هذا التحويل.

تمرينات

التمرين 1. احسب تحويل لابلاس لكلٍّ من التابعين الآتيَين بعد أن تتوثّق من انتمائهما إلى فضاء توابع الأصل $\mathcal{W}$:

$$f_1 : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 : & x < 0 \\ x : 0 < & x \leq 1 \\ 1 : 1 < & x \end{cases}$$

$$f_2 : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 : & x < 0 \\ e^x : 0 < & x \leq 1 \\ e : 1 < & x \end{cases}$$

الحل

① التابع f_1 تابعٌ مستمرٌّ، صفريٌّ على $\mathbb{R}_-^*$، ومحدودٌ، إذن $f_1 \in \mathcal{W}$. ونجد في حالة $\operatorname{Re}(p) > 0$ ما يأتي:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_1)(p) &= \int_0^1 te^{-pt}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{-1}{p^2}(pt+1)e^{-pt}\right]_{t=0}^1 - \left[\frac{e^{-pt}}{p}\right]_{t=1}^\infty \\ &= \frac{1-(p+1)e^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-p}}{p} = \frac{1-e^{-p}}{p^2} \end{aligned}$$

② التابع f_2 تابعٌ مستمرٌّ قِطَعيّاً، صفريٌّ على $\mathbb{R}_-^*$، ومحدودٌ، إذن $f_2 \in \mathcal{W}$. ونجد في حالة $\operatorname{Re}(p) > 0$ ما يأتي:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_2)(p) &= \int_0^1 e^t e^{-pt}\,\mathrm{d}t + e\int_1^\infty e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{e^{(1-p)t}}{1-p}\right]_{t=0}^1 - e\left[\frac{e^{-pt}}{p}\right]_{t=1}^\infty \\ &= \frac{e^{1-p}-1}{1-p} + \frac{e^{1-p}}{p} \end{aligned}$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 2. احسب تحويل لابلاس لكلٍّ من التوابع التالية بعد أن تتوثّق من انتمائها إلى فضاء توابع الأصل $\mathcal{W}$:

$$\begin{aligned}
f_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto H(x)e^{-3(x+1)} \\
f_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto H(x)(x^5 - xe^x) \\
f_3 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto H(x)e^{ax}\cos(bx), \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^{*2} \\
f_4 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto H(x)x\sin(ax), \qquad a \in \mathbb{R}^* \\
f_5 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto H(x)\sin(ax)\sin(bx), \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^{*2}
\end{aligned}$$

الحل

① لنلاحظ أنّ $f_1 = e^{-3} \times \mathcal{E}^{[-3]}H$ إذن $\sigma(f_1) = -3$ وفي حالة $\mathrm{Re}(p) > -3$ لدينا

$$\mathcal{L}(f_1)(p) = e^{-3}\mathcal{L}(\mathcal{E}^{[-3]}H)(p) = e^{-3}\mathcal{L}(H)(p+3) = \frac{e^{-3}}{p+3}$$

② لنلاحظ أنّ $f_2 = X^5H - X\mathcal{E}^{[1]}H$. ولكن $\sigma(X^5H) = 0$ ولدينا

$$\mathrm{Re}(p) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(X^5H)(p) = \frac{120}{p^6}$$

وكذلك $\sigma\left(X\mathcal{E}^{[1]}H\right) = 1$ ولدينا في حالة $\mathrm{Re}(p) > 1$ ما يأتي

$$\mathcal{L}(X\mathcal{E}^{[1]}H)(p) = -(\mathcal{L}(\mathcal{E}^{[1]}H)(p))' = -\left(\frac{1}{p-1}\right)' = \frac{1}{(p-1)^2}$$

إذن $\sigma(f_2) = 1$ ولدينا في حالة $\mathrm{Re}(p) > 1$ ما يأتي

$$\mathcal{L}(f_2)(p) = \frac{120}{p^6} - \frac{1}{(p-1)^2}$$

③ نلاحظ أنّ $f_3 = \mathcal{E}^{[a]}\cos^{[b]}H$. إذن $\sigma(f_3) = \sigma(H\cos^{[b]}) + a = a$ ولدينا في حالة $\mathrm{Re}(p) > a$ ما يأتي:

$$\mathcal{L}(f_3)(p) = \mathcal{L}(H\cos^{[b]})(p-a) = \frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}$$

④ نلاحظ أنّ $f_4 = XH\sin^{[a]}$. إذن $\sigma(f_4) = 0$ ، وفي حالة $\mathrm{Re}(p) > 0$ لدينا

$$\mathcal{L}(f_4)(p) = -\Big(\mathcal{L}(H\sin^{[a]})\Big)'(p) = \frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$$

⑤ نلاحظ أنّ $f_5 = \frac{1}{2}\Big(H\cos^{[a-b]} - H\cos^{[a+b]}\Big)$. إذن في حالة $\mathrm{Re}(p) > 0$ لدينا

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f_5)(p) &= \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+(a-b)^2} - \frac{p}{p^2+(a+b)^2}\right)\\ &= \frac{2abp}{p^4+2(a^2+b^2)p^2+(a^2-b^2)^2}\end{aligned}$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 3. احسب تحويل لابلاس لكلٍّ من التوابع التالية بعد أن تتوثّق من انتمائها إلى فضاء توابع الأصل $\mathcal{W}$:

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto H(x)\sin^2 x\\ f_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto H(x)\frac{\sin^2 x}{x}\\ f_3 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto H(x)\frac{\sin^2 x}{x^2}\end{aligned}$$

الحل

من الواضح أنّ التوابع $\big(f_k\big)_{k\in\mathbb{N}_3}$ توابع مستمرّة ومحدودة بالعدد 1 على $\mathbb{R}$ ، فهي إذن تنتمي إلى الفضاء $\mathcal{W}$ ، ويكون لدينا $\sigma(f_k) \le 0$ في حالة k من $\mathbb{N}_3$. كما نستنتج من الخاصّة

$$\forall k \in \mathbb{N}_3, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \big|f_k(x)\big| \le 1$$

أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}_3, \forall s \in \mathbb{R}_+^*, \quad \big|\mathcal{L}(f_k)(s)\big| \le \frac{1}{s}$$

وبوجه خاص، $\lim_{s\to+\infty} \mathcal{L}(f_k)(s) = 0$.

- بملاحظة أنّ $f_1 = \frac{1}{2}\left(H - H\cos^{[2]}\right)$ نستنتج أنّ $\sigma(f_1) = 0$ وأنّه في حالة $\operatorname{Re} p > 0$ لدينا

$$\mathcal{L}(f_1)(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right) = \frac{2}{p(p^2+4)}$$

- من جهة أخرى نرى أنّ $Xf_2 = f_1$ إذن $\sigma(f_2) = 0$، ولدينا

$$\mathcal{L}(f_1) = \mathcal{L}(Xf_2) = -\left(\mathcal{L}(f_2)\right)'$$

إذن في حالة $\operatorname{Re} p > 0$ لدينا

$$\left(\mathcal{L}(f_2)\right)'(p) = \frac{1}{1+4/p^2} \times \frac{-2}{p^3} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+4/p^2} \times \left(\frac{4}{p^2}\right)'$$

ولكن، نتيقّن بسهولة أنّه في حال $\operatorname{Re} p > 0$ لدينا

$$1 + \frac{4}{p^2} \in \left(\mathbb{C} \setminus]-\infty, 1]\right) \subset \mathbb{L}$$

و $\mathbb{L} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\_$ هي مجموعة تعريف تابع اللوغارتم الأساسي Log. وعلى هذا فإننا نستنتج من مما سبق أنّه يوجد ثابتٌ c يُحقّق

$$\forall p \in \mathbb{P}_0, \quad \mathcal{L}(f_2)(p) = c + \frac{1}{4}\operatorname{Log}\left(1 + \frac{4}{p^2}\right)$$

فإذا تذكّرنا أنّ $\lim_{s \to +\infty} \mathcal{L}(f_2)(s) = 0$ استنتجنا أنّ $c = 0$ ومنه

$$\forall p \in \mathbb{P}_0, \quad \mathcal{L}(f_2)(p) = \frac{1}{4}\operatorname{Log}\left(1 + \frac{4}{p^2}\right)$$

من جهة أخرى نرى أنّ $Xf_3 = f_2$ إذن $\sigma(f_3) = 0$، ولدينا

$$\mathcal{L}\left(f_2\right) = \mathcal{L}\left(Xf_3\right) = -\left(\mathcal{L}\left(f_3\right)\right)'$$

إذن في حالة $\operatorname{Re}\left(p\right) > 0$ لدينا

$$\left(\mathcal{L}\left(f_3\right)\right)'\left(p\right) = -\frac{1}{4}\operatorname{Log}\left(1 + \frac{4}{p^2}\right)$$

وبوجه خاص، بإجراء مُكاملة بالتجزئة بالنسبة إلى المتحوّل الحقيقي الموجب تماماً s نجد

$$\left(\mathcal{L}(f_3)\right)'(s) = -\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{4}{s^2}\right) = \left(\arctan\left(\frac{2}{s}\right) - \frac{s}{4}\ln\left(1+\frac{4}{s^2}\right)\right)'$$

فإذا تذكّرنا أنّ $\lim_{s\to+\infty}\mathcal{L}(f_3)(s) = 0$ استنتجنا أنّ

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathcal{L}(f_3)(s) = \arctan\left(\frac{2}{s}\right) - \frac{s}{4}\ln\left(1+\frac{4}{s^2}\right)$$

فإذا تذكّرنا أنّ التابع

$$z \mapsto \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\mathrm{Log}\left(\frac{z+2\,\mathrm{i}}{z-2\,\mathrm{i}}\right) - \frac{z}{2}\mathrm{Log}\left(1+\frac{4}{z^2}\right)$$

هولومورفي في نصف المستوي $\mathbb{P}_0$ ويتفق مع $s \mapsto \arctan\left(\frac{2}{s}\right) - \frac{s}{4}\ln\left(1+\frac{4}{s^2}\right)$ على $\mathbb{R}_+^*$ استنتجنا أنّ

$$\forall p \in \mathbb{P}_0, \quad \mathcal{L}(f_3)(p) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\mathrm{Log}\left(\frac{p+2\,\mathrm{i}}{p-2\,\mathrm{i}}\right) - \frac{p}{2}\mathrm{Log}\left(1+\frac{4}{p^2}\right)$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 4. نقول إنّ متتالية توابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرّفة على $\mathbb{R}$ تُحقِّق الخاصّة $\mathcal{P}$ إذا وفقط إذا كان

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(t) = (2n+1)f_n(t) - t^2 f_{n-1}(t)$$

لنعرّف متتاليتي التوابع $\left(P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ و $\left(Q_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ اللتين تُحقِّقان الخاصّة $\mathcal{P}$، وشرطَي البدء:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad P_0(t) &= 0, \quad P_1(t) = -t, \\ Q_0(t) &= 1, \quad Q_1(t) = 1. \end{aligned}$$

1. أثبت أنّه، مهما تكن n من $\mathbb{N}$، يكن كلٌّ من P_n و Q_n تابعاً كثير الحدود لا تزيد درجته على n.

2. لنعرّف، أياً كانت n من $\mathbb{N}$، التابع $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(t) = P_n(t)\cos t + Q_n(t)\sin t$$

أثبت أنّ متتالية التوابع $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تُحقِّق الخاصّة $\mathcal{P}$، وأنّه، مهما تكن n من $\mathbb{N}$، ينتمِ التابع $H\varphi_n$ إلى فضاء توابع الأصل $\mathcal{W}$، ويكن $\sigma(H\varphi_n) \leq 0$.

3. لنعرّف $\Phi_n = \mathcal{L}(H\varphi_n)$. أوجد علاقة تدريجيّة تفيد في حساب Φ_n. ثُمّ استنتج

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{P}_0, \quad \Phi_n(p) = \frac{2^n \cdot n!}{(1+p^2)^{n+1}}$$

4. أوجد توابع الأصل التي تقبل تحويلات لابلاس الآتية:

$$F_1 : p \mapsto \frac{1}{(1+p^2)^2}, \quad F_2 : p \mapsto \frac{1}{(1+p^2)^3}, F_3 : \quad p \mapsto \frac{1}{(1+p^2)^4}$$

الحل

1. لتكن $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تُحقِّق الخاصّة $\mathcal{P}$، ولنفترض أنّ R_0 و R_1 هما كثيرا حدود يُحقِّقان المتراجحة $\deg R_k \leq k$ في حالة $k=0$ و $k=1$. لنفترض بالتدريج أنّ R_k هو كثير حدود يُحقّق $\deg R_k \leq k$ في حالة $k \leq n$. عندئذ نستنتج من العلاقة التدريجيّة أنّ R_{n+1} هو كثير حدود يُحقّق

$$\deg R_{n+1} \leq \max\Big(\deg R_n, \deg X^2 R_{n-1}\Big) \leq \max\big(n, n+1\big) = n+1$$

وهذا يبرهن أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, \deg R_n \leq n$.

وبتطبيق هذا على $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نستنتج أنّ $\deg P_n \leq n$ و $\deg Q_n \leq n$ أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$.

2. لنعرّف، أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$، التابع $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(t) = P_n(t)\cos t + Q_n(t)\sin t$$

عندئذ نستنتج من كون المتتاليتين $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تُحقّقان الخاصّة $\mathcal{P}$، أنّه في حالة $n \geq 1$ لدينا

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= ((2n+1)P_n - X^2 P_{n-1})\cos + ((2n+1)Q_n - X^2 Q_{n-1})\sin \\ &= (2n+1)\varphi_n - X^2\varphi_{n-1}\end{aligned}$$

إذن تُحقّق المتتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ الخاصّة $\mathcal{P}$. ولمّا كان $\sigma(H\sin) = 0$ و $\sigma(H\cos) = 0$ استنتجنا أنّه مهما تكن k من $\mathbb{N}$ يكن $\sigma(X^k H\sin) = 0$ و $\sigma(X^k H\cos) = 0$ ومن ذلك نستنتج أنّ $H\varphi_n$ ينتمي إلى $\mathcal{W}$ وأنّ $\sigma(H\varphi_n) \leq 0$.

3. لنعرّف $\Phi_n = \mathcal{L}(H\varphi_n)$. عندئذ نستنتج من العلاقة التدريجيّة أنّه في حالة $n \geq 1$ لدينا

$$\Phi_{n+1} = \big(2n+1\big)\Phi_n - \mathcal{L}\Big(X^2 H\varphi_{n-1}\Big) = \big(2n+1\big)\Phi_n - \Phi''_{n-1}$$

- نلاحظ أوّلاً أنّ $\varphi_0 = H\sin$ ومن ثَمّ $\Phi_0(p) = \dfrac{1}{1+p^2}$, $\forall p \in \mathbb{P}_0$.
- وكذلك أنّ $\varphi_1 = (-X\cos + \sin)H$ ومن ثَمّ، في حالة p من $\mathbb{P}_0$ ، نجد

$$\begin{aligned}
\Phi_1(p) &= -\mathcal{L}(HX\cos)(p) + \mathcal{L}(H\sin)(p)\\
&= \big(\mathcal{L}(H\cos)\big)'(p) + \mathcal{L}(H\sin)(p)\\
&= \left(\frac{p}{1+p^2}\right)' + \frac{1}{1+p^2}\\
&= \frac{1-p^2}{(1+p^2)^2} + \frac{1}{1+p^2} = \frac{2}{(1+p^2)^2}
\end{aligned}$$

- لنفترض أنّنا أثبتنا أنّ $\forall p \in \mathbb{P}_0, \Phi_k(p) = \dfrac{2^k \cdot k!}{(1+p^2)^{k+1}}$ في حالة $k \leq n$. عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned}
\Phi''_{n-1}(p) &= 2^{n-1}\cdot(n-1)! \times \left(\frac{1}{(1+p^2)^n}\right)''\\
&= 2^{n-1}\cdot(n-1)! \times \left(\frac{-2np}{(1+p^2)^{n+1}}\right)'\\
&= -2^n\cdot n! \times \left(\frac{1}{(1+p^2)^{n+1}} - \frac{2(n+1)p^2}{(1+p^2)^{n+2}}\right)\\
&= 2^n\cdot n! \times \left(\frac{2n+1}{(1+p^2)^{n+1}} - \frac{2(n+1)}{(1+p^2)^{n+2}}\right)\\
&= (2n+1)\Phi_n(p) - \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(1+p^2)^{n+2}}
\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ صحة المساواة في حالة $n+1$. فنكون قد أثبتنا المساواة المطلوبة بالتدريج.

4. نستنتج أنّ $\frac{1}{2^n n!} H\varphi_n$ تابع أصل وتحويل لابلاس الموافق هو $p \mapsto \frac{1}{(1+p^2)^{n+1}}$. ومنه

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big(\tfrac{1}{2}(-X\cos+\sin)H\Big) &= \frac{1}{(1+p^2)^2}\\
\mathcal{L}\Big(\tfrac{1}{8}(-3X\cos+(3-X^2)\sin)H\Big) &= \frac{1}{(1+p^2)^3}\\
\mathcal{L}\Big(\tfrac{1}{48}((X^3-15X)\cos+(15-6X^2)\sin)H\Big) &= \frac{1}{(1+p^2)^4}
\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

التمرين 5. أوجد تابعاً f من فضاء توابع الأصل $\mathcal{W}$ يُحقِّق

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$$

حيث (a,b) من $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

الحل

لنفترض أنّ $b \neq a$. لمّا كان $\mathcal{L}(H\sin^{[a]}) = \frac{a}{p^2+a^2}$ و $\mathcal{L}(H\sin^{[b]}) = \frac{b}{p^2+b^2}$

استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\frac{1}{a}H\sin^{[a]} - \frac{1}{b}H\sin^{[b]}\right) &= \frac{1}{p^2+a^2} - \frac{1}{p^2+b^2}\\
&= \frac{b^2-a^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}
\end{aligned}$$

إذن بأخذ

$$f_{a,b} = \frac{1}{ab(b^2-a^2)}\Big(bH\sin^{[a]} - aH\sin^{[b]}\Big)$$

نجد $\sigma(f_{a,b}) = 0$ ويكون لدينا

$$\forall p \in \mathbb{P}_0, \quad \mathcal{L}(f_{a,b})(p) = \frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$$

من جهة أخرى نجد بالحساب المباشر، أنّه في حالة $x>0$ لدينا

$$f_{a,b}(x)=\frac{\sin ax}{ab(b+a)}-\frac{1}{b(b+a)}\times\frac{\sin bx-\sin ax}{b-a}$$

وبجعل b تسعى إلى a يأخذ التابع $f_{a,b}$ الصيغة

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad f_{a,a}(x)=\frac{\sin ax}{2a^3}-\frac{x\cos ax}{2a^2}$$

ونتيقّن مباشرة أنّ

$$\forall p\in\mathbb{P}_0,\quad \mathcal{L}(f_{a,a})(p)=\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$$

وهو المطلوب. ∎

التمرين 6. ليكن التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(t)=\int\limits_0^\infty\frac{\cos(tu)}{1+u^2}\,\mathrm{d}\,u$. أثبت أنّ Hf ينتمي إلى فضاء توابع الأصل $\mathcal{W}$. احسب $\mathcal{L}(Hf)$ واستنتج صيغة التابع f .

الحل

لنتأمّل التابع $\frac{\cos(tu)}{1+u^2}=h:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},h(t,u)$.

- مهما تكن t من $\mathbb{R}$ فالتابع $h(t,u)\mapsto u$ تابعٌ مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+$.
- مهما تكن u من $\mathbb{R}_+$ فالتابع $h(t,u)\mapsto t$ تابعٌ مستمرٌّ على $\mathbb{R}$.
- ولدينا المتراجحة

$$\forall(t,u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\ \left|h(t,u)\right|\leq\frac{1}{1+u^2}$$

والتكامل $\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\,u}{1+u^2}$ متقارب.

إذن، اعتماداً على مبرهنة استمرار التكاملات التابعة لوسيط، نستنتج أنّ التابع

$$t\mapsto f(t)=\int_0^\infty h(t,u)\,\mathrm{d}\,u$$

تابعٌ مستمرٌّ على $\mathbb{R}$.

كما نستنتج من كون $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,u}{1+u^2}=\frac{\pi}{2}$ أنّ $\forall t\in\mathbb{R},\ \left|f(t)\right|\le\frac{\pi}{2}$. إذن ينتمي التابع Hf إلى $\mathcal{W}$، ولدينا $\sigma(Hf)\le 0$.

لنفترض أنّ s ينتمي إلى $]1,+\infty[$ ولنحسب $\mathcal{L}(Hf)(s)$ مستفيدين من المتراجحة

$$\forall(t,u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\qquad \left|\frac{\cos(tu)e^{-st}}{1+u^2}\right|\le\frac{e^{-st}}{1+u^2}$$

ومن كون $\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-st}}{1+u^2}\,\mathrm{d}\,u\right)\mathrm{d}\,t=\frac{\pi}{2s}<+\infty$ ، مما يتيح لنا تغيير ترتيب المُكاملة :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(v)(s)&=\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos(tu)}{1+u^2}\,\mathrm{d}\,u\right)e^{-st}\,\mathrm{d}\,t=\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos(tu)e^{-st}}{1+u^2}\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,u\\
&=\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{1+u^2}\left(\int\limits_0^{\infty}\cos(tu)e^{-st}\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,u=\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathcal{L}(H\cos^{[u]})(s)}{1+u^2}\,\mathrm{d}\,u\\
&=\int\limits_0^{\infty}\frac{s}{(1+u^2)(u^2+s^2)}\,\mathrm{d}\,u=\frac{s}{s^2-1}\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+u^2}-\frac{1}{u^2+s^2}\right)\mathrm{d}\,u\\
&=\frac{s}{s^2-1}\cdot\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{s}\right)=\frac{\pi}{2(s+1)}
\end{aligned}$$

ومنه $\forall p\in\mathbb{P}_0,\ \mathcal{L}(Hf)(p)=\frac{\pi}{2(1+p)}$ لأنّ $\mathcal{L}(Hf)$ هولومورفي في $\mathbb{P}_0$. إذن

$$\mathcal{L}(Hf)=\mathcal{L}\left(\frac{\pi}{2}H\mathcal{E}^{[-1]}\right)$$

وهذا يقتضي أنّ $Hf=\frac{\pi}{2}H\mathcal{E}^{[-1]}$ ، أي $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ f(t)=\frac{\pi}{2}e^{-t}$. ولأنّ f زوجي استنتجنا أنّ

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad \int\limits_0^{\infty}\frac{\cos(tu)}{1+u^2}\,\mathrm{d}\,u=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 7. لنتأمّل التابع

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(t) = H(t)e^{-t^2}\int_0^t e^{x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

1. أثبت أنّ φ ينتمي إلى فضاء توابع الأصل $\mathcal{W}$، وأنّ $\sigma(\varphi) \leq 0$.
2. أثبت أنّ φ هو حلٌّ على $\mathbb{R}_+^*$ لمعادلة تفاضليّة خطّيّة من المرتبة الأولى بطرف ثانٍ.
3. استنتج معادلة تفاضليّة يُحقّقها $\Phi = \mathcal{L}(\varphi)$.
4. استنتج مما سبق أنّ : $\forall s \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Phi(s) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda s^2}}{4\lambda+1}\,\mathrm{d}\,\lambda$.

الحل

1. من الواضح أنّ φ تابعٌ مستمرٌّ على كامل $\mathbb{R}$. ولدينا

$$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow \int_0^t e^{x^2}\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k+1}}{k!(2k+1)} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{k!} = e^{t^2}$$

لأنّ $\frac{t}{2k+1} \leq 1$ في حالة $0 \leq t \leq 1$ و $k \in \mathbb{N}$. ومن جهة أخرى

$$t \geq 1 \Rightarrow \int_1^t e^{x^2}\,\mathrm{d}\,x \leq \int_1^t xe^{x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{e^{t^2}-e}{2}$$

إذن في حالة $t \geq 1$ لدينا أيضاً

$$\int_0^t e^{x^2}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}\,x + \int_1^t e^{x^2}\,\mathrm{d}\,x \leq e + \frac{e^{t^2}-e}{2} < e^{t^2}$$

وعليه نرى أنّ $0 \leq \varphi(t) \leq 1$ مهما كان t من $\mathbb{R}$. وهذا يُثبتُ أنّ φ ينتمي إلى $\mathcal{W}$ وأنّ $\sigma(\varphi) \leq 0$.

2. نجد بحساب بسيط أنّ φ يُحقّق

$$\forall t > 0, \quad \varphi'(t) = -2t\varphi(t) + 1 \quad و \quad \varphi(0) = 0$$

3. لمّا كان $\varphi(0) = 0$ استنتجنا أنّه في حالة p من $\mathbb{P}_0$ يكون

$$\mathcal{L}(\varphi')(p) = p\mathcal{L}(\varphi)(p) = p\Phi(p)$$

وفي حالة p من $\mathbb{P}_0$ لدينا أيضاً $\mathcal{L}(X\varphi)(p) = -(\mathcal{L}(\varphi))'(p) = -\Phi'(p)$.

وعليه نستنتج من المعادلة التفاضليّة أنّ

$$\forall p \in \mathbb{P}_0, \quad p\Phi(p) = 2\Phi'(p) + \frac{1}{p}$$

4. لنلاحظ أنّه مهما تكن s من $\mathbb{R}_+^*$ يكن

$$\left(e^{-s^2/4}\Phi(s)\right)' = \left(-\frac{s}{2}\Phi(s) + \Phi'(s)\right)e^{-s^2/4} = -\frac{1}{2s}e^{-s^2/4}$$

ولمّا كان $\lim_{a\to\infty} e^{-a^2/4}\Phi(a) = 0$ استنتجنا أنّ

$$e^{-s^2/4}\Phi\left(s\right) = \int_s^\infty \frac{1}{2t}e^{-t^2/4}\,\mathrm{d}\,t \underset{x\leftarrow\frac{t^2}{4}}{=} \frac{1}{4}\int_{s^2/4}^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}\,x$$

ومنه

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{1}{4}e^{-s^2/4}\int_{s^2/4}^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda s^2}}{1+4\lambda}\,\mathrm{d}\,\lambda \qquad\qquad x \leftarrow \frac{s^2}{4} + \lambda s^2\end{aligned}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 8. ليكن f تابعاً دورياً من الصف $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}$ على $\mathbb{R}$، ويقبل العدد τ دوراً . نرمز بالرمز φ إلى التابع

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \begin{cases} f(t) & : \quad t \in [0,\tau[\\ 0 & : \quad t \notin [0,\tau[\end{cases}$$

1. أثبت أنّ التابع Hf ينتمي إلى $\mathcal{W}$ واحسب فاصلة تزايده $\sigma(Hf)$.
2. أوجد علاقة بسيطة بين $\mathcal{L}(Hf)$ و $\mathcal{L}(\varphi)$.
3. استنتج تحويل لابلاس $\mathcal{L}(Hf)$ في كلتا الحالتين الآتيتين:

① التابع f هو تابع $2-$دوري يتّفق مع التابع $t \mapsto |t|$ على المجال $[-1,1]$.

② التابع f هو التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(t) = \left|\sin(\alpha t)\right|$.

الحل

1. لمّا كان f دوريّاً استنتجنا أنّه محدود، إذن Hf ينتمي إلى $\mathcal{W}$ و $\sigma(Hf) \le 0$. وبالطبع إذا افترضنا أنّ $f \ne 0$، مثلاً $f(t_0) \ne 0$ كانت المتتالية $\left(f(t_0+n\tau)e^{-\lambda(t_0+n\tau)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ غير محدودة مهما كان $\lambda < 0$. وهذا يثبتُ أنّ $\sigma(Hf) = 0$ في حالة $f \ne 0$.

2. لنلاحظ أنّ $H - H_\tau$ هو التابع المميِّز للمجال $[0,\tau[$ أي الذي يساوي 1 في حالة $0 \le t < \tau$ ويساوي 0 في بقيّة الحالات. وعليه فإنّ $\varphi = (H - H_\tau)f$. إذن

$$\begin{aligned}\forall p \in \mathbb{P}_0,\quad \mathcal{L}(\varphi)(p) &= \mathcal{L}((H-H_\tau)f)(p)\\ &= \mathcal{L}(Hf)(p) - \mathcal{L}((Hf)_\tau)(p)\\ &= \mathcal{L}(Hf)(p) - e^{-p\tau}\mathcal{L}(Hf)(p)\\ &= (1-e^{-p\tau})\mathcal{L}(Hf)(p)\end{aligned}$$

3.① في هذه الحالة التابع φ هو التابع المعرّف على المجال $[0,2[$ بالصيغة

$$\varphi(t) = \begin{cases} t & : \ t \in [0,1[\\ 2-t & : \ t\in[1,2[\end{cases}$$

وعليه

$$\begin{aligned}\forall p \in \mathbb{P}_0,\quad \mathcal{L}(\varphi)(p) &= \int_0^1 te^{-pt}\,\mathrm{d}t + \int_1^2 (2-t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t\\ &= -\left[\frac{pt+1}{p^2}e^{-pt}\right]_0^1 + \left[\frac{pt+1-2p}{p^2}e^{-pt}\right]_1^2\\ &= \frac{1}{p^2} - \frac{p+1}{p^2}e^{-p} + \frac{1}{p^2}e^{-2p} - \frac{1-p}{p^2}e^{-p}\\ &= \frac{1+e^{-2p}}{p^2} - \frac{2}{p^2}e^{-p} = \frac{(1-e^{-p})^2}{p^2}\end{aligned}$$

فإذا استفدنا من نتيجة 2. استنتجنا أنّ

$$\forall p \in \mathbb{P}_0,\quad \mathcal{L}(Hf)(p) = \frac{(1-e^{-p})^2}{p^2(1-e^{-2p})} = \frac{1-e^{-p}}{p^2(1+e^{-p})} = \frac{\operatorname{th}(p/2)}{p^2}$$

3.② في هذه الحالة يقبل التابع f العددَ π/α دوراً، والتابع φ هو التابع المعرّف على المجال $\left[0,\pi/\alpha\right[$ بالصيغة التالية : $\varphi(t) = \sin\alpha t$.

وعليه

$$\begin{aligned}\forall p\in\mathbb{P}_0,\quad \mathcal{L}(\varphi)(p) &= \int_0^{\pi/\alpha}\sin\alpha t e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t\\ &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\int_0^{\pi/\alpha}\left(e^{(-p+\mathrm{i}\alpha)t}-e^{-(p+\mathrm{i}\alpha)t}\right)\mathrm{d}\,t\\ &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left[\frac{e^{(-p+\mathrm{i}\alpha)t}}{-p+\mathrm{i}\alpha}+\frac{e^{-(p+\mathrm{i}\alpha)t}}{p+\mathrm{i}\alpha}\right]_0^{\pi/\alpha} = \frac{\alpha(1+e^{-p\pi/\alpha})}{\alpha^2+p^2}\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}\forall p\in\mathbb{P}_0,\quad \mathcal{L}(Hf)(p) &= \frac{\alpha}{\alpha^2+p^2}\cdot\frac{1+e^{-p\pi/\alpha}}{1-e^{-p\pi/\alpha}}\\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2+p^2}\cdot\coth\left(\frac{p\pi}{2\alpha}\right)\end{aligned}$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 9. ليكن ω من $\mathbb{R}^*$، وليكن f تابعاً مستمرّاً من الفضاء $\mathcal{W}$. أثبت أنّه يوجد تابع وحيد φ ينتمي إلى $\mathcal{W}$، يحقّق المعادلة التكامليّة:

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \varphi(x)-\omega\int_0^x\varphi(x-t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}\,t = f(x)$$

عيِّن φ بدلالة التابع f. ثمّ أنجز الحساب في حالة $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=\max(0,t)$.

الحل

لنفترض أوّلاً أنّه يوجد φ ينتمي إلى $\mathcal{W}$ يُحقّق المعادلة التكامليّة المعطاة، ولنعرّف $F=\mathcal{L}(f)$. عندئذ بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة التكامليّة نستنتج أنّ $\Phi=\mathcal{L}(\varphi)$ يُحقّق المساواة

$$\Phi-\omega\mathcal{L}(\varphi*(H\sin^{[\omega]}))=F$$

أو $\Phi-\omega\Phi\,\mathcal{L}(H\sin^{[\omega]})=F$ أي

$$\left(1-\omega\frac{\omega}{\omega^2+p^2}\right)\Phi(p)=F(p)$$

ومنه

$$\Phi(p) = \left(1 + \frac{\omega^2}{p^2}\right) F(p)$$

إذن

$$\Phi = \mathcal{L}(f) + \omega^2 \mathcal{L}(XH)\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(f + \omega^2 (XH) * f)$$

وهذا يبرهن أنّ

$$\varphi = f + \omega^2 (XH) * f$$

إذن φ وحيدٌ، وهذه الصيغة تفيدنا في التحقّق من وجود الحل φ بالتعويض المباشر، أو باستخدام تحويل لابلاس. إذ نجد مباشرة أنّ التابع φ من $\mathcal{W}$ المعرّف بالصيغة

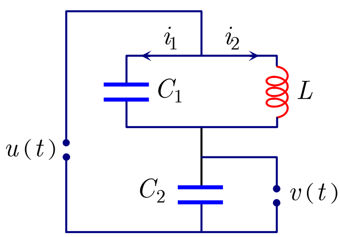
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = f(x) + \omega^2 \int_0^x (x-t) f(t) \, \mathrm{d}\, t$$

هو حلّ المعادلة التكامليّة المعطاة. وفي حالة $f(t) = XH(t) = \max(0, t)$ نجد أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = x + \omega^2 \int_0^x (x-t) t \, \mathrm{d}\, t = x + \frac{\omega^2}{6} x^3$$

أو $\varphi = (X + \frac{\omega^2}{6} X^3) H$. ■

التمرين 10. لنتأمّل الدارة LC الآتية، والتي تحكمها المعادلات:



$$v(t) = \frac{1}{C_2} \int_0^t (i_1(x) + i_2(x)) \, \mathrm{d}\, x$$

$$u(t) - v(t) = \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1(x) \, \mathrm{d}\, x = L \frac{\mathrm{d}\, i_2}{\mathrm{d}\, t}(t)$$

نفترض أنّ $i_1(0) = 0$ و $i_2(0) = 0$، وأنّ التوابع u و v تنتمي إلى $\mathcal{W}$.

1. عيِّن تابع الانتقال : $\mathcal{F} = \dfrac{\mathcal{L}(v)}{\mathcal{L}(u)}$.

2. احسب الخرج v، في الحالة التي يكون فيها الدخل u معرفاً بالعلاقة التالية :

$$t \mapsto H(t)\sin(\omega t) \quad \text{حيث} \quad 0 < \omega$$

يمكن أن نضع $\Omega^{-2} = L(C_1 + C_2)$.

الحل

1. لنضع تعريفاً $U = \mathcal{L}(u)$ و $V = \mathcal{L}(v)$ و $I_1 = \mathcal{L}(i_1)$ و $I_2 = \mathcal{L}(i_2)$. عندئذ نستنتج من جملة المعادلتين أنّ :

$$V(p) = \frac{1}{pC_2}(I_1(p) + I_2(p))$$
$$U(p) - V(p) = \frac{1}{pC_1} I_1(p) = pLI_2(p)$$

ومن ثمّ $I_1(p) = pC_1(U(p) - V(p))$ و $I_2(p) = \frac{1}{pL}(U(p) - V(p))$ وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد

$$V(p) = \frac{1}{pC_2}\left(pC_1 + \frac{1}{pL}\right)(U(p) - V(p))$$

ومنه

$$\left(1 + \frac{1}{pC_2}\left(pC_1 + \frac{1}{pL}\right)\right)V(p) = \frac{1}{pC_2}\left(pC_1 + \frac{1}{pL}\right)U(p)$$

أو

$$\mathcal{F}(p) = \frac{V(p)}{U(p)} = \frac{p^2C_1L + 1}{p^2L(C_2 + C_1) + 1}$$

فإذا عرّفنا $\Omega = (L(C_1 + C_2))^{-1/2}$ أمكننا أن نكتب تابع الانتقال $\mathcal{F}$ بالصيغة الآتية :

$$\mathcal{F}(p) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} + \frac{C_2\Omega}{C_1 + C_2} \cdot \frac{\Omega}{p^2 + \Omega^2}$$

2. في الحالة التي يكون فيها الدخل u جيبيّاً تواتره ω، أي $u = H\sin^{[\omega]}$ يكون

$$U(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

ومن ثمّ، لأنّ $V = \mathcal{F} \times U$ نجد

$$V(p) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} + \frac{C_2\Omega}{C_1 + C_2} \cdot \frac{\Omega}{p^2 + \Omega^2} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

فإذا افترضنا أنّ $\omega \neq \Omega$ كان لدينا

$$V(p) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} + \frac{C_2 \Omega}{(C_1 + C_2)(\omega^2 - \Omega^2)} \cdot \left(\omega \frac{\Omega}{p^2 + \Omega^2} - \Omega \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right)$$

أو

$$V(p) = \Omega^2 \left(\frac{LC_1\omega^2 - 1}{\omega^2 - \Omega^2} \right) \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} + \frac{LC_2\Omega^3\omega}{\omega^2 - \Omega^2} \cdot \frac{\Omega}{p^2 + \Omega^2}$$

ومنه

$$V = \mathcal{L} \left(\Omega^2 \left(\frac{LC_1\omega^2 - 1}{\omega^2 - \Omega^2} \right) H \sin^{[\omega]} + \frac{LC_2\Omega^3\omega}{\omega^2 - \Omega^2} H \sin^{[\Omega]} \right)$$

وهذا يقتضي أنّ

$$v(t) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left(\left(1 - LC_1\omega^2 \right) \sin \omega t - LC_2 \Omega\omega \sin \Omega t \right)$$

وإذا وضعنا $\Omega' = (LC_1)^{-1/2}$ كان $LC_2 = \frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{\Omega'^2}$ ومن ثَمّ

$$v(t) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega'^2} \right) \sin \omega t - \left(\frac{\omega}{\Omega} - \frac{\Omega\omega}{\Omega'^2} \right) \sin \Omega t \right)$$

لنلاحظ ما يأتي :

- في حالة $\Omega \ll \omega$ يكون $v(t) \approx \sin \omega t$ والخرج جيبي يُماثل الدخل.
- في حالة $\omega \ll \Omega$ يكون $v(t) \approx \frac{C_1}{C_1 + C_2} \sin \omega t$ والخرج جيبي يُماثل الدخل.
- في حالة $\omega = \Omega$ يكون

$$v(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{C_1}{C_1 + C_2} \right) \sin \Omega t + \frac{C_2}{2C_1} t \Omega \cos \Omega t$$

وهنا نلاحظ أنّه في حالة $\Omega = \omega$ يكون الخرج v غير محدود، وهي توافق حالة تجاوب.

وبذا يكتمل الحل. ■

التمرين 11. ليكن φ الحل الوحيد المعرّف على $]-1,+\infty[$ لمسألة كوشي التالية

$$\begin{aligned}&(t+1)y''-2y'-(t-1)y=te^{-t}\\&y(0)=y'(0)=0\end{aligned}$$

1. نفترض أنّ التوابع $H\varphi$ و $H\varphi'$ و $H\varphi''$ تنتمي إلى $\mathcal{W}$. نضع $\Phi=\mathcal{L}(H\varphi)$. أثبت أنّه حين تكون p عدداً حقيقيّاً كبيراً بقدر كافٍ، يكون Φ حلّاً لمعادلة تفاضليّة من المرتبة الأولى $(\mathcal{E})$ يُطلب تعيينها.
2. حلّ المعادلة $(\mathcal{E})$ على المجال $]1,+\infty[$، وبيّن أنه من بين حلول هذه المعادلة هناك حلٌّ وحيدٌ يكون مساوياً لتحويل لابلاس لتابع f من $\mathcal{W}$. أوجد هذا التابع f.
3. استنتج مما سبق صيغة الحلّ φ.

الحل

1. لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(HX\varphi)&=-(\mathcal{L}(H\varphi))' &&=-\Phi'(p)\\ \mathcal{L}(H\varphi')&=p\mathcal{L}(H\varphi)-\varphi(0) &&=p\Phi(p)\\ \mathcal{L}(H\varphi'')&=p^2\mathcal{L}(H\varphi)-p\varphi(0)-\varphi'(0) &&=p^2\Phi(p)\\ \mathcal{L}(HX\varphi'')&=-(\mathcal{L}(H\varphi''))'=-(p^2\Phi(p))' &&=-2p\Phi(p)-p^2\Phi'(p)\end{aligned}$$

وعليه تُكافئ المسألة التفاضليّة ما يلي :

$$(\mathcal{E})\qquad (1-p^2)\Phi'(p)+(p^2-4p+1)\Phi(p)=\frac{1}{(p+1)^2}$$

2. في حالة p من $]1,+\infty[$ نعرّف

$$X(p)=(p+1)^3(p-1)e^{-p}\Phi(p)$$

عندئذ يكون لدينا

$$X'(p)=-(p+1)^2e^{-p}((1-p^2)\Phi'(p)+(1-4p+p^2)\Phi(p))=-e^{-p}$$

ومن ثَمّ، يوجد ثابتٌ κ يُحقّق $\forall p\in\ ]1,+\infty[,\ \ X(p)=e^{-p}+\kappa$، ومنه

$$\forall p\in\ ]1,+\infty[,\ \ \Phi(p)=\frac{e^{-p}+\kappa}{(p+1)^3(p-1)e^{-p}}$$

ولمّا كان Φ هو تحويل لابلاس لتابع من $\mathcal{W}$ استنتجنا أنّ $\lim_{s\to+\infty} \Phi(s) = 0$ ، وهذا يقتضي أنّ $\kappa = 0$. أي

$$\forall p \in \,]1,+\infty[,\ \ \Phi(p) = \frac{1}{(p+1)^3(p-1)}$$

علينا إذن تحليل الكسر

$$F(Y) = \frac{1}{(Y+1)^3(Y-1)}$$

إلى عناصر بسيطة، نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
F(Y-1) &= \frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{Y^3(1-Y/2)}\\
&= \frac{-1}{2}\cdot\frac{1-(Y/2)^3}{Y^3(1-Y/2)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(Y/2)^3}{Y^3(1-Y/2)}\\
&= \frac{-1}{2Y^3}\cdot\frac{1-(Y/2)^3}{1-Y/2} - \frac{1}{8(2-Y)}\\
&= \frac{-1}{2Y^3}\cdot\left(1+\frac{Y}{2}+\frac{Y^2}{4}\right) - \frac{1}{8(2-Y)}\\
&= \frac{1}{8(Y-2)} - \frac{1}{2Y^3} - \frac{1}{4Y^2} - \frac{1}{8Y}
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$F(Y) = \frac{1}{8(Y-1)} - \frac{1}{2(Y+1)^3} - \frac{1}{4(Y+1)^2} - \frac{1}{8(Y+1)}$$

وعليه في حالة p من $]1,+\infty[$ لدينا

$$\begin{aligned}
\Phi(p) &= \frac{1}{8(p-1)} - \frac{1}{8(p+1)} - \frac{1}{4(p+1)^2} - \frac{1}{2(p+1)^3}\\
&= \mathcal{L}\left(\frac{1}{8}H\left(\mathcal{E}^{[1]} - (1+2X+2X^2)\mathcal{E}^{[-1]}\right)\right)(p)
\end{aligned}$$

إذن التابع $t \mapsto f(t) = \dfrac{1}{8}H(t)(e^t - (1+2t+2t^2)e^{-t})$ هو التابع الوحيد من $\mathcal{W}$ الذي يجعل تحويل لابلاس الموافق $\mathcal{L}(f)$ حلاً للمعادلة $(\mathcal{E})$ على $]1,+\infty[$.

3. يكفي أن نتيقّن، بالحساب المباشر، أنّ التابع

$$t \mapsto \varphi(t) = \frac{1}{8}(e^t - (1 + 2t + 2t^2)e^{-t})$$

هو حلٌّ معرّف على كامل $\mathbb{R}$ للمسألة التفاضليّة المطروحة. وهذا أمرٌ بسيط نتركه للقارئ. ■

التمرين 12. استفد من تحويلات لابلاس لإيجاد حلّ جملة المعادلات التفاضليّة الآتية، والذي يُحقّق شرط البدء المرافق :

$$\begin{array}{ccccccccc} x'' & - & 2x' & + & 3x & + & 4y & = & 0 \\ y'' & + & x' & - & x & - & y & = & 0 \end{array}$$
$$x(0) = 2, \quad y(0) = -1, \quad x'(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

الحل

لنضع $\Phi = \mathcal{L}(Hx)$ و $\Psi = \mathcal{L}(Hy)$، وهما معرّفان على مجال من النمط $]s_0, +\infty[$. عندئذ بالاستفادة من شروط البدء نجد

$$\mathcal{L}(Hx')(p) = p\Phi(p) - x(0) = p\Phi(p) - 2$$

وكذلك

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Hx'')(p) &= p^2\Phi(p) - px(0) - x'(0) = p^2\Phi(p) - 2p \\ \mathcal{L}(Hy')(p) &= p\Psi(p) - y(0) = p\Psi(p) + 1 \\ \mathcal{L}(Hy'')(p) &= p^2\Psi(p) - py(0) - y'(0) = p^2\Psi(p) + p \end{aligned}$$

وبالتعويض في جملة المعادلات نجد

$$\begin{aligned} (p^2 - 2p + 3)\Phi(p) + 4\Psi(p) &= 2p - 4 \\ (p - 1)\Phi(p) + (p^2 - 1)\Psi(p) &= 2 - p \end{aligned}$$

وبجمع مثلَي المعادلة الثانية إلى الأولى، والاختصار على $1 + p^2$ نجد

$$\begin{aligned} \Phi(p) + (p + 1)\Psi(p) &= \frac{2 - p}{p - 1} \\ \Phi(p) + 2\Psi(p) &= 0 \end{aligned}$$

ومنه

$$\Psi(p) = \frac{2 - p}{(p - 1)^2} \quad \text{و} \quad \Phi(p) = \frac{2p - 4}{(p - 1)^2}$$

وبملاحظة أنّ

$$\frac{2-p}{(p-1)^2} = \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p-1} = \mathcal{L}(H(X-1)\mathcal{E}^{[1]})(p)$$

استنتجنا أنّ حلّ المسألة التفاضليّة المطلوب هو

$$t \mapsto \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-t)e^t \\ (t-1)e^t \end{bmatrix}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 13. استخدم تحويلات لابلاس لإيجاد حلّ جملة المعادلات التفاضليّة التالية،

$$\begin{aligned} x' &= z \\ y' &= -2x - 3y - 9z \\ z' &= 2y + 6z \end{aligned}$$

الذي يُحقّق شرط البدء $x(0) = -2, y(0) = -5, z(0) = 0$.

الحل

لنضع $U = \mathcal{L}(Hx)$ و $V = \mathcal{L}(Hy)$ و $W = \mathcal{L}(Hz)$ ، وهي معرّفة على مجال من النمط $]s_0, +\infty[$. عندئذ بالاستفادة من شروط البدء نجد

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Hx')(p) &= pU(p) + 2 \\ \mathcal{L}(Hy')(p) &= pV(p) + 5 \\ \mathcal{L}(Hz')(p) &= pW(p) \end{aligned}$$

وبالتعويض في جملة المعادلات نجد

$$\begin{aligned} pU - W &= -2 \\ 2U + (p+3)V + 9W &= -5 \\ 2V + (6-p)W &= 0 \end{aligned}$$

من المعادلة الأولى نجد

$$W = pU + 2$$

ومن الأخيرة

$$2V = (p-6)W = (p-6)(pU+2)$$

فإذا عوّضنا في الوسطى وجدنا

$$\begin{aligned} U &= \frac{-10+6p-2p^2}{(p+1)(p-2)^2} \\ V &= \frac{(p-6)(4-5p)}{(p+1)(p-2)^2} \\ W &= \frac{8-10p}{(p+1)(p-2)^2} \end{aligned}$$

لنتأمّل بوجه عام الكسر

$$F(X) = \frac{\alpha+\beta X+\gamma X^2}{(X+1)(X-2)^2}$$

عندئذ يمكن تفريق F كما يأتي

$$F(X) = \frac{A}{X+1} + \frac{B}{X-2} + \frac{C}{(X-2)^2}$$

حيث تتعيّن A بضرب الطرفين بكثير الحدود $X+1$ ثمّ تعويض $X=-1$ فنجد

$$A = \frac{\alpha-\beta+\gamma}{9}$$

وتتعيّن C بضرب الطرفين بكثير الحدود $(X-2)^2$ ثمّ تعويض $X=2$ فنجد

$$C = \frac{\alpha+2\beta+4\gamma}{3}$$

وأخيراً إذا ضربنا الطرفين بكثير الحدود X ثمّ جعلنا X تسعى إلى اللانهاية وجدنا

$$B = \gamma - A = \frac{-\alpha+\beta+8\gamma}{9}$$

ومنه

$$\frac{\alpha+\beta X+\gamma X^2}{(X+1)(X-2)^2} = \frac{\alpha+2\beta+4\gamma}{3(X-2)^2} + \frac{-\alpha+\beta+8\gamma}{9(X-2)} + \frac{\alpha-\beta+\gamma}{9(X+1)}$$

وعليه

$$U = \frac{-2}{(p-2)^2} - \frac{2}{p+1}$$

و

$$V = \frac{8}{(p-2)^2} + \frac{2}{p-2} - \frac{7}{p+1}$$

وأخيراً

$$W = \frac{-4}{(p-2)^2} - \frac{2}{p-2} + \frac{2}{p+1}$$

ولكن

$$\mathcal{L}(HX\mathcal{E}^{[2]}) = \frac{1}{(p-2)^2} \text{ و } \mathcal{L}(H\mathcal{E}^{[2]}) = \frac{1}{p-2} \text{ و } \mathcal{L}(H\mathcal{E}^{[-1]}) = \frac{1}{p+1}$$

إذن

$$\begin{aligned} U &= \mathcal{L}(H(-2X\mathcal{E}^{[2]} - 2\mathcal{E}^{[-1]})) \\ V &= \mathcal{L}(H((8X+2)\mathcal{E}^{[2]} - 7\mathcal{E}^{[-1]})) \\ W &= \mathcal{L}(H((-4X-2)\mathcal{E}^{[2]} + 2\mathcal{E}^{[-1]})) \end{aligned}$$

ومنه نستنتج أنّ حلّ المسألة التفاضليّة المطلوب هو

$$t \mapsto \begin{bmatrix} x(t) \\ y(y) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2te^{2t} - 2e^{-t} \\ (8t+2)e^{2t} - 7e^{-t} \\ (-4t-2)e^{2t} + 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

وهي النتيجة المرجوّة.

التمرين 14. استخدم تحويلات لابلاس لإيجاد حلّ جملة المعادلات التفاضليّة التالية

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 5y - z \\ y' &= -2y + z \\ z' &= x \end{aligned}$$

الذي يُحقّق شرط البدء

$$x(0) = -17,\ y(0) = 1,\ z(0) = -5$$

الحل

لنضع $U = \mathcal{L}(Hx)$ و $V = \mathcal{L}(Hy)$ و $W = \mathcal{L}(Hz)$، وهي معرّفة على مجال من النمط $]s_0, +\infty[$. عندئذ بالاستفادة من شروط البدء نجد

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Hx')(p) &= pU(p) + 17 \\ \mathcal{L}(Hy')(p) &= pV(p) - 1 \\ \mathcal{L}(Hz')(p) &= pW(p) + 5 \end{aligned}$$

وبالتعويض في جملة المعادلات التفاضلة والحل نجد

$$W = \frac{1-12p-5p^2}{(p+1)^2(p-3)}, V = \frac{p^2-8p-1}{(p+1)^2(p-3)}, U = \frac{-17p^2-24p-15}{(p+1)^2(p-3)}$$

ونستنتج بتفريق الكسور السابقة أنّ

$$\begin{aligned} U &= \frac{2}{(p+1)^2} - \frac{2}{p+1} - \frac{15}{p-3} \\ V &= \frac{-2}{(p+1)^2} + \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p-3} \\ W &= \frac{-2}{(p+1)^2} - \frac{5}{p-3} \end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(H\mathcal{E}^{[-1]}) &= \frac{1}{p+1} \\ \mathcal{L}(HX\mathcal{E}^{[-1]}) &= \frac{1}{(p+1)^2} \\ \mathcal{L}(H\mathcal{E}^{[3]}) &= \frac{1}{p-3} \end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned} U &= \mathcal{L}(H((2X-2)\mathcal{E}^{[-1]} - 15\mathcal{E}^{[3]})) \\ V &= \mathcal{L}(H((-2X+2)\mathcal{E}^{[-1]} - \mathcal{E}^{[3]})) \\ W &= \mathcal{L}(H(-2X\mathcal{E}^{[-1]} - 5\mathcal{E}^{[3]})) \end{aligned}$$

ومنه نستنتج أنّ حلّ المسألة التفاضليّة المطلوب هو

$$t \mapsto \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(t-1)e^{-t} - 15e^{3t} \\ -2(t-1)e^{-t} - e^{3t} \\ -2te^{-t} - 5e^{3t} \end{bmatrix}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 15. أوجد التوابع φ من $\mathcal{W}$ التي تُحقِّق كلّاً من المعادلات التكامليّة الآتية:

① $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = e^x - \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,\mathrm{d}\,t$.

② $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = 1 + x - \int_0^x e^{-2(x-t)}\varphi(t)\,\mathrm{d}\,t$.

③ $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = x - \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}\,t$.

④ $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = x - \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}\,t$.

⑤ $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = \cos x - \int_0^x (x-t)\cos(x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}\,t$.

⑥ $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 2\varphi(x) = \sin x + \int_0^x \varphi(x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}\,t$.

⑦ $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 2\varphi(x) = -\operatorname{sh} x + \int_0^x \varphi(x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}\,t$.

الحل

① تُكتب المعادلة المدروسة بالشكل

$$\varphi = H\mathcal{E}^{[1]} - (H\mathcal{E}^{[1]}) * \varphi$$

وعليه، بوضع $\Phi = \mathcal{L}(\varphi)$، وملاحظة أنّ $\mathcal{L}(H\mathcal{E}^{[1]})(p) = \dfrac{1}{p-1}$ نستنتج

$$\Phi(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-1}\Phi(p)$$

أو $\Phi(p) = \dfrac{1}{p}$. وهذا يقتضي أنّ $\varphi = H$.

② تُكتب المعادلة المدروسة بالشكل

$$\varphi = H(1+X) - (H\mathcal{E}^{[-2]}) * \varphi$$

وعليه، بوضع $\Phi = \mathcal{L}(\varphi)$، وملاحظة أنّ

$$\mathcal{L}(H(1+X))(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \quad \text{و} \quad \mathcal{L}(H\mathcal{E}^{[-2]})(p) = \frac{1}{p+2}$$

نستنتج

$$\Phi(p) = \frac{p+1}{p^2} - \frac{1}{p+2}\Phi(p)$$

أو

$$\Phi(p) = \frac{(p+1)(p+2)}{p^2(p+3)}$$

ومنه

$$\Phi(p) = \frac{2}{3p^2} + \frac{7}{9p} + \frac{2}{9(p+3)}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(t) = \frac{1}{9}(6t + 7 + 2e^{-3t})$$

③ تُكتب المعادلة المدروسة بالشكل

$$\varphi = HX - (H\sin) * \varphi$$

وعليه، بوضع $\Phi = \mathcal{L}(\varphi)$، وملاحظة أنّ

$$\mathcal{L}(HX)(p) = \frac{1}{p^2} \text{ و } \mathcal{L}(H\sin)(p) = \frac{1}{p^2+1}$$

نستنتج

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}\Phi(p)$$

أو $\Phi(p) = \dfrac{p^2+1}{p^2(p^2+2)}$، ومنه

$$\Phi\left(p\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2+2}\right)$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2}t\right)$$

④ تُكتب المعادلة المدروسة بالشكل

$$\varphi = HX - (HX) * \varphi$$

وعليه، بوضع $\Phi = \mathcal{L}(\varphi)$، وملاحظة أنّ $\mathcal{L}(HX)(p) = \frac{1}{p^2}$، نستنتج

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}\Phi(p)$$

أو $\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1}$. وهذا يقتضي أنّ $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(t) = \sin t$.

⑤ تُكتب المعادلة المدروسة بالشكل

$$\varphi = H\cos - (HX\cos) * \varphi$$

وعليه، بوضع $\Phi = \mathcal{L}(\varphi)$، وملاحظة أنّ

$$\mathcal{L}(H\cos)(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

$$\mathcal{L}(HX\cos)(p) = -\left(\frac{p}{p^2+1}\right)' = \frac{p^2-1}{(1+p^2)^2}$$

نستنتج من ذلك

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2+1} - \frac{p^2-1}{(1+p^2)^2}\Phi(p)$$

أو

$$\Phi(p) = \frac{p^2+1}{p(p^2+3)}$$

ومنه

$$\Phi(p) = \frac{1}{3p} + \frac{2}{3}\cdot\frac{p}{p^2+3}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos(\sqrt{3}t)$$

⑥ تُكتب المعادلة المدروسة بالشكل

$$2\varphi = H\sin + \varphi * \varphi$$

وعليه، بوضع $\Phi = \mathcal{L}(\varphi)$، وملاحظة أنّ

$$\mathcal{L}(H\sin)(p) = \frac{1}{p^2+1}$$

نستنتج

$$\big(\Phi(p)\big)^2 - 2\Phi(p) + 1 = 1 - \frac{1}{p^2+1} = \frac{p^2}{p^2+1}$$

أو

$$\left(\Phi(p) - 1 - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\left(\Phi(p) - 1 + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

ولكن

$$\lim_{p\to\infty, p\in\mathbb{R}}\left(\Phi(p) - 1 - \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\right) = -2$$

إذن يوجد $p_0 > 0$ يُحقّق

$$\forall p \in \left[p_0, +\infty\right[, \quad \Phi(p) = 1 - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = 1 - \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-1/2}$$

لا يبدو أنّ هناك تابعاً مألوفاً يُعطى تحويل لابلاس الموافق له بالصيغة السابقة. ولكننا نعلم أنّ

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad (1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} C^n_{\frac{-1}{2}}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} C^n_{2n} x^n$$

وعليه

$$\forall p > 1, \quad \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^{-2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{2^{2n}} C^n_{2n} \frac{1}{p^{2n}}$$

ويكون لدينا

$$\forall p \in \left]1, +\infty\right[, \quad \Phi(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}} C^n_{2n} \frac{1}{p^{2n}}$$

وعليه

$$\forall t \geq 0, \quad \varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!\cdot(n-1)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-1}$$

وهو تابع Bessel من المرتبة 1.

⑦ تُكتب المعادلة المدروسة بالشكل

$$2\varphi = -H\,\mathrm{sh} + \varphi * \varphi$$

وعليه، بوضع $\Phi = \mathcal{L}(\varphi)$، وملاحظة أنّ

$$\mathcal{L}(H\,\mathrm{sh})(p) = \frac{1}{p^2 - 1}$$

نستنتج

$$\left(\Phi(p)\right)^2 - 2\Phi(p) = \frac{1}{p^2 - 1}$$

أو

$$\left(\Phi(p) - 1 - \frac{p}{\sqrt{p^2 - 1}}\right)\left(\Phi(p) - 1 + \frac{p}{\sqrt{p^2 - 1}}\right) = 0$$

ولكن

$$\lim_{p\to\infty, p\in\mathbb{R}}\left(\Phi\left(p\right) - 1 - \frac{p}{\sqrt{p^2 - 1}}\right) = -2$$

إذن يوجد $p_0 > 0$ يُحقّق

$$\forall p \in \left[p_0, +\infty\right[, \quad \Phi(p) = 1 - \frac{p}{\sqrt{p^2 - 1}}$$

لا يبدو أنّ هناك تابعاً مألوفاً يُعطى تحويل لابلاس الموافق له بالصيغة السابقة. ولكننا نعلم أنّ

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad (1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\frac{-1}{2}}^{n}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} C_{2n}^{n} x^n$$

وعليه

$$\forall p > 1, \quad \frac{p}{\sqrt{p^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-p^{-2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^{n} \frac{1}{p^{2n}}$$

ويكون لدينا

$$\forall p \in \left]1,+\infty\right[, \quad \Phi(p) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^{n} \frac{1}{p^{2n}}$$

وعليه يكون

$$\forall t \geq 0, \quad \varphi(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\cdot(n-1)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-1}$$

إذن $\varphi = -I_1$ حيث I_1 هو تابع Bessel المعدّل من المرتبة 1. ■

التمرين 16. استفد من تحويلات لابلاس لإيجاد حلّ المعادلات التفاضليّة التالية، والذي يُحقِّق شرط البدء المرافق لكلٍّ منها:

$$① : \begin{cases} y''' - 9y'' + 24y' - 16y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = -11, \quad y''(0) = 61 \end{cases}$$

$$② : \begin{cases} y'' + ty' - 2y = 4 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$③ : \begin{cases} y'' + ty' - 2y = 0 \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

الحل

① لنضع $\Phi = \mathcal{L}(Hy)$ عندئذ لمّا كان

$$\mathcal{L}(Hy')(p) = p\Phi(p) - y(0) = p\Phi(p)$$
$$\mathcal{L}(Hy'')(p) = p^2\Phi(p) - py(0) - y'(0) = p^2\Phi(p) + 11$$
$$\mathcal{L}(Hy''')(p) = p^3\Phi(p) - p^2y(0) - py'(0) - y''(0) = p^3\Phi(p) + 11p - 61$$

استنتجنا بعد التعويض في المعادلة التفاضليّة أنّ

$$\begin{aligned}\Phi(p) &= \frac{160-11p}{p^3-9p^2+24p-16} = \frac{160-11p}{(p-4)^2(p-1)}\\ &= \frac{116}{3(p-4)^2} - \frac{149}{9(p-4)} + \frac{149}{9(p-1)}\end{aligned}$$

ومن ثَمّ نجد الحلّ المطلوب

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \frac{1}{9}\Big((348t-149)e^{4t} + 149e^{t}\Big)$$

② لنضع $\Phi = \mathcal{L}(Hy)$ عندئذ لمّا كان

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(XHy')(p) &= -(\mathcal{L}(Hy'))'(p) = -(p\Phi(p))' = -p\Phi'(p) - \Phi(p)\\ \mathcal{L}(Hy'')(p) &= p^2\Phi(p) - py(0) - y'(0) = p^2\Phi(p)\end{aligned}$$

استنتجنا بعد التعويض في المعادلة التفاضليّة أنّ

$$(p^2-3)\Phi(p) - p\Phi'(p) = \frac{4}{p}$$

لنعرّف $F(p) = p^3e^{-p^2/2}\Phi(p)$ ، ثُمّ لنلاحظ أنّ

$$F'(p) = p^2e^{-p^2/2}\Big(p\Phi'(p) - (p^2-3)\Phi'(p)\Big) = -4pe^{-p^2/2}$$

وعليه يوجد ثابتٌ κ يُحقّق $F(p) = \kappa + 4^{-p^2/2}$ ، ومن ثَمّ

$$\Phi(p) = \kappa\frac{e^{p^2/2}}{p^3} + \frac{4}{p^3}$$

ولمّا كان $\lim\limits_{p\to+\infty}\Phi(p) = 0$ استنتجنا أنّ $\kappa = 0$ وهذا يقتضي أنّ $\Phi(p) = \dfrac{4}{p^3}$ ، ومن ثَمّ

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = 2t^2$$

③ لنضع $\Phi = \mathcal{L}(Hy)$ عندئذ لمّا كان

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(XHy')(p) &= -(\mathcal{L}(Hy'))'(p) = -(p\Phi(p)-2)' = -p\Phi'(p) - \Phi(p)\\ \mathcal{L}(Hy'')(p) &= p^2\Phi(p) - py(0) - y'(0) = p^2\Phi(p) - 2p\end{aligned}$$

استنتجنا بعد التعويض في المعادلة التفاضليّة أنّ

$$(p^2-3)\Phi(p) - p\Phi'(p) = 2p$$

لنعرّف $F(p) = p^3 e^{-p^2/2}\Phi(p)$ ، ثُمّ لنلاحظ أنّ

$$F'(p) = p^2 e^{-p^2/2}\Big(p\Phi'(p) - (p^2-3)\Phi'(p)\Big) = -2p^3 e^{-p^2/2}$$

وعليه يوجد ثابتٌ κ يُحقّق $F(p) = \kappa + 2(p^2+2)e^{-p^2/2}$ ، ومن ثَمّ

$$\Phi(p) = \kappa\frac{e^{p^2/2}}{p^3} + \frac{2p^2+4}{p^3}$$

ولمّا كان

$$\lim_{p\to+\infty}\Phi(p) = 0$$

استنتجنا أنّ $\kappa = 0$ وهذا يقتضي أنّ $\Phi(p) = \dfrac{2}{p} + \dfrac{4}{p^3}$ ، ومن ثَمّ

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad y(t) = 2+2t^2$$

وبذا يكتمل الحل.

التمرين 17. لنتأمّل التابع

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t\sqrt{t}}\exp(-1/t) & : \quad t>0 \\ 0 & : \quad t\le 0\end{cases}$$

1. أثبت أنّ f ينتمي إلى الفضاء $\mathcal{W}$ ، وأنّ فاصلة تزايده $\sigma(f)$ تساوي 0 .
2. احسب التكامل $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}\,t$.
3. ليكن $F = \mathcal{L}(f)$. أثبت أنّه مهما تكن a و p من $\mathbb{R}_+^*$ يكن

$$0\le\sqrt{\pi} - F(p) \le p\int_0^a t\,f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

4. أثبت أنّ التابع F هو حلٌّ على $\mathbb{R}_+^*$ للمسألة التفاضليّة التالية :

$$\begin{cases} py''(p) + \dfrac{1}{2}y'(p) - y(p) = 0 \\ \lim\limits_{p\to 0} y(p) = \sqrt{\pi}, \ \lim\limits_{p\to\infty} y(p) = 0 \end{cases}$$

5. أوجد حلّ المسألة التفاضليّة السابقة بإجراء تغييرٍ في المتحوّل $u = \sqrt{p}$ ، واستنتج عبارة F .

6. لتكن a من $\mathbb{R}_+^*$ ، احسب $\mathcal{L}(g_a)$ في حالة التابع

$$g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_a(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}}\exp(-a/t) & : \ t > 0 \\ 0 & : \ t \le 0 \end{cases}$$

الحل

1. في الحقيقة، إنّ التابع f تابعٌ مستمرٌّ على كامل $\mathbb{R}$ ، وهو محدودٌ لأنّه يسعى إلى 0 عند $+\infty$ فهو إذن f ينتمي إلى الفضاء $\mathcal{W}$ ، وفاصلة تزايده $\sigma(f)$ تُحقّق $\sigma\left(f\right) \le 0$. وكذلك من الواضح أنّ

$$\forall\lambda < 0, \quad \lim_{t\to\infty} f(t)e^{-\lambda t} = +\infty$$

إذن $\sigma(f) = 0$.

2. بإجراء تغيير المتحوّل $t \leftarrow 1/u$ نستنتج أنّ

$$\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{1}{t\sqrt{t}}e^{-1/t}\,\mathrm{d}t = \int_{1/A}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u}}e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

ومن ثَمّ

$$\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}}e^{-u}u = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

3. ليكن $F = \mathcal{L}(f)$. ولتكن p من $\mathbb{R}_+^*$ عندئذ

$$\sqrt{\pi} - F(p) = \int_0^\infty (1 - e^{-pt})f(t)\,\mathrm{d}t$$

ولأنّ التابعين $t \mapsto (1 - e^{-pt})$ و f موجبان على $\mathbb{R}_+$ استنتجنا أنّ $0 \le \sqrt{\pi} - F(p)$.

ومن جهة أخرى لدينا المتراجحة $\forall x\in[0,1],\,1-x\le e^{-x}$ ، إذن بالاستفادة من المتراجحتين

$$\forall t\ge a,\ \ (1-e^{-pt})\le 1 \quad \text{و} \quad \forall t\in[0,a],\ \ (1-e^{-pt})\le pt$$

نجد

$$0\le\sqrt{\pi}-F(p)\le p\int_0^a t\,f(t)\,\mathrm{d}\,t+\int_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

4. لتكن $\varepsilon>0$ نختار a تُحقّق $\int_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}\,t<\dfrac{\varepsilon}{2}$ ، ولنعرّف p_0 وفق

$$p_0=\frac{\varepsilon}{2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}\,t}$$

عندئذ استناداً إلى المتراجحة السابقة يكون لدينا في حالة $0<p<p_0$ ما يأتي

$$0\le\sqrt{\pi}-F(p)<\varepsilon$$

إذن

$$\lim_{p\to 0}F(p)=\sqrt{\pi}$$

ومن جهة أخرى، لمّا كان f محدوداً عرّفنا $M=\sup\limits_{\mathbb{R}}f$ وصار لدينا

$$\forall p\in\mathbb{R}_+^*,\quad 0\le F(p)\le M\int_0^\infty e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t=\frac{M}{p}$$

وهذا يقتضي أنّ $\lim\limits_{p\to\infty}F(p)=0$.

وأخيراً بملاحظة أنّ $(X^2f)(t)=\sqrt{t}\,e^{-1/t}$ ومن ثَمّ

$$(X^2f)'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-1/t}+f(t)=\frac{1}{2}(Xf)(t)+f(t)$$

نستنتج أنّ $(X^2f)'=\dfrac{1}{2}Xf+f$. ولكن $F''(p)=\mathcal{L}(X^2f)(p)$ ، ولأنّ X^2f ينعدم عند 0 استنتجنا أنّ $pF''(p)=\mathcal{L}((X^2f)')(p)$ ، ومن ثَمّ بتطبيق تحويل لابلاس نجد

$$pF''(p)=\frac{1}{2}\mathcal{L}(Xf)(p)+\mathcal{L}(f)(p)=-\frac{1}{2}F'(p)+F(p)$$

فنكون بذلك قد أثبتنا أنّ F هو حلٌّ للمسألة التفاضليّة

$$\mathcal{P}:\begin{cases} py''(p)+\dfrac{1}{2}y'(p)-y(p)=0 \\ \lim\limits_{p\to 0} y(p)=\sqrt{\pi},\ \lim\limits_{p\to\infty} y(p)=0 \end{cases}$$

5. لحلّ المسألة التفاضليّة $\mathcal{P}$ نجري تغييراً في المتحوّل بوضع $u=\sqrt{p}$، فنعرّف $Y(u)=y(u^2)$. عندئذ نجد أنّ $\dfrac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,u}=2uy'(p)$ ومن ثَمّ

$$\frac{\mathrm{d}^2\,Y}{\mathrm{d}\,u^2}=2y'(p)+4py''(p)=4y(p)=4Y(u)$$

وهذا يبرهن على وجود ثابتين α و β يُحقّقان

$$\forall u\in\mathbb{R}_+^*,\quad Y(u)=\alpha e^{2u}+\beta e^{-2u}$$

ولكن

$$\lim_{u\to 0} Y(u)=\lim_{p\to 0} y(p)=\sqrt{\pi} \quad \text{و} \quad \lim_{u\to\infty} Y(u)=\lim_{p\to\infty} y(p)=0$$

إذن

$$\forall u\in\mathbb{R}_+^*,\quad Y(u)=\sqrt{\pi}e^{-2u}$$

وبالعودة إلى y نستنتج أنّ الحلّ الوحيد للمسألة التفاضليّة المدروسة هو

$$\forall p\in\mathbb{R}_+^*,\quad y(p)=\sqrt{\pi}e^{-2\sqrt{p}}$$

ولأنّ F هو أيضاً حلٌّ للمسألة $\mathcal{P}$ استنتجنا من وحدانية الحلّ أنّ

$$\forall p\in\mathbb{R}_+^*,\quad F(p)=\sqrt{\pi}\,e^{-2\sqrt{p}}$$

6. لتكن a من $\mathbb{R}_+^*$، ولنتأمّل التابع

$$g_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g_a(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}}\exp(-a/t) & : \quad t>0 \\ 0 & : \quad t\le 0 \end{cases}$$

نلاحظ أوّلاً أنّ $g_1=Xf$ إذن

$$\mathcal{L}(g_1)=\mathcal{L}(Xf)=-(\mathcal{L}(f))'$$

ومن ثمّ

$$\mathcal{L}(g_1)\big(p\big) = -F'(p) = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{-2\sqrt{p}}$$

كما نلاحظ أنّ

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad g_1\left(\frac{t}{a}\right) = H(t)\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t}}e^{-a/t} = \sqrt{a}\,g_a(t)$$

ومن ثمّ، في حالة p من $\mathbb{R}_+^*$، نجد

$$\sqrt{a}\mathcal{L}(g_a)(p) = \int_0^{\infty} g_1\left(\frac{t}{a}\right)e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t = a\int_0^{\infty} g_1(u)e^{-pau}\,\mathrm{d}\,u = a\mathcal{L}(g_1)(pa)$$

ومنه

$$\mathcal{L}(g_a)(p) = \sqrt{a}\,\mathcal{L}(g_1)(pa) = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{-2\sqrt{pa}}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

ملاحظة : كان بالإمكان حساب $F(p)$ مباشرة كما يأتي :

$$\begin{aligned}
F(p) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}e^{-pt-1/t}\,\mathrm{d}\,t \\
&= 2\int_0^{\infty} \frac{p^{1/4}}{u^2}\exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{u^2} - \sqrt{p}u^2\right)\mathrm{d}\,u && : t \leftarrow u^2/\sqrt{p} \\
&= 2p^{1/4}e^{-2\sqrt{p}}\int_0^{\infty} \frac{1}{u^2}\exp\left(-\sqrt{p}\left(u^{-1}-u\right)^2\right)\mathrm{d}\,u \\
&= 2p^{1/4}e^{-2\sqrt{p}}\int_0^{\infty} \exp\left(-\sqrt{p}\left(u-u^{-1}\right)^2\right)\mathrm{d}\,u && : u \leftarrow 1/u \\
&= p^{1/4}e^{-2\sqrt{p}}\int_0^{\infty} \left(1+\frac{1}{u^2}\right)\exp\left(-\sqrt{p}\left(u-u^{-1}\right)^2\right)\mathrm{d}\,u \\
&= e^{-2\sqrt{p}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,\mathrm{d}\,s\right) = \sqrt{\pi}\,e^{-2\sqrt{p}} && : s \leftarrow \sqrt[4]{p}\left(u-\frac{1}{u}\right)
\end{aligned}$$

تطبيق : حلّ مسألة الانتقال الحراري في نصف مستقيم.

لنتأمّل سلكاً معدنياً على هيئة نصف مستقيم لانهائي OX. نفترض أنّ درجة حرارته تساوي 0 في لحظة البدء $(t = 0)$. يجري تسخين السلك برفع حرارة النقطة O وفق تابعٍ معطى للزمن وليكن q. ونفترض أنّ q تابعٌ من الصفّ C^1 محدودٌ هو ومشتقّه ويُحقّق $q(0) = 0$.

المطلوب هو تعيين المقدار $u(x,t)$ الذي يُمثّل درجة حرارة النقطة من السلك التي فاصلتها x في اللحظة t. لتعيين التابع $u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$، نلاحظ أوّلاً أنّ كون درجة حرارة السلك تساوي 0 في لحظة البدء يعني أنّ

$$\forall x > 0,\, u(x,0) = 0$$

أمّا تسخين الطرف O وفق التابع q فيعني أنّ

$$\forall t > 0,\, u(0,t) = q(t)$$

وأخيراً نعلم أنّ هذا التابع يُحقّق المعادلة التفاضليّة الجزئيّة التي تصف الانتقال الحراري أي

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$$

إذن علينا إيجاد حلّ مسألة الشروط الحدّية

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \\ \forall x > 0,\;\; u(x,0) = 0 \\ \forall t > 0,\;\; u(0,t) = q(t) \end{cases}$$

لإيجاد الحلّ نفترض أنّه مهما يكن x من $\mathbb{R}_+^*$ ينتمِ التابعان $u(x,\cdot)$ و $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\cdot)$ إلى الفضاء $\mathcal{W}$. عندئذ نتأمّل في حالة x من $\mathbb{R}_+^*$ تحويل لابلاس $\Phi(x,\cdot) = \mathcal{L}(u(x,\cdot))$. كما نتأمّل $Q = \mathcal{L}(q)$، ويمكننا أن نفترض أنّهما معرّفان على مجال $I = \left]\sigma_0, +\infty\right[$.

عندئذ نستنتج من المعادلة التفاضليّة الجزئيّة أنّ

$$p\Phi(x,p) - u(x,0) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,\cdot)\right)(p) = \kappa \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,p)$$

ولأنّ $u(x,0)=0$ ، استنتجنا أنّه في حالة p من I يكون التابع $x\mapsto\Phi(x,p)$ حلاً للمعادلة التفاضليّة العاديّة : $y''-\frac{p}{\kappa}y=0$. إذن يوجد مقداران A_p و B_p يتبعان p فقط يُحقّقان

$$\Phi(x,p)=A_pe^{-\sqrt{p/\kappa}\,x}+B_pe^{\sqrt{p/\kappa}\,x}$$

ولكن يجب أن يكون $x\mapsto\Phi(x,p)$ تابعاً محدوداً، لأنّ f محدودٌ. كما يجب أن يكون

$$\Phi(0,p)=Q(p)$$

إذن نستنتج مما سبق أنّ

$$\forall x>0,\forall p>\sigma_0,\quad \Phi(x,p)=Q(p)\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{\kappa}}\sqrt{p}\right)$$

ولكن رأينا أنّه إذا كان $f(t)=H(t)\frac{1}{t\sqrt{t}}e^{-1/t}$ كان $\mathcal{L}(f)(p)=\sqrt{\pi}e^{-2\sqrt{p}}$. وعليه مهما تكن $\alpha>0$ يكن $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\alpha^2\sqrt{\pi}}f^{[1/\alpha^2]}\right)=e^{-2\alpha\sqrt{p}}$ إذن، باختيار $\alpha=\frac{x}{2\sqrt{\kappa}}$ نستنتج أنّ

$$\mathcal{L}\left(\frac{4\kappa}{x^2\sqrt{\pi}}f^{[4\kappa/x^2]}\right)=\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{\kappa}}\sqrt{p}\right)$$

فإذا عرفنا في حالة (x,t) من $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ المقدار

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x}{2t\sqrt{\pi\kappa t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4\kappa t}\right) & : \quad t>0\\ 0 & : \quad t\leq 0\end{cases}$$

كان $\mathcal{L}(G(x,\cdot))(p)=\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{\kappa}}\sqrt{p}\right)$ ومن ثَمّ

$$\forall x>0,\quad \Phi(x,\cdot)=\mathcal{L}(q)\mathcal{L}(G(x,\cdot))=\mathcal{L}\big(q*G(x,\cdot)\big)$$

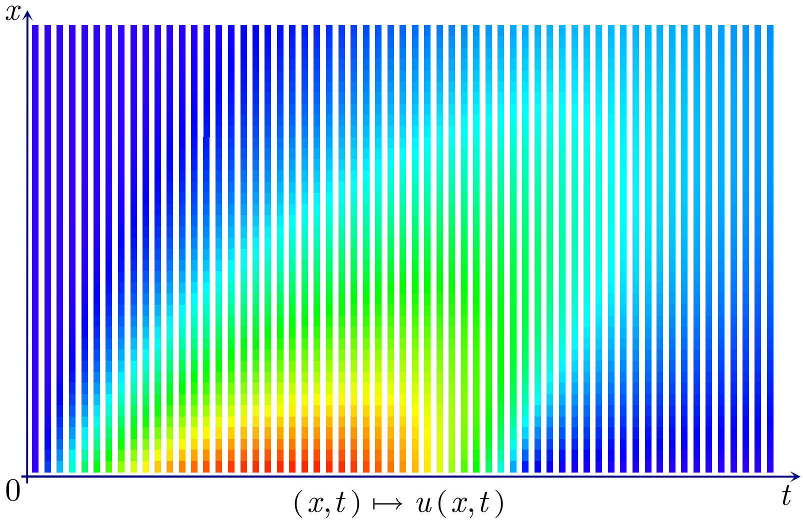
وعليه، لا بُدّ أن يكون

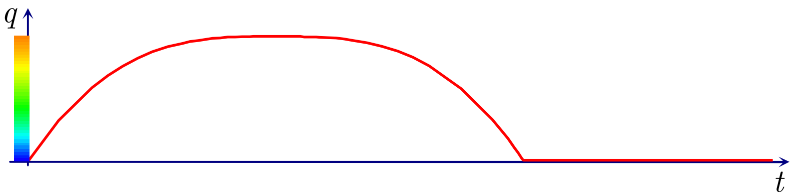
$$u(x,\cdot)=q*G(x,\cdot)$$

أو

$$\forall x > 0, \forall t > 0 \qquad u(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^t \frac{q(t-s)}{s\sqrt{s}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa s}\right) \mathrm{d}\, s$$

ونجد في الشكل الآتي مثالاً عدديّاً يبيِّن حرارة السلك في اللحظات المختلفة.





وهو الحلّ المطلوب للمسألة المطروحة.

دليل مفردات الجزء الرابع

العدد هو رقم صفحة يظهر فيها المفهوم المشار إليه ظهوراً معنوياً

احتلَّ الدكتور عمران قوبا المركز الثاني في مسابقة انتقاء أساتذة التعليم العالي على مستوى الجمهورية الفرنسية "أغرغاسيون" في عام 1985، وحصل على شهادة الدكتوراه في الرياضيات البحتة في اختصاص التحليل التابعي من جامعة بيير وماري كوري في باريس عام 1990.

يدرّس الدكتور قوبا الرياضيات في المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا منذ عام 1990. وقد وضع في هذه السلسلة من الكتب العلميّة أغلب الموضوعات التي درّسها في المعهد العالي في مجالات الجبر العام، والجبر الخطّي، والتحليل، والمعادلات التفاضلية، والتحليل العقدي، والتحويلات التكامليَّة وغيرها، وقد أغنى السلسلة بالعديد من الأمثلة والتطبيقات والمسائل والتمرينات.

تمثّل هذه السلسلة أداة مهمّة لكلِّ الراغبين في دراسة الرياضيّات بصفتها علماً وفنّاً قائمَيْن بذاتهما، أو لأولئك الراغبين في استعمال الرياضيّات بصفتها أداة مهمّة ومفيدة في جميع العلوم الحديثة.

في هذا الجزء الرابع من سلسلة التحليل، يدرس القارئ مبادئ التحليل العقدي: المتسلسلات الصحيحة والتوابع الهولومورفية ونظرية الرواسب، وتحويلات لابلاس بصفتها نوعاً مهماً من التحويلات التكاملية ذات التطبيقات الهندسية العديدة.

ISBN 978-9933-9-2611-3
9 789933 926113

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا
Higher Institute for Applied Sciences and Technology
www.hiast.edu.sy