المعهد العالي
للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

الدكتور عمران قوبا

التحليل

1

المتتاليات والمتسلسلات العددية

استمرار التوابع واشتقاقها

التحليل

الجزء الأول

الطبعة الثانية

الدكتور عمران قوبا

منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا
2017

التحليل

الجزء الأول

الدكتور عمران قوبا

تصميم الغلاف: المؤلف

من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

الجمهورية العربية السورية

الطبعة الأولى 2009، الطبعة الثانية 2017.

Analysis

Volume 1

Omran Kouba

Publications of the

Higher Institute for Applied Sciences and Technology (HIAST)

Syrian Arab Republic.

First Printing 2009, Second Printing 2017.

ISBN 978-9933-9228-8-7

منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

- "الجبر، الجزء الأول، مبادئ الجبر المجرد"، للدكتور عمران قوبا، الطبعة الأولى 2009، الطبعة الثانية 2017.
- "التحليل، الجزء الأول"، للدكتور عمران قوبا، الطبعة الأولى 2009، الطبعة الثانية 2017.
- "كيمياء المحاليل المائية"، للدكتورة يمن الأتاسي، الطبعة الأولى 2009، الطبعة الثانية 2016.
- "الأنظمة الرادارية في مواجهة التشويش والخداع"، للدكتور علي طه، 2011.
- "ميكانيك النقطة المادية"، للدكتور مصطفى العليوي والدكتور هاني قوبا، الإصدار الأول 2011، الإصدار الثاني 2016.
- "الجبر، الجزء الثاني، الجبر الخطي"، للدكتور عمران قوبا، 2017.
- "التحليل، الجزء الثاني"، للدكتور عمران قوبا، 2017.
- "المرجع في الرسم الصناعي، الجزء الثالث"، للدكتور محمد بدر قويدر، 2017.
- "مدخل إلى كيمياء المياه: تلوث- معالجة- تحليل"، للدكتور نصر الحايك، 2017.
- "الترموديناميك"، للدكتور عقيل سلوم، 2017.
- "دليل الرسام الصناعي"، للدكتور مصطفى الجرف، 2017.

سيصدر لاحقاً:

- "التحليل، الجزء الثالث"، للدكتور عمران قوبا.
- "التحليل، الجزء الرابع"، للدكتور عمران قوبا.
- "التحليل، الجزء الخامس"، للدكتور عمران قوبا.

لمعلومات أوفى عن المنشورات وطلب نسخة ورقية أو تحميل المتاح منها إلكترونياً، يمكن الاطلاع على موقع المعهد الإلكتروني:

www.hiast.edu.sy

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا مؤسسة حكومية للتعليم العالي أحدثت بموجب المرسوم التشريعي رقم /24/ لعام 1983، وذلك بهدف إعداد أطر علمية متميزة من مهندسين وباحثين للإسهام الفاعل في عملية التطوير العلمي والتنمية في الجمهورية العربية السورية.

يمنح المعهد العالي درجة الإجازة في الهندسة في الاتصالات والمعلوماتية والنظم الإلكترونية والميكاترونيكس وعلوم وهندسة المواد وهندسة الطيران. يقبل المعهد العالي لدراسة هذه الاختصاصات شريحة منتقاة من المتفوقين في الشهادة الثانوية من الفرع العلمي. يتيح المعهد العالي أيضاً برامج ماجستير أكاديمي في نظم الاتصالات وفي التحكم والروبوتيك وفي نظم المعطيات الكبيرة ونظم المعلومات ودعم القرار وفي علوم وهندسة المواد وعلوم وهندسة البصريات. ويمنح المعهد العالي درجة الدكتوراه في الاتصالات والمعلوماتية ونظم التحكم والفيزياء التطبيقية. تُحدث في المعهد العالي اختصاصات جديدة بحسب متطلبات سوق العمل وتوجهات البحث والتطوير المحلية والعالمية.

يمتاز المعهد بأطره الكفوءة ذات التأهيل العالي وبمختبراته المجهزة تجهيزاً عالياً وببنيته التحتية الفريدة في القطر. إلى جانب النشاط التعليمي، يمارس المعهد العالي عبر جهود أطره وفعالياته العلمية المختلفة نشاطاً حثيثاً في البحث والتطوير، إذ ينفذ مشاريع متنوعة لصالح الجهات العامة والخاصة في القطر، كما يتعاون مع جهات خارج القطر في بعض المشاريع البحثية والتطويرية. يسعى المعهد أيضاً، عبر دورات تدريبية نظرية وعملية متاحة للقطاعين العام والخاص وللأفراد، إلى إفادة أوسع فئة من المهتمين من إمكانيات فريقه العلمي ومختبراته.

استكمالاً لدور المعهد العالي الرائد في مجال التعليم ونشر العلم، يحرص المعهد العالي على نشر كتب علمية عالية المستوى من نتاج أطره العلمية، منها ما هو تدريسي يوافق المناهج في المعهد العالي ويفيد شريحة واسعة من الطلاب الجامعيين عموماً، ومنها ما هو علمي ثقافي. يخضع الكتاب قبل نشره إلى عملية تقويم علمي من مجموعة منتقاة بعناية من أصحاب الاختصاص، إضافةً إلى تدقيق لغوي حفاظاً على سوية عالية للمنشورات باللغة العربية.

يتيح المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا بعضاً من منشوراته على موقعه على الشابكة تحت رخصة المشاع الإبداعي لتعميم الفائدة على شريحة واسعة من القراء.

للتواصل مع المعهد العالي والاطلاع على شروط النشر وآخر المنشورات وتحميل المتاح منها:

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، دمشق، ص.ب 31983
هاتف +(963)(11)5123819
فاكس +(963)(11)5140760
بريد إلكتروني contact@hiast.edu.sy
موقع إلكتروني www.hiast.edu.sy

شكر

أتقدّم بالشكر العميق إلى جميع الزملاء الذين أغنوا بملاحظاتهم فحوى هذا الكتاب، وأسهموا في إعطائه شكله النهائي هذا.

وأخصُّ بالشكر المعلِّم الفاضل الأستاذ الدكتور موفق دعبول، والأستاذ الدكتور محمّد البغدادي والدكتور نبيه عودة قراءتهم المتمعّنة لهذا الكتاب وعلى الملاحظات القيّمة التي أبدوها عليه. وأخيراً، وليس آخراً، أتقدم بجزيل الشكر والامتنان إلى الأستاذ الدكتور مكّي الحسني الذي دقّق الكتاب لغوياً وأسهم بملاحظاته ومقترحاته في تحسين صياغة العديد من الفقرات.

محتوى الجزء الأوّل

مقدّمة

الفصل الأوّل

حقل الأعداد الحقيقيّة

الفصل الثاني

المتتاليات العدديّة

الفصل الثالث

المتسلسلات العدديّة

الفصل الرابع

التوابع لمتحوّل حقيقي : النهايات والاستمرار

الفصل الخامس

التوابع لمتحوّل حقيقي : الاشتقاق

محتوى الجزء الثاني

مقدّمة

الفصل السادس

التوابع المألوفة

الفصل السابع

مقارنة التوابع والنشر المحدود

الفصل الثامن

متتاليات ومتسلسلات التوابع

الفصل التاسع

التوابع الأصليّة والتكامل المحدود

الفصل العاشر

التكاملات المعمَّمة أو المعتلّة
والتكاملات التابعة لوسيط

محتوى الجزء الثالث

مقدّمة

الفصل الحادي عشر
الفضاءات الشعاعيّة المنظّمة

الفصل الثاني عشر
التوابع لعدّة متحوّلات

الفصل الثالث عشر

منشأ المعادلات التفاضليّة وتصنيفها

الفصل الرابع عشر

المعادلات التفاضليّة السلّمية الشهيرة من المرتبة الأولى

الفصل الخامس عشر

المعادلات التفاضليّة الخطّية

الفصل السادس عشر

المبرهنات الأساسيّة المتعلّقة بالمعادلات التفاضليّة العاديّة

محتوى الجزء الرابع

مقدّمة

الفصل السابع عشر

المتسلسلات الصحيحة

الفصل الثامن عشر

نظريّة كوشي والتوابع الهولومورفيّة

الفصل التاسع عشر

النشر بمتسلسلات لوران ونظريّة الرواسب

الفصل العشرون

تحويلات لابلاس وتطبيقاتها

محتوى الجزء الخامس

مقدّمة

الفصل الحادي والعشرون

متسلسلات فورييه

الفصل الثاني والعشرون

مقدّمة في نظريّة القياس والتكامل

الفصل الثالث والعشرون

تحويلات فورييه

الفصل الرابع والعشرون

التوزيعات

مقدّمة

التحليل الرياضيّ هو فرعٌ من فروع الرياضيّات يتعامل مع الأعداد الحقيقيّة والأعداد العقديّة والتوابع، وهو يدرس مفاهيم الاستمرار و التكامل والتفاضل في أطرها العامّة.

تاريخياً، يمكن إرجاع بدايات هذا الفرع من فروع الرياضيّات إلى القرن السابع عشر، مع اختراع نيوتن ولايبنتز حسابَي التفاضل والتكامل، ثُمّ تطوّرت موضوعات المعادلات التفاضليّة وتحليل فورييه، والتوابع المولّدة في العمل التطبيقي في القرنين السابع عشر والثامن عشر، واستُعملت تقانات حسابَي التفاضل والتكامل بنجاح في تقريب العديد من المسائل المنقطعة، والمسائل المتّصلة.

وبقي تعريف التابع موضع نقاش ومحاورة بين الرياضيّين طوال القرن الثامن عشر، وكان كوشي CAUCHY أوّل من وضع التحليل الرياضي على أسس منطقيّة صلبة بإدخاله مفهوم متتاليات كوشي، وذلك مع بداية القرن التاسع عشر. كما أرسى كوشي القواعد الصوريّة الأساسيّة للتحليل العقدي. ودرسَ بواسون POISSON وليوفيل LIOUVILLE وفورييه FOURIER وغيرهم المعادلات التفاضليّة الجزئيّة والتحليل التوافقي.

وفي منتصف القرن التاسع عشر وضع ريمان RIEMANN نظريّته في التكامل. وشهد الثُلث الأخير من ذلك القرن إعادة التنظيم الأخيرة للمفاهيم الأساسيّة في التحليل الرياضي بجهود فايرشتراس WEIERSTRASS ، الذي رأى أنّ النظرة الهندسيّة لمفاهيم النهاية والاستمرار تقود أحياناً إلى استنتاجات خاطئة، فوضع ما يسمّى تعريف ε-δ للنهاية. وبعدها تنبّه الرياضيّيون إلى أنّهم يفترضون وجود مجموعة "متّصلة" من الأعداد الحقيقيّة دون أي إثبات لوجود هذه المجموعة، فأنشأ ديدكند DEDEKIND مجموعة الأعداد الحقيقيّة مستعملاً ما سُميّ لاحقاً باسم "مقاطع ديدكند"، وجرت في الوقت نفسه تقريباً محاولات تطوير المبرهنات المتعلّقة بتكامل ريمان، وهذا ما أدّى إلى دراسة "قياس" المجموعات التي تكون عليها التوابع الحقيقيّة منقطعة.

وبدأت تظهر «الوحوش» المتمثّلة بتوابع غريبة مثل التوابع الحقيقيّة التي لا تقبل الاشتقاق عند أيّة نقطة، أو تلك التوابع التي تملأ منحنياتها الفراغ. وفي هذه الحقبة، طوّر جوردان JORDAN وبورِل BOREL نظرّية القياس، وطوّر كانتور CANTOR ما يُعرف اليوم بالنظريّة «الساذجة» للمجموعات.

ومع بداية القرن العشرين صار التحليل الرياضي يُصاغ باستعمال المفاهيم الجديدة في نظريّة المجموعات، وحلّ لوبيغ LEBESGUE مسألة نظريّة القياس والتكامل، وأدخل هِلبرت HILBERT مفهوم الفضاءات التي عُرفت فيما بعدُ باسمه لحل المعادلات التكامليّة، وكان مفهوم الفضاء الشعاعي المنظّم في الجوّ، إذْ أنشأ باناخ BANACH في العشرينيّات من ذلك القرن التحليل التابعي.

بدأت مفاهيم التوابع المعمّمة أو التوزيعات تظهر في نهايات القرن التاسع عشر، وذلك في إطار توابع غرين GREEN، وتحويلات لابلاس LAPLACE ونظريّة ريمان للمتسلسلات المثلثيّة التي هي ليست متسلسلات فورييه لتوابع قابلة للمُكاملة على سبيل المثال. وقاد الاستعمال المُكثّف لتحويلات لابلاس، وطرائق الحساب الرمزي إلى ما صار يُعرف بحساب العمليات. حملت هذه الطرائق سمعة سيّئة بين الرياضيين لأنّ تعليل صحّتها كان يعتمد على متسلسلات متباعدة.

أمّا المرّة الأولى التي احتل فيها مفهوم التابع المُعمّم موقعاً مركزيّاً في الرياضيّات فقد جاءت في إطار تكامل لوبيغ، إذ صار التابع القابل للمكاملة بمعنى لوبيغ مُكافئاً لأي تابع يتفق معه اتفاقاً شبه أكيد. وظهر تابع ديراك δ في العشرينيّات والثلاثينيّات من القرن العشرين، إذْ راح ديراك DIRAC يتعامل مع القياس بوصفه تابعاً بالمعنى التقليدي.

وجاء التتويج النهائي لهذه المفاهيم في نظريّة التوزيعات لشوارتز SCHWARTZ وذلك في نهاية الأربعينيّات من القرن العشرين. تكمن نقطة الضعف الأساسيّة في هذه النظريّة في عدم إمكان معالجة

المسائل اللاخطيّة في إطارها، فالتوزيعات بمعنى شوارتز لا تؤلّف جبراً، ولا يمكن حساب جداء ضرب التوزيعات كما تُضرب التوابع.

يهدف هذا المؤلَّف إلى دراسة التحليل الرياضي، وهو موجّه لطلابٍ سيتابعون دراستهم في مجالات هندسيّة، ومكوّن من خمسة أجزاء.

نعالج في هذا الجزء الأوّل الموضوعات التالية :

- يتضمّن الفصل الأول تقديماً لمجموعة الأعداد الحقيقيّة، وتذكِرة بخواصها المتعارفة، وذلك دون الدخول في تفاصيل إنشاء هذه المجموعة.
- ويدرس الفصل الثاني المتتاليات العدديّة، تقاربها وتباعدها والمبرهنات الشهيرة المتعلِّقة بها.
- يتابع الفصل الثالث دراسة المتسلسلات العدديّة باستعمال تقنيات المتتاليات العدديّة وتقنيات أخرى جديدة.
- يعالج الفصل الرابع مفهومَي النهاية والاستمرار، ويورد المبرهنات الأساسيّة حول التوابع المستمرَّة.
- يتصدّى الفصل الخامس لدراسة اشتقاق التوابع، وخواص التوابع القابلة للاشتقاق، وتطبيقات ذلك في دراسة تغيرات التوابع، والتوابع المحدّبة.

هذا ويتبع كل فصل من فصول الكتاب مجموعة من التمرينات المتباينة في درجات صعوبتها، تهدف إلى مساعدة الطالب على اكتساب المهارات اللازمة، واستيعاب المفاهيم المدروسة.

ومن المفيد هنا الإشارة إلى أنّ دراسة كتاب رياضيات تختلف اختلافاً جوهرياً عن قراءة قصّة أو كتاب شعر، يستمتع بهما المرء جالساً على كرسي مريح، إذ لا بُد من قلم وورقة ومنضدة نجلس إليها، نعالج المادّة النظريّة ونُغالب التمرينات حلاً ومعاناة.

لذلك ننصح القارئ ألاّ يطّلع على الحلول المقترحة للتمارين إلاّ بعد أن يستنفد جميع محاولات حلها، وعليه في جميع الأحوال إعادة صياغة الحلّ بلغته، ليضمن الاستيعاب الكامل للمفاهيم والأفكار المُعالجة.

ختاماً، أُزجي الشكر لجميع الزملاء الذين ساهموا في إخراج هذا الكتاب إلى النّور، وأُعرب سلفاً عن شكري لكلّ زميل يُبدي ملاحظة أو انتقاداً بنّاءين على فحوى هذا الكتاب.

كانون الثاني 2008 — د. عمران قوبا

الطبعة الثانية

في هذه الطبعة الثانية جرى تلافي العديد من الأخطاء الطباعية، وتوحيد قياس الحروف والمعادلات في الكتاب، وجرت أيضاً تهيئة الكتاب ليأخذ شكلاً مناسباً للنشر الإلكتروني.

تموز 2017 — د. عمران قوبا

حقل الأعداد الحقيقيّة

مقدّمة

يقول عالم الرياضيّات البريطاني هاردي G.H. Hardy إنّ علم الرياضيات علمٌ جماليّ، أي يبحث عن الجمال، وأنّه إذا كان على المرء أن يبرّر الرياضيّات الحقيقيّة، فعليه أن يبرّرها بوصفها فنّاً.

وحتّى يوضح فكرته، انتقى هاردي مبرهنتين، من مبرهنات الرياضيّات الإغريقيّة، تتمتّعان، بحسب رأيه، بذلك النوع من الجمال الذي يصعب تعريفه، ولكن من السهل تعرّفه. تتمثّل أولاهما في برهان إقليدس على وجود عدد لا نهائي من الأعداد الأوّليّة. أمّا الثانية فهي الاكتشاف الذي ينص على أنّ العدد $\sqrt{2}$ ليس عدداً عاديّاً، وهو اكتشافٌ يرجع إلى مدرسة فيثاغورث قرابة خمسمئة سنة قبل الميلاد. سنركّز انتباهنا هنا على النتيجة الثانية التي لا نقاش في أهمّيتها أو عمقها، مع كونها تقتصر على مُحاكمة حسابيّة بحتة.

مبرهنة : لا يوجد عددٌ عادي مربّعه يساوي 2 .

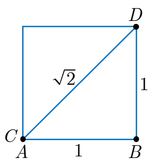
الإثبات

العدد العادي هو أيُّ عددٍ يمكن كتابته بصيغة p/q حيث p و q عددان صحيحان. لذلك تنص المبرهنة على أنّه من غير الممكن أن تتحقّق المساواة $(p/q)^2 = 2$ وذلك مهما كان العددان الصحيحان p و q.

يعتمد الإثبات أسلوباً غير مباشرٍ يُسمّى **البرهان بنقض الفرْض**. نفترض على سبيل الجدل وجود عددٍ عادي مربّعه يساوي 2، ثُمّ نستخلص من ذلك تناقضاً، أو خُلفاً، باتّباع سلسلة من الاستنتاجات المنطقيّة، وهذا يجعلناً نعود أدراجنا ونرفض الافتراض الجدلي لخطئه، فنكون قد أثبتنا صحّة المبرهنة بطريق إثبات أنّها لا يمكن أن تكون خاطئة.

إذن، لنفترض وجود عددين طبيعيّين p و q، يمكن أن نفترض أنهما أوّليّان فيما بينهما، يُحقّقان $(p/q)^2 = 2$. عندئذ يكون $p^2 = 2q^2$ فالعدد p عددٌ زوجيّ، أي $p = 2p'$، ومن ثَمّ $2p'^2 = q^2$ فالعدد q زوجيّ أيضاً، وهذا خُلفٌ لأنّ العددين p و q أوليّان فيما بينهما. □

لقد كان لهذه النتيجة آثار مهمّة وبعيدة المدى على العديد من الأفكار في الرياضيّات، وهذا ما جعل العالم هاردي ينعتها بالجمال. لقد عمّقت هذه النتيجة إدراك الإغريق للعلاقة بين الطول الهندسي والعدد الحسابي. فقد كانوا قبل هذا الاكتشاف يعتقدون أنّه في حالة قطعتين مستقيمتين $[AB]$ و $[CD]$ توجد قطعة مستقيمة ثالثة يمكن تجزئتها في آن معاً إلى عدد صحيح من القطع المماثلة للقطعة $[AB]$، وإلى عدد صحيح من القطع المماثلة للقطعة $[CD]$، وهذا يُكافئ القول إنّ نسبةَ طولَي القطعتين $[AB]$ و $[CD]$ عددٌ عادي.



ولكن بالاعتماد على النتيجة السابقة والنظر إلى قطر مربّع الواحدة، وجدوا أنّ هذا الأمر ليس صحيحاً بوجه عامٍّ. وهذا ما دفعهم إلى القبول بأنّ مفهوم الطول هو أكثر عموميّة من مفهوم العدد (أي العدد العادي وفق مدرسة فيثاغورث.)

لقد قادت هذه النتيجة الإغريقَ إلى إهمال الحساب لمصلحة الهندسة، ولكنّنا على العكس سنعمل على توسيع مفهوم العدد، بالانتقال من مجموعة الأعداد العاديّة إلى مجموعة أوسع وأشمل.

في الحقيقة، تتمتّع مجموعة الأعداد العاديّة $\mathbb{Q}$ ببنية جبريّة مهمّة، تجعل منها حقلاً تبديليّاً. فهي مزوّدة بقانون جمع $(+)$ يجعل من $(\mathbb{Q},+)$ زمرة تبديليّة عنصرها الحيادي هو 0، وبقانون ضرب $(\cdot)$ يقبل التوزيع على الجمع ويجعل البنية $(\mathbb{Q}\backslash\{0\},\cdot)$ زمرة تبديلية أيضاً. ثُمّ إنّ مجموعة الأعداد العاديّة مرتّبة ترتيباً كُليّاً، وهذا ما يقودنا إلى أن نكوّن في مخيّلتنا صورة للأعداد العاديّة تتوزّع فيها هذه الأعداد جنباً إلى جنبٍ على طول مستقيم لا نهائي. وبعكس مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$، لا تحوي هذه الصورة أي مجالات خالية؛ إذْ نجد بين أيِّ عددين عاديين r و s عدداً عاديّاً $\frac{r+s}{2}$ يقع في منتصف المسافة بينهما. ولكننا نعلم أنّ هذه المجموعة ناقصةٌ، إذْ هناك ثقبٌ في مستقيم الأعداد العاديّة حيث يجب أن يكون العدد $\sqrt{2}$، وبالطبع هناك ثقوبٌ أخرى (عند $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ و π و $\ldots$). وهكذا، إذا كنّا نريد أن يوافق كلُّ طولٍ على مستقيم الأعداد عدداً، فعلينا توسيع مجموعة الأعداد العاديّة $\mathbb{Q}$ إلى مجموعة الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$.

أمّا السؤال عن كيفيّة بناء $\mathbb{R}$ انطلاقاً من $\mathbb{Q}$، فهو أمرٌ معقّدٌ لن ندخل فيه، ولكننا لا نُجانب الصواب كثيراً إذا قلنا إننا نحصل على $\mathbb{R}$ بملء الثقوب التي تتركها $\mathbb{Q}$ في مستقيم الأعداد، فحيث نجد ثقباً، نعرّف عدداً غير عادي ونضعه في ذلك المكان مُحافظين على الترتيب القائم في $\mathbb{Q}$. لنختتم الآن هذه المقدّمة العامّة ولندخل في لُبّ الموضوع.

1. عموميات

1-1. **مبرهنة وتعريف**. توجد مجموعة وحيدة $\mathbb{R}$ مزوّدة بقانوني تشكيل داخليين $(+)$ و $(\cdot)$ وبعلاقة ترتيب $(\leq)$ تُحقّق ما يأتي:

$\mathcal{R}_1$– إنّ البنية $(\mathbb{R},+,\cdot)$ حقل تبديلي يحتوي على مجموعة الأعداد العاديّة $\mathbb{Q}$ حقلاً جزئياً.

$\mathcal{R}_2$– إنّ العلاقة $(\leq)$ علاقة ترتيب كليّ على $\mathbb{R}$ ومنسجمة مع القانونين $(+)$ و $(\cdot)$.

$\mathcal{R}_3$– إنّ كلّ مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$ ولها عناصر راجحة عليها تقبل حدّاً أعلى.

نسمّي البنية $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ المحقّقة للخواص السابقة **حقل الأعداد الحقيقية**.

سنقبل المبرهنة السابقة دون إثبات ولكنّنا سنشرح فيما يأتي المفاهيم الواردة فيها.

يعني الشرط $\mathcal{R}_2$ أنّه، أياً كان (y,x) من $\mathbb{R}^2$، تتحقق واحدة فقط من العلاقات الآتية

$$x < y \quad \text{أو} \quad x = y \quad \text{أو} \quad y < x$$

لاحظ أنّ $y < x$ تعني $(x \leq y$ و $x \neq y)$. أمّا الانسجام مع القانونين $(+)$ و $(\cdot)$ فيعني أنّ

- $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x \leq y \Rightarrow (x+z) \leq (y+z)$
- $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \Rightarrow xy \geq 0$

ونرمز عادة بالرمز $\mathbb{R}_+$ إلى المجموعة $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$، وبالرمز $\mathbb{R}_+^*$ إلى المجموعة $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$، وكذلك نضع $\mathbb{R}_- = \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}_+^*$ و $\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}_-\backslash\{0\}$.

أمّا الشرط $\mathcal{R}_3$ فيحتاج إلى بعض الشرح ويتطلّب التعاريف الآتية:

2-1. **تعريف**. لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.

- نقول إنّ z من $\mathbb{R}$ عنصر **راجح على** A إذا وفقط إذا كان z أكبر من جميع عناصر A، أي:

$$\forall a \in A, \quad a \leq z$$

- نقول إنّ z من $\mathbb{R}$ عنصر **قاصر عن** A إذا وفقط إذا كان z أصغر من جميع عناصر A، أي:

$$\forall a \in A, \quad z \leq a$$

❖ نقول إنّ z من $\mathbb{R}$ هو **حدٌّ أعلى للمجموعة A** إذا وفقط إذا تحقّق الشرطان الآتيان

① العددُ z عنصرٌ راجح على A أي :

$$\forall a \in A, \quad a \leq z$$

② العددُ z هو أصغر عنصر راجح على A أي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b \in A, \quad z - \varepsilon \leq b$$

❖ نقول إنّ z من $\mathbb{R}$ هو **حدٌّ أدنى للمجموعة A** إذا وفقط إذا تحقّق الشرطان الآتيان

① العددُ z عنصرٌ قاصر عن A أي :

$$\forall a \in A, \quad z \leq a$$

② العددُ z هو أكبر عنصر قاصر عن A أي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b \in A, \quad b \leq z + \varepsilon$$

3-1. **ملاحظة**. إذا وُجِدَ حد أعلى z للمجموعة A كان وحيداً ورمزنا إليه $\sup A$. لأنّه إذا افترضنا أنّ كلاً من z_1 و z_2 حد أعلى للمجموعة A وأنّ $z_1 \neq z_2$ أو، دون الإنقاص من العموميّة، أنّ $z_2 < z_1$. نختار $\varepsilon = \frac{z_2 - z_1}{2}$ فنجد في A عنصراً b يُحقّق

$$\frac{z_2 + z_1}{2} = z_2 - \varepsilon \leq b \leq z_1$$

وهذا يكافئ $z_1 \leq z_2$، ويناقض الفرْض $z_2 < z_1$.

ونجد بالمماثلة أنّ الحد الأدنى لمجموعة غير خالية A من $\mathbb{R}$ وحيدٌ إن وُجِدَ، ونرمز إليه بالرمز $\inf A$.

يصبح الشرط $\mathcal{R}_3$ من المبرهنة 1-1. كما يلي :

لتكن A مجموعة جزئية **غير خالية** من $\mathbb{R}$. عندئذ

$$\underbrace{(\exists a \in \mathbb{R} : \forall x \in A, x \leq a)}_{\text{يوجد } a \text{ راجح على } A} \Rightarrow \underbrace{(\exists z \in \mathbb{R} : z = \sup A)}_{\text{يوجد } z \text{ حدٌّ أعلى لـ } A}$$

ونقول إنّ مجموعة الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$ تُحقِّق خاصة الحدّ الأعلى.

1-4. **تعريف**. نقول إنّ العنصر a من $\mathbb{R}$ هو **أكبر عنصر** في A ونكتب $a = \max A$ إذا وفقط إذا كان $a \in A$ و $a = \sup A$.

ونقول بالمثل إنّ العنصر b من $\mathbb{R}$ هو **أصغر عنصر** في A ونكتب $b = \min A$ إذا وفقط إذا كان $b \in A$ و $b = \inf A$.

1-5. **ملاحظة**. يحقّق حقل الأعداد العادية $\mathbb{Q}$ كلّاً من الخاصتين $\mathcal{R}_1$ و $\mathcal{R}_2$. إلاّ أنه لا يحقّق خاصّة الحدّ الأعلى وهذا ما سنراه فيما يأتي.

لنتأمّل المجموعة

$$A = \left\{x \in \mathbb{Q} : (0 \le x) \wedge (x^2 \le 2)\right\}$$

إنّ A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{Q}$، إذ تحوي 0، والعدد 2 عنصرٌ راجحٌ عليها، أي:

$$\forall x \in A, \quad x \le 2$$

لنفترض أنّه يوجد في $\mathbb{Q}$ عنصرٌ ℓ يُحقّق $\ell = \sup A$. ولنناقش الحالات الآتية.

- **حالة** $\ell^2 > 2$. ليكن $\varepsilon = \dfrac{\ell^2 - 2}{4\ell} > 0$، يوجد، استناداً إلى التعريف، عنصرٌ x في A يُحقّق $\ell - \varepsilon \le x$، وهذا يكافئ $0 \le \dfrac{3\ell^2 + 2}{4\ell} \le x$ ومنه

$$\left(\frac{3\ell^2 + 2}{4\ell}\right)^2 \le x^2 \le 2$$

ونصل هنا إلى تناقض إذا لاحظنا أنّ

$$\begin{aligned}\left(\frac{3\ell^2 + 2}{4\ell}\right)^2 \le 2 &\Leftrightarrow 9\ell^4 - 20\ell^2 + 4 \le 0\\ &\Leftrightarrow (\ell^2 - 2)(9\ell^2 - 2) \le 0\end{aligned}$$

- **حالة** $\ell^2 = 2$. هذه الحالة أيضاً تقود إلى تناقض، وفق ما رأيناه في المقدّمة، لأنّ ℓ عددٌ عادي.

■ **حالة** $\ell^2 < 2$. في هذه الحالة نعرّف $\gamma = \dfrac{\ell(\ell^2+6)}{3\ell^2+2}$، ونلاحظ أنّ $\gamma \in \mathbb{Q}$ وأنّ $0 < \gamma$. ومن ناحية أخرى

$$2-\gamma^2 = 2-\frac{\ell^2(\ell^2+6)^2}{(3\ell^2+2)^2} = \frac{\left(2-\ell^2\right)^3}{(3\ell^2+2)^2} > 0$$

إذن $\gamma \in A$. ولكن

$$\ell^2 < 2 \Leftrightarrow 3\ell^2+2 < \ell^2+6 \Leftrightarrow 1 < \frac{\ell^2+6}{3\ell^2+2}$$

إذن $\ell < \gamma$، ويناقض هذا تعريف الحد الأعلى ℓ.

لقد وصلنا إلى تناقض في جميع الحالات وهذا يثبت عدم وجود الحد الأعلى ℓ في $\mathbb{Q}$.

1-6. **مبرهنة** : كل مجموعة جزئية غير خالية A من $\mathbb{R}$ لها عنصر قاصر عنها تقبل حدّاً أدنى.

الإثبات

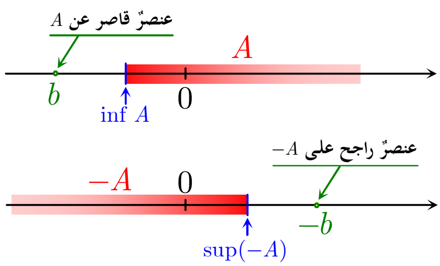
ما قيل صحيح لأنّه في هذه الحالة تقبل المجموعة

$$-A = \{-x : x \in A\}$$

عنصراً راجحاً عليها فيوجد في $\mathbb{R}$ عنصرٌ z يُحقّق $z = \sup(-A)$، ولمّا كان من الواضح أنّ

$$\sup(-A) = -\inf A$$

استنتجنا أنّ $\inf A = -z$ وتقبل المجموعة A العدد $-z$ حدّاً أدنى.



❐

2. خواص حقل الأعداد الحقيقية

1-2. **مبرهنة**. أياً كان العدد الحقيقي الموجب تماماً x، وأيّاً كان العدد الحقيقي y فيوجد عدد طبيعي موجب تماماً n يُحقِّق $y < nx$. أي :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad y < nx$$

تسمّى هذه الخاصةُ **خاصة أرخميدس**.

الإثبات

إذا كان $y \geq 0$ أخذنا $n = 1$ وتمّ الاثبات. نفترض إذن أنّ $y > 0$ ونتأمّل المجموعة $A = \{nx : n \in \mathbb{N}^*\}$.

إذا كان y راجحاً على A وجدنا $s = \sup A \in \mathbb{R}$ بناءً على خاصّة الحدّ الأعلى، وباختيار $\varepsilon = \frac{x}{2}$ نجد في $\mathbb{N}^*$ عنصراً n_0 يُحقّق $s - \varepsilon \leq n_0 x$، وهذا يكافئ

$$s \leq (n_0 + \tfrac{1}{2})x$$

أو $s < (n_0 + 1)x$. وهذا يناقض تعريف s لأنّ $(n_0 + 1)x$ عنصرٌ من A . نستنتج من هذا التناقض أنّ y ليس راجحاً على A ومن ثَمّ يوجد في A عنصر أكبر تماماً من y، أي يوجد في $\mathbb{N}^*$ عنصرٌ n يُحقّق $y < nx$. ❐

2-2. **مبرهنة** : إذا كان x عدداً من $\mathbb{R}$ فيوجد عدد صحيح وحيد $\lfloor x \rfloor$ (أو $E(x)$) يُحقق العلاقة : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. نسمّي $\lfloor x \rfloor$ **الجزء الصحيح** للعدد x.

الإثبات

- إذا كان $x \geq 0$ فيوجد بمقتضى خاصة أرخميدس عدد طبيعيٌّ موجبٌ تماماً n_0 يُحقّق $x < n_0$ فالمجموعة $\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N}^* : x < n\}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$، وهي غير خالية لاحتوائها على العدد n_0. ليكن m أصغر عنصر في $\mathcal{N}$ أي $m = \min \mathcal{N}$، ولنضع تعريفاً $\lfloor x \rfloor = m - 1$. فيكون $\lfloor x \rfloor = m - 1 \notin \mathcal{N}$ وذلك استناداً إلى تعريف m. أي
$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$
- أمّا إذا كان $x < 0$، فيمكننا بناءً على ما سبق أن نجد عدداً صحيحاً $\lfloor -x \rfloor$ يُحقّق
$$\lfloor -x \rfloor \leq -x < \lfloor -x \rfloor + 1$$

وهذا يكافئ

$$-(1 + \lfloor -x \rfloor) < x \leq -\lfloor -x \rfloor$$

- فإذا كان $x \notin \mathbb{Z}$ وضعنا $\lfloor x \rfloor = -(1 + \lfloor -x \rfloor)$ تعريفاً،
- وأمّا إذا كان $x \in \mathbb{Z}$ فإننا نضع $\lfloor x \rfloor = x$.

وعندئذ يحقّق التابع $\mathbb{R} \to \mathbb{Z} : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ الخاصة المطلوبة وهي :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

من ناحية أخرى، ليكن n عدداً صحيحاً يُحقِّق المتراجحة $n \leq x < n+1$.

- إذا كان $n < \lfloor x \rfloor$ فإنّ $n+1 \leq \lfloor x \rfloor$ و من ثَمّ $x < \lfloor x \rfloor$ و هذا تناقض.
- وإذا كان $\lfloor x \rfloor < n$ فإنّ $\lfloor x \rfloor + 1 \leq n$ ومنه $x < n$ وهذا تناقض أيضاً.

إذن لا بدّ أن يكون $n = \lfloor x \rfloor$ وهذا يثبتُ جزء الوحدانية في المبرهنة. ❐

2-3. مثال. نورد فيما يلي مثالاً على استعمال تابع الجزء الصحيح. لتكن m من $\mathbb{N}^*$، ولنتأمّل المجموع :

$$U_m = \sum_{1 \leq k \leq m(m+1)/2} \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2k} \right\rfloor$$

نريد أن نعطي عبارة بسيطة ومختزلة لهذا المجموع. لتكن p من $\mathbb{N}$، ولنعرّف بوجه عام المجموعة

$$\mathcal{B}_p = \left\{ k \in \mathbb{N} : p = \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2k} \right\rfloor \right\}$$

فنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} p = \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2k} \right\rfloor \quad &\Leftrightarrow \quad p \leq \sqrt{2k} + \frac{1}{2} < p + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 2k < \left(p + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{p(p-1)}{2} + \frac{1}{8} \leq k < \frac{p(p+1)}{2} + \frac{1}{8} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{p(p-1)}{2} < k \leq \frac{p(p+1)}{2} \end{aligned}$$

والتكافؤ الأخير محقَّق لأن العددين $\frac{p(p-1)}{2}$ و $\frac{p(p+1)}{2}$ صحيحان. إذن

$$\mathcal{B}_p = \mathbb{N}_{p(p+1)/2} \backslash \mathbb{N}_{p(p-1)/2}$$

ومنه

$$\operatorname{Card} \mathcal{B}_p = \frac{p(p+1)}{2} - \frac{p(p-1)}{2} = p$$

ونذكِّر بالرمز

$$\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n\}$$

نعود إلى المجموع U_m فنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} U_m - U_{m-1} &= \sum_{m(m-1)/2<k\leq m(m+1)/2} \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2k} \right\rfloor \\ &= \sum_{k\in\mathcal{B}_m} \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2k} \right\rfloor = \sum_{k\in\mathcal{B}_m} m \\ &= m\,\mathrm{card}(\mathcal{B}_m) = m^2 \end{aligned}$$

فيكون

$$\begin{aligned} U_m &= (U_m - U_{m-1}) + (U_{m-1} - U_{m-2}) + \cdots + (U_2 - U_1) + U_1 \\ &= U_1 + \sum_{k=2}^{m} (U_k - U_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} k^2 \\ &= \frac{m\cdot(m+1)\cdot(2m+1)}{6} \end{aligned}$$

2-4. **مبرهنة**. يوجد بين كل عددين حقيقيين عدد عادي :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ (x<y) \Rightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{Q} : x < \alpha < y)$$

نعبّر عن هذه الخاصة عادة بالقول إنّ مجموعة الأعداد العاديّة $\mathbb{Q}$ **كثيفة** في $\mathbb{R}$.

الإثبات

ليكن x و y عددين حقيقيين يُحقّقان $x<y$، ولنضع $z = \frac{x+y}{2}$. لمّا كان العدد $z - x = \frac{y-x}{2}$ موجباً تماماً فإننا نجد استناداً إلى خاصّة أرخميدس عدداً طبيعياً موجباً تماماً n يُحقّق $n(z-x) > 1$ ومنه

$$.\, nx < nz - 1 < \lfloor nz \rfloor \leq nz < ny$$

نجد من ثمّ عدداً عادياً $\alpha = \lfloor nz \rfloor / n$ يُحقّق $x < \alpha < y$. ❑

2-5. **نتيجة**. يوجد بين كل عددين حقيقيين مختلفين عدد لا نهائي من الأعداد العاديّة.

الإثبات

ليكن (y, x) عنصراً من $\mathbb{R}^2$ يُحقّق $x<y$. سنثبت أنّ المجموعة

$$\mathbb{Q} \cap \,]x,y[\, = \{r \in \mathbb{Q} : x < r < y\}$$

غير منتهية.

لنعرّف العدد $t_n = \dfrac{x+ny}{1+n}$ وذلك أياً كان العدد n من $\mathbb{N}$. نلاحظ أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x \le t_n < t_{n+1} < y$$

ومهما تكن n يمكننا أن نجد بناءً على المبرهنة السابقة عدداً α_n ينتمي إلى $\mathbb{Q}$ ويُحقّق

$$t_n < \alpha_n < t_{n+1}$$

من الواضح أنّ التطبيق

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap \,]x,y[\,, n \mapsto \alpha_n$$

متباين، فالمجموعة $\mathbb{Q} \cap \,]x,y[$ غير منتهية لأنّها تحوي $\varphi(\mathbb{N})$. ❐

2-6. نتيجة. يوجد بين كل عددين حقيقيين مختلفين عدد لا نهائي من الأعداد غير العاديّة.

الإثبات

ليكن (y,x) عنصراً من $\mathbb{R}^2$ يُحقّق $x < y$. سنثبت أنّ المجموعة

$$]x,y[\backslash\mathbb{Q} = \{t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : x < t < y\}$$

غير منتهية. في الحقيقة، إنّ المجموعة $A = \mathbb{Q} \cap \left]\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right[$ غير منتهية بمقتضى النتيجة السابقة، ومن ثَمّ فالمجموعة $\sqrt{2}A = \{t\sqrt{2} : t \in A\}$ غير منتهية ومحتواة في $]x,y[\backslash\mathbb{Q}$. ❐

2-7. تعريف. لتكن x من $\mathbb{R}$ نرمز بالرمز $|x|$ إلى المقدار $\max(x,-x)$، ونسمّي التابع $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ تابع **القيمة المطلقة** وهو يحقّق الخواص الآتية:

$$\begin{array}{lll}
\forall x \in \mathbb{R}, & |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 & ① \\
\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & |xy| = |x|\cdot|y| & ② \\
\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & |x+y| \le |x| + |y| & ③ \\
\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & \big||x| - |y|\big| \le |x-y| & ④
\end{array}$$

سنترك إثبات هذه الخواص تمريناً للقارئ.

وكذلك نلاحظ أنّ الرمز $|z|$ في حالة عدد عقدي $z = x + \mathrm{i}\,y$ يعبِّر عن **طويلة** العدد العقدي z أي $\sqrt{x^2+y^2}$. والتابع $z \mapsto |z|$ يُحقِّق جميع خواص القيمة المطلقة المبيّنة آنفاً بعد أن نستبدل الحقل $\mathbb{C}$ بالحقل $\mathbb{R}$.

3. المستقيم الحقيقي المنجز

1-3. تعريف. نسمّي المجموعة $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$، المكوّنة من مجموعة الأعداد الحقيقيّة، ومن عنصرين إضافيين $+\infty$ و $-\infty$ لاينتميان إليها **المستقيم الحقيقي المنجز**.

2-3. علاقة الترتيب على $\overline{\mathbb{R}}$. إنّ المجموعة $\overline{\mathbb{R}}$ مرتّبة ترتيباً كليّاً بالعلاقة $(\leq)$ المعرّفة كما يأتي: أياً كان x من $\overline{\mathbb{R}}$ فلدينا $-\infty \leq x$ و $x \leq +\infty$، و أمّا إذا كان x و y من $\mathbb{R}$ فالعلاقة $x \leq y$ هي نفسها علاقة الترتيب المألوفة في $\mathbb{R}$.

3-3. مبرهنة. لكل مجموعة غير خالية من $\overline{\mathbb{R}}$ حدٌّ أعلى وحدٌّ أدنى.

الإثبات

لنعرض الإثبات مثلاً في حالة الحدّ الأعلى: لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\overline{\mathbb{R}}$.

- إذا كان $+\infty \in A$ كان $\sup A = +\infty$.
- إذا كان $A = \{-\infty\}$ كان $\sup A = -\infty$.
- وأخيراً إذا كانت $+\infty \notin A$ و $B = A \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$ فنناقش حالتين:
  - إمّا أنه يوجد في $\mathbb{R}$ عنصر راجح على B وفي هذه الحالة تقبل B حداً أعلى في $\mathbb{R}$ يكون هو نفسه الحد الأعلى للمجموعة A.
  - وإمّا أنه لا يوجد في $\mathbb{R}$ عنصر راجح على B ومن ثَمّ $\sup A = +\infty$. ❐

4-3. العمليات في $\overline{\mathbb{R}}$. يمكن تمديد بعض العمليات في $\mathbb{R}$ إلى $\overline{\mathbb{R}}$ على الوجه الآتي :

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ و $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
- أياً كان x من $\mathbb{R}$: $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$.
  و $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$.
- أياً كان x من $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$: $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$.
  و $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$.
- أياً كان x من $\mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$: $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$.
  و $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$.
- نلاحظ أنّ جمع $+\infty$ و $-\infty$ غير معرّف، وكذلك جداء 0 و $+\infty$ أو $-\infty$.

4. الجوارات

4-1. تعريف. نسمّي مجالاً في $\overline{\mathbb{R}}$ كلّ مجموعة جزئية I من $\overline{\mathbb{R}}$ تحقق الشرط

$$\forall (a,b) \in I \times I,\ \forall c \in \mathbb{R},\quad (a < c < b) \Rightarrow (c \in I)$$

4-2. أمثلة. ليكن (m,M) عنصراً من $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ يُحقّق $m \leq M$. إنّ كلّاً من المجموعات المعرّفة فيما يلي **مجال** :

$$\begin{aligned}
[m,M] &= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : (m \leq x) \wedge (x \leq M)\right\}\\
[m,M[&= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : (m \leq x) \wedge (x < M)\right\}\\
]m,M] &= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : (m < x) \wedge (x \leq M)\right\}\\
]m,M[&= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : (m < x) \wedge (x < M)\right\}
\end{aligned}$$

4-3. مبرهنة. ليكن I مجالاً في $\overline{\mathbb{R}}$. عندئذ يأخذ I أحد الأشكال الأربعة الواردة في المثال السابق.

الإثبات

يمكننا أن نفترض $I \neq \varnothing$، وإلّا كان $I =]0,0[$. نعرّف إذن المقدارين الآتيين: $m = \inf I$ و $M = \sup I$. من الواضح أنّ $I \subset [m,M]$. ليكن c عنصراً من $]m,M[$، عندئذ

$$\left.\begin{array}{lcl}
(m = \inf I) \wedge (m < c) & \Rightarrow & \exists a \in I : a < c\\
(M = \sup I) \wedge (c < M) & \Rightarrow & \exists b \in I : c < b
\end{array}\right\} \Rightarrow c \in I$$

إذْ ينتج أوّل اقتضاءين من تعريف الحدين الأدنى والأعلى، وينتج الاقتضاء الأخير من تعريف المجال. نستنتج من ثَمّ أنّ $]m,M[\subset I \subset [m,M]$. ❐

4-4. ملاحظة. لتكن (m,M) عنصراً من $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ يُحقّق $m \leq M$. إذا كان I أحدَ المجالات $[m,M]$ أو $[m,M[$ أو $]m,M]$ أو $]m,M[$ رمزنا بالرمز $\overset{\circ}{I}$ إلى المجال $]m,M[$ ونسمّيه **داخل** I.

4-5. تعريف. نسمّي مجالاً في $\mathbb{R}$ كل مجال في $\overline{\mathbb{R}}$ محتوى في $\mathbb{R}$، ويمكننا باستعمال المبرهنة السابقة تعيين جميع أنماط المجالات في $\mathbb{R}$. وبوجه خاصٍ نسمّي المجالات من الأنماط $]a,b[$ أو $]a,+\infty[$ أو $]-\infty,a[$ أو $]-\infty,+\infty[$ **مجالات مفتوحة**، ونسمّي المجالات من الأنماط $[a,b]$ أو $[a,+\infty[$ أو $]-\infty,a]$ **مجالات مغلقة**.

4-6. تعريف. ليكن a من $\mathbb{R}$. نسمّي **جواراً للعنصر a في $\mathbb{R}$** كل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ تحوي مجالاً مفتوحاً تنتمي إليه a. فتكون المجموعة V جواراً للعنصر a إذا وفقط إذا وُجِدَ $\varepsilon > 0$ يجعل المجال المفتوح $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ محتوى في V.

كذلك نسمّي **جواراً للعنصر $+\infty$** كل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ تحوي مجالاً مفتوحاً من النمط $]\alpha,+\infty[$ مع $\alpha \in \mathbb{R}$. ونسمّي **جواراً للعنصر $-\infty$** كل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ تحوي مجالاً مفتوحاً من النمط $]-\infty,\alpha[$ مع $\alpha \in \mathbb{R}$. ونرمز عادة بالرمز $\mathbb{V}(a)$ إلى مجموعة جوارات العنصر a من $\overline{\mathbb{R}}$.

4-7. ملاحظة. تحقق مجموعة جوارات عنصر الخواص الآتية :

$$\forall V \in \mathbb{V}(a), \forall W \in \mathbb{V}(a), \quad V \cap W \in \mathbb{V}(a)$$

$$\forall V \in \mathbb{V}(a), \forall A \subset \mathbb{R}, \quad V \subset A \Rightarrow A \in \mathbb{V}(a)$$

$$\forall (a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2, a \neq b \Rightarrow \left(\exists V \in \mathbb{V}(a),\ \exists W \in \mathbb{V}(b),\ V \cap W = \varnothing \right)$$

ويمكننا تعميم الخاصّة الأولى على تقاطع عددٍ منتهٍ من جوارات a. وكذلك يمكننا تعميم التعريف 4-6. إلى مجموعة الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$ كما يأتي:

4-8. تعريف : إذا كان a عنصراً من $\mathbb{C}$، وكان $r > 0$، أسمينا المجموعة

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |a-z| < r\}$$

قرصاً مفتوحاً مركزه a ونصف قطره r.

وهي تعميم طبيعي للمجال $]a-r,a+r[$. تكون المجموعة الجزئيّة V من $\mathbb{C}$ جواراً للعنصر a إذا وفقط إذا وُجِدَ $\varepsilon > 0$ يُحقّق $D(a,\varepsilon) \subset V$.

تُحقّق مجموعة جوارات عنصر في $\mathbb{C}$ الخواص نفسها التي تُحقّقها الجوارات في $\mathbb{R}$ أو في $\overline{\mathbb{R}}$.

تمرينات

التمرين 1. لتكن n من $\mathbb{N}^*$، ولنفترض أنّ الأعداد الحقيقيّة x_1 و x_2 و $\cdots$ و x_n تُحقِّق

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n$$

أثبت أنّ $x_k = 1$ أياً كان k من $\{n,\ldots,1\}$.

الحل

لنلاحظ أنّ

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - 1)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k + n = n - 2n + n = 0$$

وهذا يُثبت المطلوب. ■

التمرين 2. لتكن a و b و c ثلاثة أعداد حقيقيّة موجبة. أثبت أنّ واحداً على الأقلّ من الأعداد الحقيقيّة الثلاثة الآتية : $a(1-b)$ و $b(1-c)$ و $c(1-a)$ أصغر من $\frac{1}{4}$.

الحل

لنلاحظ أولاً أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

فلو افترضنا جدلاً أنّ الأعداد الثلاثة $a(1-b)$ و $b(1-c)$ و $c(1-a)$ أكبر تماماً من $\frac{1}{4}$، لكان جداء ضربها أكبر تماماً من $\frac{1}{4^3}$، ولانتمت جميعاً إلى المجال $]0,1[$. عندئذ نصل إلى التناقض الآتي :

$$\frac{1}{4^3} < a(1-b)\cdot b(1-c)\cdot c(1-a) = a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c) \leq \frac{1}{4^3}$$

إذن لا بُدّ أن يكون واحدٌ على الأقلّ من الأعداد الحقيقيّة: $a(1-b)$ و $b(1-c)$ و $c(1-a)$ أصغر من $\frac{1}{4}$. ■

التمرين 3. لتكن a و b و c ثلاثة أعداد حقيقيّة موجبة. أثبت أنّ:

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 8abc$$

الحل

لمّا كان $(x-1)^2 \geq 0$، أيّاً كان العدد الحقيقي x، استنتجنا أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 1+x^2 \geq 2x \geq 0$$

فإذا استعملنا تجانس علاقة الترتيب مع قانون الضرب نتجت المتراجحة المطلوبة من المتراجحة السابقة كما يأتي:

$$\begin{aligned} 2a\cdot 2b\cdot 2c &\leq 2a\cdot 2b\cdot(1+c^2) \\ &\leq 2a\cdot(1+b^2)\cdot(1+c^2) \\ &\leq (1+a^2)\cdot(1+b^2)\cdot(1+c^2) \end{aligned}$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 4. ليكن a و b عددين حقيقيّين يُحقّقان $0 < a \leq b$. أثبت أنّ :

$$\frac{1}{8}\frac{(b-a)^2}{b} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{1}{8}\frac{(b-a)^2}{a}$$

الحل

نلاحظ أولاً أنّ

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2 \\ &= \frac{(b-a)^2}{2(\sqrt{b}+\sqrt{a})^2} \\ &= \frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2}\right)^{-2} \end{aligned} \tag{1}$$

ولكن المتراجحة $0 < a \leq b$ تقتضي أنّ

$$0 < \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

ومن ثَمّ

$$0 < \sqrt{a} \leq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{b}$$

ومنه

$$0 < a \le \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \right)^2 \le b$$

أو

$$\frac{1}{b} \le \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \right)^{-2} \le \frac{1}{a}$$

وأخيراً، بالعودة إلى (1) نجد المطلوب. ■

التمرين 5. ليكن n عدداً طبيعيّاً أكبر من الواحد أو يساويه، ولتكن $x_1, \ldots, x_n$ أعداداً من المجال $[-1,+1]$ تُحقِّق $x_1 + \cdots + x_n = 0$. أثبت أنّ :

$$\left| x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n \right| \le \left[n^2 / 4 \right]$$

الحل

لنعرّف $S_k = \sum_{p=1}^{k} x_p$ في حالة k من $\mathbb{N}_n$. لمّا كانت الأعداد $x_1, \ldots, x_n$ تنتمي إلى المجال $[-1,+1]$، أمكننا أن نستنتج، من جهة أولى، أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad \left| S_k \right| \le \sum_{p=1}^{k} \left| x_p \right| \le k$$

ولمّا كان $S_n = 0$ ، أمكننا أن نستنتج، من جهة ثانية، أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}_{n-1}, \ \left| S_k \right| = \left| S_n - S_k \right| \le \sum_{p=k+1}^{n} \left| x_p \right| \le n - k$$

إذن نستنتج أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \ \left| S_k \right| \le \min(k, n-k) \tag{1}$$

ولكن، إذا اصطلحنا أنّ $S_0 = 0$ ، وجدنا

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n &= \sum_{k=1}^{n} k(S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} kS_k - \sum_{k=2}^{n} kS_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)S_k = -\sum_{k=1}^{n-1} S_k \end{aligned}$$

وباستعمال (1) يكون

$$\left|x_1+2x_2+\cdots+nx_n\right| \le \sum_{k=1}^{n-1}\left|S_k\right| \le \sum_{k=1}^{n-1}\min(k,n-k). \qquad (2)$$

ولكن في حالة $n=2m$ ، أي n عدد زوجي، لدينا

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\min(k,n-k) &= \sum_{k=1}^{m}k+\sum_{k=m+1}^{2m-1}(2m-k)\\ &= m+2\sum_{k=1}^{m-1}k = m^2 = \left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor\end{aligned}$$

وفي حالة $n=2m+1$ ، أي n عدد فردي، لدينا

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\min(k,n-k) &= \sum_{k=1}^{m}k+\sum_{k=m+1}^{2m}(2m+1-k)\\ &= 2\sum_{k=1}^{m}k = m^2+m = \left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor\end{aligned}$$

ونحصل على المطلوب بالتعويض في المتراجحة (2). ■

التمرين 6. ليكن n عدداً طبيعيّاً أكبر أو يساوي الواحد، ولتكن $x_1,\ldots,x_n$ أعداداً من المجال $[0,1]$. أثبت أنّ واحداً على الأقلّ من الجداءين $\prod_{i=1}^{n}x_i$ و $\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$ أصغر أو يساوي 2^{-n}.

الحل

لو افترضنا جدلاً أنّ الجداءين $\prod_{i=1}^{n}x_i$ و $\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$ أكبر تماماً من 2^{-n} لكان لدينا

$$\frac{1}{4^n}<\prod_{i=1}^{n}x_i\cdot\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)=\prod_{i=1}^{n}\big(x_i\cdot(1-x_i)\big)\le\frac{1}{4^n}$$

إذ استفدنا من الملاحظة الواردة في التمرين 2. وهذا خُلفٌ. ■

التمرين 7. أثبت أنّه أياً كان العدد الطبيعيّ الموجب تماماً n، وأياً كان $(a_1,\ldots,a_n)$ من $([1,+\infty[)^n$ فلدينا:

$$2^{n-1}(1+a_1\cdots a_n) \geq (1+a_1)\cdots(1+a_n)$$

الحل

لنلاحظ أولاً أنّ

$$\begin{aligned}(a\geq 1)\wedge(b\geq 1) &\Rightarrow (a-1)(b-1)\geq 0\\ &\Rightarrow ab-a-b+1\geq 0\\ &\Rightarrow 2ab+2\geq ab+a+b+1\\ &\Rightarrow 2(ab+1)\geq (a+1)(b+1)\end{aligned}$$

وهذا يثبت صحة الخاصّة المطلوبة عندما $n=2$. فإذا كانت الخاصّة صحيحة عند القيمة n، وكانت $(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1})$ أعداداً من $([1,+\infty[)^{n+1}$ كان الجداء $a_1\cdots a_n$ أكبر أو يساوي 1، وكان لدينا بناءً على حالة $n=2$،

$$2^n(1+a_1\cdots a_n a_{n+1}) \geq (1+a_{n+1})\cdot 2^{n-1}(1+a_1\cdots a_n)$$

وإذا استعملنا فرْض التدريج:

$$2^{n-1}(1+a_1\cdots a_n) \geq (1+a_1)\cdots(1+a_n)$$

وجدنا المتراجحة المطلوبة صحيحة عند قيمة $n+1$، ويتم الإثبات. ■

التمرين 8. ليكن n من $\mathbb{N}^*$، ولتكن $a_1,\ldots,a_n$ و $b_1,\ldots,b_n$ أعداداً حقيقيّة موجبة تماماً. وليكن $a=\inf\limits_{1\leq i\leq n} a_i$ و $b=\inf\limits_{1\leq i\leq n} b_i$ و $A=\sup\limits_{1\leq i\leq n} a_i$ و $B=\sup\limits_{1\leq i\leq n} b_i$.

أثبت أنّ:

$$1 \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2} \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{ab}{AB}}+\sqrt{\frac{AB}{ab}}\right)^2$$

الحل

لنعرّف العددين الحقيقيين الموجبين α و β بالعلاقتين $\alpha^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ ، و $\beta^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$.

عندئذ تكون المتراجحة الآتية صحيحة:

$$\begin{aligned} 0 \le \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{\alpha} - \frac{b_i}{\beta}\right)^2 &= \frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{1}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \frac{2}{\alpha\beta}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \\ &= 2 - \frac{2}{\alpha\beta}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \end{aligned}$$

وهذه تكافئ المتراجحة اليسرى.

ومن جهة ثانية نلاحظ أنّ

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad abAB\left(\frac{a_i}{A} - \frac{b_i}{b}\right)\cdot\left(\frac{a_i}{a} - \frac{b_i}{B}\right) \le 0$$

أو

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad bB \cdot a_i^2 - (ab + AB)\cdot a_i b_i + aA \cdot b_i^2 \le 0$$

فإذا جمعنا هذه المتراجحات وجدنا

$$bB \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + aA \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \le (ab + AB)\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

وإذا استفدنا من المتراجحة البسيطة $4xy \le (x+y)^2$ وجدنا

$$4aAbB\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \le (ab + AB)^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

ونحصل على المتراجحة المطلوبة بملاحظة أنّ

$$\frac{(ab + AB)^2}{4aAbB} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{ab}{AB}} + \sqrt{\frac{AB}{ab}}\right)^2$$

وبهذا يتم إثبات المطلوب. ■

التمرين 9. ليكن n من $\mathbb{N}^*$، ولتكن $a_1,\ldots,a_n$ أعداداً حقيقيّة موجبة تماماً و $b_1,\ldots,b_n$ أعداداً حقيقيّة تُحقّق

- $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$.
- $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} b_i$ أيّاً كان k من $\{n,\ldots,1\}$.

أثبت أنّ $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} b_i^2$.

الحل

لنضع بالتعريف $A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ و $B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$ حين يكون k عنصراً من $\mathbb{N}_n$. ولنضع كذلك $A_0 = 0$ و $B_0 = 0$. عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (A_i - A_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_i A_i - \sum_{i=1}^{n} a_i A_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i A_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} A_i = a_n A_n + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) A_i \\
&\leq a_n B_n + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i = \sum_{i=1}^{n} a_i B_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} B_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i B_i - \sum_{i=1}^{n} a_i B_{i-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (B_i - B_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i
\end{aligned}$$

ولمّا كان $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$ استناداً إلى التمرين السابق، نتج لدينا:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

وهذا يقتضي $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} b_i^2$ ، ويتم الإثبات. ■

التمرين 10. ليكن a و b عددين عاديّين موجبين تماماً، ولنفترض وجود أعداد عاديّة غير معدومة A و B و C تحقّق $A\sqrt{a}+B\sqrt{b}=C$. أثبت أنّ

$$\sqrt{a}\in\mathbb{Q} \quad \text{و} \quad \sqrt{b}\in\mathbb{Q}$$

الحل

لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} A\sqrt{a}-B\sqrt{b} &= \frac{aA^2-bB^2}{A\sqrt{a}+B\sqrt{b}} \\ &= \frac{aA^2-bB^2}{C} = D\in\mathbb{Q} \end{aligned}$$

إذن $\sqrt{a}=\dfrac{C+D}{2A}\in\mathbb{Q}$ و $\sqrt{b}=\dfrac{C-D}{2B}\in\mathbb{Q}$. ∎

التمرين 11. لتكن A و B مجموعتين جزئيّتين غير خاليتين من $\mathbb{R}$ نعرّف:

$$A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$$

$$AB=\{ab : a\in A, b\in B\}$$

1. بيّن أنّه إذا كانت المجموعتان A و B محدودتين من الأعلى فإنّ $A\cup B$ و $A+B$ محدودتان من الأعلى ولدينا

$$\sup(A\cup B)=\max(\sup(A),\sup(B))$$

$$\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$$

2. وإذا كان $A\cap B\neq\varnothing$ فإنّ المجموعة $A\cap B$ محدودة من الأعلى ولدينا:

$$\sup(A\cap B)\le\min(\sup(A),\sup(B))$$

3. إذا كان A و B جزأين من $\mathbb{R}_+^*$ محدودين من الأعلى كانت AB محدودة من الأعلى وكان $\sup(AB)=\sup(A)\sup(B)$.
4. اكتب وأثبت الخواصّ الموافقة عندما تكون المجموعتان A و B محدودتين من الأدنى.

الحل

هذا التمرين تطبيق مباشرٌ للتعاريف، ونتركه للقارئ. ∎

التمرين 12. ليكن $f:[0,1]\to[0,1]$ تابعاً متزايداً. نريد أن نثبت أنّه يوجد في $[0,1]$ عنصرٌ x_0 يُحقّق $f(x_0)=x_0$. لنتأمّل المجموعة

$$\mathcal{A}=\{x\in[0,1]:f(x)\geq x\}$$

① أثبت أنّ $\mathcal{A}\neq\varnothing$ ، وأنّ 1 عنصر راجح على $\mathcal{A}$. نستنتج وجود $x_0=\sup\mathcal{A}$.

② أثبت أنّ $f(x_0)$ راجح على $\mathcal{A}$ ، ماذا تستنتج؟

③ بيِّن أنّ $f(x_0)\in\mathcal{A}$ ، وأثبت المطلوب.

الحل

① لمّا كان $\mathcal{A}\subset[0,1]$ ، $0\in\mathcal{A}$ ، كانت المجموعة $\mathcal{A}$ غير خالية، والواحد عنصر راجح عليها، إذن فهي تقبل حداً أعلى، وليكن $x_0=\sup\mathcal{A}$.

② ليكن x عنصراً من $\mathcal{A}$ ، عندئذ يكون $x_0\geq x$ ، ومن ثَمّ $f(x_0)\geq f(x)$ لأنّ f متزايد. ولكنّ الشرط $x\in\mathcal{A}$ يقتضي من جهة أخرى أنّ $x\geq f(x)$ ، إذن

$$\forall x\in\mathcal{A},\quad x\leq f(x_0)$$

والعنصر $f(x_0)$ عنصر راجح على $\mathcal{A}$.

③ نستنتج مما سبق أنّ $x_0=\sup\mathcal{A}\leq f(x_0)$. ولمّا كان f متزايداً، وجب أن يكون أيضاً

$$f(x_0)\leq f\big(f(x_0)\big)$$

أي إنّ $f(x_0)\in\mathcal{A}$. وهذا يقتضي $x_0=\sup\mathcal{A}\geq f(x_0)$ ، إذن $x_0=f(x_0)$. ويتم الإثبات. ■

التمرين 13. أثبت الخواص الآتية:

① $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad\left\lfloor\dfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor$

② $\forall x\in\mathbb{R},\quad 0\leq\lfloor 2x\rfloor-2\lfloor x\rfloor\leq 1$

③ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\quad\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor=\lfloor nx\rfloor$

④ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor=\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$

الحل

① ليكن $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(x) = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$. نلاحظ أنّ φ تابع دوري ويقبل العدد 1 دوراً. وذلك لأنّه، أياً كانت x من $\mathbb{R}$،

$$\varphi(x+1) = \lfloor x \rfloor + 1 - \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor + n}{n} \right\rfloor = \varphi(x)$$

وفي حالة x من $[0,1[$ يكون لدينا وضوحاً $\varphi(x) = 0$ إذن $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = 0$.

② ليكن $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \lambda(x) = \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$. نلاحظ أنّ λ تابع دوريّ ويقبل العدد 1 دوراً. ونحصل على المطلوب بملاحظة أنّ

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0 & : \quad 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ 1 & : \quad \frac{1}{2} \le x < 1. \end{cases}$$

③ ليكن التابع $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mu(x) = \lfloor nx \rfloor - \sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor$ عندئذ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
\mu\left(x + \frac{1}{n}\right) &= \lfloor nx + 1 \rfloor - \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k+1}{n} \right\rfloor \\
&= \lfloor nx \rfloor + 1 - \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor \\
&= \lfloor nx \rfloor + 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \left\lfloor x + \frac{n}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{0}{n} \right\rfloor \\
&= \mu(x) + 1 - \lfloor x + 1 \rfloor + \lfloor x \rfloor = \mu(x)
\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ التابع μ يقبل العدد n^{-1} دوراً، ولكن في حالة x من المجال $\left[0, n^{-1}\right[$ لدينا

$$\lfloor nx \rfloor = 0 \quad \text{و} \quad \forall k \in \{0,1,\ldots,n-1\}, \ \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = 0$$

إذن

$$\forall x \in \left[0, n^{-1}\right[, \ \mu(x) = 0$$

فنكون قد أثبتنا أنّ $\mu = 0$ وهي النتيجة المطلوبة.

④ لنلاحظ أولاً أنّ

$$\begin{aligned}\sqrt{n+\frac{1}{2}}-\sqrt{n} &= \frac{1}{2\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right)}\\ \sqrt{n+\frac{1}{2}}-\sqrt{n+1} &= -\frac{1}{2\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right)}\end{aligned}$$

وبالجمع نجد

$$\begin{aligned}\sqrt{4n+2}-\sqrt{n}-\sqrt{n+1} &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n+\frac{1}{2}})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+\frac{1}{2}})}\\ &= \frac{1}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n+\frac{1}{2}})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+\frac{1}{2}})\cdot(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}\end{aligned}$$

نستنتج إذن أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ 0<\sqrt{4n+2}-\sqrt{n}-\sqrt{n+1}<1$$

أو

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ \sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+1$$

ومنه

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor\le\left\lfloor\sqrt{4n+2}\right\rfloor\le\left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor+1$$

لنضع $p=\left\lfloor\sqrt{4n+2}\right\rfloor$ ولنفترض جدلاً أنّ $p\ne\left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor$ ، عندئذ يكون لدينا استناداً إلى المتراجحة السابقة $p=1+\left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor$. ومنه

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<p\le\sqrt{4n+2}$$

وبالتربيع والإصلاح نجد

$$4n^2+4n<(p^2-(2n+1))^2\le 4n^2+4n+1$$

ومنه المساواة

$$(p^2-(2n+1))^2=(2n+1)^2$$

ومن ثَمّ $p^2 = 4n+2$ لأنّ $(2n+1) \le p^2$. ولكنّ المساواة $p^2 = 4n+2$ تقتضي كوْن العدد p عدداً زوجياً، ولو عرّفنا $p = 2q$ لصار لدينا $2q^2 - 2n = 1$ وهذا تناقض صارخ.

وعليه فالفرْض $p \ne \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor$ خطأ، ولا بُدّ أن $p = \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor$.
ونصل إلى المطلوب بالعودة إلى تعريف p . ■

التمرين 14. أثبت أنّ

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \le \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

الحل

لندرس أولاً الحالة التي يكون فيها (x,y) عنصراً من $[0,1[\times [0,1[$.

- إمّا أن يكون $x+y<1$ وعندئذ $\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor = 0$ ، فالمتراجحة محقّقة لأن طرفها الأيمن أكبر أو يساوي الصفر حتماً في هذه الحالة.
- وإمّا أن يكون $x+y \ge 1$ ، وعندها $\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor = 1$ ، ولكن في هذه الحالة لا بُدّ أن تتحقق واحدة على الأقل من المتراجحتين: $2x \ge 1$ ، أو $2y \ge 1$ وعندها يكون $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \ge 1$.

إذن لقد أثبتنا صحة المتراجحة في حالة $(x,y) \in \left([0,1[\right)^2$.

لنأتِ إلى الحالة العامّة:

ليكن (x,y) عنصراً من $\mathbb{R}^2$. نضع $n = \lfloor x \rfloor$ و $x' = x - n \in [0,1[$ ، ونضع كذلك $m = \lfloor y \rfloor$ و $y' = y - m \in [0,1[$. عندئذ يكون لدينا استناداً إلى الحالة السابقة :

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor &= 2n + 2m + \lfloor x' + y' \rfloor \\ &\le 2n + 2m + \lfloor 2x' \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor \\ &= \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \end{aligned}$$

وبذلك نجد المطلوب. ■

التمرين 15. عبّر بصيغة بسيطة عن المجموع

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$$

الحل

لنلاحظ أولاً أنّ

$$\begin{aligned} p = \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor \quad &\Leftrightarrow \quad p \le \sqrt{k} < p+1 \\ &\Leftrightarrow \quad p^2 \le k \le (p+1)^2 - 1 \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$I_p = \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = p \cdot \left((p+1)^2 - p^2 \right) = 2p^2 + p$$

إذن

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor &= \sum_{p=1}^{m-1} I_p \\ &= 2\sum_{p=1}^{m-1} p^2 + \sum_{p=1}^{m-1} p \\ &= \frac{(m-1)m(2m-1)}{3} + \frac{(m-1)m}{2} \\ &= \frac{m(m-1)(4m+1)}{6} \end{aligned}$$

وأخيراً إذا وضعنا $m = \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$، كان لدينا

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{m^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor + \sum_{k=m^2}^{n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor \\ &= \frac{m(m-1)(4m+1)}{6} + m(n - m^2 + 1) \\ &= n\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor - \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor \cdot (\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1) \cdot (2\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 5)}{6} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

التمرين 16.

1. أثبت أنّ :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -1 & : \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \\ 0 & : \quad x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2. استنتج أنه إذا كان p و q عددين طبيعيين أوّليين فيما بينهما فإنّ

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

الحل

1. لنلاحظ أولاً أنّ التابع $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ دوري ويقبل العدد 1 دوراً .

ونحصل على الخاصة المطلوبة بملاحظة أنّ

$$\forall x \in [0,1[, \quad \varphi(x) = \begin{cases} -1 & : \quad 0 < x < 1 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

2. ومن جهة أخرى إذا عرّفنا $A = \sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor$ كان لدينا

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{(q-k)p}{q} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=1}^{q-1} \left(p + \left\lfloor \frac{-kp}{q} \right\rfloor \right) \\ &= p(q-1) + \sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{-kp}{q} \right\rfloor \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} 2A &= p(q-1) + \sum_{k=1}^{q-1} \left(\left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-kp}{q} \right\rfloor \right) \\ &= (p-1)(q-1) + \sum_{k=1}^{q-1} \left(1 + \varphi\left(\frac{kp}{q} \right) \right) \end{aligned}$$

ولكنّ المقدار $\varphi\left(\dfrac{kp}{q}\right)+1$ يساوي الصفر أيّاً كانت k من $\mathbb{N}_{q-1}$ وذلك استناداً إلى الطلب السابق. في الحقيقة، إنّ $\dfrac{kp}{q}\in\mathbb{Z}$ يقتضي وجود m في $\mathbb{Z}$ يُحقّق $kp=mq$، ولمّا كان q يقسم kp و q أوليّاً مع p، وجب أن يقسم العددُ q العددَ k. وهذا يناقض انتماء k إلى $\mathbb{N}_{q-1}$. نستنتج إذن أنّ

$$2A=(p-1)(q-1)$$

وهذا يُثبت العلاقة المطلوبة.

التمرين 17. أثبت أنّ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left\lfloor\frac{2k}{3}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n^2}{3}\right\rfloor\quad,\forall n\in\mathbb{N}$.

الحل

لنعرّف، أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$، المقدار

$$f(n)=\left\lfloor\frac{(n+1)^2}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n^2}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{2n+2}{3}\right\rfloor$$

ولنلاحظ ما يلي:

$$\begin{aligned}f(n+3)&=\left\lfloor\frac{(n+1)^2+6(n+1)+9}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n^2+6n+9}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{2n+8}{3}\right\rfloor\\&=\left\lfloor\frac{(n+1)^2}{3}\right\rfloor+2n+5-\left\lfloor\frac{n^2}{3}\right\rfloor-2n-3-\left\lfloor\frac{2n+2}{3}\right\rfloor-2\\&=f(n)\end{aligned}$$

ولكن

$$f(0)=f(1)=f(2)=0$$

إذن

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad f(n)=0$$

ونحصل على المساواة المطلوبة بكتابة $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}f(k)=0$.

التمرين 18. أثبت أنّ $\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor$ عددٌ فرديّ، وذلك أياً كانت n من $\mathbb{N}$. يمكنك أن تثبت أولاً أنّ $\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 1$.

الحل

لنلاحظ أنّ العدد x_n المعرّف بالعلاقة:

$$x_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 1 = -1 + \sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k} 2^{n-2k+1} 3^k$$

هو عدد طبيعي. ولمّا كان $0 < (2-\sqrt{3})^n \le 1$ فإننا نستنتج أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < (2+\sqrt{3})^n < x_n + 1$$

وهذا ما يثبت أنّ

$$x_n = \left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor$$

ونرى بسهولة انطلاقاً من العلاقة الآتية

$$x_n = -1 + 2\sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k} 2^{n-2k} 3^k$$

أنّ x_n عدد فردي.

التمرين 19. أثبت أنّ

$$\forall n \ge 1,\ \ 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

واستنتج قيمة $\left\lfloor \sum_{k=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor$.

الحل

المتراجحة المطلوبة واضحة. ومنها نستنتج أنّه، أياً كانت $m \ge 2$ كان

$$\sum_{k=1}^{m^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \sum_{k=2}^{m^2} \frac{1}{\sqrt{k}} < 1 + 2(m-1) = 2m - 1$$

و

$$\sum_{k=1}^{m^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{m} + \sum_{k=1}^{m^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{m} + 2(m-1) = 2m - 2 + \frac{1}{m}$$

ومنه نستنتج أنّ

$$\forall m \geq 2, \quad 2m-2 < \sum_{k=1}^{m^2} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2m-1$$

وهذا يقتضي

$$\forall m \geq 2, \quad \left\lfloor \sum_{k=1}^{m^2} \frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor = 2m-2$$

وبوجه خاص $\left\lfloor \sum_{k=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor = 198$.

التمرين 20. هل العدد $a = \sqrt[3]{40+11\sqrt{13}} + \sqrt[3]{40-11\sqrt{13}}$ عددٌ عادي ؟

الحل

بحساب a^3 والإصلاح نجد $a^3 - 9a - 80 = 0$. ومنه فإنّ a جذرٌ حقيقي للمعادلة

$$x^3 - 9x - 80 = 0$$

ولكن من ناحية أخرى لدينا

$$x^3 - 9x - 80 = (x-5)(x^2+5x+16) = (x-5)\left(\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{39}{4}\right)$$

إذن العدد 5 هو الجذر الحقيقي الوحيد للمعادلة $x^3 - 9x - 80 = 0$. ومن ثَمّ فإنّ $a = 5$ وهو إذن عدد صحيح.

التمرين 21. ليكن a عدداً حقيقيّاً. وليكن N من $\mathbb{N}^*$. أثبت أنّه يوجد زوج (A, B) من $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ يُحقّق في آن معاً الشرطين :

$$\left|a - \frac{A}{B}\right| < \frac{1}{BN} \quad \text{و} \quad B \geq N$$

الحل

1. لنلاحظ أنّه، في حالة عدد حقيقي a من $\mathbb{R}$، وعدد طبيعي k من $\mathbb{N}$، ينتمي العدد $\langle ka \rangle = ka - \lfloor ka \rfloor$ الذي هو الجزء الكسري للعدد ka إلى المجال $[0,1[$ ومن ثَمّ ينتمي المقدار

$N\left\langle ka\right\rangle$ إلى المجال $\left[0,N\right[$، وعليه ينتمي الجزء الصحيح لهذا العدد، أي $\left\lfloor N\left\langle ka\right\rangle\right\rfloor$، إلى $\left\{0,1,\ldots,N-1\right\}$. لنعرّف إذن التابع

$$\varphi:\mathbb{N}\to\left\{0,1,\ldots,N-1\right\},\quad \varphi(k)=\left\lfloor N\left\langle ka\right\rangle\right\rfloor$$

لمّا كان $\operatorname{card}\left(\left\{0,1,\ldots,N-1\right\}\right)=N$ استنتجنا أنّ مقصور φ على أيِّ مجموعة جزئيّة من $\mathbb{N}$ عدد عناصرها أكبر تماماً من N لا يكون متبايناً. لنعرّف إذن

$$\mathcal{E}=\left\{jN:0\leq j\leq N\right\}=\left\{0,N,2N,\ldots,N^2\right\}$$

لمّا كان $\varphi|_{\mathcal{E}}$ غير متباين استنتجنا أنّه يوجد عددان s و t يُحقّقان :

$$\varphi\left(sN\right)=\varphi\left(tN\right) \quad \text{و} \quad 0\leq s<t\leq N$$

أي إنّ للعددين $N\left\langle sNa\right\rangle$ و $N\left\langle tNa\right\rangle$ الجزء الصحيح نفسه. فالمسافة بينهما أصغر تماماً من 1. وعليه

$$\left|N\left\langle sNa\right\rangle-N\left\langle tNa\right\rangle\right|<1$$

فإذا عرّفنا $s'=\left\lfloor sNa\right\rfloor$ و $t'=\left\lfloor tNa\right\rfloor$ استنتجنا أنّ

$$\left|N\left(sNa-s'\right)-N\left(tNa-t'\right)\right|<1$$

وهذا يُكافئ $\left|(s-t)N^2a-N(s'-t')\right|<1$، أو

$$\left|a-\frac{t'-s'}{(t-s)N}\right|<\frac{1}{(t-s)N^2}$$

يكفي إذن أن نختار $B=(t-s)N\geq N$ و $A=t'-s'$ لنجد المطلوب. ■

التمرين 22. لتكن $(G,+)$ زمرة جزئيّة من $(\mathbb{R},+)$، نفترض أنّ $G\neq\{0\}$، ونعرّف العدد b بالعلاقة $b=\inf\left(G\cap\mathbb{R}_+^*\right)$.

1. أثبت أنّه إذا كان $b>0$ كان $G=\{bk:k\in\mathbb{Z}\}$.
2. لنفترض أنّ $b=0$. ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}$ يُحقّقان $x<y$.
   - *i*. أثبت أنّه يوجد عنصر g في G يُحقّق $0<g<\frac{y-x}{2}$.
   - *ii*. ليكن $k=\left\lfloor\frac{y}{g}\right\rfloor-1$. أثبت أنّ $kg\in\left]x,y\right[\cap G$.
   - *iii*. استنتج أنّ G كثيفة في $\mathbb{R}$.

3. ليكن θ من $\mathbb{R}_+^*$، نرمز بالرمز $\mathbb{Z}[\theta]$ إلى المجموعة

$$\left\{n+m\theta : (n,m)\in\mathbb{Z}^2\right\}$$

i. أثبت أنّ $\mathbb{Z}[\theta]$ زمرة جزئيّة من $(\mathbb{R},+)$.

ii. أثبت أنّ $\mathbb{Z}[\theta]$ كثيفة في $\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $\theta\notin\mathbb{Q}$.

4. ليكن θ من $\mathbb{R}_+^*\backslash\mathbb{Q}$، نرمز بالرمز $\mathcal{N}_\theta$ إلى المجموعة

$$\{n+m\theta : (n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\}$$

i. ليكن $\varepsilon>0$ أثبت أنّ $\mathcal{N}_\theta\cap\,]0,\varepsilon[\,\neq\varnothing$ و $\mathcal{N}_\theta\cap\,]-\varepsilon,0[\,\neq\varnothing$.

ii. أثبت أنّ $\mathcal{N}_\theta$ كثيفة في $\mathbb{R}$.

iii. ليكن x عدداً من $[-1,1]$، وليكن $\varepsilon>0$. أثبت أنّه يوجد n من $\mathbb{N}$ يُحقّق $|\sin n - x|<\varepsilon$، أي إنّ المجموعة $\{\sin n : n\in\mathbb{N}\}$ كثيفة في $[-1,1]$.

الحل

1. استناداً إلى تعريف b يوجد عنصر g في $G\cap\mathbb{R}_+^*$ يُحقّق $b\leq g\leq\frac{3}{2}b$. فلو افترضنا على سبيل الجدل أنّ $b<g$ أمكن إيجاد عنصر آخر g' في $G\cap\mathbb{R}_+^*$ يُحقّق $b\leq g'<g$، ومن المتراجحة

$$b\leq g'<g\leq\tfrac{3}{2}b$$

ينتج أنّ $0<g-g'\leq\frac{1}{2}b$. ولكنّ العنصر $g-g'$ عنصرٌ من G مما يناقض تعريف b. إذن $g=b$ والعنصر b ينتمي إلى G. ومنه $b\mathbb{Z}\subset G$.

وبالعكس، ليكن x عنصراً ما من G. نعرّف $k=\lfloor x/b\rfloor$، و $z=x-k\,b$. نلاحظ من جهة أولى أنّ $0\leq z<b$ ومنه $z\notin G\cap\mathbb{R}_+^*$، استناداً إلى تعريف b. ومن جهة ثانية نرى وضوحاً أنّ z ينتمي إلى $G\cap\mathbb{R}_+$. إذن لا بُدّ أن يكون $z=0$، وهذا يثبت أنّ x ينتمي إلى $b\mathbb{Z}$. فنكون قد أثبتنا أنّ $G=b\mathbb{Z}$.

2. نفترض أنّ $b=0$. لنتأمّل عددين حقيقيّين x و y من $\mathbb{R}$ يحقّقان $x<y$.

لمّا كان $\varepsilon = \frac{1}{2}(y-x) > 0$ ، فيوجد في G عنصرٌ g يُحقِّق $0 < g < \varepsilon$ ، وذلك استناداً إلى تعريف b . لنضع إذن بالتعريف $k = \lfloor y/g \rfloor - 1$ فيكون $k+2 > \frac{y}{g} \geq k+1$. أو

$$kg + g \leq y < kg + 2g$$

ومنه

$$x = y - 2\varepsilon < y - 2g < kg \leq y - g < y$$

أو $kg \in \left]x, y\right[\cap G$.

تُقرأ النتيجة السابقة على الوجه الآتي:

" يوجد بين كلِّ عددين حقيقيين مختلفين عنصر من G فالزمرة G كثيفة في $\mathbb{R}$. "

3. لتكن θ عنصراً من $\mathbb{R}_+^*$. ولنضع $\mathbb{Z}\left[\theta\right] = \left\{n + m\theta : (n,m) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

إنّ تيقُّن كوْن $\mathbb{Z}[\theta]$ زمرة جزئيّة من $(\mathbb{R},+)$ أمرٌ بسيط نترك تفاصيله للقارئ. إذا لم تكن $\mathbb{Z}[\theta]$ كثيفة في $\mathbb{R}$ فيوجد استناداً إلى ما أثبتناه في 1. عنصر b ينتمي إلى $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّق $\mathbb{Z}[\theta] = b\mathbb{Z}$.

ولمّا كان كلٌّ من العددين 1 و θ ينتمي إلى $\mathbb{Z}[\theta]$ فإنّه يوجد عنصرٌ (λ, μ) ينتمي إلى $\mathbb{Z}^2$ ، يُحقّق $1 = b\lambda$ و $\theta = b\mu$ ويكون من ثَمّ $\theta = \frac{\mu}{\lambda} \in \mathbb{Q}$.

وبالعكس، إذا كان $\theta = \frac{p}{q}$ وكان العددان الصحيحان p و q عددين أوليّين فيما بينهما كان :

$$\mathbb{Z}[\theta] = \frac{1}{q}\left\{qn + pm : (n,m) \in \mathbb{Z}^2\right\} = \frac{1}{p}\mathbb{Z}$$

والزمرة $\mathbb{Z}[\theta]$ ليست كثيفة في $\mathbb{R}$.

4. ليكن θ من $\mathbb{R}_+^* \backslash \mathbb{Q}$ ، نرمز بالرمز $\mathcal{N}_\theta$ إلى المجموعة $\left\{n + m\theta : \left(n, m\right) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\right\}$.

- ليكن ε عدداً موجباً تماماً. لمّا كانت المجموعة $\mathbb{Z}[\theta]$ كثيفة في $\mathbb{R}$ استنتجنا وجود عنصرٍ وليكن $\alpha + \beta\theta$ ينتمي إلى المجال $\left]0, \varepsilon\right[$ فإذا كان $\alpha \geq 0$ عرّفنا $\lambda_\varepsilon = \alpha + \beta\theta$ وإذا كان $\alpha < 0$ عرّفنا $\lambda_\varepsilon = -\alpha - \beta\theta$. فنكون بذلك قد وجدنا عنصراً λ_ε ينتمي إلى $\mathcal{N}_\theta$ ويُحقِّق $0 < \left|\lambda_\varepsilon\right| < \varepsilon$.

▪ فإذا كان $\lambda_\varepsilon > 0$ استنتجنا من جهة أولى أنّ $\mathcal{N}_\theta \cap \left]0,\varepsilon\right[\neq \varnothing$. وإذا تأمّلنا، من جهة ثانية، العدد $k = \lfloor \theta/\lambda_\varepsilon \rfloor$ كان $0 \leq \theta - k\lambda_\varepsilon \leq \lambda_\varepsilon < \varepsilon$ ، وكان من ثَمّ العدد $\mu_\varepsilon = k\lambda_\varepsilon - \theta$ عنصراً من المجموعة $\mathcal{N}_\theta \cap \left]-\varepsilon,0\right[$ فهي أيضاً ليست خالية.

▪ وإذا كان $\lambda_\varepsilon < 0$ استنتجنا من جهة أولى أنّ $\mathcal{N}_\theta \cap \left]-\varepsilon,0\right[$. وإذا تأمّلنا، من جهة ثانية، العدد $k = \lfloor \theta/|\lambda_\varepsilon| \rfloor$ كان $0 \leq \theta + k\lambda_\varepsilon \leq -\lambda_\varepsilon < \varepsilon$ ، وكان، من ثَمّ العددُ الحقيقي $\mu_\varepsilon = -k\lambda_\varepsilon - \theta$ عنصراً من المجموعة $\mathcal{N}_\theta \cap \left]0,\varepsilon\right[$ فهي أيضاً ليست خالية.

▪ ليكن إذن z عدداً حقيقياً ما، وليكن $\varepsilon > 0$.

▫ فإذا كان $z \geq 0$ ، تأمّلنا عنصراً a_ε من المجموعة غير الخالية $\mathcal{N}_\theta \cap \left]0,\varepsilon\right[$ ، وعرّفنا y من $\mathcal{N}_\theta$ بالصيغة $y = \lfloor z/a_\varepsilon \rfloor a_\varepsilon$. فيكون $0 \leq z - y \leq a_\varepsilon < \varepsilon$ وهذا يثبتُ أنّ

$$\mathcal{N}_\theta \cap \left]z-\varepsilon, z+\varepsilon\right[\neq \varnothing$$

▫ وإذا كان $z < 0$ ، تأمّلنا عنصراً b_ε من المجموعة غير الخالية $\mathcal{N}_\theta \cap \left]-\varepsilon,0\right[$ ، وعرّفنا y من $\mathcal{N}_\theta$ بالصيغة $y = \lfloor z/b_\varepsilon \rfloor b_\varepsilon$. فيكون $0 \geq z - y \geq b_\varepsilon > -\varepsilon$ وهذا يثبتُ أيضاً أنّ

$$\mathcal{N}_\theta \cap \left]z-\varepsilon, z+\varepsilon\right[\neq \varnothing$$

نكون بذلك قد أثبتنا أنّ المجموعة $\mathcal{N}_\theta$ كثيفة في $\mathbb{R}$.

▪ ليكن x عدداً حقيقياً من المجال $[-1,1]$، وليكن $\varepsilon > 0$. يوجد z في $\mathbb{R}$ يُحقِّق $\sin z = x$. لمّا كان $\theta = 2\pi$ عدداً حقيقيّاً موجباً لا ينتمي إلى $\mathbb{Q}$ استنتجنا أنّ $\mathcal{N}_{2\pi}$ كثيفة في $\mathbb{R}$ ، فيوجد عددان n في $\mathbb{N}$ و m في $\mathbb{Z}$ يُحقّقان $|n + 2\pi m - z| < \varepsilon$ ، وعندئذ

$$\begin{aligned} |\sin n - x| &= |\sin(n + 2\pi m) - \sin z| \\ &\leq |n + 2\pi m - z| < \varepsilon \end{aligned}$$

ونكون بذلك قد أثبتنا أنّ المجموعة $\{\sin n : n \in \mathbb{N}\}$ كثيفة في $[-1,1]$ ، فيتحقّق المطلوب.■

التمرين 23. نعرّف في حالة p و q من $\mathbb{N}^{*2}$ المقدار $A(p,q) = \dfrac{2p^2 - 3q}{p^2 + q}$، ونتأمّل المجموعة $\mathcal{A} = \{A(p,q) : 0 < p < q\}$.

1. أثبت أنّ 2 عنصرٌ راجحٌ على $\mathcal{A}$، وأنّ -3 عنصرٌ قاصرٌ عن $\mathcal{A}$.
2. احسب $\sup(\mathcal{A})$ و $\inf(\mathcal{A})$.

الحل

1. لنلاحظ أوّلاً أنّه في حالة p و q من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$2 - A(p,q) = 2 - \frac{2p^2 - 3q}{p^2 + q} = \frac{5q}{p^2 + q} > 0$$
$$3 + A(p,q) = 3 + \frac{2p^2 - 3q}{p^2 + q} = \frac{5p^2}{p^2 + q} > 0$$

إذن $\forall x \in \mathcal{A}, \quad -3 < x < 2$، وهذا يُثبتُ أنّ 2 راجحٌ على $\mathcal{A}$ وأنّ -3 قاصرٌ عن $\mathcal{A}$. هذا يتيح لنا أن نعرّف $\alpha = \sup(\mathcal{A})$ و $\beta = \inf(\mathcal{A})$. ويكون لدينا استناداً إلى ما سبق $\alpha \leq 2$ و $\beta \geq -3$.

2. نعلم أنّ $\alpha \leq 2$. لنفترض جدلاً أنّ $\alpha < 2$، عندئذ يوجد استناداً إلى خاصّة أرخميدس عددٌ n يُحقّق $n(2-\alpha) > 5$. ولمّا كان $A(n,n+1) \leq \alpha$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}
\alpha \geq A(n,n+1) &= 2 - \frac{5(n+1)}{n^2+n+1} \\
> 2 - \frac{5(n+1)}{n^2+n} &= 2 - \frac{5}{n} \\
> 2 - (2-\alpha) &= \alpha
\end{aligned}$$

وهذا تناقضٌ واضحٌ. إذن يجب أن يكون $\alpha = 2$ أي $\sup(\mathcal{A}) = 2$.

وكذلك نعلم أنّ $\beta \geq -3$. لنفترض جدلاً أنّ $\beta > -3$، عندئذ يوجد استناداً إلى خاصّة أرخميدس عددٌ m يُحقّق $(m+1)(\beta+3) > 5$. ولمّا كان $A(m,m^3) \geq \beta$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}
\beta \leq A(m,m^3) &= -3 + \frac{5}{m+1} \\
&< -3 + (\beta+3) = \beta
\end{aligned}$$

وهذا تناقضٌ واضحٌ. إذن يجب أن يكون $\beta = -3$ أي $\inf(\mathcal{A}) = -3$. ■

التمرين 24. أثبت في حالة a و b من $\mathbb{R}_+$، و n من $\mathbb{N}^*$ المتراجحة الآتية :

$$\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right) \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

مساعدة : يمكن البدء بدراسة حالة $a = 1$ و $b = x$ في حالة $x \geq 1$.

الحل

لنضع في حالة $x \neq 1$:

$$F(x) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) - \left(\frac{1+x}{2}\right)^n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right) - \left(\frac{1+x}{2}\right)^n$$

عندئذ في حالة $x = 1+h$ حيث $h > 0$ يكون لدينا

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{(1+h)^{n+1}-1}{(n+1)h} - \left(1+\frac{h}{2}\right)^n \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{C_{n+1}^k}{n+1} h^{k-1} - \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} C_n^k h^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} h^k - \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} C_n^k h^k \\
&= \sum_{2\leq k\leq n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2^k}\right) C_n^k h^k \qquad : \quad \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{k+1}C_n^k
\end{aligned}$$

ولكن $2^k = (1+1)^k \geq 1+k$، إذن لا بُدّ أن يكون $F(x) \geq 0$ في حالة $x \geq 1$. وإذا لاحظنا أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^n F\left(\frac{1}{x}\right) = F\left(x\right)$$

استنتجنا أنّ $F(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+,$. وأخيراً نستنتج المتراجحة العامّة بملاحظة أنّه في حالة $b > 0$ لدينا

$$\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^n = b^n \cdot F\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0$$

وهي المتراجحة المطلوبة. ■

المتتاليات العدديّة

﴿ في هذا البحث يمثِّل الرمز $\mathbb{K}$ حقل الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$ أو حقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$ ﴾

1. عموميات

1-1. **تعريف**. نسمّي **متتالية عدديّة** كل تطبيق منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومستقره الحقل $\mathbb{K}$. نرمز عادة إلى متتالية بالرمز $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ عوضاً عن

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}, n \mapsto u_n$$

ونسمّي u_n، أي صورة العدد n وفق هذا التطبيق، **الحدَّ العام** للمتتالية.

2-1. **تعريف**. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عدديّة. نسمّي **متتالية جزئية** من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كل متتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حدُّها العام v_n يساوي $u_{\varphi(n)}$ حيث φ تطبيق متزايد تماماً من $\mathbb{N}$ إلى $\mathbb{N}$.

⚠ 3-1. **ملاحظة**. لا يجوز الخلط بين متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ومجموعة قيمها $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

فمثلاً للمتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفتين بالعلاقتين :

$$v_n = (-1)^{n(n+1)/2} \quad \text{و} \quad u_n = (-1)^n$$

مجموعة القيم نفسها وهي $\{-1,+1\}$. ولكنّهما مختلفتان، فعلى سبيل المثال $u_2 \neq v_2$.

4-1. **مبرهنة**. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية. يوجد على الأكثر عدد وحيد ℓ في $\mathbb{K}$ يُحقّق الشرط

$$(\mathcal{L}) \qquad \forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

الإثبات

ليكن ℓ و ℓ' عددين يحققان الشرط $(\mathcal{L})$. لنفترض على سبيل الجدل أنّ $\ell \neq \ell'$ ولنختر $\varepsilon = \dfrac{|\ell - \ell'|}{3}$.

- نجد n_0 في $\mathbb{N}$ تُحقّق $n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$ لأنّ ℓ يحقّق $(\mathcal{L})$.
- ونجد n_1 في $\mathbb{N}$ تُحقّق $n > n_1 \Rightarrow \left|u_n - \ell'\right| < \varepsilon$ لأنّ ℓ' يحقّق $(\mathcal{L})$.

فإذا كان $m > \max(n_0, n_1)$ كان

$$\begin{aligned} 3\varepsilon = \left|\ell - \ell'\right| &= \left|\ell - u_m + u_m - \ell'\right| \\ &\leq |\ell - u_m| + \left|\ell' - u_m\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

أو $0 < \varepsilon$ وهذا التناقض يثبت أنّ $\ell = \ell'$. ❐

تفيدنا هذه المبرهنة في وضع التعريف الآتي.

1-5. **تعريف**. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عدديّة. إذا وُجِدَ عدد ℓ يُحقِّق الشرط $(\mathcal{L})$ فإنّ هذا العدد وحيدٌ ونسمّيه نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ونقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب من ℓ، ونكتب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ ، أو نقول إنّها **متقاربة** ونهايتها ℓ. أمّا إذا لم تتقارب متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ فنقول إنّها **متباعدة**. إنّ تعيين طبيعة متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ يعني دراسة تقاربها أو تباعدها.

1-6. **مبرهنة**. كلُّ متتاليةٍ متقاربةٍ محدودةٌ. أي إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية متقاربة فيوجد في $\mathbb{R}_+^*$ عددٌ M يُحقّق

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$$

الإثبات

لنفترض أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$. إنّ العدد ℓ يحقّق $(\mathcal{L})$، فحين تكون $\varepsilon = 1$ نجد في $\mathbb{N}$ عدداً n_0 يُحقِّق

$$n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < 1$$

نعرّف إذن

$$M = \max\left(|u_0|, \ldots, \left|u_{n_0}\right|, |\ell| + 1\right)$$

فنجد بسهولة أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$$

وهي النتيجة المرجوّة ❐

1-7. **مبرهنة**. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين متقاربتين، ولنضع $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ و $\ell' = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

1. إنّ المتتالية $(u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $\ell + \lambda\ell'$ أيّاً كان العدد λ من $\mathbb{K}$.
2. إنّ المتتالية $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $|\ell|$.
3. بافتراض أنّ $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leq v_n$ يكون $\ell \leq \ell'$.
4. إنّ المتتالية $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $\ell \cdot \ell'$.
5. بافتراض أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$ وأنّ $\ell \neq 0$ تكون $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $\dfrac{1}{\ell}$.
6. إذا كانت $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية جزئية من المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ فإنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$.

الإثبات

1. لتكن λ من $\mathbb{K}$، ولنضع $A = 1 + |\lambda|$. لتكن $0 < \varepsilon$، نجد n_0 من $\mathbb{N}$ تُحقّق

$$n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{A}$$

ونجد n_1 من $\mathbb{N}$ تُحقّق

$$n > n_1 \Rightarrow |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{A}$$

فإذا كان $N = \max(n_0, n_1)$ كان حينئذ :

$$\begin{aligned} n > N \quad \Rightarrow \quad \left|u_n + \lambda v_n - (\ell + \lambda\ell')\right| &\leq \left|u_n - \ell\right| + |\lambda|\left|v_n - \ell'\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{A}(1 + |\lambda|) = \varepsilon \end{aligned}$$

ومنه فالمتتالية $(u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $\ell + \lambda\ell'$.

2. هذه الخاصّة واضحة لأنّ $\left||u_n| - |\ell|\right| \leq |u_n - \ell|$ أيّاً كان العدد n من $\mathbb{N}$.

3. لنفترض جدلاً أنّ $\ell' < \ell$ نختار $\varepsilon = \dfrac{\ell - \ell'}{2}$ فنجد n_0 من $\mathbb{N}$ يُحقّق

$$n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

كما نجد n_1 من $\mathbb{N}$ يُحقّق $n > n_1 \Rightarrow |v_n - \ell'| < \varepsilon$. فإذا اخترنا

$$m = 1 + \max(n_0, n_1)$$

صار لدينا

$$v_m < \ell' + \varepsilon = \frac{\ell + \ell'}{2} = \ell - \varepsilon < u_m$$

وهذا يناقض الفرْض.

4. المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة فهي محدودة، لنضع $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |v_n|$. ثُمّ لنعرّف المتتالية العدديّة $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة $w_n = u_n v_n - \ell v_n$. فتتحقّق لدينا المتراجحة

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |w_n| \le M|u_n - \ell|$$

لتكن $\varepsilon > 0$ ، لأن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من ℓ ، نجد n_0 من $\mathbb{N}$ يُحقّق

$$n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{M}$$

ومن ثَمّ نجد n_0 من $\mathbb{N}$ تُحقّق

$$n > n_0 \Rightarrow |w_n| < \varepsilon$$

إذن $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة من 0 .

لذلك تكون المتتالية العدديّة $(w_n + \ell v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $\ell\,\ell' = 0 + \ell\,\ell'$ وذلك بناءً على الخاصّة 1. ويتم الإثبات لأنّ $u_n v_n = w_n + \ell v_n$.

5. في حالة $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2}$ نجد n_0 من $\mathbb{N}$ يُحقّق

$$n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2}$$

ومن ثَمّ

$$n > n_0 \Rightarrow |u_n| = |\ell + u_n - \ell| \ge |\ell| - |u_n - \ell| > \frac{|\ell|}{2}.$$

لتكن $\varepsilon > 0$، بناءً على تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من ℓ ، نجد عدداً n_1 من $\mathbb{N}$ يُحقِّق $n > n_1 \Rightarrow |u_n - \ell| < \frac{\ell^2}{2}\varepsilon$. فإذا كان $N = \max(n_0, n_1)$ ، كان حينئذ :

$$n > N \Rightarrow \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|\ell||u_n|} \le \frac{2}{\ell^2}|u_n - \ell| < \varepsilon$$

فالمتتالية $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $\frac{1}{\ell}$.

6. لنلاحظ أنه إذا كان $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تطبيقاً متزايداً تماماً كان $\varphi(n) \geq n$ أياً كان n من $\mathbb{N}$. لأنّ

$$\varphi(n) = \underbrace{\varphi(0)}_{\geq 0} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(\varphi(k) - \varphi(k-1))}_{\geq 1} \geq \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

لتكن $\varepsilon > 0$، بناءً على تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من ℓ، نجد عدداً n_0 من $\mathbb{N}$ يُحقِّق $n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$. ولكن بمقتضى الملاحظة السابقة، لدينا

$$n > n_0 \Rightarrow \varphi(n) > n_0$$

ومن ثَمّ

$$n > n_0 \Rightarrow \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \varepsilon$$

فالمتتالية الجزئية $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من ℓ أيضاً. ❐

1-8. **ملاحظة**. لا تبقى الخاصّة 3. صحيحة إذا استبدلنا بالمتراجحة $\leq$ متراجحة تامّة $<$. فعلى سبيل المثال إذا تأمّلنا المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفتين بالعلاقتين:

$$v_n = \frac{n+2}{n+1} \quad \text{و} \quad u_n = \frac{n}{n+1}$$

وجدنا أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < v_n$$

ومع ذلك فإنّ

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 1$$

1-9. **ملاحظة**. نستنتج أيضاً من المبرهنة السابقة أنّ تقارب متتالية عقديّة يُكافِئ تقارب كلٍّ من جزأيها الحقيقي والتخيّلي، وعندئذ يكون

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(u_n) + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(u_n)$$

2. خواص المتتاليات الحقيقية

يتميَّز حقل الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$ عن حقل العداد العقديّة $\mathbb{C}$ بأنّه مجموعة مرتّبة كلّيّاً. لذلك سنستثمر هذه الخاصّة لتعريف المتتاليات التي تكبر قيمها على نحوٍ غير متناه عندما تزداد قيم الدليل، وكذلك تلك التي تصغر قيمها صِغراً لا متناهياً عندما تزداد قيم الدليل. وبالطبع ليس هناك ما يُكافئ هذه الخواص في حالة المتتاليات العقديّة.

2-1.**تعريف**. من بين المتتاليات الحقيقية المتباعدة نميِّز المتتاليات $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي تحقِّق أحد الشرطين

$$\forall A \in \mathbb{R},\quad \exists n_0 \in \mathbb{N}:\quad n > n_0 \Rightarrow u_n > A \qquad ①$$

$$\forall A \in \mathbb{R},\quad \exists n_0 \in \mathbb{N}:\quad n > n_0 \Rightarrow u_n < A \qquad ②$$

فإذا حقّقت متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ الشرط ① قلنا إنّها **تسعى إلى** $+\infty$ وكتبنا

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$$

وكذلك إذا حقّقت متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ الشرط ② قلنا إنّها **تسعى إلى** $-\infty$ وكتبنا

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$$

2-2. **ملاحظة**. نكون بذلك قد أعطينا معنى للكتابة $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ وذلك أيّاً كانت المتتالية الحقيقية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ والعنصر a من $\overline{\mathbb{R}}$، وذلك تبعاً لكوْن $a \in \mathbb{R}$ أو $a = +\infty$ أو $a = -\infty$. يمكننا في الواقع إعطاء تعريف موحّد لهذه الخاصة بقولنا إنّها تكافئ العبارة الآتية :

"يحوي كلُّ جوار للعنصر a من $\overline{\mathbb{R}}$، جميع حدود المتتالية ما عدا عدداً منتهياً منها"

أو بلغة الرموز

$$\left(\lim_{n\to\infty} u_n = a\right) \Leftrightarrow \left(\forall V \in \mathbb{V}(a), \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow u_n \in V\right)$$

ونقول في مثل هذه الحالة إنّ للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نهاية في $\overline{\mathbb{R}}$.

2-3. **مبرهنة**. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين حقيقيّتين.

1. إنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} (-u_n) = -\infty$.
2. إذا كان $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$ وكان $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = +\infty$ فإنّ
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = 0$$
3. إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة وكانت $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$ فإنّ
$$\lim_{n\to\infty} (v_n + u_n) = +\infty$$
4. إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق الشرط $u_n \geq a > 0$ أيّاً كان العدد $n_1 \leq n$، وكان $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$ فإنّ
$$\lim_{n\to\infty} u_n v_n = +\infty$$
5. إذا كان $u_n \geq v_n$ أيّاً كان $n_1 \leq n$، وكان $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$ فإن
$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$$

الإثبات

إنّ الإثبات تحقُّق مباشر نتركه تمريناً للقارئ. ❐

2-4. **مثال**. إذا كان $a > 1$ كان $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ و ذلك لأنّ $a^n > n(a-1)$ أياً كان n من $\mathbb{N}$. أمّا إذا كان $a \in]-1,+1[$ فإنّ $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

2-5. **تعريف**. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية.

- نقول إنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **محدودة من الأعلى** إذا وُجِدَ في $\mathbb{R}$ عنصر M راجح على مجموعة قيمها أي $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
- نقول إنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **محدودة من الأدنى** إذا وُجِدَ في $\mathbb{R}$ عنصر m قاصر عن مجموعة قيمها أي $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$.
- نقول إنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **متزايدة** إذا كان $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$ وتكون **متزايدة تماماً** إذا كان $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$. ونقول عنها إنها **متناقصة** (**تماماً**) إذا وفقط إذا كانت المتتالية $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **متزايدة** (**تماماً**). وهي **مطّردة** إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

2-6. مبرهنة. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية مطّردة. تكون $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت محدودة. وفي هذه الحالة تكون نهايتها $\sup\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ إذا كانت متزايدة، أو $\inf\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ إذا كانت متناقصة. أمّا إذا كانت المتتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى فعندها يكون $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ ، وإذا كانت متناقصة وغير محدودة من الأدنى يكون $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

الإثبات

- لنفترض أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى. إنّ مجموعة قيمها مجموعة جزئية غير خالية ومحدودة في $\mathbb{R}$، فلها حدّ أعلى وليكن $\ell = \sup\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$.

ليكن $\varepsilon > 0$، نجد، استناداً إلى تعريف الحد الأعلى، عدداً n_0 في $\mathbb{N}$ يُحقِّق المتراجحة $\ell - \varepsilon < u_{n_0}$. ومن ثَمّ

$$n > n_0 \Rightarrow \ell - \varepsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$$

أو

$$n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

ومنه $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.

- لنفترض أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى. فليس هناك عنصر راجح على مجموعة قيمها.

ليكن A من $\mathbb{R}$، لمّا كان A غير راجح على المجموعة $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ أمكننا إيجاد عددٍ n_0 في $\mathbb{N}$ يُحقّق $A < u_{n_0}$، و من ثَمّ

$$n > n_0 \Rightarrow u_n \geq u_{n_0} > A$$

ومنه $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$. لاحظ أنه في هذه الحالة يكون أيضاً

$$\sup\{u_n : n\in\mathbb{N}\} = +\infty = \lim_{n\to\infty} u_n$$

- لنفترض أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة. بتطبيق ما سبق على المتتالية المتزايدة $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نجد أنه إذا كانت هذه المتتالية محدودة فهي تتقارب من $\inf\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ وإلّا فإنها تسعى إلى $-\infty$. ❐

2-7. نتيجة. لكلِّ متتالية مطّردة من $\overline{\mathbb{R}}$ نهاية في $\overline{\mathbb{R}}$.

2-8. مبرهنة وتعريف. نقول إنّ المتتاليتين الحقيقيّتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتان إذا تحققت الشروط:

① المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة والمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة.

② تتقارب المتتالية $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من 0.

إنّ أي متتاليتين متجاورتين متقاربتان ولهما النهاية نفسها.

الإثبات

لنلاحظ أوّلاً أنّ المتتالية التي حدّها العام $w_n = v_n - u_n$ متناقصة، وهي تسعى إلى 0 فهو إذن الحد الأدنى لمجموعة قيمها $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$. نستنتج من ذلك، والاستفادة من ① أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_0 \le u_n \le v_n \le v_0$$

إنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد v_0 فهي متقاربة من عددٍ ℓ. ومن ناحية أخرى، المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد u_0 فهي متقاربة من عددٍ ℓ'. ومن الشرط ② نجد :

$$\ell' - \ell = \lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$$

أو $\ell = \ell'$. ❐

2-9. مثال. لنتأمّل المتتاليتين $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ المعرّفتين كما يأتي

$$v_n = u_n + \frac{1}{n} \quad \text{و} \quad u_n = 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{(n+1)^2} > 0\\
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0\\
v_n - u_n &= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

لذا تكون المتتاليتان $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ متجاورتين، فهما متقاربتان ولهما النهاية نفسها. في الحقيقة، يمكننا أن نبرهن أنّ هذه النهاية تساوي $\frac{\pi^2}{6}$.

▪ عمّم هذا المثال لتثبت أنّ المتتاليتين $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ المعرّفتين كما يأتي

$$v_n = u_n + \frac{1}{p\,n^p} \quad \text{و} \quad u_n = 1 + \frac{1}{2^{p+1}} + \cdots + \frac{1}{n^{p+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+1}}$$

متجاورتان. وذلك أيّاً كان p من $\mathbb{N}^*$.

2-10. مبرهنة. لتكن المتتاليات الحقيقيّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نفترض أنّ

① المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تسعيان إلى العنصر a نفسه من $\overline{\mathbb{R}}$.

② $u_n \le v_n \le w_n$ أيّاً كان n من $\mathbb{N}$.

حينئذ يكون $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$.

الإثبات

إنّ حالة $a \in \{-\infty, +\infty\}$ واضحة. لنفترض أنّ $a \in \mathbb{R}$ فيكون

$$\begin{aligned} |v_n - a| &\le |v_n - u_n| + |u_n - a| \\ &\le |w_n - u_n| + |u_n - a| \\ &\le |w_n - a| + |u_n - a| + |u_n - a| \\ &= |w_n - a| + 2|u_n - a| \end{aligned}$$

لتكن $\varepsilon > 0$، نجد عدداً n_0 من $\mathbb{N}$ يُحقّق

$$n > n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ونجد n_1 من $\mathbb{N}$ يُحقّق

$$n > n_1 \Rightarrow |w_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}$$

فإذا كان $\max(n_0, n_1) = N$ نتج أنّ

$$\begin{aligned} n > N \quad \Rightarrow \quad |v_n - a| &\le |w_n - a| + 2|u_n - a| \\ &< (1+2)\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

ومن ثَمّ $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$. ❐

3. نهاية الحدود العليا ونهاية الحدود الدنيا لمتتالية حقيقيّة

1-3. تعريف. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية، ولنعرّف انطلاقاً منها المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\overline{\mathbb{R}}$ على الوجه الآتي.

$$\begin{aligned} a_n &= \sup\{u_k : k \geq n\} \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \\ b_n &= \inf\{u_k : k \geq n\} \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\} \end{aligned}$$

نلاحظ أنّ المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة، وأنّ المتتالية $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة. يوجد من ثَمّ عنصران ω و Ω في $\overline{\mathbb{R}}$ يُحقّقان $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \Omega$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \omega$.

نسمّي ω **نهاية الحدود الدنيا** للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ونرمز إليها بالرمز $\underline{\lim}_{n\to\infty} u_n$. وكذلك نسمّي Ω **نهاية الحدود العليا** للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ونرمز إليها بالرمز $\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n$.

2-3. مثال. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية التي حدّها العام $u_n = (-1)^n$. نلاحظ أنّ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n = 1 \quad \text{و} \quad \underline{\lim}_{n\to\infty}\, u_n = -1$$

علماً أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة.

بوجه عام تكون نهاية الحدود الدنيا ونهاية الحدود العليا لأي متتالية حقيقيّة موجودتين في $\overline{\mathbb{R}}$، وذلك بقطع النظر عن تقارب تلك المتتالية أو تباعدها.

3-3. مبرهنة. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقيّة. ولنضع

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n = \Omega \quad \text{و} \quad \underline{\lim}_{n\to\infty}\, u_n = \omega$$

① إذا كانت $(u_{\theta(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية جزئية من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تسعى إلى a من $\overline{\mathbb{R}}$ كان

$$\omega \leq a \leq \Omega$$

② توجد متتالية جزئية $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ من المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تُحقّق $\lim\limits_{n\to\infty} u_{\varphi(n)} = \omega$.

③ توجد متتالية جزئية $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ من المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تُحقّق $\lim\limits_{n\to\infty} u_{\psi(n)} = \Omega$.

الإثبات

لنذكّر بالرموز $X_n = \{u_k : k \geq n\}$ و $a_n = \sup X_n$ و $b_n = \inf X_n$.

① نلاحظ أنّ $u_{\theta(n)} \in X_n$ أياً كان العدد n.[1] ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n \leq u_{\theta(n)} \leq a_n$$

وبجعل n تسعى إلى اللانهاية نجد المتراجحة المطلوبة : $\omega \leq a \leq \Omega$.

② لإثبات هذه النقطة سنناقش حالتين :

▪ **حالة** $\omega \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. نلاحظ في هذه الحالة أنّ جميع حدود المتتالية $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$. واستناداً إلى تعريف الحدّ الأدنى : $b_{m+1} = \inf\{u_k : k > m\}$ نجد، مهما يكن العدد $\varepsilon > 0$، عنصراً $\tilde{k}$ أكبر تماماً من m يُحقّق $u_{\tilde{k}} \leq b_{m+1} + \varepsilon$. وهذا يكافئ قولنا

$$❶ \qquad \forall m \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \{p > m : u_p \leq b_{m+1} + \varepsilon\} \neq \varnothing$$

نعرّف حينئذ التطبيق $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ على الوجه الآتي: نضع أوّلاً $\varphi(0) = 0$، أمّا حين يكون $n \geq 1$ فإننا نعرّف $\varphi(n)$ بدلالة $\varphi(n-1)$ بالعلاقة:

$$\varphi(n) = \min\left\{p > \varphi(n-1) : u_p \leq b_{1+\varphi(n-1)} + \frac{1}{n}\right\}$$

إذ طبّقنا ❶ بأخذ $m = \varphi(n-1)$ و $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$.

نلاحظ انطلاقاً من تعريف التطبيق φ أنّ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) > \varphi(n-1)$. فهو متزايد تماماً. ومن ناحية أخرى، انطلاقاً من التعريف نفسه ولأنّ $\varphi(n) \geq 1 + \varphi(n-1)$ نجد

$$❷ \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_{1+\varphi(n-1)} \leq u_{\varphi(n)} \leq b_{1+\varphi(n-1)} + \frac{1}{n}$$

ولكن المتتالية $\left(b_{1+\varphi(n-1)}\right)_{n\geq 1}$ متتالية جزئية من المتتالية $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي تسعى إلى ω فهي إذن تسعى بدورها إلى ω. ومن ثَمّ، إذا جعلنا n تسعى إلى اللانهاية في ❷ حصلنا على

$$\lim_{n\to\infty} u_{\varphi(n)} = \omega$$

[1] إذا كان $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تطبيقاً متزايداً تماماً فإنّ $\theta(n) \geq n$ أياً كان n من $\mathbb{N}$.

▪ **حالة** $\omega = -\infty$. يكون هنا $b_n = -\infty$ أياً كان n من $\mathbb{N}$. ومن ثَمّ يكون لدينا في هذه الحالة

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R},\quad \{p > m : u_p \le A\} \ne \varnothing \qquad ❸$$

لذلك يمكننا تعريف التطبيق $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ على الوجه التالي : نضع أولاً $\varphi(0) = 0$. أمّا حين يكون $1 \le n$ فإننا نعرّف $\varphi(n)$ بدلالة $\varphi(n-1)$ بالعلاقة:

$$\varphi(n) = \min\{p > \varphi(n-1) : u_p \le -n\}$$

إذ طبّقنا ❸ بأخذ $m = \varphi(n-1)$ و $A = -n$. ينتج من هذا التعريف أنّ φ متزايد تماماً و أنّ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{\varphi(n)} \le -n$ ، ومن ثَمّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_{\varphi(n)} = -\infty$.

③ إنّ الإثبات هنا مشابه تماماً لحالة ② وسنتركه تمريناً للقارئ. ❒

3-4. ملاحظة. يتحقق القارئ بسهولة، لأنّ ضرب طرفي متراجحة بالعدد -1 يعكس جهتها، أنه إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية، كان

$$\varliminf_{n\to\infty} u_n = -\varlimsup_{n\to\infty}(-u_n) \quad \text{و} \quad \varlimsup_{n\to\infty} u_n = -\varliminf_{n\to\infty}(-u_n)$$

ويمكننا عندئذ استنتاج الخاصّة ③ انطلاقاً من الخاصة ② في المبرهنة السابقة.

3-5. نتيجة. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية، عندئذ $\varlimsup\limits_{n\to\infty} u_n \le \varliminf\limits_{n\to\infty} u_n$ وتحقّق المساواة إذا وفقط إذا سعت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إلى عنصر من $\overline{\mathbb{R}}$ ، وفي هذه الحالة يكون

$$\varliminf_{n\to\infty} u_n = \varlimsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_n$$

الإثبات

لنضع كما في السابق $X_n = \{u_k : k \ge n\}$ و $a_n = \sup X_n$ و $b_n = \inf X_n$ ولنرمز كما يلي $\varliminf\limits_{n\to\infty} u_n = \omega$ و $\varlimsup\limits_{n\to\infty} u_n = \Omega$. المتراجحة $\omega \le \Omega$ واضحة لأنّ

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \le a_n$$

ومن ناحية أخرى $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \le u_n \le a_n$. فإذا كان $\omega = \Omega = a$ وجب أن تسعى المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إلى القيمة المشتركة a . وبالعكس إذا سعت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إلى a فكل متتالية جزئية منها تسعى إلى a . ومن ثَمّ $\omega = \Omega = a$ بمقتضى المبرهنة 3-3. ❒

3-6. مبرهنة. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين حقيقيتين.

① إذا كان $u_n \le v_n$ في حالة $n_0 \le n$ كان $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, v_n$.

② $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(u_n+v_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, v_n$ بشرط أن يكون الطرف الأيمن معرّفاً، أي ألّا يكون من الشكل $(-\infty)+(+\infty)$ أو $(+\infty)+(-\infty)$. وتتحقق المساواة إذا تقاربت إحدى المتتاليتين من عددٍ حقيقيّ.

③ إذا كانت المتتاليتان $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ موجبتين كان

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(u_n v_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, v_n$$

بشرط أن يكون الطرف الأيمن معرّفاً، أي ألّا يكون من الشكل $0\times(+\infty)$ أو $(+\infty)\times 0$.

الإثبات

① لاحظ أنّ $\sup\{u_k : k\ge n\} \le \sup\{v_k : k \ge n\}$ أيّاً كان $n_0 \le n$.

② أيّاً كان $n \le k$ فلدينا

$$u_k + v_k \le \sup\{u_p : p\ge n\} + \sup\{v_p : p \ge n\}$$

ومن ثَمّ

$$\sup\{u_k+v_k : k\ge n\} \le \sup\{u_p : p\ge n\} + \sup\{v_p : p \ge n\}$$

وبجعل n تسعى إلى اللانهاية نجد المتراجحة المطلوبة.

لنفترض مثلاً أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ولنضع $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$. ليكن $0<\varepsilon$ يوجد n_0 في $\mathbb{N}$ تُحقّق

$$n > n_0 \Rightarrow u_n \ge \ell - \varepsilon$$

ومن ثَمّ

$$n > n_0 \Rightarrow u_n + v_n \ge \ell - \varepsilon + v_n$$

فإذا استفدنا من الخاصّة السابقة والتعريف وجدنا أنّ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(u_n+v_n) \ge \ell - \varepsilon + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, v_n$$

ولكنّ ε عدد موجب كيفيّ، فنستنتج أنّ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(u_n+v_n) \ge \ell + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, v_n$ وهذا يثبت المساواة في حال تقارب $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

③ نتركه تمريناً للقارئ. ❐

3-7. ملاحظة. نترك للقارئ مهمة صياغة وإثبات مبرهنة مماثلة للمبرهنة السابقة حول نهاية الحدود الدنيا لمتتالية.

3-8. ملاحظة. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية. لدينا الاقتضاء المفيد الآتي:

$$\varlimsup_{n\to\infty} u_n < a \Rightarrow \left(\exists n_0 \in \mathbb{N},\quad \forall n \geq n_0,\quad u_n < a\right)$$

3-9. مبرهنة Bolzano-Weierstrass. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية محدودة. يوجد تطبيق متزايد تماماً $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ يجعل المتتالية الجزئية $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

الإثبات

نجد، بمقتضى الفرْض، عدداً حقيقياً $0 < M$ يُحقِّق

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad -M \leq u_n \leq M$$

فإذا تأمّلنا $\varlimsup_{n\to\infty} u_n = \Omega$ وجدنا $\Omega \in [-M, M] \subset \mathbb{R}$، فالعنصر Ω عددٌ حقيقي تسعى إليه متتالية جزئية من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ وذلك عملاً بالمبرهنة 3-3. ❐

3-10. نتيجة Bolzano-Weierstrass. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عدديّة محدودة. يوجد تطبيق متزايد تماماً $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ يجعل المتتالية الجزئية $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

الإثبات

- إذا كانت المتتالية حقيقيّة وجدنا المطلوب استناداً إلى ما سبق. لنفترض إذن أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عقديّة. ولنضع تعريفاً $x_n = \mathrm{Re}(u_n)$ و $y_n = \mathrm{Im}(u_n)$. لمّا كانت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة وكان $|x_n| \leq |u_n|$ و $|y_n| \leq |u_n|$ أيّاً كان العدد الطبيعي n، استنتجنا أنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتان حقيقيّتان محدودتان.

- إذن، بناءً على ما سبق، يوجد تطبيق متزايد تماماً $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ يجعل المتتالية الجزئية $(x_{\theta(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من عدد حقيقي α. ولأنّ المتتالية $(y_{\theta(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة يوجد تطبيق متزايد تماماً $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ يجعل المتتالية الجزئية $(y_{\theta(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب من عددٍ حقيقي β. فإذا عرّفنا $\varphi = \theta \circ \psi$ وجدنا أنّ المتتالية الجزئيّة $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من العدد العقدي $\alpha + \mathrm{i}\,\beta$. ❐

3-11. مثال. لتكن $(x_n)_{n\ge 1}$ متتالية حقيقية، ولنعرّف المتتالية $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ بالصيغة

$$\sigma_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

حينئذ

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \sigma_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \sigma_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

تسمّى هذه النتيجة المهمّة **توطئة** CESÁRO.

الإثبات

لنثبت أولاً أنّ $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sigma_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$. إذا كان $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$ فليس هناك ما يجب إثباته. لنفترض الآن أنّ $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$، وليكن α عدداً كيفياً يُحقّق $a < \alpha$. إنّ كوْن $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n < \alpha$ يقتضي وجود عددٍ طبيعي n_0 يُحقّق:

$$n \ge n_0 \Rightarrow x_n < \alpha$$

ومن ثَمّ أيّاً كان $n_0 \le n$ كان

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{x_1 + \cdots + x_{n_0-1}}{n} + \frac{x_{n_0} + \cdots + x_n}{n}\\ &\le \frac{x_1 + \cdots + x_{n_0-1}}{n} + \frac{n - n_0 + 1}{n}\alpha\\ &\le \frac{x_1 + \cdots + x_{n_0-1} + (1-n_0)\alpha}{n} + \alpha\end{aligned}$$

ومنه $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sigma_n \le \alpha$.

هذه المتراجحة محقّقة أيّاً كان العدد الحقيقي الكيفيّ $a < \alpha$، ينتج من ذلك أنّ

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sigma_n \le a$$

وهذا يثبت المتراجحة الأخيرة. ثُمّ تنتج المتراجحة الأولى: $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \sigma_n$ من تطبيق ما سبق على المتتالية $(-x_n)_{n\ge 1}$، فنجد المطلوب باستعمال النتيجة 3-5.

3-12. نتيجة. لتكن $(x_n)_{n\ge 1}$ متتالية حقيقية، ولنعرّف المتتالية $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ بالصيغة

$$\sigma_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

إذا سعت المتتالية $(x_n)_{n\ge 1}$ إلى a من $\overline{\mathbb{R}}$ فإنّ $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = a$.

ولكنّ العكس غير صحيح كما تبيّن المتتالية التي حدّها العام $x_n = (-1)^n$.

13-3. **نتيجة**. لتكن $(z_n)_{n\geq 1}$ متتالية عدديّة، ولنعرّف المتتالية $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ بالصيغة

$$\sigma_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

إذا سعت المتتالية $(z_n)_{n\geq 1}$ إلى a من $\mathbb{K}$ فإنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = a$.

في الحقيقة، يكفي تطبيق النتيجة السابقة على كلٍّ من الجزء الحقيقي والجزء التخيّلي للمتتالية $(z_n)_{n\geq 1}$.

☜ **يمكن تأجيل دراسة بقية هذه الفقرة إلى قراءة ثانية.**

14-3. **مبرهنة**. لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقيّة تُحقّق الشرط $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. ولنضع $\Lambda = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ و $\lambda = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$. عندئذ مهما تكن α من $[\lambda, \Lambda]$ توجدْ متتالية جزئيّة $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ من $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من α، أي $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = \alpha$.

الإثبات

في الحقيقة، نعلم استناداً إلى المبرهنة 3-3. أنه توجد متتاليتان جزئيتان $(x_{\theta(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ و $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ تُحقّقان

$$\lim_{n\to\infty} x_{\psi(n)} = \Lambda \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} x_{\theta(n)} = \lambda$$

لنفترض إذن أنّ $\alpha \in]\lambda, \Lambda[$. ولنعرِّف، أياً كان n من $\mathbb{N}$، المجموعة

$$\mathcal{A}_n = \{k > n : (x_k - \alpha)\cdot(x_n - \alpha) \leq 0\}$$

ولنلاحظ ما يلي :

- في حالة $x_n = \alpha$ يكون $\mathcal{A}_n = [n+1, +\infty[\cap \mathbb{N} \neq \varnothing$.
- في حالة $x_n > \alpha$ يكون $\mathcal{A}_n = \{k > n : x_k \leq \alpha\}$، ومن ثَمّ $\mathcal{A}_n \neq \varnothing$، لأنّ $\lim\limits_{m\to\infty} x_{\theta(m)} = \lambda < \alpha$.
- في حالة $x_n < \alpha$ يكون $\mathcal{A}_n = \{k > n : x_k \geq \alpha\}$، ومن ثَمّ $\mathcal{A}_n \neq \varnothing$، لأنّ $\lim\limits_{m\to\infty} x_{\theta(m)} = \Lambda > \alpha$.

نستنتج من ذلك أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{A}_n \neq \varnothing$$

يتيح لنا هذا تعريف التطبيق $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ بالتدريج على الوجه الآتي :

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 0\\ \forall n \geq 1, \quad \varphi(n) &= \min \mathcal{A}_{\varphi(n-1)}\end{aligned}$$

من الواضح أنّ φ متزايد تماماً، واستناداً إلى تعريف $\mathcal{A}_{\varphi(n-1)}$ وإلى تعريف $\varphi(n)$ يكون

$$(x_{\varphi(n)} - \alpha) \cdot (x_{\varphi(n-1)} - \alpha) \leq 0$$

و

$$(x_{\varphi(n)-1} - \alpha) \cdot (x_{\varphi(n-1)} - \alpha) \geq 0$$

وهذا يقتضي

$$(x_{\varphi(n)-1} - \alpha) \cdot (x_{\varphi(n)} - \alpha) \leq 0$$

أي إنّ α تقع بين $x_{\varphi(n)}$ و $x_{\varphi(n)-1}$. إذن

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|x_{\varphi(n)} - \alpha\right| \leq \left|x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)-1}\right| \qquad (*)$$

ولكن المتتالية $(x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)-1})_{n\geq 0}$ تتقارب من 0 لأنّها جزئيّة من $(x_{n+1} - x_n)_{n\geq 0}$.
وهذا يقتضي أنّ $\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = \alpha$ استناداً إلى العلاقة $(*)$. ❐

في الحقيقة، يمكن التعبير عن النتيجة السابقة بالقول إنه إذا حقَّقت متتالية حقيقيّة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ الشرط $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ ، كانت مجموعة قيمها $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ كثيفة في المجال $\left[\varliminf_{n\to\infty} x_n, \varlimsup_{n\to\infty} x_n\right]$.

3-14. **مثال**. المجموعة $\left\{\sin \frac{\pi\sqrt{n}}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ كثيفة في المجال $[-1, +1]$.

3-15. **نتيجة**. ليكن (a, b) عنصراً من $\mathbb{R}^2$ يُحقّق $a < b$. وليكن $f : [a, b] \to [a, b]$ ، تابعاً مستمراً. نعرّف المتتالية التدريجيّة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بأخذ x_0 عنصراً ما من $[a, b]$، وفي حالة n من $\mathbb{N}$: $x_{n+1} = f(x_n)$. نفترض أنّ $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ ، عندئذ تكون المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من عنصر α من $[a, b]$، يحقّق $f(\alpha) = \alpha$.

الإثبات

لنعرّف

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lambda \geq a \quad \text{و} \quad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \Lambda \leq b$$

ولتكن α عنصراً من $[\lambda, \Lambda]$، عندئذ توجد، استناداً إلى المبرهنة 13-3، متتالية جزئيّة ولتكن $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ من $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من α . ومنه :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} (x_{\varphi(n)+1} - x_{\varphi(n)}) + \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = \alpha \end{aligned}$$

إذن لقد أثبتنا أنّ

$$\forall \alpha \in [\lambda, \Lambda], \quad f(\alpha) = \alpha \tag{1}$$

لنفترض جدلاً أنّ $\Lambda \neq \lambda$ ، عندئذ توجد متتالية جزئيّة من $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب من منتصف المجال $]\lambda, \Lambda[$. فلابدّ أن يحتوي المجال $]\lambda, \Lambda[$ على أحد حدود المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ وليكن x_{n_0} . أي $x_{n_0} \in]\lambda, \Lambda[$. وهذا يثبت، بمقتضى (1)، أنّ $\forall n \geq n_0, x_n = x_{n_0}$. أي إنّ المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من x_{n_0}، وعليه يكون $\lambda = x_{n_0} = \Lambda$ وهذا يناقض الفرْض.

نستنتج إذن أنّ $\lambda = \Lambda$. فلابدّ أن تكون المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ويتم الإثبات. □

4. متتاليات كوشي Cauchy

4-1. تعريف. نقول عن متتالية عدديّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها **متتالية كوشي** إذا وفقط إذا حقّقت الشرط :

أيّاً كان ε من $\mathbb{R}_+^*$، فيوجد في $\mathbb{N}$ عددٌ n_0، يُحقّق

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad (m > n \geq n_0) \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon$$

وهذا يكافئ قولنا إنّ $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ حيث

$$\delta_n = \sup\left\{ \left| u_k - u_\ell \right| : k > \ell \geq n \right\}$$

2-4. مثال. لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجية:

$$(u_0, u_1) \in \mathbb{K}^2$$
$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$$

لنثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية كوشي.

نلاحظ أولاً أنه، أيّاً كان n من $\mathbb{N}$، فلدينا

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = \frac{1}{2}|u_{n+1} - u_n|$$

وهذا ما يسمح لنا أن نثبت بالتدريج على n أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - u_n| = 2^{-n}|u_1 - u_0|$$

لتكن عندئذ (n, m) من $\mathbb{N}^2$ تُحقّق $m > n$ فيكون لدينا

$$|u_m - u_n| = \left|\sum_{k=n}^{m-1}(u_{k+1} - u_k)\right| \leq \sum_{k=n}^{m-1}|u_{k+1} - u_k| = |u_1 - u_0|\left(\sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k}\right)$$

ولكن $\sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ وذلك أياً كان $n < m$. بذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$(\Delta) \qquad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad m > n \Rightarrow |u_m - u_n| \leq \frac{|u_1 - u_0|}{2^{n-1}}$$

ليكن $0 < \varepsilon$، يوجد في $\mathbb{N}$ عددٌ n_0 يُحقّق $\varepsilon > |u_1 - u_0| \cdot 2^{1-n_0}$، وبمقتضى (Δ) يكون

$$\begin{aligned}\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad m > n \geq n_0 \Rightarrow |u_m - u_n| &\leq \frac{|u_1 - u_0|}{2^{n-1}}\\ &\leq \frac{|u_1 - u_0|}{2^{n_0-1}} < \varepsilon\end{aligned}$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي.

4-3. **مثال**. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية الحقيقية المعرّفة بالعلاقة

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} u_{2n+1} - u_n &= \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k+1} \geq \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لا تحقّق شرط كوشي لأن

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \delta_n = \sup\{|u_k - u_\ell| : k > \ell \geq n\} \geq \frac{1}{2}$$

4-4. **مبرهنة**. إذا كانت المتتالية العدديّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي، كانت محدودة.

الإثبات

لنضع

$$\delta_n = \sup\left\{\left|u_k - u_\ell\right| : k > \ell \geq n\right\}$$

المتتالية $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب من الصفر. ومن ثَمّ يوجد m يُحقّق $\delta_m \leq 1$، فيكون لدينا، مهما تكن $k > m$:

$$|u_k| \leq |u_k - u_m| + |u_m| \leq \delta_m + |u_m| \leq 1 + |u_m|$$

ومنه

$$\forall k \geq 0, \quad |u_k| \leq 1 + \sum_{\ell=0}^{m} |u_\ell| = M$$

وهي النتيجة المرجوّة. ❐

4-5. **مبرهنة**. إذا كانت المتتالية العدديّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي، وإذا تقاربت متتالية جزئية منها $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$، كانت هي نفسها متقاربة.

الإثبات

لنفترض أنّ $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_{\varphi(n)}$. وليكن $\varepsilon > 0$، يوجد في $\mathbb{N}$ عددٌ n_0 يُحقّق

$$n > n_0 \Rightarrow \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

كما يوجد في $\mathbb{N}$ عددٌ n_1 يُحقّق

$$m > n \geq n_1 \Rightarrow \left|u_m - u_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

لنضع إذن $N = \max(n_0, n_1)$. فيكون لدينا، أياً كان $n > N$،

$$\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad \left|u_{\varphi(n)} - u_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وذلك لأنّ $n \geq \varphi(n) = m$. ومنه

$$n > N \Rightarrow \left|u_n - \ell\right| \leq \left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| + \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهذا ما يثبت تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من ℓ . ❐

4-6. مبرهنة. لتكن المتتالية الحقيقية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. هناك تكافؤ بين الخاصّتين الآتيتين:

① المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي.

② المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة.

الإثبات

① ⇐ ② لمّا كانت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي، كانت محدودة، لذلك توجد، بمقتضى النتيجة 3-10. متتالية جزئية منها متقاربة، ولكنّ هذا يقتضي تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نفسها استناداً إلى المبرهنة السابقة.

② ⇐ ① لنفترض أنّ $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. وليكن $\varepsilon > 0$، عندئذ نجد في $\mathbb{N}$ عددٌ n_0 يُحقّق

$$n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ومن ثَمّ

$$m > n > n_0 \Rightarrow |u_m - u_n| \leq |u_m - \ell| + |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي. ❐

4-7. **ملاحظة**. تبيّن المبرهنة السابقة أهمية مفهوم متتاليات كوشي، إذ يسمح بإثبات وجود نهاية متتالية دون معرفة سابقة لقيمة هذه النهاية.

تمثّل المبرهنة التالية تطبيقاً مهماً على دراسة متتاليات كوشي.

4-8. **مبرهنة النقطة الثابتة**. ليكن $I = [a,b]$ مجالاً مغلقاً من $\mathbb{R}$، وليكن $f : I \to I$ تطبيقاً يحقّق الخاصة الآتية :

$$\exists K \in \left]0,1\right[, \quad \forall (x,y) \in I \times I, \quad \left|f(x) - f(y)\right| \le K\left|x - y\right|$$

عندئذ **يوجد** عدد حقيقي **وحيد** α ينتمي إلى I ويُحقّق $f(\alpha) = \alpha$. وإضافة إلى ذلك، يكون لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ حيث $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي **أية** متتالية معرفة بالعلاقة التدريجية $x_{n+1} = f(x_n)$ وبعنصرٍ ما x_0 من I .

الإثبات

- لنثبت أنّه يوجد على الأكثر عنصرٌ α ينتمي إلى I ويُحقّق $f(\alpha) = \alpha$. فإذا حقّق β من I أيضاً المساواة $f(\beta) = \beta$ ، أمكننا أن نكتب

$$\left|\alpha - \beta\right| = \left|f\left(\alpha\right) - f\left(\beta\right)\right| \le K\left|\alpha - \beta\right|$$

ومن ثَمّ $\left|\alpha - \beta\right| \le 0$ لأنّ $1 - K > 0$، ومنه $\alpha = \beta$.

- ليكن x_0 عنصراً ما من I . لمّا كان $f(I) \subset I$ أمكننا تعريف متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر المجال I، بوضع $x_1 = f(x_0)$ و $x_2 = f(x_1)$ و ... و $x_{n+1} = f(x_n)$.

سنثبت أنّ هذه المتتالية تحقق شرط كوشي فهي تتقاربة من عنصرٍ α ينتمي إلى I، ثم سنثبت أن نهايتها تُحقّق $f(\alpha) = \alpha$. فيتم الإثبات.

لنلاحظ أولاً أنّه، مهما يكن $1 \le n$، يكن

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| = \left|f(x_n) - f(x_{n-1})\right| \le K\left|x_n - x_{n-1}\right|$$

وهذا ما يتيح لنا أن نثبت بالتدريج على n، أنّه، أياً كان $0 \le n$، فلدينا

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \le K^n\left|x_1 - x_0\right|$$

فإذا كان $m > n \geq 0$ أمكننا أن نكتب

$$|x_m - x_n| \leq \sum_{p=n}^{m-1} |x_{p+1} - x_p| \leq |x_1 - x_0| \left(\sum_{p=n}^{m-1} K^p \right) < |x_1 - x_0| \frac{K^n}{1-K}$$

ومن ثَمّ

$$\delta_n = \sup\{|x_p - x_\ell| : p > \ell \geq n\} \leq MK^n$$

حيث $M = \dfrac{|x_1 - x_0|}{1-K}$.

ونظراً إلى كون $0 < K < 1$، فإنّ $\lim_{n\to 0} \delta_n = 0$، وتكون المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي فهي متقاربة. لنضع تعريفاً $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$. لمّا كان $a \leq x_n \leq b$ أيّاً كان n من $\mathbb{N}$، استنتجنا، بجعل n تسعى إلى $+\infty$، أنّ $\alpha \in I$. ولدينا من ناحية أخرى :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |x_{n+1} - f(\alpha)| \leq K|x_n - \alpha|$$

ولكن $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \alpha$ إذن بجعل n تسعى إلى $+\infty$ في المتراجحة السابقة نجد $f(\alpha) = \alpha$، وبذلك نجد المطلوب. □

4-9. ملاحظة. نحتفظ برموز المبرهنة السابقة. بعد أن أثبتنا أنّ $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ أصبح من المهمّ معرفة "**سرعة تقارب x_n من α**"، أو بقول آخر كم حدّاً يجب حسابه من المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حتى نحصل على قيمة تقريبيّة للعدد α بخطأ لا يتجاوز قيمة معطاة $\varepsilon > 0$. في الحقيقة ينتج من المتراجحة $m > n \Rightarrow |x_m - x_n| < MK^n$ بجعل m تسعى إلى اللانهاية أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - \alpha| \leq MK^n$$

فحتى نحصل على قيمة تقريبيّة للعدد α بخطأ لا يتجاوز $\varepsilon > 0$، يمكننا أن نأخذ x_T بعد أن نختار T معرّفة بالصيغة $T = 1 + \left\lfloor \dfrac{\ln(\varepsilon/M)}{\ln K} \right\rfloor$. إلّا أنّ هذه الطريقة ليست أكثر الطرائق استعمالاً على وجه العموم، بل نستفيد من متراجحة أخرى. فمن جهة أولى، لدينا

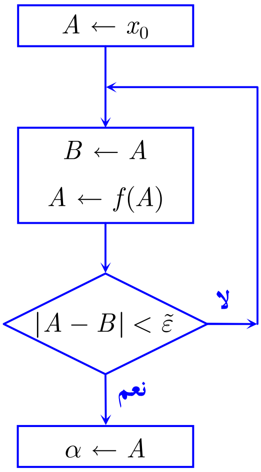
$$|x_{n+1} - \alpha| = |f(x_n) - f(\alpha)| \leq K|x_n - \alpha|$$

ومن جهة ثانية

$$\begin{aligned} |x_n - \alpha| &\leq |x_n - x_{n+1}| + |f(x_n) - f(\alpha)| \\ &\leq |x_n - x_{n+1}| + K|x_n - \alpha| \end{aligned}$$

ومن ثَمّ $\left|x_n - \alpha\right| \leq \dfrac{1}{1-K}\left|x_n - x_{n+1}\right|$. وهذا ما يتيح لنا كتابة

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|x_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{K}{1-K}\left|x_n - x_{n+1}\right|$$



تتميز هذه المتراجحة عن سابقتها بأنها تفيد في تقدير الخطأ المرتكب، عند اعتماد x_{n+1} تقريباً للعدد α، بناءً على المسافة بين x_{n+1} و x_n.

يبيّن الشكل المجاور خوارزميّة حساب تقريب للعدد α بخطأ لا يتجاوز $\varepsilon > 0$ انطلاقاً من قيمة البدء x_0. وقد رمزنا بالرمز $\tilde{\varepsilon}$ إلى المقدار $\varepsilon\dfrac{1-K}{K}$.

10-4. **مثال**. لندرس المعادلة $x^3 + 3x - 2 = 0$.

نعرّف أولاً التابع $g(x) = x^3 + 3x - 2$، ونلاحظ أنّ g متزايد تماماً على $\mathbb{R}$ وأنّ $g(0) = -2$ و $g(1) = 2$. ومن ثَمّ يوجد في $\mathbb{R}$ جذر وحيد α للمعادلة $g(x) = 0$، وينتمي هذا الجذر إلى المجال $I = [0,1]$.

لنعرّف التابع $f(x) = \dfrac{2}{3+x^2}$ فيكون $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$. والعدد α الذي نبحث عنه هو العدد الحقيقي الوحيد الذي يحقق $f(\alpha) = \alpha$، وهكذا نرى أنّنا نقترب من الوضع المدروس في المبرهنة السابقة.

إنّ التابع f متناقص تماماً على المجال I و $f(0) = \dfrac{2}{3}$ و $f(1) = \dfrac{1}{2}$، إذن $f(I) \subset I$. لنطبّق المبرهنة السابقة على التابع

$$f : [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto \frac{2}{3+x^2}$$

نلاحظ أنه إذا كان (x,y) من $I\times I$ كان

$$f(x)-f(y)=2(y-x)\frac{y+x}{(3+x^2)(3+y^2)}$$

ومن ثَمّ

$$\forall (x,y)\in I\times I,\quad |f(x)-f(y)|\leq \frac{4}{9}|x-y|$$

فالتطبيق f يحقّق جميع فرضيات المبرهنة السابقة حيث $K=\frac{4}{9}$، ويمكننا الحصول على تقريب للجذر α بالاستفادة من المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة كما يلي :

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2}, \\ \forall n\geq 0,\quad x_{n+1} &= \frac{2}{3+x_n^2} \end{aligned}$$

نجد في الجدول التالي حساب قيمة للعدد α بخطأ أصغر من 10^{-5} : $\tilde{\varepsilon}=1.25\times 10^{-5}$.

n	x_n	$\lvert x_n-x_{n-1}\rvert$
0	0.5	−
1	0.6153846	01153846
2	**0.59**19439	0.0234407
3	**0.59**69440	0.0050001
4	**0.59**58868	0.0010573
5	**0.596**1108	0.0002324
6	**0.5960**633	0.0000474
7	**0.59607**34	0.0000101

ومنه القيمة التقريبية $\alpha\approx 0.59607$. في الحقيقة، يمكننا أن نثبت أنّ

$$\alpha=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}}$$

وهذا أمرٌ نتركه للقارئ.

5. بعض المفاهيم الطبولوجيّة المرتبطة بالمتتاليات

5-1. **تعريف**. لتكن A مجموعة جزئية من $\overline{\mathbb{R}}$ نقول إنّ العنصر a من $\overline{\mathbb{R}}$ **نقطة لاصقة** بالمجموعة A إذا وُجِدتْ متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر A تسعى إلى a.

فمثلاً $\sqrt{2}$ نقطة لاصقة بالمجموعة $\mathbb{Q}$، و 1 نقطة لاصقة بالمجموعة $]0,1[$، و $+\infty$ نقطة لاصقة بالمجموعة $\mathbb{R}$.

5-2. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة جزئية من $\overline{\mathbb{R}}$ وليكن a من $\overline{\mathbb{R}}$. الخواص التالية متكافئة :

① النقطة a نقطة لاصقة بالمجموعة A.

② يتقاطع كلُّ جوار للعنصر a مع A، أي :

$$\forall V \in \mathbb{V}(a), V \cap A \neq \varnothing .$$

الإثبات

① ⇐ ② توجد بمقتضى الفرْض متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر A تسعى إلى a. ليكن V جواراً للعنصر a يوجد إذن n_0 من $\mathbb{N}$ يُحقّق الاقتضاء $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \in V$. ينتج من ذلك أنّ $u_{n_0} \in V \cap A$ فالتقاطع $V \cap A$ غير خالٍ.

② ⇐ ① لنعرّف، مهما يكن n من $\mathbb{N}$، الجوار V_n للعنصر a على الوجه التالي : $V_n =]n,+\infty[$ إذا كان $a = +\infty$، و $V_n = \left]a - \frac{1}{2^n}, a + \frac{1}{2^n}\right[$ إذا كان $a \in \mathbb{R}$، وأخيراً إذا كان $a = -\infty$ نعرّف $V_n =]-\infty, -n[$. لمّا كانت المجموعة $V_n \cap A$ غير خالية فإننا نجد فيها عنصراً u_n. وعندئذ نتحقّق بسهولة ومباشرة أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$. فالنقطة a لاصقة بالمجموعة A. □

5-3. **ملاحظة**. يبقى التعريف 5-1 قائماً في حالة $\mathbb{C}$ بدلاً من $\overline{\mathbb{R}}$. وعندئذ تبقى المبرهنة السابقة صحيحة. إذ نذكّر أن جوار عنصرٍ في $\mathbb{C}$ هو كلُّ مجموعة تحوي قرصاً مفتوحاً غير خالٍ مركزه هذا العنصر.

5-4. **تعريف**. لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{K}$ نقول إنّ A **مجموعة مغلقة** في $\mathbb{K}$ إذا انتمتْ إلى المجموعة A كلُّ نقطة من $\mathbb{K}$ لاصقةٍ بالمجموعة A.

فمثلاً كلُّ مجال من النمط $[a,b]$ أو $[a,+\infty[$ أو $]-\infty,a]$ مع (a,b) من $\mathbb{R}^2$ هو مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}$. وكذلك فإنّ القرص المغلق $\overline{D}(a,r)=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-a\right|\le r\right\}$ هو مجموعة مغلقة في $\mathbb{C}$. وأخيراً، المجموعتان $\varnothing$ و $\mathbb{K}$ مجموعتان مغلقتان في $\mathbb{K}$.

5-5. **مبرهنة**.

① تكون المجموعة الجزئية A من $\mathbb{K}$ مغلقة في $\mathbb{K}$، إذا وفقط إذا كانت متمّمتها $\mathbb{K}\backslash A$ جواراً لكل عنصر من عناصرها أي :

$$\forall x\in\mathbb{K},\quad x\notin A\Rightarrow \mathbb{K}\backslash A\in\mathbb{V}(x).$$

② إذا كانت $(F_\omega)_{\omega\in\Omega}$ جماعة من المجموعات المغلقة في $\mathbb{K}$، كانت $F=\bigcap_{\omega\in\Omega}F_\omega$ مجموعة مغلقة في $\mathbb{K}$.

③ إذا كانت $F_1,\ldots,F_n$ مجموعات مغلقة في $\mathbb{K}$، كانت $G=\bigcup_{k=1}^{n}F_k$ مجموعة مغلقة في $\mathbb{K}$.

الإثبات

① لنفترض أنّ A مجموعة مغلقة. وليكن x عنصراً لا ينتمي إلى A. إذن x ليست لاصقة بالمجموعة A، ومن ثَمّ يوجد جوار V للعنصر x يُحقّق $V\cap A=\varnothing$، وهذا يكافئ قولنا إنّ $V\subset\mathbb{K}\backslash A$ أي $\mathbb{K}\backslash A$ جوار للعنصر x.

وبالعكس، لتكن a من $\mathbb{K}$ نقطة لاصقة بالمجموعة A، عندئذ توجد متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر A تسعى إلى a. فإذا افترضنا جدلاً أنّ $A\not\ni a$ يكون $\mathbb{K}\backslash A$ جواراً للعنصر a لا يحتوي على أيّ حدٍّ من حدود المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$، وهذا يناقض كونها تسعى إلى a.

② لتكن a من $\mathbb{K}$ نقطة لاصقة بالمجموعة $F=\bigcap_{\omega\in\Omega}F_\omega$، توجد عندئذ متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر F تسعى إلى a. ومن ثَمّ تكون a لاصقة بالمجموعة F_ω أياً كان ω من Ω. ولأنّ المجموعة F_ω مغلقة، نستنتج أنّ $a\in F_\omega$ أياً كان ω من Ω، أي إنّ a ينتمي إلى F.

③ ليكن x عنصراً من $\mathbb{K}\backslash G$، إذن $\mathbb{V} \in \mathbb{K}\backslash F_k$ وذلك أياً كان الدليل k من $\mathbb{N}_n$. نستنتج إذن أنّ $\mathbb{K}\backslash F_k$ جوار للعنصر x وذلك مهما يكن k من $\mathbb{N}_n$، واستناداً إلى خواص الجوارات يكون $\bigcap_{k\in\mathbb{N}_n} \mathbb{K}\backslash F_k$ جواراً للعنصر x، ومن ثَمّ تكون المجموعة $\mathbb{K}\backslash G$ جواراً للعنصر x، فالمجموعة G مغلقة. ❐

5-6. تعريف. لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{K}$. نقول إنّ A **مجموعة متراصّة** في $\mathbb{K}$ إذا أمكننا أن نستخرج من كل متتالية من عناصر A متتالية جزئية متقاربة من عنصر ينتمي إلى A.

5-7. مبرهنة. لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{K}$. هناك تكافؤ بين الخاصتين التاليتين:

① المجموعة A متراصّة.

② المجموعة A مغلقة ومحدودة.

الإثبات

① ⇐ ② إذا لم تكن المجموعة A محدودة، وجدنا متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر A تُحقّق $\lim_{n\to\infty} |u_n| = +\infty$. وبناءً على الفرْض نجد تطبيقاً متزايداً تماماً $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ يجعل المتتالية الجزئية $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب من عنصر λ ينتمي إلى A. ومن ثمّ $\lim_{n\to\infty} \left|u_{\varphi(n)}\right| = \left|\lambda\right|$ وهذا يناقض الخاصّة $\lim_{n\to\infty} \left|u_n\right| = +\infty$. إذن المجموعة A محدودة.

لتكن a من $\mathbb{K}$ نقطة لاصقة بالمجموعة A، توجد إذن متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر A تتقارب من a. وبمقتضى الفرْض نجد تطبيقاً متزايداً تماماً $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ يجعل المتتالية الجزئية $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب من عنصر λ ينتمي إلى A. ولكنّ المتتالية $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية جزئية من المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتقاربة من a، فهي أيضاً متقاربة من a. نستنتج أنّ $a = \lambda \in A$، وأنّ المجموعة A مغلقة.

② ⇐ ① لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من A. لمّا كانت المجموعة A محدودة كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية محدودة في $\mathbb{K}$، وبمقتضى مبرهنة بولزانو ڤايرشتراس يمكن أن نستخرج منها متتالية جزئية $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من عنصرٍ a من $\mathbb{K}$. فتكون a نقطة لاصقة بالمجموعة A فهي من ثَمّ تنتمي إلى A لأن المجموعة A مغلقة. ❐

5-8. **مثال**. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عدديّة متقاربة من عنصرٍ a ينتمي إلى $\mathbb{K}$. عندئذ تكون المجموعة $A = \{a\} \cup \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ مجموعة متراصّة.

- في الحقيقة، إنّ A محدودة لأن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة. لنثبتْ أنّ A مغلقة.
- ليكن x عنصراً لا ينتمي إلى A . ولنضع $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}|a - x|$. يوجد، استناداً إلى تعريف التقارب، عددٌ طبيعي n_0 يُحقّق $|a - u_n| < \varepsilon_1$ أياًكان $n_0 < n$ ، ومن ثم

$$\begin{aligned} n > n_0 \quad \Rightarrow |x - u_n| &= |x - a + a - u_n| \\ &\geq |x - a| - |a - u_n| > 2\varepsilon_1 - \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \end{aligned}$$

لنعرّف إذن

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\min\left(\varepsilon_1, |x - u_0|, |x - u_1|, \ldots, |x - u_{n_0}|\right)$$

فيكون لدينا $|x - u| > \varepsilon_0$ أيّاً كان u من A . ومن ثَمّ

$$\left\{z \in \mathbb{K} : |z - x| < \varepsilon_0\right\} \subset \mathbb{K}\backslash A$$

فالمجموعة $\mathbb{K}\backslash A$ جوار للعنصر x ، وهذا يُثبتُ أنّ المجموعة A مغلقة، ويُنجز الإثبات.

تمرينات

التمرين 1. ليكن $a > 1$ و p من $\mathbb{N}^*$، أثبت أنّ $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty$.

الحل

لنعرّف $h = a - 1 > 0$ عندئذ يكون لدينا استناداً إلى دستور ثنائي الحدّ :

$$a^n = (1+h)^n \geq C_n^{p+1} h^{p+1}$$

ومنه في حالة $n \geq 2p$ يكون لدينا المتراجحة الآتية

$$\frac{a^n}{n^p} \geq \frac{n(n-1)\cdots(n-p)}{n^p} h^{p+1} = n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p}{n}\right)h^{p+1}$$

ولكن حين يكون $n \geq 2p$ تكون جميع المقادير $\left(1-\frac{k}{n}\right)_{1\leq k\leq p}$ أكبر أو تساوي $\frac{1}{2}$. إذن:

$$\forall n \geq 2p, \quad \frac{a^n}{n^p} \geq n\, 2^{-p}\, h^{p+1}$$

ومن ثَمّ نستنتج من هذه المتراجحة أنّ $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty$. ■

التمرين 2. ادرس تقارب المتتالية التي حدّها العام

$$u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$$

الحل

نلاحظ أوّلاً أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} u_n < u_n$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة، وهي محدودة من الأدنى بالعدد 0 فهي إذن متقاربة.

نريد في الحقيقة أن نثبت أكثر من ذلك، سنبرهن أنّ المتتالية المدروسة تسعى إلى 0 . فمن جهة أولى لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - \frac{1}{2n} < \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

وللتحقق من ذلك، نلاحظ أوّلاً أنّ طرفي المتراجحة موجبان فيكفي أن نقارن مربعيهما، ولكن

$$\begin{aligned}\frac{n}{n+1}-\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2 &= \frac{n}{n+1}-1+\frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2}\\ &= \frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{4n^2}=\frac{3n-1}{4n^2(n+1)}\end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أنّ

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=1-\frac{1}{2n}<\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

ومنه نستنتج أنّ المتتالية ذات الحدود الموجبة $\left(\sqrt{n+1}u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة، فهي إذن متقاربة من نهاية ولتكن ℓ. أي $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}\,u_n=\ell$ ، وهذا يُثبتُ أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. ■

التمرين 3. ادرس تقارب المتتالية $\left(\sqrt[n]{a}\right)_{n\geq1}$ علماً أنّ a عددٌ حقيقي موجبٌ تماماً، وادرس كذلك المتتالية $\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\geq1}$.

الحل

لنعرّف $\varepsilon_n=\sqrt[n]{n}-1$. إنّ المتتالية $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية ذات حدود موجبة وتُحقّق

$$n=(1+\varepsilon_n)^n\geq\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon_n^2$$

ومن ثَمّ نجد

$$\forall n>1,\quad 0<\varepsilon_n\leq\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

وهذا يثبت أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ أو $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

ليكن a عدداً من a . عندئذ توجد n_0 تُحقّق

$$\forall n>n_0,\quad n^{-1}<a<n$$

وعندئذ يكون

$$\forall n>n_0,\quad \frac{1}{\sqrt[n]{n}}<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{n}$$

فإذا جعلنا n تسعى إلى اللانهاية واستفدنا من النتيجة الأولى وجدنا $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$. ■

التمرين 4. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية محدودة من الأعداد الحقيقيّة تحقّق:

$$\forall n \geq 1, \quad 2u_n \leq u_{n-1} + u_{n+1}.$$

نرمز بالرمز v_n إلى $u_{n+1} - u_n$.

1. أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.
2. أثبت أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ وأنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

الحل

1. لنلاحظ أوّلاً أنّ الفرض $\forall n \geq 1, u_n - u_{n-1} \leq u_{n+1} - u_n$ ، يُكافئ كوْن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة، ولكنها محدودة لأنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة. إذن هي متتالية متقاربة.
2. لنضع بالتعريف $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ ، عندئذ يكون لدينا، استناداً إلى مبرهنة سيزارو،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}}{n} = \ell$$

وبناءً على تعريف المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$، يكون $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n - u_0}{n} = \ell$ ، أو $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.

ولكنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة، إذن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = 0$. وعلى هذا لا بُدَّ أن يكون $\ell = 0$.

نستنتج مما سبق أنّ المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة وتسعى إلى 0، فجميع حدودها سالبة. وهذا يعني أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة، فهي من ثَمَّ متقاربة لأنّها محدودة. ■

التمرين 5. ادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالصيغة

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!}$$

الحل

لنفترض أنّ $n \geq 2$ عندئذ يمكننا أن نكتب

$$1 = \frac{n!}{n!} \leq u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!} \leq \frac{n!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!}$$

ومن ثَمّ

$$1 \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{(n-1)!}{n!} = 1 + \frac{2}{n}$$

وهذا يثبتُ أنّ

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1$$

باتّباع أسلوب الإثبات ذاته، يمكننا أن نبرهن أنّه إذا كانت $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية متزايدة من $\mathbb{R}_+^*$ تُحقّق الشرط $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\,\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = 0$ عندئذ يكون $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$.

التمرين 6. ادرس تقارب كلّ من المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفتين كما يلي:

$$v_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(2 - \frac{n-1}{n}\right)$$
$$u_n = n^2\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$$

الحل

- لنلاحظ أوّلاً أنّ

$$\begin{aligned} v_n &= \prod_{k=1}^{n-1}\left(2 - \frac{k}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{n-k}{n}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{k}{n}\right) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n} = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ أنّ $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

- من جهة أخرى، بالاستفادة من المساواة

$$b^n - a^n = (b-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

لدينا

$$u_n = n^2\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right) = \frac{n^2}{\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{n+1})^k(\sqrt[n]{n})^{n-1-k}}$$

وعلى هذا يكون

$$\frac{n^2}{n(\sqrt[n]{n+1})^{n-1}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n(\sqrt[n]{n})^{n-1}}$$

أو

$$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{n+1} \leq u_n \leq \sqrt[n]{n}$$

ونستنتج من ذلك أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

التمرين 7. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عدديّة تُحقّق $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$ ، أثبت أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell \in [0,1[\ \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

ماذا يحدث إذا كانت $\ell > 1$ ؟

تطبيق : ادرس المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ في الحالات الآتية:

$$u_n = \frac{a^n}{n^p},\quad u_n = \frac{a^n}{n!},\quad u_n = \frac{n!}{n^n}$$

الحل

ليكن α من $]\ell,1[$. عندئذ يوجد في $\mathbb{N}$ عددٌ N يُحقّق $\forall n \geq N,\quad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq \alpha$ ، إذن تكون المتتالية $\left(\alpha^{-n}|u_n|\right)_{n\geq N}$ متناقصة ومنه

$$\forall n \geq N,\quad |u_n| \leq \alpha^n \cdot \frac{|u_N|}{\alpha^N}$$

وهذا يُثبت أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

أمّا إذا كانت $\ell > 1$، فنطبّق ما سبق على المتتالية $\left(\frac{1}{|u_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ لنستنتج أنّه في هذه الحالة تتحقّق الخاصّة الآتية : $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = +\infty$.

أمّا بقيّة التمرين فهي تطبيق مباشر على ما سبق.

التمرين 8. لتكن $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقيّة موجبة، تحقّق :

$$\forall\left(n,p\right)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2,\ u_n\leq\frac{p}{n}+\frac{1}{p}$$

أثبت أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

الحل

ينتج من الفرْض باختيار $p=\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0\leq u_n\leq\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}+\frac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$$

وعليه بجعل n تسعى إلى اللانهاية نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$. ■

التمرين 9. لتكن $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرّفة على الوجه التالي :

$$\forall n\geq 1,\qquad u_n=\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

أثبت أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{e-1}$.

الحل

ليكن m عدداً من $\mathbb{N}^*$. عندئذ أيّاً كان $m<n$ فلدينا

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\geq\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n$$

وعليه

$$\varliminf_{n\to\infty}u_n\geq\sum_{k=1}^{m}e^{-k}=\frac{1-e^{-m}}{e-1}$$

ومن ثَمّ بجعل m تسعى إلى اللانهاية نجد $\varliminf\limits_{n\to\infty}u_n\geq\frac{1}{e-1}$.

ولكن من جهة أخرى، لدينا المتراجحة $\forall x\in\mathbb{R},\ 1+x\leq e^x$ إذن

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\leq\sum_{k=1}^{n}e^{-k}\leq\frac{1}{e-1}$$

ومنه نستنتج أنّ $\varlimsup\limits_{n\to\infty}u_n\leq\frac{1}{e-1}$. وهذا يثبت أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\frac{1}{e-1}$. ■

التمرين 10. مبرهنة Cesàro

لتكن $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية من الأعداد الحقيقيّة الموجبة تماماً وتحقّق

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = +\infty$$

ولتكن $(b_n)_{n\geq 1}$ متتالية حقيقيّة، نعرّف $B_n = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \Big/ \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$.

1. أثبت أنّ:

$$\varliminf_{n\to+\infty} b_n \leq \varliminf_{n\to+\infty} B_n \leq \varlimsup_{n\to+\infty} B_n \leq \varlimsup_{n\to+\infty} b_n$$

2. نفترض أنّ $(b_n)_{n\geq 1}$ متقاربة من عددٍ λ في $\mathbb{R}$. أثبت أنّ $(B_n)_{n\geq 1}$ متقاربة أيضاً من العدد λ.

3. أثبت أنّه إذا كانت المتتالية $(b_n)_{n\geq 1}$ متزايدة، وكانت $(B_n)_{n\geq 1}$ متقاربة كانت $(b_n)_{n\geq 1}$ متقاربة أيضاً.

الحل

1. يكفي أن نُثبتَ أنّ $\varlimsup_{n\to+\infty} B_n \leq \varlimsup_{n\to+\infty} b_n$ في حالة $\varlimsup_{n\to+\infty} b_n = \ell < +\infty$.

لتكن $\ell < \beta$، عندئذ يوجد n_0 في $\mathbb{N}^*$ يُحقِّق $\forall n > n_0, b_n < \beta$. وعندئذ

$$\forall n \geq n_0,\quad B_n \leq \frac{\sum_{k=1}^{n_0} a_k b_k + \beta \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} = \beta + \frac{\sum_{k=1}^{n_0} a_k b_k - \beta \sum_{k=1}^{n_0} a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$$

وعليه يكون $\varlimsup_{n\to\infty} B_n \leq \beta$. ولأنّ $\ell < \beta$ كيفي، استنتجنا أنّ $\varlimsup_{n\to\infty} B_n \leq \ell$.

2. هذا واضح استناداً إلى ما سبق.

3. لتكن $n > m$، عندئذ يكون لدينا

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k \geq b_m \sum_{k=m}^{n} a_k$$

أو

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k b_k \geq b_m \left(\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k \right)$$

وعليه

$$B_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \geq b_m + \frac{\sum_{k=1}^{m-1} a_k b_k - b_m \sum_{k=1}^{m-1} a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$$

نستنج إذن، بجعل n تسعى إلى اللانهاية، أنّ $\lim_{n\to\infty} B_n \geq b_m$ وذلك أياً كانت m. فالمتتالية المتزايدة $(b_m)_{m\geq 1}$ محدودة من الأعلى وهي من ثمّ متقاربة. ■

التمرين 11. لتكن $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية حقيقيّة حدودها موجبة، ولتكن $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$. نفرض أنّ $\lim_{n\to+\infty} a_n S_n = 1$. أثبت أنّ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{3n}\ a_n = 1$. يمكن استعمال مبرهنة CESÀRO.

الحل

من الواضح أنّ المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ متزايدة، فإذا كانت متقاربة وجب أن تكون المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ متقاربة من 0، وعندها يكون $\lim_{n\to+\infty} a_n S_n = 0$ وهذا يناقض الفرض. إذن لا بُدَّ أن يكون لدينا

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

نستنتج إذن من المساواة

$$\forall n > 1, \quad \frac{S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{a_n^2}{S_n} = 1 - \frac{(a_n S_n)^2}{S_n^3}$$

أنّ

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n} = 1$$

وبالاستناد إلى المساواة

$$\forall n > 1, \quad S_n^3 - S_{n-1}^3 = (a_n S_n)^2 \left(1 + \frac{S_{n-1}}{S_n} + \left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)^2\right)$$

يمكننا أن نكتب $\lim_{n\to+\infty}\left(S_n^3 - S_{n-1}^3\right) = 3$. وعملاً بتوطئة سيزارو يكون لدينا

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=2}^{n}(S_k^3 - S_{k-1}^3)}{n} = 3$$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n^3}{n} = 3$.

ولمّا كان $\lim_{n\to+\infty} (a_n S_n)^3 = 1$ ، استنتجنا، بالقسمة، أنّ

$$\lim_{n\to+\infty} 3na_n^3 = 1$$

وعليه يكون $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{3n} \cdot a_n = 1$. ■

في الحقيقة، يمكن تعميم هذا التمرين على الوجه الآتي:

> لتكن $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية حقيقيّة حدودها موجبة، وليكن $p > 1$. نفترض أنّ
>
> $$\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^{p-1} = 1$$
>
> عندئذ يكون لدينا $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[p]{pn} \cdot a_n = 1$.

التمرين 12. ادرس المتتاليات التدريجيّة الآتية:

$$a > 0, \quad u_0 > 0, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + a}{u_n + 1}$$

$$a > 0, \quad u_0 > 0, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

$$a > 0, \quad u_0 > 0, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 3au_n}{3u_n^2 + a}$$

$$u_0 > -\frac{3}{2}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$$

الحل

- لدراسة المتتالية الأولى، نلاحظ أولاً، بالتدريج، أنّ جميع حدودها موجبة تماماً. وأنها ثابتة إذا كان $u_0 = \sqrt{a}$. سنفترض إذن أنّ $u_0 \neq \sqrt{a}$، ثُمّ لنعرّف المتتالية المُساعدة $(x_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة:

$$x_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$$

عندئذ يكون لدينا

$$x_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{\dfrac{u_n + a}{u_n + 1} - \sqrt{a}}{\dfrac{u_n + a}{u_n + 1} + \sqrt{a}} = \underbrace{\frac{1 - \sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}}}_{\lambda} \cdot \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} = \lambda \cdot x_n$$

وعليه نستنتج بالتدريج أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \lambda^n \cdot x_0$$

أو

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \sqrt{a} = 2 \cdot x_0 \sqrt{a} \cdot \frac{\lambda^n}{1 - \lambda^n \cdot x_0} \qquad (1)$$

ولكن

$$\lambda = 1 - \frac{2\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} = -1 + \frac{2}{1 + \sqrt{a}}$$

إذن $\lambda \in \left]-1, +1\right[$ ونستنتج من العلاقة (1) أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{a}$.

في الحقيقة تعطي العلاقة (1) فكرة عن سرعة التقارب إذ تبيِّنُ أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_n - \sqrt{a}} = \lambda$$

فنقول إنّ تقارب $(u_n)_{n\geq 0}$ من $\sqrt{a}$ تقاربٌ خطّي أو من المرتبة الأولى.

▪ أمّا لدراسة المتتالية الثانية، فنلاحظ مجدّداً، وبالتدريج، أنّ جميع حدودها موجبة تماماً. وأنها ثابتة إذا كان $u_0 = \sqrt{a}$. سنفترض إذن أنّ $u_0 \neq \sqrt{a}$، ثُمّ نعرّف المتتالية المُساعدة $(x_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة:

$$x_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$$

عندئذ يكون لدينا

$$x_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) + \sqrt{a}} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{a}\cdot u_n + a}{u_n^2 + 2\sqrt{a}\cdot u_n + a} = \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}\right)^2 = x_n^2$$

فإذا عرّفنا $x_0 = \frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} = \omega$ استنتجنا من العلاقة السابقة وبالتدريج على n أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \omega^{2^n}$$

أو

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \sqrt{a} = 2\sqrt{a}\cdot\frac{\omega^{2^n}}{1-\omega^{2^n}} \qquad (2)$$

ولكن

$$\omega = 1 - \frac{2\sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} = -1 + \frac{2u_0}{u_0 + \sqrt{a}}$$

إذن $\omega \in \left]-1,+1\right[$ وعليه نستنتج من العلاقة (2) أنّ

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{a}$$

وتعطي العلاقة (2) فكرة عن سرعة التقارب إذ تبيِّنُ أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{(u_n - \sqrt{a})^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

فنقول إنّ تقارب $(u_n)_{n\geq 0}$ من $\sqrt{a}$ تقاربٌ تربيعي أو من المرتبة الثانية. فعند الانتقال من u_n إلى u_{n+1} يتضاعف عدد الأرقام المعنوية مرّتين.

▪ ونتبع أسلوباً مماثلاً لدراسة المتتالية الثالثة، فنلاحظ، وبالتدريج، أنّ جميع حدود هذه المتتالية موجبة تماماً. وأنها ثابتة إذا كان $u_0 = \sqrt{a}$. سنفترض إذن أنّ $u_0 \neq \sqrt{a}$ ، ثُمّ نعرّف المتتالية المُساعدة $(x_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة:

$$x_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$$

لتكن ε إشارة من $\{-1,+1\}$. لمّا كان

$$u_{n+1} + \varepsilon\sqrt{a} = \frac{u_n^3 + 3u_n^2\,\varepsilon\sqrt{a} + 3u_n a + \varepsilon\, a\sqrt{a}}{3u_n^2 + a} = \frac{(u_n + \varepsilon\sqrt{a})^3}{3u_n^2 + a}$$

استنتجنا أنّ

$$x_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}\right)^3 = x_n^3$$

فإذا عرّفنا $x_0 = \dfrac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} = \omega$ استنتجنا من العلاقة السابقة وبالتدريج على n أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \omega^{3^n}$$

أو

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \sqrt{a} = 2\sqrt{a} \cdot \frac{\omega^{3^n}}{1 - \omega^{3^n}} \tag{3}$$

ولكن وجدنا عند دراسة المتتالية السابقة أنّ $\omega \in \left]-1,+1\right[$ وعليه نستنتج من العلاقة (3) أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{a}$.

تعطي العلاقة (3) فكرة عن سرعة التقارب إذ تبيّنُ أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{(u_n - \sqrt{a})^3} = \frac{1}{4a}$$

فنقول إنّ تقارب $(u_n)_{n\geq 0}$ من $\sqrt{a}$ تقاربٌ تكعيبي أو من المرتبة الثالثة. فعند الانتقال من u_n إلى u_{n+1} يتضاعف عدد الأرقام المعنوية ثلاث مرّات.

- نلاحظ عند دراستنا للمتتالية الأخيرة أنّ جميع حدودها بدءاً من الحدّ $n = 1$ موجبة تماماً.

وعليه، أياً كانت $2 \leq n$، فلدينا $u_n = \sqrt{2u_{n-1} + 3} \geq \sqrt{3}$.

ولكن مهما تكن $1 \leq n$، يكن

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2u_n + 3} - \sqrt{2u_{n-1} + 3} \\ &= \frac{2(u_n - u_{n-1})}{\sqrt{2u_n + 3} - \sqrt{2u_{n-1} + 3}} \\ &= \frac{2(u_n - u_{n-1})}{u_{n+1} + u_n} \end{aligned} \tag{4}$$

ومنه في حالة $n \geq 2$ يكون لدينا

$$\left|u_{n+1} - u_n\right| \leq \frac{2}{u_{n+1} + u_n}\left|u_n - u_{n-1}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left|u_n - u_{n-1}\right| \tag{5}$$

وينتج من ذلك بالتدريج أنّ

$$\forall n \geq 1, \quad \left|u_{n+1} - u_n\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} \cdot \left|u_2 - u_1\right|$$

وعليه يكون

$$m > n \geq 1 \Rightarrow \left|u_m - u_n\right| \leq \sum_{k=n}^{m-1}\left|u_{k+1} - u_k\right| \leq \left|u_2 - u_1\right| \cdot \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k-1}$$

ومنه

$$m > n \geq 1 \Rightarrow \left|u_m - u_n\right| \leq \sum_{k=n}^{m-1}\left|u_{k+1} - u_k\right| \leq \frac{3\left|u_2 - u_1\right|}{\sqrt{3} - 1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$$

وهذا يُثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة لأنها تُحقِّق شرط كوشي. لتكن $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$. نعلم من جهة أولى أنّ $\ell \geq \sqrt{3}$. ومن جهة ثانية، بجعل n تسعى إلى اللانهاية، في العلاقة $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ ، نجد $\ell = \sqrt{2\ell + 3}$ ، ومن ثَمّ يكون $\ell = 3$.

في الحقيقة يمكننا أن نثبتَ أنّه

- في حالة $-\frac{3}{2} < u_0 \leq 3$ تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.
- وفي حالة $3 \leq u_0$ تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

التمرين 13. لتكن $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية حقيقيّة تحقّق

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad a_{n+m} \leq a_n + a_m$$

ولنعرّف المقدار

$$\lambda = \inf\left\{\frac{a_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

من $[-\infty, +\infty[$. أثبت أنّ المتتالية $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية تسعى إلى λ.

الحل

ليكن α عدداً أكبر تماماً من λ، عندئذ يوجد في $\mathbb{N}^*$ عددٌ p يُحقّق $\frac{a_p}{p} < \alpha$. لتكن $n > p$، نُجري قسمة إقليديّة للعدد n على p فيكون $n = pq_n + r_n$ حيث $0 \leq r_n < p$.

وعلى هذا يكون، مع الإصطلاح $a_0 = 0$،

$$a_n \leq a_{pq_n} + a_{r_n} \leq q_n \cdot a_p + a_{r_n}$$

فإذا عرّفنا

$$A = \max\left\{\frac{a_k}{k} : 1 \leq k < p\right\}$$

كان

$$\forall n > p, \quad \frac{a_n}{n} \leq \frac{n - r_n}{n} \cdot \frac{a_p}{p} + \frac{r_n}{n} \cdot A \leq \alpha + (A-\alpha)\frac{p}{n}$$

وعليه $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leq \alpha$. إذن

$$\forall \alpha > \lambda, \quad \lambda \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leq \alpha$$

وهذا يُثبتُ أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lambda$$

التمرين 14. لتكن a من $\mathbb{R}_+^*$، ولنضع $b = \sqrt[3]{a}$.

I. لنتأمّل التابع

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{3}\left(2x + \frac{a}{x^2}\right)$$

1. احسب f' واستنتج دراسة تغيّرات التابع f. ثُمّ استنتج أنّ $\forall x > 0, f(x) \geq b$.
2. حلّ المعادلة $f(x) = x$. ثُمّ أثبت أنّ $x > b \Rightarrow f(x) < x$ وذلك بحساب المقدار $f(x) - x$.
3. أثبت أنّ كثير الحدود $P = 2X^3 - 3bX^2 + a$ يقبل b جذراً مضاعفاً من المرتبة 2، واحسب خارج قسمة P على $(X-b)^2$.
4. نعرّف

$$h : \mathbb{R}_+^* \backslash \{b\} \to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{b(f(x) - b)}{(x-b)^2}$$

عبّر عن h بأبسط صيغة ممكنة مستعملاً 3. وبيّن أنّ النهاية $\lim_b h$ موجودة، نرمز إليها بالرمز $h(b)$، احسب $h(b)$. ثُمّ بيّن أنّ

$$x > b \Rightarrow h(x) < 1$$

II. لنتأمّل المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة كما يلي :

$$x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right).$$

1. أثبت الخاصّتين : $\forall n \geq 1, \quad x_n \geq b$ و $\forall n \geq 1, \quad x_{n+1} \leq x_n$.
2. أثبت أنّ $(x_n)_{n\geq 0}$ تسعى إلى b.
3. نعرّف $\delta_n = \dfrac{x_n - b}{b}$ أياً كان $1 \leq n$. أثبت أنّ $\forall n \geq 1, 0 \leq \delta_{n+1} \leq \delta_n^2$ ثُمّ أنّ $\forall n \geq 1, \quad \delta_{n+1} \leq (\delta_1)^{2^n}$
4. نريد حسا ب $b = \sqrt[3]{3}$، فنختار $a = 3$ و $x_0 = \dfrac{3}{2}$. أثبت أ نّ $b > \dfrac{7}{5}$ وأنّ $\delta_1 < \dfrac{2}{63}$. واستنتج $\forall n \geq 0, \quad 0 \leq x_{n+1} - b \leq \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{63}\right)^{2^n}$.

ثُمّ أعطِ تقديراً لعدد طبيعيّ p يُحقّق $0 \leq x_5 - \sqrt[3]{3} \leq 10^{-p}$، ماذا تستنتج؟

الحل

I.1. نجد بحساب مباشر

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{b^3}{x^3}\right)$$

وهذا يُعطي للتابع f جدول التغيرات الآتي:

x	0		b		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	b	$\nearrow$	$+\infty$

ونستنتج مباشرة من هذا الجدول أنّ $\forall x > 0,\ f(x) \geq b$، وأنّ f متناقص تماماً على المجال $]0,b]$ ومتزايد تماماً على المجال $[b,+\infty[$.

I.2. في الحقيقة،

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{1}{3}\left(2x + \frac{b^3}{x^2}\right) - x = \frac{1}{3}\left(\frac{b^3}{x^2} - x\right) = \frac{b^3 - x^3}{3x^2} \\ &= (b - x)\cdot\frac{b^2 + bx + x^2}{3x^2} \end{aligned}$$

ولمّا كان

$$\forall (x,b) \in \mathbb{R}_+^{*2},\quad \frac{b^2 + bx + x^2}{3x^2} > 0$$

استنتجنا أنّ b هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$، وأنّ $f(x) < x$ في حالة $x > b$.

I.3. في الحقيقة، $P = 2X^3 - 3bX^2 + b^3 = (X - b)^2(2X + b)$.

I.4. نلاحظ أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{b\},\quad h(x) = \frac{b}{(x-b)^2}\left(\frac{1}{3}\left(2x + \frac{b^3}{x^2}\right) - b\right) = \frac{bP(x)}{3x^2(x-b)^2}$$

وعليه يكون

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{b\},\quad h(x) = \frac{b(2x + b)}{3x^2}$$

و $h(b) = \lim_{b} h = 1$.

وإذا كان $x > b$ فإنّ $2x + b < 3x$، ومن ثَمّ $h(x) < \frac{b}{x} < 1$.

.1.II لمّا كان $x_{n+1} = f(x_n)$ استنتجنا من .1.I أنّ $x_{n+1} \geq b$ وذلك أياً كانت n ومنه الخاصّة الأولى.

ومن جهة أخرى، في حالة $n \geq 1$ يكون $x_n \geq b$ واستناداً إلى .2.I يكون $f(x_n) \leq x_n$ وهذا يعني أنّ $x_{n+1} \leq x_n$، ومنه الخاصّة الثانية.

.2.II ينتج مما سبق أنّ المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد b فهي متقاربة ولتكن ℓ نهايتها. ينتج من المساواة $x_{n+1} = f(x_n)$، عند جعل n تسعى إلى اللانهاية، أنّ $\ell = f(\ell)$ وهذا يقتضي أنّ $\ell = b$ استناداً إلى .2.I

.3.II نلاحظ أنّ $h(x_n) = \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n^2}$، واستناداً إلى .1.I و .4.I يكون

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq \delta_{n+1} \leq \delta_n^2$$

ونستنتج من ذلك بالتدريج أنّ $\forall n \geq 1, \quad \delta_{n+1} \leq (\delta_1)^{2^n}$.

.4.II لمّا كان $3 > \frac{343}{125} = \frac{7^3}{5^3}$ استنتجنا أنّ $b = \sqrt[3]{3} > \frac{7}{5}$. ولأنّ $x_0 = \frac{3}{2}$ وجدنا $x_1 = \frac{13}{9}$، وعليه يكون $\delta_1 = \frac{x_1}{b} - 1 < \frac{5}{7} \cdot \frac{13}{9} - 1 = \frac{2}{63}$. وأخيراً، لأنّ $b < \frac{3}{2}$ يكون

$$\forall n \geq 1, \quad 0 < x_{n+1} - \sqrt[3]{3} \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{63}\right)^{2^n}$$

.5.II لمّا كان $\frac{3}{2}\left(\frac{2}{63}\right)^{2^4} \approx 1.6 \times 10^{-24}$ استنتجنا أنّ $0 < x_5 - \sqrt[3]{3} < 10^{-23}$.

أي إنّ x_5 تُعطي قيمة تقريبيّة للعدد $\sqrt[3]{3}$ صحيحة إلى 23 رقماً عشرياً بعد الفاصلة.

في الحقيقة، يبيِّن برنامج MATHEMATICA® أنّ $0 < x_5 - \sqrt[3]{3} < 10^{-44}$، وهذا يعطي للعدد $\sqrt[3]{3}$ القيمة التقريبيّة الآتية، وهي الصحيحة إلى 44 رقماً عشرياً بعد الفاصلة.

$$x_5 = 1.442\,249\,570\,307\,408\,382\,321\,638\,310\,780\,109\,588\,391\,869\,254$$ ■

التمرين 15. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عدديّة.

1. أثبت أنّه إذا كانت المتتاليتان $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ و $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتين ولهما النهاية نفسها a، فإنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب من a.
2. أثبت أنّه إذا كانت المتتاليات الجزئيّة $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ و $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ و $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة، فإنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

الحل

1. لتكن $0<\varepsilon$، يوجد n_0 يُحقّق

$$n \ge n_0 \Rightarrow \begin{cases} |u_{2n}-a| < \varepsilon \\ |u_{2n+1}-a| < \varepsilon \end{cases}$$

ويكون عندئذ

$$n \ge 2n_0+1 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$$

أي إنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من a.

2. لنضع بالتعريف $\lim_{n\to\infty} u_{2n} = \alpha$ و $\lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = \beta$.

لمّا كانت المتتالية $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية جزئيّة من المتتالية $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty} u_{6n} = \alpha$$

ولمّا كانت المتتالية $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية جزئيّة من المتتالية $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ وهذه الأخيرة متقاربة استنتجنا أيضاً أنّ

$$\lim_{n\to\infty} u_{3n} = \alpha$$

وعليه يكون $\lim_{n\to\infty} u_{6n+3} = \alpha$. ولكنّ $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية جزئيّة من المتتالية المتقاربة $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$، إذن لا بُدّ أن يكون

$$\beta = \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} u_{6n+3} = \alpha$$

وهذا يقتضي تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ استناداً إلى 1. ∎

التمرين 16. لتكن $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية حقيقيّة تحقّق الشّرط:

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad a_n + a_m - 1 \leq a_{n+m} \leq a_n + a_m + 1$$

1. ليكن k من $\mathbb{N}^*$، وليكن $V_n^{(k)} = 2^{-n} a_{2^n k}$. بحساب $V_{n+1}^{(k)} - V_n^{(k)}$ أثبت أنّ المتتالية $\left(V_n^{(k)}\right)_{n\geq 0}$ متقاربة. نسمّي نهايتها λ_k.
2. أثبت أنّ $\lambda_k = k\lambda_1$. واستنتج أنّ :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad m\lambda_1 - 1 \leq a_m \leq m\lambda_1 + 1$$

الحل

1. ينتج من الفرْض أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2a_n - 1 \leq a_{2n} \leq 2a_n + 1$$

وبتطبيق ذلك على $2^n k$ بدلاً من n، ثُمّ القسمة على 2^{n+1} نجد

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n^{(k)} - 2^{-n-1} \leq V_{n+1}^{(k)} \leq V_n^{(k)} + 2^{-n-1}$$

أو

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|V_{n+1}^{(k)} - V_n^{(k)}\right| \leq 2^{-n-1}$$

وعليه في حالة $m > n$ يكون لدينا

$$\left|V_m^{(k)} - V_n^{(k)}\right| \leq \sum_{p=n}^{m-1}\left|V_{p+1}^{(k)} - V_p^{(k)}\right| \leq \sum_{p=n}^{m-1} 2^{-p-1} < 2^{-n} \qquad (1)$$

إذن المتتالية $(V_n^{(k)})_{n\geq 0}$ متقاربة لأنها تُحقِّق شرط كوشي، لنعرّف إذن $\lim\limits_{n\to\infty} V_n^{(k)} = \lambda_k$.

2. وبالعودة إلى (1) وجعل m تسعى إلى اللانهاية نجد

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad \left|\lambda_k - V_n^{(k)}\right| \leq \frac{1}{2^n} \qquad (2)$$

من جهة أخرى، لتكن k من $\mathbb{N}^*$. لمّا كان $V_n^{(k+1)} = 2^{-n} a_{2^n k + 2^n}$ وكان

$$a_{2^n k} + a_{2^n} - 1 \leq a_{2^n k + 2^n} \leq a_{2^n k} + a_{2^n} + 1$$

استنتجنا أنّ

$$V_n^{(k)} + V_n^{(1)} - 2^{-n} \leq V_n^{(k+1)} \leq V_n^{(k)} + V_n^{(1)} + 2^{-n}$$

فإذا جعلنا n تسعى إلى اللانهاية وجدنا $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \lambda_1$. ونستنتج من ذلك بالتدريج على k أنّ $\lambda_k = k\lambda_1$ وذلك أياً كانت k من $\mathbb{N}^*$. وعليه ينتج من العلاقة ❷ بوضع $n = 0$ فيها، والاستفادة من النتيجة السابقة ما يأتي:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left|k\lambda_1 - a_k\right| \le 1$$

وهذه هي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 17. بيّن صحةَ أو خطأ كلٍّ من الخواص التالية مع تعليل الجواب :

1. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية.

① إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة، وكانت $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من الصفر كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

② إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة، وكانت $u_{n+1} - u_n \le \dfrac{1}{n^2}$ أياً كان n من $\mathbb{N}$، حينئذ تكون $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

③ إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة، وكانت $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مطّردة كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

④ إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة، وكانت $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من الصفر كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

2. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية حدودها موجبة تماماً.

① إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة، وكانت $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من 1 كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

② إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة، فإن المتتالية $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من 1.

③ إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة، وكانت $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من 1 فإنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب من عدد حقيقي λ موجبٍ تماماً.

④ إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة، وكانت $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من 1 كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

3. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية.

① إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة، فتوجد متتالية جزئية منها $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ تحقّق

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \left|u_{\varphi(p+1)} - u_{\varphi(p)}\right| < 2^{-p}$$

② إذا وُجِدت متتالية جزئية من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محقِّقة الشرط السابق فإنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

③ إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة و وُجِدت متتالية جزئية منها متقاربة فهي متقاربة.

4. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية متزايدة.

① إذا كانت $(u_{2n} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو الصفر فإنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

② إذا كانت $u_{2n} - u_n \leq \dfrac{1}{n}$ أياً كان n من $\mathbb{N}^*$ فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

③ إذا كانت $u_{2n} - u_n \leq \dfrac{1}{(\ln n)^2}$ أياً كان $1 < n$ فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

الحل

①.1 ☒ تأمّل المتتالية التي حدُّها العام $u_n = \sqrt{n}$.

②.1 ☑ لأنّه، مهما تكن $n \geq 3$، يكن

$$u_n \leq u_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \leq u_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} \leq u_1 + 1 + \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

أو $\forall n \geq 1,\ u_n \leq 2 + u_1$. والمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة لأنها متزايدة ومحدودة.

③.1 ☑ لنعرّف $v_n = u_{n+1} - u_n$. المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مطّردة ومحدودة فهي متقاربة لتكن λ نهايتها. عندئذ تسعى المتتالية $\left(\dfrac{1}{n}(v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1})\right)_{n\geq 1}$ إلى λ أيضاً، ومنه

$\lambda = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{n}$ ، ولكنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة، إذن لا بدَّ أن يكون $\lambda = 0$.

- وعليه إذا كانت المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة فيجب أن تكون حدودها سالبة، وهذا يقتضي تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لأنها عندئذ تكون متناقصة ومحدودة.
- أمّا إذا كانت المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة وجب أن تكون حدودها موجبة، وهذا يقتضي تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لأنها عندئذ تكون متزايدة ومحدودة.

④.1 ☒ تأمّل المتتالية التي حدُّها العام $u_n = \sin\dfrac{\pi\sqrt{n}}{2}$.

①.2 ☒ تأمّل المتتالية التي حدُّها العام $u_n = n$.

②.2 ☒ تأمّل المتتالية التي حدُّها العام $u_n = 2^{-n}$.

③.2 ☒ تأمّل المتتالية التي حدُّها العام $u_n = \dfrac{1}{n}$.

④.2 ☒ تأمّل المتتالية التي حدُّها العام $u_n = \exp\left(\left|\sin\dfrac{\pi\sqrt{n}}{2}\right|\right)$.

①.3 ☑ نضع بالتعريف

$$\varphi(0) = \min\left\{n \geq 0 : \forall m \geq n, \left|u_m - u_n\right| < 1\right\}$$
$$\varphi(p) = \min\left\{n > \varphi(p-1) : \forall m \geq n, \left|u_m - u_n\right| < 2^{-p}\right\}$$

فيتم الإثبات.

②.3 ☒ تأمّل متتالية محدودة وغير متقاربة.

③.3 ☑ لأنّ $u_n \leq u_{\varphi(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N},$.

①.4 ☒ تأمّل المتتالية التي حدُّها العام $u_n = \sqrt{\ln n}$.

②.4 ☑ لأنّ الشرط المذكور يقتضي $u_{2^{n+1}} - u_{2^n} \leq 2^{-n}$، أياً كانت n. وبجمع هذه المتراجحات نستنتج أنّ $\forall n, u_n \leq u_{2^n} \leq u_1 + 2$، فالمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة لأنها متزايدة ومحدودة.

③.4 ☑ انظر ②.4. ■

التمرين 18. لنعرّف المتتاليتين الحقيقيتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقتين

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{و} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

1. أثبت أنّ المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتان. نرمز بالرمز e إلى نهايتهما المشتركة.

2. أثبت، أياً كان n، صحّة المتراجحات

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &\leq e - u_n \leq v_n - u_n \\ v_n - v_{n+1} &\leq v_n - e \leq v_n - u_{n+3} \end{aligned}$$

واستنتج أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\Big((n+3)!\cdot(v_n-e)\Big)=1 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}\Big((n+1)!\cdot(e-u_n)\Big)=1$$

3. استنتج مما سبق أنّ العدد e ليس عدداً عادياً : $e\notin\mathbb{Q}$.

الحل

1. من الواضح أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة، لنثبت إذن أنّ المتتالية الثانية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متناقصة:

$$\begin{aligned}v_n-v_{n+1}&=-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n\cdot n!}-\frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!}\\&=\frac{-n(n+1)+(n+1)^2-n}{n(n+1)\cdot(n+1)!}=\frac{1}{n(n+1)\cdot(n+1)!}>0\end{aligned}$$

نستنتج أنّ المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متجاورتان، لأنّ $\lim_{n\to\infty}(v_n-u_n)=0$.

2. ينتج مما سبق أنّ جميع حدود المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ أكبر من e، وأنّ جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أصغر من العدد e. وعليه بطرح u_n من طرفي المتراجحة $u_{n+1}\le e\le v_n$ نحصل على المتراجحة الأولى، وبجمع v_n إلى طرفي المتراجحة $-v_{n+1}\le -e\le -u_{n+3}$ نحصل على الثانية. تُكتب المتراجحة

$$u_{n+1}-u_n\le e-u_n\le v_n-u_n$$

بالشكل

$$\frac{1}{(n+1)!}\le e-u_n\le\frac{1}{n\cdot n!}$$

ومنه

$$1\le(n+1)!\cdot(e-u_n)\le\frac{n+1}{n}$$

إذن $\lim_{n\to\infty}\Big((n+1)!\cdot(e-u_n)\Big)=1$.

ومن جهة أخرى، لمّا كان

$$\begin{aligned}v_n-u_{n+3}&=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)-n(n+2)(n+3)-n(n+3)-n}{n\cdot(n+3)!}\\&=\frac{n+6}{n\cdot(n+3)!}\end{aligned}$$

و

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)\cdot(n+1)!}$$

استنتجنا من المتراجحة $v_n - v_{n+1} \le v_n - e \le v_n - u_{n+3}$ أنّ

$$\frac{(n+2)(n+3)}{n(n+1)} \le (n+3)!\cdot(v_n - e) \le \frac{n+6}{n}$$

ومنه $\lim_{n\to\infty}\left((n+3)!\cdot(v_n - e)\right) = 1$.

3. لنفترض أنّ $e = \frac{p}{q}$ حيث p و q عددان من $\mathbb{N}^*$. عندئذ ينتج من المتراجحة

$$u_{q+1} \le e \le v_{q+1}$$

أنّ

$$(q+1)!\cdot u_{q+1} \le (q+1)!\cdot e \le (1+q)!\cdot u_{q+1} + \frac{1}{q+1} < (1+q)!\cdot u_{q+1} + 1$$

ولكنّ العددين $(1+q)!\cdot u_{q+1}$ و $(q+1)!\cdot e$ طبيعيّان، إذن ينتج من المتراجحة السابقة أنّ

$$(q+1)!\cdot u_{q+1} = (q+1)!\cdot e$$

وعليه يكون $e = u_{q+1}$. ولكن $e \ge u_{q+2} > u_{q+1}$ وهذا تناقض. إذن $e \notin \mathbb{Q}$. ■

التمرين 19. ادرس المتتالية الحقيقيّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرّفة كما يلي:

$$u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{\cdots+\sqrt{n}}}}}}$$

الحل

- ليست هذه المتتالية متتالية تدريجيّة بالمعنى المعتاد، نظراً إلى عدم إمكان التعبير بأسلوب سهل عن حدّها u_n بدلالة الحدود التي تسبقه، وقد يكون من المناسب البحث عن طريقة أخرى تكون مُلائمة أكثر لتعريف هذه المتتالية.
- في الحقيقة، إذا تأمّلنا، في حالة x من $\mathbb{R}_+$ المقدار

$$f_n(x) = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{n+x}}}}}$$

نرى أننا نعرّف بذلك تابعاً $f_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+^*$ يُحقِّق بوجه خاص $f_n(0)=u_n$ ، ولكنّه أيضاً يتيح لنا التعبير بأسلوب بسيط عن العلاقة بين f_{n-1} و f_n إذ إنّ

$$f_{n-1}(x)=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n-1+x}}}}$$
$$f_n(x)=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{n+x}}}}}$$

وعليه نرى مباشرة أنّ

$$f_n(x)=f_{n-1}\left(\sqrt{n+x}\right)$$

بالنتيجة، إذا عرّفنا بالتدريج متتالية التوابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كما يلي :

$$f_0:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+, f_0(x)=x$$
$$f_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+, f_n(x)=f_{n-1}\left(\sqrt{n+x}\right):\quad n\in\mathbb{N}^*,$$

كان لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=f_n(0)$.

- من الواضح، بالتدريج على الدليل n ، أنّ جميع التوابع f_n متزايدة تماماً، وأنّ جميعها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$.
- لتكن x من $\mathbb{R}_+$ ، ولنعرّف $n_0(x)=\lfloor x^2\rfloor$ ، عندئذ تكون المتتالية $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة بدءاً من الحدِّ ذي الدليل $n_0(x)$. في الحقيقة، بالاستفادة من تزايد التابع f_{n-1} يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned} n>n_0(x) &\Rightarrow n+x>x^2\\ &\Rightarrow \sqrt{n+x}>x\\ &\Rightarrow f_n(x)=f_{n-1}\left(\sqrt{n+x}\right)>f_{n-1}(x)\end{aligned}$$

- لإثبات تقارب المتتالية $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ يكفي إذن إثبات أنها محدودة من الأعلى، سنفعل أكثر من ذلك. لنعرّف التابع

$$g_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+, g_n(x)=f_{n-1}\left(\sqrt{2n+1+x}\right)$$

ولتكن x من $\mathbb{R}_+$ ، ولنثبت أنّ المتتالية $\left(g_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة بدءاً من الحدّ ذي الدليل $n=2$. في الحقيقة، نلاحظ أنّه في حالة $n\geq 2$ و $x\geq 0$ لدينا

$$\begin{aligned}(n+1+x)^2-(2n+3+x)&=x+(n+x)^2-2\\ &\geq x+(2+x)^2-2>0\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$n+1+x > \sqrt{2n+3+x}$$

أو

$$\sqrt{2n+1+x} > \sqrt{n+\sqrt{2(n+1)+1+x}}$$

وبالاستفادة من تزايد التابع f_{n-1} يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned} f_{n-1}\left(\sqrt{2n+1+x}\right) &> f_{n-1}\left(\sqrt{n+\sqrt{2(n+1)+1+x}}\right) \\ &= f_n\left(\sqrt{2(n+1)+1+x}\right) \end{aligned}$$

وهذا يُكافئ $g_n(x) > g_{n+1}(x)$.

- إذن لقد أثبتنا أنّه في حالة x من $\mathbb{R}_+$ ، يوجد $n_1(x) = \max(2, \lfloor x^2 \rfloor)$ يُحقّق

$$\forall n \geq n_1(x), \quad g_n(x) > g_{n+1}(x) > f_{n+1}(x) > f_n(x)$$

ويكفي هذا لإثبات تقارب كلٍّ من المتتاليتين $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ و $\left(g_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ، وذلك أيّاً كان x من $\mathbb{R}_+$.

- جميع التوابع f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$ وتتحقّق المتراجحة

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, \quad 0 < f_n'(x) \leq \frac{1}{2^n\sqrt{n!}}$$

من الواضح أنّ f_0 يُحقّق الخاصّة المطلوبة. ثُمّ إنّ $f_1'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ فالخاصّة المطلوبة محقّقة أيضاً في حالة $n=1$. لنفترض إذن صحّة الخاصّة في حالة $n-1$ ، أي إنّ f_{n-1} قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$ وتتحقّق المتراجحة

$$\forall x \geq 0, \quad 0 < f_{n-1}'(x) \leq \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{(n-1)!}}$$

عندئذ نستنتج من تعريف f_n أنّه قابلٌ للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$ وأنّ

$$f_n'(x) = f_{n-1}'(\sqrt{n+x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{n+x}}$$

إذن نستنتج صحة الخاصة المطلوبة بالتدريج:

$$\forall x \geq 0, \quad 0 < f_n'(x) \leq \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{(n-1)!}} \times \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2^n\sqrt{n!}}$$

◆ بالاستفادة من مبرهنة التزايدات المحدودة يمكننا أن نكتب، في حالة x من $\mathbb{R}_+$ و n من $\mathbb{N}^*$ ما يلي :

$$\begin{aligned}0 \le g_n(x) - f_n(x) &= f_{n-1}\left(\sqrt{2n+1+x}\right) - f_{n-1}\left(\sqrt{n+x}\right)\\ &\le \left(\sqrt{2n+1+x} - \sqrt{n+x}\right) \sup_{\sqrt{n+x}\le\xi\le\sqrt{2n+1+x}} f'_{n-1}(\xi)\\ &\le \frac{n+1}{\sqrt{2n+1+x}+\sqrt{n+x}} \times \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{(n-1)!}}\\ &< \frac{n+1}{2^n\sqrt{n!}}\end{aligned}$$

لأنّ $\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n}} < 1$. وهذا يُثبتُ أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{n\to\infty}\left(g_n(x) - f_n(x)\right) = 0$$

إذن لقد أثبتنا أنّه مهما تكن x من $\mathbb{R}_+$ تكن المتتاليتان $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ و $\left(g_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتين، فلهما النهاية نفسها، ولتكن $h(x)$.

◆ وإذا كان $x \ge 0$ استنتجنا من المتراجحة

$$\begin{aligned}0 \le f_n(x) - f_n(0) &= f_{n-1}\left(\sqrt{n+x}\right) - f_{n-1}\left(\sqrt{n}\right)\\ &\le \left(\sqrt{n+x} - \sqrt{n}\right) \sup_{\sqrt{n}\le\xi\le\sqrt{n+x}} f'_{n-1}(\xi)\\ &\le \frac{x}{2^n\sqrt{n!}}\end{aligned}$$

بعد جعل n تسعى إلى اللانهاية، أنّ $h(x) = h(0)$ وذلك أيّاً كانت قيمة x من $\mathbb{R}_+$.

وعليه يوجد عددٌ $\zeta = h(0)$ يُحقّق

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \zeta$$

ويكون لدينا بوجه خاصّ في حالة $x > 0$ و $n \ge n_1(x)$ ما يأتي

$$0 \le \zeta - f_n(x) \le g_n(x) - f_n(x) < \frac{n+1}{2^n\sqrt{n!}}$$

وفي حالة $x=0$ ، نرى أنّ المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة من العدد ζ ، وأنّ

$$\forall n\geq 2\quad 0\leq \zeta-u_n<\frac{n+1}{2^n\sqrt{n!}}$$

وأخيراً نختم التمرين بالقيمة التقريبيّة الآتية للعدد ζ وهي صحيحة بخطأ أصغر من 10^{-20}.

$$\zeta=1.757\,932\,756\,618\,004\,532\,7$$

وبذا يتمّ الإثبات.

التمرين 20. نهدف إلى دراسة المتتالية الحقيقيّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة كما يلي:

$$u_0>0,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=u_n+\frac{1}{u_n^2}$$

1. أثبت أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$.
2. أثبت أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$. واستنتج أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\sqrt[3]{3n}}=1$.
3. حسّن النتيجة السابقة لتعطي مُكافئاً للمقدار $u_n-\sqrt[3]{3n}$ في جوار $+\infty$.

الحل

1. من الواضح بالتدريج على العدد n أنّ جميع حدود هذه المتتالية موجبة تماماً فهي معرّفة دون لبس. ونستنتج من المتراجحة

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}-u_n=\frac{1}{u_n^2}>0$$

أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماماً. وعليه يوجد Λ في $\mathbb{R}_+^*\cup\{+\infty\}$ يُحقّق $\Lambda=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$. فإذا افترضنا جدلاً أنّ $\Lambda\in\mathbb{R}_+^*$ استنتجنا من $u_{n+1}=u_n+u_n^{-2}$ أنّ

$$\Lambda=\Lambda+\frac{1}{\Lambda^2}$$

وهذا تناقض واضح، إذن يجب أن يكون $\Lambda=+\infty$ ، أي $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$.

2. لمّا كان $\forall n\in\mathbb{N},\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1+\dfrac{1}{u_n^3}$ استنتجنا، من نتيجة السؤال السابق، أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$$

ومهما تكن n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} u_{n+1}^3 - u_n^3 &= \left(u_{n+1} - u_n\right)\left(u_{n+1}^2 + u_{n+1}u_n + u_n^2\right) \\ &= \frac{1}{u_n^2}\left(u_{n+1}^2 + u_{n+1}u_n + u_n^2\right) \\ &= \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 + \frac{u_{n+1}}{u_n} + 1 \end{aligned}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\left(u_{n+1}^3 - u_n^3\right) = 3$$

فإذا استفدنا من توطئة سيزارو CESÁRO يمكننا أن نكتب

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(u_{k+1}^3 - u_k^3\right) = 3$$

وهذا يُكافئ $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n^3 - u_0^3}{n} = 3$ أو $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n^3}{n} = 3$ وأخيراً $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\sqrt[3]{3n}} = 1$.

3. لنضع $\lambda_n = \frac{3n}{u_n^3}$. لقد أثبتنا آنفاً أنّ $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 1$. ولقد وجدنا فيما سبق أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N},\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n^3} = 1 + \frac{\lambda_n}{3n}$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_{n+1}^3 - u_n^3 = \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 + \frac{u_{n+1}}{u_n} + 1 = 3 + \frac{\lambda_n}{n} + \frac{\lambda_n^2}{9n^2}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\lim_{n\to\infty} n\left(u_{n+1}^3 - u_n^3 - 3\right) = 1$$

فإذا استفدنا مجدداً من توطئة سيزارو بصيغتها المعمّمة يمكننا أن نكتب

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\times k\left(u_{k+1}^3 - u_k^3 - 3\right)}{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}} = 1 \qquad ①$$

وذلك لأنّ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = +\infty$.

في الحقيقة لمّا كان $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k+1}$,$\forall t \in [k, k+1]$ استنتجنا

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t} \leq \frac{1}{k}$$

ومن ثَمّ

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}\,t}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

ومنه

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - 1 \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

وبصيغة مُكافئة

$$1 \leq \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 1$$

فإذا عُدنا إلى ① وجدنا

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(u_{k+1}^3 - u_k^3 - 3 \right) = 1$$

ومنه $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n^3 - 3n}{\ln n} = 1$ ، فإذا عرّفنا $\omega_n = \frac{u_n^3 - 3n}{\ln n}$ كان لدينا من جهة أولى $\lim_{n\to\infty} \omega_n = 1$ ، وكان

$$u_n^3 = 3n + \omega_n \ln n$$

وهذا يقتضي أنّ

$$u_n = \sqrt[3]{3n} \left(1 + \omega_n \frac{\ln n}{3n} \right)^{1/3} = \sqrt[3]{3n} \left(1 + \frac{\omega_n}{3} \frac{\ln n}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln^2 n}{n^2} \right) \right)$$

أي

$$u_n = \sqrt[3]{3n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\ln n}{\sqrt[3]{9n^2}} + o\left(\frac{\ln n}{n^{2/3}}\right)$$

وهي النتيجة المرجوّة.

التمرين 21. ادرس المتتالية الحقيقيّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة كما يأتي:

$$u_0 > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

الحل

- من الواضح بالتدريج على العدد n أنّ جميع حدود هذه المتتالية موجبة تماماً فهي معرّفة دون لبس. ونستنتج من المتراجحة

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$$

أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماماً. وعليه يوجد Λ ينتمي إلى $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ يُحقّق $\lim_{n\to\infty} u_n = \Lambda$. فإذا افترضنا جدلاً أنّ $\Lambda \in \mathbb{R}_+^*$ استنتجنا من المساواة

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

أنّ $\Lambda = \Lambda + 1/\Lambda$، وهذا تناقض واضح، إذن يجب أن يكون $\Lambda = +\infty$، أي $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

- ومن جهة أخرى نلاحظ أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + \frac{1}{u_n^2}$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 - u_0^2 = \sum_{k=0}^{n-1}\left(u_{k+1}^2 - u_k^2\right) = 2n + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}$$

أو بصيغة مُكافئة

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 - 2n - u_0^2 - \frac{1}{u_0^2} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} \tag{1}$$

نستنتج بوجه خاص أنّه في حالة n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$u_n^2 \geq 2n + u_0^2 + \frac{1}{u_0^2} = 2n + \left(u_0 - \frac{1}{u_0}\right)^2 + 2 \geq 2(n+1)$$

وبالعودة إلى ❶ نجد في حالة n من $\mathbb{N}^*$

$$u_n^2 - 2n - u_0^2 - \frac{1}{u_0^2} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2(k+1)} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t} = \frac{\ln n}{2}$$

وهكذا نكون قد اثبتنا أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2n + u_0^2 + \frac{1}{u_0^2} \leq u_n^2 \leq 2n + u_0^2 + \frac{1}{u_0^2} + \frac{\ln n}{2} \qquad ❷$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{2n + u_0^2 + \frac{1}{u_0^2}} \leq u_n \leq \sqrt{2n + u_0^2 + \frac{1}{u_0^2} + \frac{\ln n}{2}}$$

وهذا يقتضي في حالة n من $\mathbb{N}^*$ أنّ

$$0 \leq u_n - \sqrt{2n + u_0^2 + \frac{1}{u_0^2}} \leq \frac{\ln n}{4\sqrt{2n+2}}$$

حيث استفدنا من كون

$$u_0^2 + \frac{1}{u_0^2} \geq 2 \qquad \text{و} \qquad u_0^2 + \frac{1}{u_0^2} + \frac{\ln n}{2} \geq 2\,.$$

وبوجه خاص نكون قد أثبتنا أنّ

$$u_n - \sqrt{2n} \sim \frac{\ln n}{4\sqrt{2n}}$$

وكذلك، إذا كان $u_0 = 5$ كان مثلاً $45 < u_{1000} < 45.04$. ■

التمرين 22. ادرس المتتالية الحقيقيّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة كما يأتي:

$$u_0 > 0, u_1 > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n u_{n-1}}$$

الحل

- من الواضح بالتدريج على العدد n أنّ جميع حدود هذه المتتالية موجبة تماماً فهي معرّفة دون لبس. ونستنتج من المتراجحة

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = u_{n-1} > 0$$

أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متناقصة تماماً. ولمّا كانت جميع الحدود موجبة استنتجنا أنّها متقاربة من حدّها الأدنى وليكن λ وهو عنصرٌ من $\mathbb{R}_+$. وبالعودة إلى العلاقة التدريجيّة نرى أنّ $\lambda = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$ وهذا يُكافئ أنّ $\lambda^3 = 0$ أو $\lambda = 0$. إذن تسعى المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ نحو الصفر.

- في الحقيقة،

$$\forall n \geq 2, \qquad \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_{n-1}}{u_{n+1}} + \frac{u_{n-1}}{u_n} > 2$$

إذن

$$\forall n \geq 3, \qquad \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_2^2} = \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) > 2(n-2)$$

ومنه

$$\forall n \geq 3, \qquad u_n < 1\Big/\sqrt{2(n-2) + u_2^{-2}} \qquad ❶$$

وعليه يكون لدينا في حالة $n \geq 4$ ما يلي

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} < \frac{1}{\sqrt{2n-6+u_2^{-2}}} < \sqrt{2n-6+u_2^{-2}} - \sqrt{2n-8+u_2^{-2}}$$

وبجمع هذه المتراجحات من $n = 4$ إلى $n = m-1$ نجد،

$$\forall m \geq 4, \qquad \frac{1}{u_m} - \frac{1}{u_4} \leq \sqrt{2(m-4) + u_2^{-2}} - \frac{1}{u_2}$$

ومن ثَمّ

$$\forall m \geq 4, \qquad u_m \geq \frac{1}{\sqrt{2(m-4)+u_2^{-2}} - u_2^{-1} + u_4^{-1}} \qquad ❷$$

وهكذا نكون قد أثبتنا في ❶ و ❷ أنّه في حالة $n \geq 4$ لدينا

$$\frac{1}{\sqrt{2(n-4)+u_2^{-2}-u_2^{-1}+u_4^{-1}}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{2(n-2)+u_2^{-2}}}$$

وعليه نجد أنّ

$$\forall n \geq 4, \quad A_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n}} - u_n \leq B_n$$

حيث

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{2(n-2)+u_2^{-2}}} \\ B_n &= \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{2(n-4)+u_2^{-2}-u_2^{-1}+u_4^{-1}}} \end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{2n-4+u_2^{-2}}} = \frac{\sqrt{2n-4+u_2^{-2}}-\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}\sqrt{2n-4+u_2^{-2}}} \\ &= \frac{u_2^{-2}-4}{\sqrt{2n}\sqrt{2n-4+u_2^{-2}}\left(\sqrt{2n}+\sqrt{2n-4+u_2^{-2}}\right)} \end{aligned}$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty} n\sqrt{n}A_n = \frac{u_2^{-2}-4}{4\sqrt{2}}$$

وكذلك نجد بأسلوب مماثل أنّ

$$\lim_{n\to\infty} nB_n = \frac{u_4^{-1}-u_2^{-1}}{4}$$

إذن يوجد ثابتٌ موجبٌ K يُحقّق

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \max\left(\left|A_n\right|,\left|B_n\right|\right) \leq \frac{K}{n}$$

ومن ثَمّ يكون

$$\forall n \geq 4, \quad \left|\frac{1}{\sqrt{2n}} - u_n\right| \leq \frac{K}{n}$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$u_n - \frac{1}{\sqrt{2n}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

وهي النتيجة المطلوبة.

التمرين 23. ادرس المتتالية الحقيقيّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة كما يلي:

$$u_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$$

وأعطِ مُكافئاً للمقدار $u_n - \sqrt{n}$ في جوار اللانهاية.

الحل

- من الواضح أنّ جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ موجبة تماماً، وهذا ما يمكن أن نثبته بالتدريج على العدد الطبيعي n.
- ونبرهن بالتدريج على العدد n أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \le u_n \le n$$

فهي صحيحة في حالة $n = 1$، وإذا كان $1 \le u_{n-1} \le n-1$ في حالة $n \ge 2$ كان

$$\sqrt{1+n} \le u_n \le \sqrt{2n-1}$$

وتنتج المتراجحة المنشودة من كون $1 \le \sqrt{1+n}$ و $\sqrt{2n-1} \le n$ في حالة n من $\mathbb{N}^*$.

- نستنتج إذن أنّه

$$\forall n \ge 2 \quad \sqrt{1+n} \le u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \le \sqrt{2n-1}$$

- وبأسلوب مماثل نستنتج أنّه

$$\forall n \ge 3, \quad \sqrt{n+\sqrt{n}} \le u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \le \sqrt{n + \sqrt{2n-3}}$$

وأخيراً نجد في حالة $n \ge 3$ أنّ

$$\sqrt{n+1+\sqrt{n+\sqrt{n}}} \le u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \le \sqrt{n+1+\sqrt{n+\sqrt{2n-3}}}$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \ge 3, \quad A_n \le u_{n+1} - \sqrt{n+1} \le B_n$$

حيث

$$A_n = \sqrt{n+1+\sqrt{n+\sqrt{n}}} - \sqrt{n+1}$$
$$B_n = \sqrt{n+1+\sqrt{n+\sqrt{2n-3}}} - \sqrt{n+1}$$

ولكن

$$A_n = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1+\sqrt{n+\sqrt{n}}} + \sqrt{n+1}}$$

و

$$B_n = \frac{\sqrt{n+\sqrt{2n-3}}}{\sqrt{n+1+\sqrt{n+\sqrt{2n-3}}} + \sqrt{n+1}}$$

فنرى مباشرة أنّ

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{2}$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty} (u_n - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$$

التمرين 24. نهدف إلى دراسة المتتالية الحقيقيّة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة كما يلي:

$$x_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{n+1}{x_n}$$

ولهذا الغرض نعرّف المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالصيغة $a_n = \frac{1}{2} + \sqrt{n+\frac{1}{4}}$.

1. أثبت أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 1 + \frac{n}{a_{n-1}} \leq a_{n+1} \quad \text{و} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ 1 + \frac{n}{a_n} = a_n$$

2. أثبت أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq x_n \leq a_{n+1}$.

3. ماذا تستنتج بشأن المقدار $x_n - \sqrt{n} - \frac{1}{2}$ ؟

4. هل المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مطّردة ؟

الحل

1. لنلاحظ أنّ

$$\left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 = n + \frac{1}{4}$$

ومن ثَمّ $a_n^2 = a_n + n$ ، وهذا يثبت المساواة

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + \frac{n}{a_n} = a_n$$

والعدد الحقيقي a_n هو الجذر الموجب تماماً الوحيد للمعادلة $X^2 - X - n = 0$.

ومن جهة أخرى نعلم أنّ $x \mapsto x^2 - x - (n+1)$ سالب تماماً على المجال $\left[0, a_{n+1}\right[$ وموجبٌ تماماً على المجال $\left]a_{n+1}, +\infty\right[$. لنفترض أنّ $n \geq 1$ ولنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{n}{a_{n-1}}\right)^2 - \left(1 + \frac{n}{a_{n-1}}\right) - (n+1) &= \left(1 + \frac{n}{a_{n-1}}\right)\frac{n}{a_{n-1}} - n - 1 \\ &= \frac{n(a_{n-1} + n - a_{n-1}^2) - a_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} \\ &= \frac{n - a_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \frac{1 - a_{n-1}}{a_{n-1}^2} \leq 0\end{aligned}$$

إذن يجب أن يكون $1 + \dfrac{n}{a_{n-1}} \in \left[0, a_{n+1}\right[$ أي

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + \frac{n}{a_{n-1}} < a_{n+1}$$

2. لمّا كان $x_0 = 1$ استنتجنا أنّ $a_0 \leq x_0 < a_1$. لنفترض أنّ $a_n \leq x_n < a_{n+1}$ عندئذ يكون

$$1 + \frac{n+1}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{n+1}{x_n} \leq 1 + \frac{n+1}{a_n}$$

فإذا استفدنا من 1. استنتجنا أنّ

$$a_{n+1} \leq x_{n+1} < a_{n+2}$$

فنكون قد أثبتنا بالتدريج صحة المتراجحة المطلوبة.

3. لنلاحظ أنّ

$$a_n - \sqrt{n} - \frac{1}{2} = \sqrt{n+\frac{1}{4}} - \sqrt{n} = \frac{1}{4\left(\sqrt{n+\frac{1}{4}}+\sqrt{n}\right)} \geq \frac{1}{8\sqrt{n+1}}$$
$$a_{n+1} - \sqrt{n} - \frac{1}{2} = \sqrt{n+\frac{5}{4}} - \sqrt{n} = \frac{5}{4\left(\sqrt{n+\frac{5}{4}}+\sqrt{n}\right)} \leq \frac{5}{8\sqrt{n}}$$

إذن

$$\frac{1}{8\sqrt{n+1}} \leq x_n - \sqrt{n} - \frac{1}{2} \leq \frac{5}{8\sqrt{n}}$$

ومنه نرى أنّ

$$x_n - \sqrt{n} - \frac{1}{2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

4. المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماماً، لأنّه استناداً إلى 1. لدينا $x_n < a_{n+1} \leq x_{n+1}$ أيّاً كانت قيمة n. ■

التمرين 25.

1. لتكن a من $]0,1[$. أثبت أنّ : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > 1 \Rightarrow \frac{1-a^n}{1-a} < n$.
2. استنتج باختيار مناسب للعدد a أنّه في حالة $n \geq 2$ لدينا $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1-\frac{1}{n}$.
3. لتكن $0 < a$. أثبت أنّه في حالة $n \geq 2$ لدينا $(1+a)^n > 1+na$.
4. استنتج أنّ : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > 1 \Rightarrow \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n}$.
5. لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرّفتان كما يلي:
$$v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{و} \quad u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
قارن كلاً من النسبتين $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ و $\frac{v_n}{v_{n-1}}$ بالعدد 1، واستنتج أنّ المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان.
6. استنتج أنّ : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

7. لنضع $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. استفدْ مما سبق لتثبت أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) < H_n < 1 + \ln n$$

الحل

1. لتكن a من $]0,1[$. ولنفترض أنّ n عددٌ طبيعي أكبر أو يساوي 2 عندئذ

$$\frac{1-a^n}{1-a} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k < \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

2. فإذا اخترنا في المتراجحة السابقة $a = 1 - \frac{1}{n^2}$ و n عددٌ طبيعي أكبر أو يساوي 2،

استنتجنا أنّ

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < n\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

أو

$$1 - \frac{1}{n} < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

3. ومن جهة أخرى، في حالة $a > 0$ و n عددٌ طبيعي أكبر أو يساوي 2، لدينا

$$\begin{aligned}(1+a)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k \\ &\geq 1 + na + C_n^2 a^2 > 1 + na\end{aligned}$$

4. فإذا اخترنا في المتراجحة السابقة $a = \frac{1}{n^2-1}$ و n عددٌ طبيعي أكبر أو يساوي 2،

استنتجنا أنّ

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n}$$

5. لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرّفتان كما يلي:

$$v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{و} \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ولنفترض أنّ $n \geq 2$ عندئذ، بناءً على المتراجحتين في 2. و 4. نجد أنّ

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n} < 1$$
$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} > 1$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً، والمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً. وعليه نرى أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n < v_{n+1} < u_{n+1} < u_n$$

كما إنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n - v_n = \frac{v_n}{n} \leq \frac{u_1}{n} = \frac{4}{n}$$

وهذا يثبتُ أنّ $\lim_{n\to\infty}\left(u_n - v_n\right) = 0$ ، فالمتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان. ولهما النهاية نفسها التي نرمز إليها بالرمز e ، وهي العدد النيبري أساس اللوغاريتم الطبيعي المعروف.

6. فنستنتج أنّ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

7. نستنتج من المتراجحة السابقة أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad k\big(\ln(k+1) - \ln k\big) < 1 < (k+1)\big(\ln(k+1) - \ln k\big)$$

ومن ثَمّ

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$$

وبجمع هذه المتراجحات طرفاً إلى طرف نجد

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n}\big(\ln(k+1) - \ln k\big) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

أو

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_{n+1} - 1 < \ln(n+1) < H_n$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) < H_n \leq 1 + \ln n$$

ويتمّ إثبات المطلوب. ■

التمرين 26. ليكن كثير الحدود $P(X) = X^5 + 5X - 3$ من $\mathbb{R}[X]$.

① أثبت أن P يقبل جذراً حقيقياً وحيداً α، وأن α ينتمي إلى المجال $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

نهدف في هذه المسألة إلى حساب الجذر α بطريقتين.

② ليكن التابع $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{3}{x^4 + 5}$.

1. أثبت أن $g(I) \subset I$.
2. أثبت صحة المتراجحة $\forall (x, y) \in I \times I, \quad |g(x) - g(y)| \le \frac{1}{2}|x - y|$.
3. نعرّف إذن المتتالية $(x_n)_{n\ge 0}$ من I بالعلاقات $x_0 = 1$ و $x_{n+1} = g(x_n)$، أثبت ما يلي:

❶ $\forall n \ge 0, |x_{n+1} - x_n| \le \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

❷ المتتالية $(x_n)_{n\ge 0}$ تُحقِّق شرط كوشي.

❸ المتتالية $(x_n)_{n\ge 0}$ متقاربة، و $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$.

❹ $\forall n \ge 0, \quad |x_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4. عيّن m من $\mathbb{N}$ نضمن عندها أن $|x_m - \alpha| \le 10^{-9}$.

③ لنضع $Q(X) = 4X^5 - 5\alpha X^4 + \alpha^5$. ثُمّ ليكن

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{4x^5 + 3}{5(x^4 + 1)}$$

1. أثبت أنّ $h(x) - \alpha = \dfrac{Q(x)}{5(x^4 + 1)}$، وأنّ α جذر مضاعف من المرتبة الثانية لكثير الحدود $Q(X)$.
2. عيّن خارج القسمة الإقليدية $R(X)$ لكثير الحدود $Q(X)$ على $(X - \alpha)^2$، أي $Q(X) = (X - \alpha)^2 R(X)$.
3. أثبت ما يلي:

❶ $\forall x \ge \alpha, \quad 0 \le R(x) \le 10x^3$.

❷ $\forall x \ge \alpha, \quad 0 \le h(x) - \alpha \le 2\dfrac{(x - \alpha)^2}{x}$.

❸ استنتج أن $\forall x \in [\alpha, 2\alpha], \ \alpha \le h(x) \le 2\alpha$.

4. نعرّف المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ من $[\alpha, 2\alpha]$ بالعلاقات $y_0 = \frac{3}{5}$ و $y_{n+1} = h(y_n)$.

❶ علل صحة التعريف السابق.

❷ نضع $E_n = \frac{2}{\alpha}(y_n - \alpha)$، أثبت أنّ $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq E_{n+1} \leq E_n^2$.

❸ استنتج أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq E_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{2^n}$. وعيّن عدداً m من $\mathbb{N}$ تضمن عنده أنّ $|y_m - \alpha| \leq 10^{-9}$.

الحل

① في الحقيقة، إنّ التابع

$$x \mapsto P(x) = x^5 + 5x - 3$$

تابعٌ متزايدٌ تماماً فللمعادلة $P(x) = 0$ حلٌّ حقيقي وحيدٌ على الأكثر. ثُمّ إنّ

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32} - \frac{1}{2} < 0 \quad \text{و} \quad P(1) = 3 > 0$$

إذن، للمعادلة $P(x) = 0$ حلٌّ حقيقي وحيدٌ α والعددُ α ينتمي إلى المجال $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

② ليكن التابع $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{3}{x^4 + 5}$.

②.1. نلاحظ أنّ التابع g متناقصٌ تماماً على $\mathbb{R}_+$، وكذلك نلاحظ أنّ $g\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq \dfrac{3}{5} < 1$ و $g(1) = \dfrac{1}{2}$، إذن

$$g(I) = \left[g(1), g\left(\tfrac{1}{2}\right)\right] \subset \left[\tfrac{1}{2}, 1\right] = I .$$

②.2. وإذا كان x و y عنصرين من I، كان

$$\begin{aligned} g(x) - g(y) &= \frac{3}{x^4 + 5} - \frac{3}{y^4 + 5} \\ &= \frac{3(y^4 - x^4)}{(x^4 + 5)(y^4 + 5)} \\ &= \frac{3(y^3 + y^2 x + y x^2 + x^3)}{(x^4 + 5)(y^4 + 5)}(y - x) \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\left|g(x)-g(y)\right| &\leq \frac{12}{(\frac{1}{16}+5)(\frac{1}{16}+5)}\left|y-x\right| \\ &\leq \frac{12}{25}\left|y-x\right| \leq \frac{1}{2}\left|y-x\right|\end{aligned}$$

3.② نعرّف إذن المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ من I بالعلاقات $x_0 = 1$ و $x_{n+1} = g(x_n)$. عندئذ نستنتج من المتراجحة السابقة في حالة $n \geq 1$ أنّ

$$\left|x_{n+1}-x_n\right| = \left|g(x_n)-g(x_{n-1})\right| \leq \frac{1}{2}\left|x_n - x_{n-1}\right|$$

ولأنّ $\left|x_1 - x_0\right|$ أصغر من طول المجال I أي $\left|x_1-x_0\right| \leq \frac{1}{2}$ استنتجنا بالتدريج على العدد n أنّ

$$\forall n \geq 0, \quad \left|x_{n+1}-x_n\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

ومن ثَمّ إذا كان $m > n$ كان

$$\left|x_m - x_n\right| \leq \sum_{k=n}^{m-1}\left|x_{k+1}-x_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^m}{1-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n}$$

وهذا يثبتُ أنّ المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ تُحقّق شرط كوشي، فهي إذن متقاربة. نرمز بالرمز ℓ إلى نهاية $(x_n)_{n\geq 0}$ نرى عندئذ مباشرة أنّ $\ell = g(\ell) = \dfrac{3}{\ell^4+5}$ ومن ثَمّ أنّ $P(\ell) = 0$. ولكنّ α هي الجذر الحقيقي الوحيد للمعادلة $P(x) = 0$ ، وعليه فإنّ المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ تسعى إلى α .

وبجعل m تسعى إلى اللانهاية في المتراجحة

$$\left|x_m - x_n\right| \leq \frac{1}{2^n}$$

المحقّقة في حالة $m > n$ نرى أنّه

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\alpha - x_n\right| \leq \frac{1}{2^n}$$

وأخيراً لمّا كان $10^3 < 2^{10}$ استنتجنا أنّ $\frac{1}{2^{30}} < 10^{-9}$، فإذا اخترنا $m = 30$ كان لدينا بالتأكيد

$$\left|\alpha - x_{30}\right| < 10^{-9}$$

③ لنتأمّل التابع $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{4x^5+3}{5(x^4+1)}$.

③.1. بالاستفادة من كون $\alpha^5 = 3 - 5\alpha$ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} h(x) - \alpha &= \frac{4x^5+3}{5(x^4+1)} - \alpha = \frac{4x^5+3-5\alpha x^4 - 5\alpha}{5(x^4+1)} \\ &= \frac{4x^5 - 5\alpha x^4 + \alpha^5}{5(x^4+1)} = \frac{Q(x)}{5(x^4+1)} \end{aligned}$$

وقد عرّفنا

$$Q(X) = 4X^5 - 5\alpha X^4 + \alpha^5$$

ولكن نلاحظ مباشرة أنّ $Q(\alpha) = Q'(\alpha) = 0$ وأنّ $Q''(\alpha) = 20\alpha^3 > 0$. إذن α جذرٌ مضاعفٌ من المرتبة الثانية لكثير الحدود α .

③.2. وعليه يقبل كثير الحدود $Q(X)$ القسمة على $(X-\alpha)^2$ ونجد بالحساب أنّ

$$Q(X) = (X-\alpha)^2 \underbrace{\left(4X^3 + 3\alpha X^2 + 2\alpha^2 X + \alpha^3\right)}_{R(X)}$$

③.3. وعليه، في حالة $x \geq \alpha$ يكون لدينا

$$0 < \alpha^3 < R(x) \leq 4x^3 + 3x^3 + 2x^3 + x^3 = 10x^3$$

وبالعودة إلى الصيغة التي أثبتناها في ③.1. أي

$$h(x) - \alpha = \frac{(x-\alpha)^2 R(x)}{5(x^4+1)}$$

نستنتج أنّ

$$x \geq \alpha \Rightarrow 0 \leq h(x) - \alpha \leq 2\,(x-\alpha)^2 \frac{x^3}{x^4+1} \leq 2\frac{(x-\alpha)^2}{x}$$

وبوجه خاص، لمّا كان التابع

$$x \mapsto \frac{(x-\alpha)^2}{x} = x - 2\alpha + \frac{\alpha^2}{x}$$

متزايداً تماماً على المجال $\left[\alpha, +\infty\right[$ استنتجنا أنّ قيمته العظمى على المجال $\left[\alpha, 2\alpha\right]$ هي القيمة التي يأخذها عند 2α أي $\frac{1}{2}\alpha$، ومن ثَمّ فإنّ

$$\forall x \in \left[\alpha, 2\alpha\right], \quad 0 \leq h(x) - \alpha \leq \alpha$$

أي $h\left(\left[\alpha, 2\alpha\right]\right) \subset \left[\alpha, 2\alpha\right]$.

4.③. بملاحظة أنّ $P\left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^5 > 0$ نستنتج أنّ $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{5}$ وهذا يقتضي أنّ $\alpha < \frac{3}{5} < 2\alpha$، ولمّا كان $h\left(\left[\alpha, 2\alpha\right]\right) \subset \left[\alpha, 2\alpha\right]$ استنتجنا أنّ المتتالية التدريجيّة $\left(y_n\right)_{n\geq 0}$ من $[\alpha, 2\alpha]$ المعرّفة بالعلاقات $y_0 = \frac{3}{5}$ و $y_{n+1} = h(y_n)$، معرّفةٌ تعريفاً جيداً. لنضع إذن

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n = \frac{2}{\alpha}(y_n - \alpha)$$

عندئذ نستنتج من الخاصّة

$$x \geq \alpha \Rightarrow 0 \leq h(x) - \alpha \leq 2\frac{(x-\alpha)^2}{x}$$

باختيار $x = y_n$، أنّ

$$0 \leq y_{n+1} - \alpha \leq 2\frac{(y_n - \alpha)^2}{y_n} \leq 2\frac{(y_n-\alpha)^2}{\alpha}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq E_{n+1} \leq E_n^2$$

ويتيح لنا أن نبرهن بالتدريج على العدد n أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq E_n \leq E_0^{2^n}$$

ولكن

$$E_0 = \frac{2}{\alpha}\left(y_0 - \alpha\right) \leq 4\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}$$

إذن

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq E_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{2^n}$$

وبوجه خاص نرى أنّ

$$0 \leq y_5 - \alpha \leq \frac{\alpha}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{2^5} < \frac{3}{10}\left(\frac{2}{5}\right)^{2^5} < 5.6 \times 10^{-13}$$

وهو المطلوب.

التمرين 27. ليكن p عدداً طبيعياً أكبر أو يساوي 2. ولتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حقيقيّة تحقق الشرطين:

❶ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ و ❷ $\lim\limits_{n\to\infty} n(u_n + u_{pn}) = \ell \in \mathbb{R}$

نعرّف، في حالة m من $\mathbb{N}^*$، المقدار $v_n = (-1)^n\left(u_{mp^n} - \dfrac{p\ell}{(p+1)mp^n}\right)$،
ونضع $A_m = \sup\limits_{n\geq m}\left|n(u_n + u_{pn}) - \ell\right|$.

1. علّل وجود المقدار A_m.
2. أثبت أنّ $\forall n \geq 0, \ |v_n - v_{n+1}| \leq \dfrac{A_m}{mp^n}$.
3. ثُمّ استنتج أنّ $\forall n \geq 0, \quad |v_n - v_0| \leq \dfrac{p}{p-1}\cdot\dfrac{A_m}{m}$.
4. استنتج أنّ $\lim\limits_{m\to\infty} mu_m = \dfrac{p\ell}{p+1}$.
5. أعطِ مثالاً يبيّن أنّ النتيجة السابقة تكون خطأ إذا لم نضع الشرط $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

الحل

1. لمّا كانت المتتالية $\left(n(u_n + u_{pn}) - \ell\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة استناداً إلى ❷، استنتجنا أنّها محدودة، ومن ثَمّ يمكن، في حالة m من $\mathbb{N}^*$، تعريف الحدِّ الأعلى A_m للمجموعة

$$\left\{n(u_n + u_{pn}) - \ell : n \geq m\right\}$$

2. في حالة m من $\mathbb{N}^*$ و n من $\mathbb{N}$، نعرّف $v_n = (-1)^n\left(u_{mp^n} - \dfrac{p\ell}{(p+1)mp^n}\right)$.

ونلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
v_n - v_{n+1} &= (-1)^n\left(u_{mp^n} - \frac{p\ell}{(p+1)mp^n}\right) - (-1)^{n+1}\left(u_{mp^{n+1}} - \frac{p\ell}{(p+1)mp^{n+1}}\right)\\
&= (-1)^n\left(u_{mp^n} + u_{mp^{n+1}} - \frac{\ell}{mp^n}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{mp^n}\left(mp^n\left(u_{mp^n} + u_{mp^{n+1}}\right) - \ell\right)
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|v_n - v_{n+1}\right| \leq \frac{A_m}{mp^n}$$

3. نستنتج مما سبق أنّه في حالة n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned}
\left|v_n - v_0\right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|v_{k+1} - v_k\right|\\
&\leq \frac{A_m}{m}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{p^k} = \frac{A_m}{m}\cdot\frac{1-p^{-n}}{1-p^{-1}}\\
&< \frac{p}{p-1}\cdot\frac{A_m}{m}
\end{aligned}$$

4. ولمّا كان من الواضح استناداً إلى ❶ أنّ $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ استنتجنا أنّ

$$\left|mv_0\right| \leq \frac{p}{p-1}\cdot A_m$$

أو

$$\left|mu_m - \frac{p\ell}{p+1}\right| \leq \frac{p}{p-1}A_m$$

وأخيراً، لمّا كانت $\left(n(u_n + u_{pn}) - \ell\right)_{n\in\mathbb{N}}$ تسعى إلى 0 استناداً إلى ❷، استنتجنا أنّ $\lim_{m\to\infty} A_m = 0$ ومن ثَمّ أنّ

$$\lim_{m\to\infty} mu_m = \frac{p\ell}{p+1}$$

5. لنعرّف المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ بالعلاقة $u_n = (-1)^{\lfloor \ln n/\ln p\rfloor}$ عندئذ نلاحظ أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n(u_n + u_{pn}) = 0$$

في حين تكون المتتالية $\left(nu_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متباعدة، وهذا يُثبت ضرورة الشرط $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. ■

التمرين 28. لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة المتتاليات التي تأخذ قيمها في مجموعة الأعداد الطبيعية الموجبة تماماً.

انطلاقاً من متتالية $U = (u_n)_{n\geq 0}$ من المجموعة $\mathcal{F}$، نعرّف المتتاليتين التدريجيتين $(a_n)_{n\geq 0}$ و $(b_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقات

$$\begin{aligned} a_0 &= u_0, & a_1 &= u_1a_0+1, & a_n &= u_na_{n-1}+a_{n-2}, & (n\geq 2)\\ b_0 &= 1, & b_1 &= u_1, & b_n &= u_nb_{n-1}+b_{n-2}, & (n\geq 2)\end{aligned}$$

ونرمز عادة بالرمز $[u_0,u_1,\ldots,u_n]$ إلى الكسر $\dfrac{a_n}{b_n}$.

① لتكن $U = (u_n)_{n\geq 0}$ من $\mathcal{F}$، ولنعرّف المتتاليتين التدريجيتين $(a_n)_{n\geq 0}$ و $(b_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقات السابقة.

1. أثبت أنه أياً كان n من $\mathbb{N}^*$ فلدينا $a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n = (-1)^{n-1}$.
2. أثبت أنّ a_n و b_n عددان طبيعيان موجبان تماماً، وأوليّان فيما بينهما.
3. لتكن $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ أثبت أنّ $\forall n\geq 1,\, b_n \geq \omega^{n-1}$.
4. نعرّف $r_n = \dfrac{a_{2n}}{b_{2n}}$ و $s_n = \dfrac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}$، أثبت أن المتتالية $(r_n)_{n\geq 1}$ متزايدة وأنّ المتتالية $(s_n)_{n\geq 1}$ متناقصة، وأخيراً أنّ $\forall n\geq 1,\, 0 < s_n - r_n < 5\cdot\omega^{-4n}$.
5. أثبت أن المتتاليتين $(r_n)_{n\geq 1}$ و $(s_n)_{n\geq 1}$ متقاربتان، وأن لهما النهاية ℓ نفسها. ثُمّ أثبت أنّ

$$\left|\ell - \frac{a_n}{b_n}\right| \leq \frac{1}{b_nb_{n+1}}$$

وأنّ ℓ عدد غير عادي من المجال $]1,+\infty[$.

② أياً كان u من $\mathbb{N}^*$، نعرّف التابع : $\varphi_u : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* : x \mapsto u + \dfrac{1}{x}$. ولتكن المتتالية $U = (u_n)_{n\geq 0}$ من $\mathcal{F}$، والمتتاليتان التدريجيتان $(a_n)_{n\geq 0}$ و $(b_n)_{n\geq 0}$ المعرّفتان انطلاقاً منها كما في السابق.

1. أثبت أنّ

$$\forall n \geq 1, \forall x > 0, \quad \varphi_{u_0} \circ \varphi_{u_1} \circ \cdots \circ \varphi_{u_n}(x) = \frac{a_n x + a_{n-1}}{b_n x + b_{n-1}}$$

2. أثبت أنه أياً كان n فلدينا

$$[u_0, u_1, \ldots, u_n] = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{}{u_{n-1} + \cfrac{1}{u_n}}}}}$$

3. أثبت أنّ

$$\forall n \geq 1, \forall x > 0, \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - \varphi_{u_0} \circ \varphi_{u_1} \circ \cdots \circ \varphi_{u_n}(x) \right| \leq \frac{1}{b_n b_{n-1}}$$

4. لتكن $\mathcal{A} = [1, +\infty[\setminus \mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد غير العاديّة من المجال $]1, +\infty[$. أثبت أننا نعرّف تطبيقاً f من $\mathcal{A}$ إلى $\mathcal{A}$ بوضع $f(x) = \dfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor}$، وقد كتبنا $\lfloor x \rfloor$ دلالة على الجزء الصحيح للعدد x.

ليكن λ من $\mathcal{A}$، ولنعرّف المتتالية $U_\lambda = (u_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقات :

$$u_0 = \lfloor \lambda \rfloor, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \lfloor f^n(\lambda) \rfloor$$

حيث $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n}$.

❶ أثبت أن المتتالية U_λ تنتمي إلى $\mathcal{F}$.

❷ أثبت أنّه $\lambda = \varphi_{u_0} \circ \varphi_{u_1} \circ \cdots \circ \varphi_{u_n}(f^{n+1}(\lambda))$، $\forall n \geq 0$.

❸ استنتج أنّ $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} [u_0, u_1, \ldots, u_n]$.

5. نقول إنّ المتتالية $U=(u_n)_{n\geq 0}$ من $\mathcal{F}$ تقبل العدد T من $\mathbb{N}^*$ دوراً، إذا كان $\forall n \geq 0,\ u_{n+T}=u_n$. لتكن $U=(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية من $\mathcal{F}$ تقبل العدد T من $\mathbb{N}^*$ دوراً. ولنعرّف

$$\psi=\varphi_{u_0}\circ\varphi_{u_1}\circ\cdots\circ\varphi_{u_{T-1}} \quad \text{و} \quad \lambda=\lim_{n\to\infty}[u_0,u_1,\ldots,u_n]$$

❶ أثبت أنّ $\forall n\in\mathbb{N},\quad \psi([u_0,u_1,\ldots,u_n])=[u_0,u_1,\ldots,u_{n+T}]$.

❷ استنتج أنّ $\psi(\lambda)=\lambda$، فهو إذن حلّ من $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ لمعادلة من الدرجة الثانية.

- لتكن المتتالية $U=(u_n)_{n\geq 0}$ من $\mathcal{F}$ المعرّفة كما يلي :

  $\forall n\geq 0,\ u_n=a$ ، حيث a من $\mathbb{N}^*$

  احسب $\lambda=\lim_{n\to\infty}[u_0,u_1,\ldots,u_n]$.

- لتكن $U=(u_n)_{n\geq 0}$ من $\mathcal{F}$، المعرّفة بالشكل :

  $\forall n\geq 0,\ u_{2n}=a,\ u_{2n+1}=1$ ، في حالة عددٍ a من $\mathbb{N}^*$

  احسب $\lambda=\lim_{n\to\infty}[u_0,u_1,\ldots,u_n]$.

- لتكن $U=(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية من $\mathcal{F}$، تقبل العدد 4 دوراً ومعرّفة كما يلي:

  $u_0=1$ و $u_1=2$ و $u_2=3$ و $u_3=4$

  احسب $\lambda=\lim_{n\to\infty}[u_0,u_1,\ldots,u_n]$.

❸ جِدْ متتالية $U=(u_n)_{n\geq 0}$ من $\mathcal{F}$ تُحقق $\lim_{n\to\infty}[u_0,u_1,\ldots,u_n]=\sqrt{2}$.

❹ جِدْ متتالية $V=(v_n)_{n\geq 0}$ من $\mathcal{F}$ تُحقق $\lim_{n\to\infty}[v_0,v_1,\ldots,v_n]=\sqrt{3}$.

الحل

①.1 لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة المتتاليا ت التي تأ خذ قيمها $\mathbb{N}^*$. ولتكن $U=(u_n)_{n\geq 0}$ من $\mathcal{F}$،
نعرّف المتتاليتين التدريجيتين $(a_n)_{n\geq 0}$ و $(b_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقات :

$$\begin{array}{llll} a_0=u_0, & a_1=u_1a_0+1, & a_n=u_na_{n-1}+a_{n-2}, & (n\geq 2)\\ b_0=1, & b_1=u_1, & b_n=u_nb_{n-1}+b_{n-2}, & (n\geq 2)\end{array}$$

ولتكن $\mathbb{P}_n$ القضيّة $a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n=(-1)^{n-1}$ في حالة n من $\mathbb{N}^*$.

- نلاحظ أنّ $\mathbb{P}_1$ صحيحة لأنّ

$$a_1b_0 - a_0b_1 = (u_1u_0 + 1) - u_0u_1 = 1$$

- نلاحظ أيضاً أنّه في حالة n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{aligned} a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1} &= (u_{n+1}a_n + a_{n-1})b_n - a_n(u_{n+1}b_n + b_{n-1}) \\ &= -(a_nb_{n-1} - a_{n-1}b_n) \end{aligned}$$

وهذا يبرهن أنّ $\mathbb{P}_{n+1} \Rightarrow \mathbb{P}_n$. فالقضيّة $\mathbb{P}_n$ صحيحة أيّاً كانت قيمة n من $\mathbb{N}^*$.

①.2 تفيدنا العلاقات التدريجيّة التي تعرّف المتتاليتين $(a_n)_{n\geq 0}$ و $(b_n)_{n\geq 0}$ في الإثبات المباشر أنّ جميع حدود هاتين المتتاليتين أعدادٌ طبيعيّة موجبة تماماً أي تنتمي إلى $\mathbb{N}^*$. ونستنتج، بناءً على المساواة $a_nb_{n-1} - a_{n-1}b_n = (-1)^{n-1}$ أنّ $\forall n \in \mathbb{N},\ \gcd(a_n, b_n) = 1$.

①.3 لتكن $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$، ولتكن $\mathbb{P}_n$ القضيّة $b_n \geq \omega^{n-1}$ في حالة n من $\mathbb{N}^*$.

- نلاحظ أنّ $\mathbb{P}_1$ و $\mathbb{P}_2$ صحيحتان لأنّ

$$\begin{aligned} b_1 &= u_1 \geq 1 = \omega^0 \\ b_2 &= u_2b_1 + b_0 \geq 1 + 1 > \omega \end{aligned}$$

- لنفترض إذن صحّة القضيّتين $\mathbb{P}_n$ و $\mathbb{P}_{n+1}$، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، عندئذ

$$b_{n+2} = u_{n+2}b_{n+1} + b_n \geq u_{n+2}\omega^n + \omega^{n-1} \geq \omega^n + \omega^{n-1} = \omega^{n+1}$$

إذ استفدنا من الخاصّة $1 + \omega = \omega^2$. وهذا يبرهن أنّ $\mathbb{P}_n \wedge \mathbb{P}_{n+1} \Rightarrow \mathbb{P}_{n+2}$.

فالقضيّة $\mathbb{P}_n$ صحيحة أيّاً كانت قيمة n من $\mathbb{N}^*$.

①.4 نعرّف $r_n = \dfrac{a_{2n}}{b_{2n}}$ و $s_n = \dfrac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}$ في حالة n من $\mathbb{N}^*$. عندئذ

$$\begin{aligned} r_{n+1} - r_n &= \frac{a_{2n+2}}{b_{2n+2}} - \frac{a_{2n}}{b_{2n}} = \frac{a_{2n+2}b_{2n} - a_{2n}b_{2n+2}}{b_{2n+2}b_{2n}} \\ &= \frac{(u_{2n+2}a_{2n+1} + a_{2n})b_{2n} - a_{2n}(u_{2n+2}b_{2n+1} + b_{2n})}{b_{2n+2}b_{2n}} \\ &= \frac{u_{2n+2}(a_{2n+1}b_{2n} - a_{2n}b_{2n+1})}{b_{2n+2}b_{2n}} \\ &= \frac{u_{2n+2}}{b_{2n+2}b_{2n}} > 0 \end{aligned}$$

فالمتتالية $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متزايدة تماماً، وكذلك

$$\begin{aligned} s_{n+1}-s_n &= \frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}-\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}} = \frac{a_{2n+1}b_{2n-1}-a_{2n-1}b_{2n+1}}{b_{2n+1}b_{2n-1}} \\ &= \frac{(u_{2n+1}a_{2n}+a_{2n-1})b_{2n-1}-a_{2n-1}(u_{2n+1}b_{2n}+b_{2n-1})}{b_{2n+1}b_{2n-1}} \\ &= \frac{u_{2n+1}(a_{2n}b_{2n-1}-a_{2n-1}b_{2n})}{b_{2n+1}b_{2n-1}} \\ &= -\frac{u_{2n+1}}{b_{2n+1}b_{2n-1}}<0 \end{aligned}$$

فالمتتالية $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متناقصة تماماً. وأخيراً نلاحظ، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، أنّ

$$s_n-r_n=\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}-\frac{a_{2n}}{b_{2n}}=\frac{a_{2n-1}b_{2n}-a_{2n}b_{2n-1}}{b_{2n-1}b_{2n}}=\frac{1}{b_{2n-1}b_{2n}}$$

وقد استفدنا ثلاث مرّات من نتيجة السؤال ①.1. ولكن

$$b_{2n-1}b_{2n}\geq\omega^{2n-2}\omega^{2n-1}=\frac{\omega^{4n}}{\omega^3}=\frac{\omega^{4n}}{2+\sqrt{5}}>\frac{\omega^{4n}}{5}$$

إذن

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0<s_n-r_n<5\cdot\omega^{-4n}$$

①.5. نستنتج من الخواص السابقة أنّ المتتاليتين $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متجاورتان، فهما متقاربتان ولهما النهاية ℓ نفسها. وبوجه خاص يكون

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad r_n<\ell<s_n$$

في الحقيقة، نستنتج من المتراجحتين $r_n<\ell<s_{n+1}$ و $r_{n+1}<\ell<s_{n+1}$ أنّ العدد ℓ يقع بين $\frac{a_n}{b_n}$ و $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$، وعليه فإنّ

$$\left|\ell-\frac{a_n}{b_n}\right|<\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-\frac{a_n}{b_n}\right|=\frac{|a_{n+1}b_n-a_nb_{n+1}|}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{b_nb_{n+1}}$$

نبرهن بالتدريج على العدد n أنّ $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n\geq b_n$، وهذا يقتضي أنّ

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\geq 1$$

لنفترض على سبيل الجدل أنّ $\ell \in \mathbb{Q}$، عندئذ نكتب $\ell = \frac{p}{q}$ حيث p و q عددان طبيعيّان أوّليان فيما بينهما. لمّا كانت المتتالية $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة وتسعى على $+\infty$ أمكن اختيار عدد طبيعي m من $\mathbb{N}^*$ يُحقّق

$$\forall n \geq m, \quad b_n > q$$

ونستنتج من المتراجحة ❋ أنّ

$$\forall n \geq m, \quad \left|pb_n - a_n q\right| \leq \frac{q}{b_{n+1}} < 1$$

ولكن مهما تكن n من $\mathbb{N}$ يكن $pb_n - a_n q \in \mathbb{Z}$، إذن يجب أن يكون

$$\forall n \geq m, \quad pb_n - a_n q = 0$$

أو

$$\forall n \geq m, \quad \ell = \frac{a_n}{b_n}$$

وهذا تناقضٌ لأنّ $\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} - \frac{a_m}{b_m} = \frac{(-1)^m}{b_{m+1}b_m} \neq 0$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $\ell \in [1,+\infty[\backslash\mathbb{Q}$.

② نعرّف، في حالة u من $\mathbb{N}^*$، التابع $\varphi_u : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* : x \mapsto u + \frac{1}{x}$.

②.1. لتكن المتتالية $U = (u_n)_{n\geq 0}$ من $\mathcal{F}$، والمتتاليتان التدريجيتان $(a_n)_{n\geq 0}$ و $(b_n)_{n\geq 0}$ المعرّفتان انطلاقاً منها كما في السابق. ولتكن، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، القضيّة $\mathbb{P}_n$ التالية :

$$\forall x > 0, \quad \varphi_{u_0} \circ \varphi_{u_1} \circ \cdots \circ \varphi_{u_n}(x) = \frac{a_n x + a_{n-1}}{b_n x + b_{n-1}}$$

- نلاحظ أنّ $\mathbb{P}_1$ صحيحة لأنّ

$$\begin{aligned}\varphi_{u_0} \circ \varphi_{u_1}(x) &= u_0 + \frac{1}{\varphi_{u_1}(x)} = u_0 + \frac{1}{u_1 + x^{-1}} \\ &= \frac{x(u_0 u_1 + 1) + u_0}{x u_1 + 1} = \frac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0}\end{aligned}$$

- لنفترض إذن صحّة القضيّة $\mathbb{P}_n$، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، عندئذ

$$\begin{aligned}\varphi_{u_0}\circ\cdots\circ\varphi_{u_n}\circ\varphi_{u_{n+1}}(x) &= \frac{a_n\varphi_{u_{n+1}}(x)+a_{n-1}}{b_n\varphi_{u_{n+1}}(x)+b_{n-1}}\\ &= \frac{a_n\left(u_{n+1}+\dfrac{1}{x}\right)+a_{n-1}}{b_n\left(u_{n+1}+\dfrac{1}{x}\right)+b_{n-1}}\end{aligned}$$

ومن ثَمّ، نستنتج أنّ $\mathbb{P}_{n+1} \Rightarrow \mathbb{P}_n$ لأنّ

$$\begin{aligned}\varphi_{u_0}\circ\cdots\circ\varphi_{u_n}\circ\varphi_{u_{n+1}}(x) &= \frac{x(a_nu_{n+1}+a_{n-1})+a_n}{x(b_nu_{n+1}+b_{n-1})+b_n}\\ &= \frac{xa_{n+1}+a_n}{xb_{n+1}+b_n}\end{aligned}$$

②.2. نستنتج إذن أنّ

$$\lim_{x\to\infty}\varphi_{u_0}\circ\varphi_{u_1}\circ\cdots\circ\varphi_{u_n}(x)=\frac{a_n}{b_n}=\left[u_0,u_1,\ldots,u_n\right]$$

ولكن نرى من جهة أخرى مباشرة أنّ

$$\varphi_{u_0}\circ\varphi_{u_1}\circ\cdots\circ\varphi_{u_n}(x)=u_0+\cfrac{1}{u_1+\cfrac{1}{u_2+\cfrac{1}{\cfrac{\ddots}{u_{n-1}+\cfrac{1}{u_n+\cfrac{1}{x}}}}}}$$

ويكفي أن نجعل x تسعى إلى اللانهاية لنجد أنّ

$$\left[u_0,u_1,\ldots,u_n\right]=\frac{a_n}{b_n}=u_0+\cfrac{1}{u_1+\cfrac{1}{u_2+\cfrac{1}{\cfrac{\ddots}{u_{n-1}+1/u_n}}}}$$

②.3 لتكن n من $\mathbb{N}^*$. لمّا كانت التوابع φ_u متناقصة، استنتجنا أنّ التابع المركّب $\varphi_{u_0}\circ\varphi_{u_1}\circ\cdots\circ\varphi_{u_n}$ تابعٌ مطّردٌ على $\mathbb{R}_+^*$، ولمّا كان

$$\lim_{x\to0^+}\varphi_{u_0}\circ\varphi_{u_1}\circ\cdots\circ\varphi_{u_n}(x)=\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$$

و

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi_{u_0}\circ\varphi_{u_1}\circ\cdots\circ\varphi_{u_n}(x)=\frac{a_n}{b_n}$$

استنتجنا أنّ قيم التابع $\varphi_{u_0}\circ\varphi_{u_1}\circ\cdots\circ\varphi_{u_n}$ تقع في المجال المفتوح الذي طرفاه $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ و $\frac{a_n}{b_n}$. وعليه في حالة $x>0$ لدينا

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\varphi_{u_0}\circ\varphi_{u_1}\circ\cdots\circ\varphi_{u_n}(x)\right|\le\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\right|=\frac{1}{b_nb_{n-1}}$$

②.4 لتكن $\mathcal{A}$ مجموعة الأعداد غير العاديّة من المجال $]1,+\infty[$ أي $\mathcal{A}=]1,+\infty[\setminus\mathbb{Q}$. من الواضح أنّه إذا كان x عنصراً من $\mathcal{A}$ كان $x-\lfloor x\rfloor$ عدداً غير عادي من $]0,1[$، وكان من ثَمّ العددُ $\frac{1}{x-\lfloor x\rfloor}$ عنصراً من $\mathcal{A}$. وعليه فإنّ التابع $x\mapsto\frac{1}{x-\lfloor x\rfloor}$ يعرّف تطبيقاً f من $\mathcal{A}$ إلى $\mathcal{A}$.

ليكن λ من $\mathcal{A}$، ولنعرّف المتتالية $U_\lambda=(u_n)_{n\ge0}$ بالعلاقات :

$$u_0=\lfloor\lambda\rfloor,\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\left\lfloor f^n(\lambda)\right\rfloor$$

حيث $f^n=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n}$. لمّا كان من الواضح أنّ $f^n(\lambda)\in\mathcal{A}$ أيّاً كانت قيمة n من $\mathbb{N}$ استنتجنا أنّ u_n ينتمي إلى $\mathbb{N}^*$ أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$، وعليه تنتمي المتتالية U_λ إلى المجموعة $\mathcal{F}$.

لنتأمّل، في حالة n من $\mathbb{N}$، القضيّة $\mathbb{P}_n$ التالية :

$$\lambda=\varphi_{u_0}\circ\varphi_{u_1}\circ\cdots\circ\varphi_{u_n}(f^{n+1}(\lambda))$$

- نلاحظ أنّ $\mathbb{P}_0$ صحيحة لأنّ

$$\varphi_{u_0}\left(f(\lambda)\right)=\lfloor\lambda\rfloor+\frac{1}{f(\lambda)}=\lfloor\lambda\rfloor+\left(\lambda-\lfloor\lambda\rfloor\right)=\lambda$$

- ومن جهة أخرى لدينا

$$\begin{aligned}f^n(\lambda)&=\left\lfloor f^n(\lambda)\right\rfloor+\left(f^n(\lambda)-\left\lfloor f^n(\lambda)\right\rfloor\right)\\&=\left\lfloor f^n(\lambda)\right\rfloor+1\Big/\left(\frac{1}{f^n(\lambda)-\left\lfloor f^n(\lambda)\right\rfloor}\right)\\&=\left\lfloor f^n(\lambda)\right\rfloor+\frac{1}{f\circ f^n(\lambda)}=\varphi_{u_n}\left(f^{n+1}(\lambda)\right)\end{aligned}$$

لنفترض إذن صحّة القضيّة $\mathbb{P}_{n-1}$، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، عندئذ

$$\lambda=\varphi_{u_0}\circ\varphi_{u_1}\circ\cdots\circ\varphi_{u_{n-1}}(f^n(\lambda))$$

وعليه يكون

$$\lambda=\varphi_{u_0}\circ\varphi_{u_1}\circ\cdots\circ\varphi_{u_{n-1}}\circ\varphi_{u_n}(f^{n+1}(\lambda))$$

وهذا ما يثبتُ صحّة القضيّة $\mathbb{P}_n$. فالقضيّة $\mathbb{P}_n$ صحيحة أيّاً كانت قيمة n.

وبالعودة إلى نتيجة السؤال ②.3. نستنتج أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad\left|\frac{a_n}{b_n}-\varphi_{u_0}\circ\varphi_{u_1}\circ\cdots\circ\varphi_{u_n}\left(f^{n+1}(\lambda)\right)\right|\leq\frac{1}{b_nb_{n-1}}$$

أي إنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad\left|\left[u_0,u_1,\ldots,u_n\right]-\lambda\right|\leq\frac{1}{b_nb_{n-1}}$$

ولمّا كان $\lim_{n\to+\infty}b_n=+\infty$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty}[u_0,u_1,\ldots,u_n]=\lambda$$

لقد أثبتنا إذن أنّ التطبيق $\lambda\mapsto U_\lambda$ يُعرّف تقابلاً بين المجموعتين

$$\mathcal{A}=]1,+\infty[\setminus\mathbb{Q}\quad\text{و}\quad\mathcal{F}=(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$$

والتقابل العكسي هو التطبيق $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\mapsto\lim_{n\to\infty}\left[u_0,u_1,\ldots,u_n\right]$.

②.5. نقول إنّ المتتالية $U = (u_n)_{n\geq 0}$ من $\mathcal{F}$ تقبل العدد T من $\mathbb{N}^*$ دوراً، إذا كان

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+T} = u_n$$

لتكن $U = (u_n)_{n\geq 0}$ متتالية من $\mathcal{F}$ تقبل العدد T من $\mathbb{N}^*$ دوراً. ولنعرّف

$$\psi = \varphi_{u_0} \circ \varphi_{u_1} \circ \cdots \circ \varphi_{u_{T-1}} \quad \text{و} \quad \lambda = \lim_{n\to\infty} [u_0, u_1, \ldots, u_n]$$

لتكن n من $\mathbb{N}$، لقد أثبتنا في ②.2. أنّ

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi_{u_0} \circ \varphi_{u_1} \circ \cdots \circ \varphi_{u_n}(x) = [u_0, u_1, \ldots, u_n]$$

نستنتج إذن أنّ

$$\lim_{x\to+\infty} \psi \circ \varphi_{u_0} \circ \varphi_{u_1} \circ \cdots \circ \varphi_{u_n}(x) = \psi([u_0, u_1, \ldots, u_n])$$

ولكن، بالاستفادة من كون T دوراً للمتتالية U، نرى أنّ

$$\psi \circ \underline{\varphi_{u_0} \circ \varphi_{u_1} \circ \cdots \circ \varphi_{u_n}} = \varphi_{u_0} \circ \varphi_{u_1} \circ \cdots \circ \varphi_{u_{T-1}} \circ \underline{\varphi_{u_T} \circ \varphi_{u_{T+1}} \circ \cdots \circ \varphi_{u_{n+T}}}$$

مما يقتضي أنّ

$$\lim_{x\to+\infty} \psi \circ \varphi_{u_0} \circ \varphi_{u_1} \circ \cdots \circ \varphi_{u_n}(x) = \left[u_0, u_1, \ldots, u_{n+T}\right]$$

فنكون قد أثبتنا أنّ

$$\psi([u_0, u_1, \ldots, u_n]) = \left[u_0, u_1, \ldots, u_{n+T}\right]$$

فإذا جعلنا n تسعى إلى اللانهاية في المساواة السابقة استنتجنا أنّ

$$\psi(\lambda) = \lambda$$

ولمّا كان

$$\psi(x) = \frac{a_{T-1}x + a_{T-2}}{b_{T-1}x + b_{T-2}}$$، (مع الاصطلاح $a_{-1} = 1$ و $b_{-1} = 0$)

استنتجنا أنّ λ جذرٌ من $[1, +\infty[\setminus\mathbb{Q}$ للمعادلة من الدرجة الثانية:

$$b_{T-1}\lambda^2 + \left(b_{T-2} - a_{T-1}\right)\lambda - a_{T-2} = 0$$

تطبيقات

♦ لتكن المتتالية $U = (u_n)_{n\geq 0}$ من $\mathcal{F}$، علماً أنّ $\forall n \geq 0, u_n = a$، و a من $\mathbb{N}^*$. هذه متتالية تقبل العدد $T = 1$ دوراً. نستنتج استناداً إلى ما سبق أنّ المقدار

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} [\underbrace{a, a, \ldots, a}_{n}]$$

هو جذرٌ من المجموعة $[1, +\infty[\backslash\mathbb{Q}$ للمعادلة من الدرجة الثانية : $\lambda = a + \dfrac{1}{\lambda}$، أي

$$\lambda = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

♦ لتكن $U = (u_n)_{n\geq 0}$ من $\mathcal{F}$، علماً أنّ $\forall n \geq 0, u_{2n} = a, u_{2n+1} = 1$، و a من $\mathbb{N}^*$. هذه متتالية تقبل العدد $T = 2$ دوراً. نستنتج أنّ المقدار

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} [\underbrace{a, 1, a, 1, \ldots, u_n}_{n}]$$

هو جذرٌ من المجموعة $[1, +\infty[\backslash\mathbb{Q}$ للمعادلة من الدرجة الثانية : $\lambda = a + \dfrac{1}{1 + 1/\lambda}$، أي

$$\lambda = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2}.$$

♦ لتكن $U = (u_n)_{n\geq 0}$ من $\mathcal{F}$ متتالية تقبل العدد $T = 4$ دوراً. وتُحقّق الشروط $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ و $u_2 = 3$ و $u_3 = 4$. نستنتج من الدراسة السابقة أنّ المقدار

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} [\underbrace{1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, \ldots, u_n}_{n}]$$

هو جذرٌ من المجموعة $[1, +\infty[\backslash\mathbb{Q}$ للمعادلة من الدرجة الثانية :

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + 1/\lambda}}} = \lambda$$

أي $30\lambda^2 - 36\lambda - 10 = 0$، ومنه $\lambda = \dfrac{9 + 2\sqrt{39}}{15}$.

♦ نبحث عن متتالية $U=(u_n)_{n\geq 0}$ من $\mathcal{F}$ تُحقِّق $\lim\limits_{n\to\infty}[u_0,u_1,\ldots,u_n]=\sqrt{2}$. سنتبع الأسلوب المبين في ②.4. إذ نلاحظ أنّ

$$f\left(\sqrt{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$
$$f^2\left(\sqrt{2}\right)=f\left(\sqrt{2}+1\right)=f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}+1$$

ومن ثَمّ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad f^n\left(\sqrt{2}\right)=1+\sqrt{2}$ ، إذن المتتالية $U_{\sqrt{2}}=\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ هي المتتالية

$$u_0=1,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=2$$

ومن ثَمّ

$$\lim_{n\to\infty}[1,\underbrace{2,2,\ldots,2}_{n-1}]=\sqrt{2}$$

♦ نبحث عن متتالية $V=(v_n)_{n\geq 0}$ من $\mathcal{F}$ تُحقِّق $\lim\limits_{n\to\infty}[v_0,v_1,\ldots,v_n]=\sqrt{3}$. نلاحظ أنّ

$$f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$
$$f^2\left(\sqrt{3}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$$
$$f^3\left(\sqrt{3}\right)=f\left(\sqrt{3}+1\right)=f\left(\sqrt{3}\right)$$

ومن ثَمّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f^{2n-1}\left(\sqrt{3}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2},\ f^{2n}\left(\sqrt{3}\right)=1+\sqrt{3}$$

إذن المتتالية $V_{\sqrt{3}}=(v_n)_{n\geq 0}$ هي المتتالية

$$v_0=1,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_{2n-1}=1,\ v_{2n}=2,$$

ومن ثَمّ

$$\lim_{n\to\infty}[1,\underbrace{1,2,1,2,1,2\ldots,v_n}_{n-1}]=\sqrt{3}$$

وبذا يتحقّق المطلوب. ∎

التمرين 29. ادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة كما يلي :

$$u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \cos(u_n)$$

وادرس سرعة تقاربها.

الحل

لنتأمّل التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \cos x$ ، نلاحظ بحساب مباشر أنّ f' موجبٌ على $\mathbb{R}$ ولا ينعدم على أيِّ مجال جزئي من $\mathbb{R}$ ، فهو إذن متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$. كما نلاحظ أنّ

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad f\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

وهذا يُثبتُ بوجه خاص أنّ $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ و $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ ، وأنّ

$$f\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{و} \quad f\left(\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\right) \subset \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\qquad ①$$

- بالطبع إنّ حالة $u_0 = \frac{\pi}{2}$ أو $u_0 = -\frac{\pi}{2}$ تافهة لأنّ المتتالية المدروسة ثابتة في هذه الحالة.

- حالة $u_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. في هذه الحالة يكون لدينا، استناداً إلى ① ما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

ولـمّا كان $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \cos x > 0$ استنتجنا أنّ

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) > x$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1} < \frac{\pi}{2}$$

فالمتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{\pi}{2}$، فهي متقاربة من نهاية ℓ تنتمي إلى المجال $\left[u_0, \frac{\pi}{2}\right]$ المحتوى في $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ وهي تُحقِّق من جهة أخرى المساواة $\cos(\ell) = 0$، إذن $\ell = \frac{\pi}{2}$.

◆ حالة $u_0 \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. في هذه الحالة يكون لدينا، استناداً إلى ① ما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$$

ولمّا كان $\forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[, \cos x < 0$ استنتجنا أنّ

$$\forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[, \quad f(x) < x$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1} > \frac{\pi}{2}$$

فالمتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد $\frac{\pi}{2}$، فهي متقاربة من نهاية ℓ تنتمي إلى المجال $\left[\frac{\pi}{2}, u_0\right]$ المحتوى في $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ وهي تُحقِّق من جهة أخرى المساواة $\cos(\ell) = 0$، إذن $\ell = \frac{\pi}{2}$.

لقد أثبتنا أنّ

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} < u_0 < \frac{3\pi}{2} \quad &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\pi}{2} \\
u_0 = -\frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

لدراسة سرعة التقارب في حالة $-\frac{\pi}{2} < u_0 < \frac{3\pi}{2}$ نعرّف الخطأ ε_n بالصيغة

$$\varepsilon_n = \frac{\pi}{2} - u_n$$

فنلاحظ أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \sin \varepsilon_n$$

و

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \varepsilon_n \in \left]-\pi, \pi\right[$$

وهنا نستفيد من المتراجحة المألوفة

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$$

لنستنتج منها أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \left|x - \sin x\right| \le \frac{1}{6}\left|x\right|^3$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \left|\varepsilon_{n+1}\right| \le \frac{1}{6}\left|\varepsilon_n\right|^3$$

وهذا يقتضي أنّ التقارب تكعيبي، فهو سريع جدّاً، كما نستنتج أيضاً أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \left|\varepsilon_n\right| \le \sqrt{6}\left|\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{6}}\right|^{3^n}$$

فمثلاً، إذا اخترنا $u_0 = \dfrac{3}{2}$ كان $\left|\dfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{6}}\right| \le \dfrac{3}{100}$ ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \left|\varepsilon_n\right| \le \sqrt{6}\left(\frac{3}{100}\right)^{3^n} < 3\left(\frac{1}{33}\right)^{3^n}$$

فمثلاً، في حالة $n = 3$ لدينا $\left|\varepsilon_3\right| < 3\left(\dfrac{1}{33}\right)^{3^3} \le 4 \times 10^{-41}$.

أمّا إذا اخترنا $u_0 = \dfrac{11}{7}$ فيكون $\left|\dfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{6}}\right| \le \dfrac{3}{10000}$، ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \left|\varepsilon_n\right| < 3\left(\frac{1}{3333}\right)^{3^n}$$

فمثلاً، العدد $\frac{22}{7} + 2\cos\left(\frac{11}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{11}{7} + \cos\left(\frac{11}{7}\right)\right)$ يُعطي قيمة تقريبيّة للعدد π صحيحة حتّى اثنين وثلاثين خانة عشرية بعد الفاصلة. فتأمّل! ■

التمرين 30. لتكن x من $\mathbb{R}_+^*$. ادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرّفة كما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k} x^k}{\sum_{0\le 2k+1\le n} C_n^{2k+1} x^k}$$

الحل

لنلاحظ أنّه في حالة $\varepsilon \in \{-1,1\}$ لدينا

$$\begin{aligned}\left(1+\varepsilon\sqrt{x}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \varepsilon^k \left(\sqrt{x}\right)^k = \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ زوجي}}} C_n^k \varepsilon^k \left(\sqrt{x}\right)^k + \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ فردي}}} C_n^k \varepsilon^k \left(\sqrt{x}\right)^k \\ &= \sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k} x^k + \varepsilon\sqrt{x} \sum_{0\le 2k+1\le n} C_n^{2k+1} x^k\end{aligned}$$

ومن ثمّ

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{x}\right)^n + \left(1-\sqrt{x}\right)^n &= 2\sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k} x^k \\ \left(1+\sqrt{x}\right)^n - \left(1-\sqrt{x}\right)^n &= 2\sqrt{x}\sum_{0\le 2k+1\le n} C_n^{2k+1} x^k\end{aligned}$$

ومنه

$$u_n = \sqrt{x}\cdot\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^n + \left(1-\sqrt{x}\right)^n}{\left(1+\sqrt{x}\right)^n - \left(1-\sqrt{x}\right)^n} = \sqrt{x}\left(1+2\frac{\left(\lambda(x)\right)^n}{1-\left(\lambda(x)\right)^n}\right)$$

حيث

$$\lambda(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-\frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{2}{1+\sqrt{x}} - 1$$

إذن $\lambda(x) \in \left]-1,1\right[$ ومن ثمّ

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{x}\ .$$

وبذا يتمّ الإثبات. ■

التمرين 31. نهدف في هذا التمرين إلى دراسة $\mathcal{U}$ مجموعة المتتاليات $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathbb{R}$ التي تُحقّق العلاقة التدريجيّة

$$\mathcal{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 9 + \frac{12}{u_{n+1}} - \frac{20}{u_{n+1}u_n}$$

ليكن $\mathcal{S}$ الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ المكوّن من المتتاليات $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي تُحقّق العلاقة التدريجيّة

$$\mathcal{R}' \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+3} = 9X_{n+2} + 12X_{n+1} - 20X_n$$

1. أوجد المتتاليات الهندسيّة التي تنتمي إلى $\mathcal{S}$.
2. أثبت أنّ التطبيق $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3, (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (X_0, X_1, X_2)$ تقابلٌ خطّي، واستنتج أساساً للفضاء $\mathcal{S}$.

نرمز بالرمز $\mathcal{S}^*$ إلى مجموعة المتتاليات $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{S}$ التي تُحقّق
$$X_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n \neq 0$$

3. لتكن المتتالية $A = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من المجموعة $\mathcal{S}^*$، عندئذ نعرّف المتتالية $\Psi(A) = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالصيغة $u_n = \dfrac{X_{n+1}}{X_n}$. أثبت أنّ التطبيق الذي يقرن بالمتتالية A المتتالية $\Psi(A)$ (أي $A \mapsto \Psi(A)$) يعرّف تقابلاً من $\mathcal{S}^*$ إلى $\mathcal{U}$.
4. ادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{U}$ تبعاً لقيم (u_0, u_1).

الحل

1. لنفترض أنّ $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسيّة غير معدومة تنتمي إلى $\mathcal{S}$. عندئذ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda^{n+3} = 9\lambda^{n+2} + 12\lambda^{n+1} - 20\lambda^n$$

ومن ثَمّ $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 12\lambda + 20 = 0$ أو

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 10) = 0$$

وبالعكس، نتيقّن بالتحقّق المباشر أنّ المتتاليات $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $\boldsymbol{\beta} = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالعلاقات

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = 1, \ \beta_n = (-2)^n, \ \gamma_n = 10^n$$

هي متتاليات هندسيّة تنتمي إلى $\mathcal{S}$.

2. من الواضح أنّ التطبيق

$$\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3, \left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(X_0, X_1, X_2\right)$$

تطبيق خطّي. ونبرهن بسهولة استناداً إلى العلاقة التدريجيّة، أنّه إذا كانت $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{S}$ تُحقّق الشروط $X_0 = X_1 = X_2 = 0$، أي تنتمي إلى $\ker\varphi$، وجب أن يكون $X_n = 0$ أيّاً كان الدليل n. وهذا يعني أنّ φ متباينٌ، ومن ثَمّ $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim\mathcal{S}$.

ومن جهة أخرى، لدينا

$$\varphi(\boldsymbol{\gamma}) = (1,10,100) \text{ و } \varphi(\boldsymbol{\beta}) = (1,-2,4) \text{ و } \varphi(\boldsymbol{\alpha}) = (1,1,1)$$

فالجملة $\left(\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\varphi(\boldsymbol{\beta}),\varphi(\boldsymbol{\gamma})\right)$ جملةٌ حرّة في $\mathrm{Im}\,\varphi$. وهذا يُثبتُ أنّ

$$3 \le \mathrm{rg}(\varphi) \le \dim\mathbb{R}^3 = 3$$

إذن $\dim\mathcal{S} = 3$، والجملة $\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\right)$ هي أساسٌ للفضاء $\mathcal{S}$.

وعلى وجه الدقّة، $\varphi\left(z_0\boldsymbol{\alpha} + z_1\boldsymbol{\beta} + z_2\boldsymbol{\gamma}\right) = \left(X_0, X_1, X_2\right)$ إذا وفقط إذا كان

$$\begin{aligned}
z_0 + {} & z_1 + {} & z_1 &= X_0\\
z_0 - {} & 2z_1 + {} & 10z_2 &= X_1\\
z_0 + {} & 4z_1 + {} & 100z_2 &= X_2
\end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned}
z_0 &= \frac{20X_0 + 8X_1 - X_2}{27}\\
z_0 &= \frac{10X_0 - 11X_1 + X_2}{36}\\
z_0 &= \frac{-2X_0 + X_1 + X_2}{108}
\end{aligned}$$

3. لتكن $A = \left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{S}^*$، ولنعرّف المتتالية $\Psi(A) = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{X_{n+1}}{X_n}$$

عندئذ يكون

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = u_n X_n,\ X_{n+2} = u_{n+1}u_n X_n,\ X_{n+3} = u_{n+2}u_{n+1}u_n X_n$$

وبالتعويض في العلاقة $\mathcal{R}'$ والاختصار على X_n نجد

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2}u_{n+1}u_n = 9u_{n+1}u_n + 12u_n - 20$$

وبالقسمة على المقدار غير المعدوم $u_{n+1}u_n$ نرى أنّ المتتالية $\Psi(A)$ تُحقِّق $\mathcal{R}$ فهي تنتمي إلى $\mathcal{U}$.

وبالعكس، إذا كانت $B=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathbb{R}^*$ تُحقّق العلاقة التدريجيّة $\mathcal{R}$ عرّفنا متتالية جديدة $\Theta(B)=(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة :

$$X_0=1,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad X_{n+1}=\prod_{k=0}^{n}u_k$$

ونتيقّن مباشرة أنّ $\Theta(B)$ تنتمي إلى $\mathcal{S}^*$. ثُمّ إنّ $\Psi\circ\Theta=I_{\mathcal{U}}$ و $\Theta\circ\Psi=I_{\mathcal{S}^*}$ إذن، التطبيق Ψ من $\mathcal{S}^*$ إلى $\mathcal{U}$ وتقابله العكسي هو Θ.

4. لندرس تقارب المتتالية $B=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من المجموعة $\mathcal{U}$ تبعاً لقيم (u_0,u_1). في الحقيقة، لنتأمّل المتتالية $\Theta(B)=(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$، عندئذ نستنتج من الدراسة السابقة أنّ $\Theta(B)=\varphi^{-1}(1,u_0,u_0u_1)$، ومن ثَمّ

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}=\frac{20+8u_0-u_0u_1}{27}\boldsymbol{\alpha}+\frac{10-11u_0+u_0u_1}{36}\boldsymbol{\beta}+\frac{-2+u_0+u_0u_1}{27}\gamma$$

أو، مهما تكن n من $\mathbb{N}$، يكن

$$X_n=\frac{20+8u_0-u_0u_1}{27}+\frac{10-11u_0+u_0u_1}{36}(-2)^n+\frac{-2+u_0+u_0u_1}{27}(10)^n$$

وأخيراً، لأنّ $u_n=\dfrac{X_{n+1}}{X_n}$، نستنتج، أنّه في حالة n من $\mathbb{N}$ يكون لدينا

$$u_n=\frac{T_0(u_0,u_1)+T_1(u_0,u_1)(-2)^{n+1}+T_2(u_0,u_1)10^{n+1}}{T_0(u_0,u_1)+T_1(u_0,u_1)(-2)^n+T_2(u_0,u_1)10^n}$$

وقد عرّفنا

$$\begin{aligned}T_0(u_0,u_1)&=80+4u_0(8-u_1)\\T_1(u_0,u_1)&=30-3u_0(11-u_1)\\T_2(u_0,u_1)&=-2+u_0(1+u_1)\end{aligned}$$

لنناقش إذن الحالات التالية :

- حالة $T_2(u_0,u_1) \neq 0$ أي $u_0(1+u_1) \neq 2$. في هذه الحالة، نرى مباشرة أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تسعى إلى 10، أي $\lim_{n\to\infty} u_n = 10$.
- حالة $T_2(u_0,u_1) = 0$ أي $u_0(1+u_1) = 2$. إذن نحسب مباشرة
$$T_0(u_0,u_1) = 36(2+u_0), \quad T_1(u_0,u_1) = 36(1-u_0)$$
فيكون لدينا
$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2+u_0+(1-u_0)(-2)^{n+1}}{2+u_0+(1-u_0)(-2)^n}$$
   - فإذا كان $u_0 \neq 1$ كان $\lim_{n\to\infty} u_n = -2$.
   - وإذا كان $u_0 = u_1 = 1$ كان $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = 1$.

بالنتيجة، تكون المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{U}$ متقاربة مهما كانت قيمة (u_0,u_1)، شرط أن تكون معرّفة.

- وهي تسعى إلى 1 إذا كان $u_0 = u_1 = 1$.
- وتسعى إلى -2 إذا كان $\big(u_0(1+u_1)=2\big) \wedge \big(u_0 \neq 1\big)$.
- وتسعى إلى 10 إذا كان $u_0(1+u_1) \neq 2$.

ونلاحظ أنّ شرط كون المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرّفة هو أن يكون $(u_0,u_1) \in \mathbb{R}^{*2}$، وأن يكون
$$\forall n \geq 2, \quad u_1 \neq \frac{2}{u_0}\left(\frac{10^n - 15(-2)^n - 40}{10^n + 3(-2)^n - 4}\right) - \frac{10^n - 33(-2)^n + 32}{10^n + 3(-2)^n - 4}$$

وننصح القارئ أن يجرّب بنفسه حساب عددٍ من حدود هذه المتتالية آخذاً $u_0 = \frac{1}{3}$ و $u_1 = 5$ ليرى بنفسه ظاهرة عدم استقرار تقارب هذه المتتالية. فالحاسوب لا يستطيع تخزين العدد $\frac{1}{3}$ بدقة لانهائية، وسرعان ما نحيد عن الشرط $u_0(1+u_1) = 2$. ■

التمرين 32. لتكن λ من $\mathbb{R}^*$. ولتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقيّة. نقرن بهذه المتتاليةِ المتتالية $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالصيغة $\forall n\in\mathbb{N},\quad y_n = x_n+\lambda x_{n+1}$.

1. أثبت أنّ $\big($ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة $\big) \Leftarrow \big($ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة $\big)$.
2. نفترض أنّ λ تنتمي إلى $[-1,1]$. بيّن بمثال أنّه يمكن أن تتقارب المتتالية $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دون أن تكون $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.
3. نفترض أنّ λ لا تنتمي إلى $[-1,1]$. بيّن أنّ $\big($ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة $\big) \Leftarrow \big($ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة $\big)$.

الحل

1. هذا الاقتضاء واضحٌ، لأنّ $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ يقتضي أنّ $\lim_{n\to\infty} y_n = (1+\lambda)a$.

2. لنتأمّل في حالة $\lambda\in\,]-1,1]$ المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالصيغة $x_n = \left(\dfrac{-1}{\lambda}\right)^n$. عندئذ تكون المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة، في حين يكون $\forall n\in\mathbb{N}, y_n = 0$.

أمّا في حالة $\lambda=-1$، فيمكننا أن نتأمّل المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالصيغة $x_n=\sqrt{n}$. عندئذ تكون المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة في حين يكون $\forall n\in\mathbb{N}, y_n = \dfrac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$، ومن ثَمّ $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

3. لنفترض أنّ $\lambda\notin[-1,1]$، وأنّ المتتالية $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وتسعى إلى العدد b. عندئذ نعرّف العدد a بالصيغة $a=\dfrac{b}{1+\lambda}$، فيكون لدينا

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad y_n-b = (x_n-a)+\lambda(x_{n+1}-a)$$

ومنه بوضع $\Lambda = \left|\lambda\right|$ نجد

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \Lambda^{n+1}\left|x_{n+1}-a\right| \le \Lambda^n\left|y_n-b\right| + \Lambda^n\left|x_n-a\right|$$

إذن في حالة $p<q$، نجد بجمع المتراجحات السابقة عندما تتحوّل n من p إلى $q-1$ ما يأتي:

$$\begin{aligned}\Lambda^q \left|x_q - a\right| &\le \Lambda^p \left|x_p - a\right| + \sum_{n=p}^{q-1} \Lambda^n \left|y_n - b\right| \\ &\le \Lambda^p \left|x_p - a\right| + \left(\sum_{n=p}^{q-1} \Lambda^n\right) \cdot \sup_{n\ge p}\left|y_n - b\right| \\ &\le \Lambda^p \left|x_p - a\right| + \frac{\Lambda^q - \Lambda^p}{\Lambda - 1} \cdot \sup_{n\ge p}\left|y_n - b\right|\end{aligned}$$

إذن

$$q > p \Rightarrow \left|x_q - a\right| \le \frac{\Lambda^p \left|x_p - a\right|}{\Lambda^q} + \frac{1}{\Lambda - 1} \cdot \sup_{n\ge p}\left|y_n - b\right| \tag{1}$$

لتكن $\varepsilon > 0$، عندئذ نستنتج من $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ أنّه يوجد عددٌ طبيعي p_ε يُحقّق

$$\forall n \ge p_\varepsilon, \quad \left|y_n - b\right| \le \left(\Lambda - 1\right)\frac{\varepsilon}{2}$$

ولأنّ $\Lambda = \left|\lambda\right| > 1$، يوجد عددٌ طبيعي N_ε أكبر تماماً من p_ε يُحقّق

$$q > N_\varepsilon \Rightarrow \frac{\Lambda^{p_\varepsilon}\left|x_{p_\varepsilon} - a\right|}{\Lambda^q} < \frac{\varepsilon}{2}$$

فإذا استفدنا من المتراجحة (1) استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}q > N_\varepsilon \Rightarrow \left|x_q - a\right| &\le \frac{\Lambda^{p_\varepsilon}\left|x_{p_\varepsilon} - a\right|}{\Lambda^q} + \frac{1}{\Lambda - 1} \cdot \sup_{n\ge p_\varepsilon}\left|y_n - b\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

فكون قد أثبتنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

ويتمّ الإثبات. ■

التمرين 33. لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية الحقيقيّة المعرّفة كما يلي :

$$x_0 > 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n + \ln x_n$$

أثبت أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{n\ln n}\right) = 1$.

الحل

- نلاحظ أوّلاً أنّ

$$x_n > 1 \Rightarrow x_{n+1} > x_n > 1$$

ولأنّ $x_0 > 1$ نستنتج أنّ المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماماً.

- وإذا استفدنا من المتراجحة البسيطة $\forall x > 1, \ln x \leq x$ ، رأينا أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \leq 2x_n$$

ومن ثَمّ $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq 2^n x_0$.

- إذن نستنتج مما سبق أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - x_n \leq n \ln 2 + \ln x_0$$

وهذا يُثبتُ أنّ

$$\forall n \geq 1, \quad x_n - x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \leq n \ln x_0 + \frac{n(n-1)}{2} \ln 2$$

ومنه نستنتج، في حالة n من $\mathbb{N}$ أنّ

$$\begin{aligned} x_n &\leq x_0 + n \ln x_0 + \frac{n(n-1)}{2} \ln 2 \\ &\leq x_0 + n x_0 + \frac{n(n-1)}{2} x_0 \leq x_0 \frac{n^2 + n + 2}{2} \leq x_0 (n+1)^2 \end{aligned}$$

- ومجدداً، نستنتج من ذلك

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - x_n \leq 2 \ln(n+1) + \ln x_0$$

وهذا يبرهن

$$\forall n \geq 1, \quad x_n - x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \leq n \ln x_0 + 2 \ln(n!)$$

ولمّا كان من الواضح أنّ $n! \leq n^n$ استنتجنا

$$\forall n \geq 1, \quad x_n \leq x_0 + n \ln x_0 + 2n \ln n \leq x_0 (n + 1 + 2n \ln n)$$

وعليه

$$\forall n \geq 1, \quad x_n \leq 3x_0 (n+1) \ln(n+1)$$

- وأخيراً نستنتج مما سبق أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - x_n \leq \ln(3x_0) + \ln\big((n+1)\ln(n+1)\big)$$

وهذا يُثبتُ أنّه في حالة $n \geq 2$ لدينا

$$x_n - x_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) \leq n\ln(3x_0) + \ln(n!) + \sum_{k=2}^{n}\ln(\ln k)$$

إذن

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{x_n}{n\ln n} \leq \frac{\ln(n!)}{n\ln n} + \frac{x_1 + n\ln(3x_0) + n\ln(\ln n)}{n\ln n}$$

ولكن إذا استفدنا من الخاصّة $\ln(n!) = n\ln n - n + O(\ln n)$ التي سنثبتها لاحقاً، استنتجنا أنّ

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad n > n_\varepsilon \Rightarrow \frac{x_n}{n\ln n} \leq 1 + \varepsilon \qquad ❶$$

- ومن جهة أخرى، لدينا $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \geq x_n + \ln x_0$ ، ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \geq x_0 + n\ln x_0 \geq (1+n)\ln x_0$$

وهذا يقتضي أن يكون $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \geq x_n + \ln\ln x_0 + \ln(n+1)$ ، وعليه

$$\forall n \geq 1, \quad x_n \geq x_0 + n\ln\ln x_0 + \ln(n!)$$

إذن

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{x_n}{n\ln n} \geq \frac{\ln(n!)}{n\ln n} + \frac{x_0 + n\ln\ln x_0}{n\ln n}$$

وبالاستفادة من الخاصّة $\ln(n!) = n\ln n - n + O\big(\ln n\big)$ ذاتها نستنتج أنّ

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad n > n'_\varepsilon \Rightarrow \frac{x_n}{n\ln n} \geq 1 - \varepsilon \qquad ❷$$

وبملاحظة الخاصّتين ❶ و ❷ واختيار $N_\varepsilon = \max\big(n_\varepsilon, n'_\varepsilon\big)$ نستنتج أنّ

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x_n}{n\ln n} - 1\right| \leq \varepsilon$$

أي

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{n\ln n}\right) = 1 \, .$$

حتّى يكتمل الإثبات علينا أن نبرهن صحّة العلاقة

$$\ln\left(n!\right) = n\ln n - n + O\left(\ln n\right)$$

وهنا نستفيد من مبرهنة التزايدات المحدودة مطبّقة على التابع $x \mapsto x\ln x$ الذي مشتقُّه $x \mapsto 1 + \ln x$ تابعٌ متزايدٌ تماماً، فنجد

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + \ln n \leq (n+1)\ln(n+1) - n\ln n \leq 1 + \ln(n+1)$$

وبجمع هذه المتراجحات عندما تتحوّل n من 1 إلى $m-1$ نجد

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(m!) - \ln m - 1 \leq m\ln m \leq m - 1 + \ln(m!)$$

أو

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq \ln(m!) - m\ln m + m \leq 1 + \ln m$$

وهذا يُثبتُ الخاصّة المرجوّة. $\blacksquare$

المتسلسلات العدديّة

﴾ في هذا البحث يمثّل الرمز $\mathbb{K}$ حقل الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$ أو حقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$ ﴿

1. عموميات

1.1-1 تعريف. لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ متتالية عدديّة. نعرّف متتالية مجاميعها الجزئية $(S_n)_{n\geq 0}$ بأنها المتتالية العدديّة التي حدّها العام معطى بالعلاقة

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

ونقول إنّ **المتسلسلة التي حدّها العام** x_n (ونكتب $\sum x_n$) **متقاربة ومجموعها** S إذا تقاربت المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ من S، ونكتب عندئذ $S = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

تكون متتالية عدديّة متقاربة إذا وفقط إذا حقّقت **شرط كوشي** ومنه تكافؤ الخواص الآتية:

- المتسلسلة $\sum x_n$ متقاربة.
- المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ تحقّق شرط كوشي.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N_\varepsilon, m \in \mathbb{N}) \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+m} x_k\right| < \varepsilon$.

تكمن ميزة هذا المعيار لتقارب متسلسلة في أنّه يفيد في إثبات تقارب متسلسلة دون معرفة مجموعها. أمّا إذا لم تتقارب المتسلسلة فنقول إنّها **متباعدة**.

⚠ 2-1. **ملاحظة وتحذير**. ينجم عن الشرط السابق أنّ تقارب المتسلسلة $\sum x_n$ يقتضي تقارب حدِّها العام x_n من الصفر. إلّا أنّ هذا الشرط غير كافٍ كما يبيّن المثال التالي:

لتكن $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ عندها $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = \sqrt{n+1}$ فتكون المتسلسلة $\sum x_n$ متباعدة، مع أنّ حدّها العام الذي يُكتب بالصيغة $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ يسعى إلى الصّفر : $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

1-3. **مبرهنة**. لتكن $\sum x_n$ و $\sum y_n$ متسلسلتين متقاربتين، عندئذ تكون المتسلسلة $\sum(\lambda x_n + y_n)$ متقاربة أياً كان λ في $\mathbb{K}$ ، ويكون:

$$\sum_{n\geq 0}(\lambda x_n + y_n) = \lambda \sum_{n\geq 0} x_n + \sum_{n\geq 0} y_n$$

الإثبات

إنّ الإثبات تحقُّقٌ مباشر انطلاقاً من التعريف ومتروك للقارئ. ❐

1-4. **مبرهنة**. لتكن $\sum x_n$ و $\sum a_n$ متسلسلتين عدديتين. نفترض أنّ $|x_n| \leq a_n$ أيّاً كان n من $\mathbb{N}$ ، و أنّ $\sum a_n$ متقاربة. عندئذ تكون المتسلسلة $\sum x_n$ متقاربة.

الإثبات

الإثبات بسيط بالاستفادة من شرط كوشي. ❐

2. المتسلسلات ذات الحدود الموجبة

2-1. **مبرهنة**. لتكن $\sum x_n$ متسلسلة حدودها موجبة، إذن تكون $\sum x_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية محدودة.

الإثبات

هذه النتيجة واضحة لأنّ متتالية المجاميع الجزئيّة متزايدة. ❐

2-2. أمثلة

❖ ليكن a عدداً حقيقيّاً موجباً. تتقارب **المتسلسلة الهندسية** $\sum a^n$ إذا وفقط إذا كان $a \in [0,1[$. لأنّه في حالة $1 \leq a$ لا تسعى متتالية الحد العام $(a^n)_{n\geq 0}$ إلى الصفر، ومن ثَمّ تكون $\sum a^n$ متباعدة. وإذا كان $a \in [0,1[$ كان

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

وتتقارب عندئذ المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ من $\frac{1}{1-a}$.

❖ في حالة α من $\mathbb{R}$. نتأمّل المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\alpha}}$، التي تسمّيها **متسلسلة ريمان** **Riemann**، تكون متسلسلة ريمان متقاربة إذا وفقط إذا كان $\alpha > 1$.

لنضع $S_n^{(\alpha)}$ دلالة على المجموع الجزئي $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}$. ولنناقش الحالات الآتية.

① **حالة $\alpha > 1$** . يكون لدينا في هذه الحالة

$$S_{2^{k+1}}^{(\alpha)} - S_{2^k}^{(\alpha)} = \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{n^{\alpha}} \leq 2^k \max\left\{\frac{1}{n^{\alpha}} : 2^k < n \leq 2^{k+1}\right\} < 2^{(1-\alpha)k}$$

ومن ثمّ :

$$\begin{aligned} S_{2^n}^{(\alpha)} - S_1^{(\alpha)} &= \sum_{k=0}^{n-1}(S_{2^{k+1}}^{(\alpha)} - S_{2^k}^{(\alpha)}) < \sum_{k=0}^{n-1}(2^{1-\alpha})^k \\ &< \sum_{k=0}^{\infty}(2^{1-\alpha})^k = \frac{1}{1-2^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

نستنتج أنّه في حالة $1 < \alpha$ تكون المتتالية $(S_n^{(\alpha)})_{n\geq 1}$ محدودة فهي متقاربة.

② **حالة $\alpha = 1$** . لدينا في هذه الحالة

$$S_{2^{k+1}}^{(1)} - S_{2^k}^{(1)} = \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{n} > \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

ومنه يكون:

$$S_{2^n}^{(1)} - S_1^{(1)} > \frac{n}{2}$$

ومن ثَم فالمتتالية $(S_n^{(1)})_{n\geq 1}$ غير محدودة وهي متباعدة.

③ **حالة $\alpha < 1$** . في هذه الحالة لدينا المتراجحة :

$$\forall n \geq 1,\quad \frac{1}{n^{\alpha}} > \frac{1}{n}$$

ومنه $S_n^{(\alpha)} > S_n^{(1)}$ أيّاً كان $n \geq 1$، والمتتالية $(S_n^{(\alpha)})_{n\geq 1}$ متباعدة.

3-2. مبرهنة. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين حدودهما موجبة.

1. إذا كان $\forall n \geq n_0,\ \ 0 \leq u_n \leq v_n$، وكانت $\sum v_n$ متقاربة فإنّ $\sum u_n$ متقاربة. وإذا كانت $\sum u_n$ متباعدة فإنّ $\sum v_n$ متباعدة.
2. إذا وُجد عددان موجبان تماماً a و b يُحقّقان $\forall n \geq n_0,\ \ a \leq \dfrac{u_n}{v_n} \leq b$ كان للمتسلسلتين $\sum u_n$ و $\sum v_n$ الطبيعة نفسها، أي تتقاربان معاً أو تتباعدان معاً.
3. إذا كان $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \ell$ حيث $\ell \in \mathbb{R}_+^*$، كان للمتسلسلتين $\sum u_n$ و $\sum v_n$ الطبيعة نفسها.
4. إذا كان $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = 0$ وتقاربت المتسلسلة $\sum v_n$ فإنّ $\sum u_n$ تتقارب.
5. إذا كان $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = +\infty$ وتباعدت المتسلسلة $\sum v_n$ فإنّ $\sum u_n$ تتباعد.

الإثبات

1. إذا كانت المتتالية $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\geq 0}$ محدودة كانت المتتالية $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geq 0}$ محدودة أيضاً.
2. يكفي تطبيق الخاصة السابقة على المتسلسلات $\sum av_n$ و $\sum u_n$ و $\sum bv_n$.
3. لتكن $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$ نجد في $\mathbb{N}$ عدداً n_0 يُحقّق

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{u_n}{v_n} - \ell\right| < \frac{\ell}{2}$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \geq n_0,\ \ \frac{\ell}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3\ell}{2} v_n$$

وينتج المطلوب بالاستفادة من 2.

4. لتكن $\varepsilon = 1$ نجد في $\mathbb{N}$ عدداً n_0 يُحقّق

$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} < 1$$

ومن ثَمّ $\forall n \geq n_0,\ \ u_n \leq v_n$، وينتج المطلوب بناءً على 1.

5. لتكن $\varepsilon = 1$ نجد في $\mathbb{N}$ عدداً n_0 يُحقّق

$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} > 1$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \geq v_n$$

وينتج المطلوب بناءً على 1. ❐

4-2. أمثلة

❖ لندرس المتسلسلة $\sum a_n$ حيث $a_n = \frac{2n^2+1}{2n} - \sqrt{n^2+1}$. نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} a_n &= n - \sqrt{n^2+1} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} + \frac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2n(n+\sqrt{n^2+1})} = \frac{1}{2n(n+\sqrt{n^2+1})^2} \end{aligned}$$

ومن ثَمّ $0 \neq \frac{1}{8} = \lim_{n\to\infty} n^3 a_n$.

فيكون للمتسلسلتين $\sum a_n$ و $\sum \frac{1}{n^3}$ الطبيعة نفسها، أي تكون $\sum a_n$ متقاربة.

❖ ليكن $0 < \alpha$ عندئذ $\lim_{n\to\infty} n^2 e^{-n^\alpha} = 0$ وتقارُب المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ يقتضي تقارب المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} e^{-n^\alpha}$.

5-2. مبرهنة – معيار كوشي Cauchy. لتكن $\sum a_n$ متسلسلة حدودها موجبة. نعرّف

$$L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$$

① إذا كان $L < 1$ كانت المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة.

② إذا كان $L > 1$ كانت المتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة.

③ إذا كان $L = 1$ لا يفيد هذا المعيار في تحديد طبيعة هذه المتسلسلة.

الإثبات

① إذا كان $L<1$ نختار عدداً μ من $]L,1[$، يوجد إذن عدد n_0 في $\mathbb{N}$ يُحقّق

$$\forall n \geq n_0,\ \sqrt[n]{a_n} \leq \mu$$

أو $\forall n \geq n_0, a_n \leq \mu^n$. وهكذا فإنّ تقارب $\sum \mu^n$ يقتضي تقارب $\sum a_n$.

② إذا كان $L>1$ كانت المتتالية $(a_n)_{n\geq 0}$ غير محدودة، فهي لا تتقارب من الصفر: لأنّه لدينا الاقتضاء الصحيح التالي:

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}, a_n \leq M\right) \Rightarrow \left(\forall n\in\mathbb{N}^*, \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{M}\right) \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} \leq 1$$

③ أمّا في حالة $L=1$، فإنّ المتتالية $a_n=\dfrac{1}{n^\alpha}$ تحقّق $L=1$ ومع ذلك لا تتقارب المتسلسلة $\sum a_n$ إلّا حين يكون $1<\alpha$. ❐

6-2. مبرهنة –معيار دالمبير D'Alembert. لتكن $(a_n)_{n\geq 0}$ متتالية حدودها موجبة تماماً. ولنضع $L=\overline{\lim_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ و $\underline{\lim_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\ell$.

① إذا كان $L<1$ كانت المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة.

② إذا كان $\ell>1$ كانت المتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة.

③ إذا كان $\ell\leq 1\leq L$ لا يفيد هذا المعيار في تحديد طبيعة هذه المتسلسلة.

الإثبات

① إذا كان $L<1$ نختار عدداً μ من $]L,1[$، يوجد إذن عدد n_0 في $\mathbb{N}$ يُحقّق

$$n>n_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}<\mu$$

فالمتتالية $(\mu^{-n}a_n)_{n\geq 0}$ متناقصة بدءاً من الحدّ n_0، نجد عندئذ $A>0$ يُحقّق

$$n>n_0 \Rightarrow \mu^{-n}a_n \leq A$$

وتقارب $\sum \mu^n$ يقتضي تقارب $\sum a_n$.

② إذا كان $\ell>1$ يوجد حينئذ عدد n_0 في $\mathbb{N}$ يُحقّق $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1 \Rightarrow n\geq n_0$. ومن ثَمّ $n>n_0 \Rightarrow a_n\geq a_{n_0}$ فالمتتالية $(a_n)_{n\geq 0}$ لا تتقارب من الصفر، و $\sum a_n$ متباعدة.

③ أمّا في حالة $\ell\leq 1\leq L$، فإنّ المتتالية $a_n=\dfrac{1}{n^\alpha}$ تحقّق $L=\ell=1$ ومع ذلك لا تتقارب المتسلسلة $\sum a_n$ إلّا حين يكون $1<\alpha$. ❐

تفيدنا المبرهنة الآتية في مقارنة معيارَيْ كوشي ودالمبير:

7-2. مبرهنة. لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حدودها موجبة تماماً. عندئذ:

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

الإثبات

لتكن $\ell = \varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ ولنفترض أنّ $0 < \ell$. ثُمّ لنختر عدداً λ من $]0,\ell[$، يوجد عندئذ N يُحقّق

$$\forall n \geq N, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \lambda$$

فالمتتالية $(\lambda^{-n}a_n)_{n\geq 0}$ متزايدة بدءاً من الحد ذي الدليل N ومن ثَمّ يوجد $0 < A$ يُحقّق

$$\forall n \geq N, \quad a_n \geq A\lambda^n$$

ومنه

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq \lambda \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A} = \lambda$$

ولكنّ العددَ λ عدد كيفيّ من المجال $]0,\ell[$ إذن $\varliminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq \ell$. وبالطبع هذه النتيجة واضحة عندما تكون $\ell = 0$.

بتطبيق النتيجة السابقة على المتتالية $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)_{n\geq 0}$ نجد أنّ

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

لأنّه أياًكانت المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ ذات الحدود الموجبة تماماًكان :

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n}$$

مع الاصطلاح $\dfrac{1}{0} = \infty$ و $\dfrac{1}{\infty} = 0$. ❐

2-8. **ملاحظة**. تبيّن المبرهنة السابقة أنّ مجموعة المتسلسلات التي يمكن تحديد تقاربها أو تباعدها باستعمال معيار دالمبير محتواة (تماماً كما سنرى في المثال التالي) في مجموعة المتسلسلات التي يمكن تحديد تقاربها أو تباعدها اعتماداً على معيار كوشي. نقول **إنّ معيار كوشي أعلى دقّة من معيار دالمبير**.

فمثلاً : ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{R}^2$ يُحقّق $0 < a < b < 1$. ولنتأمّل المتسلسلة $\sum x_n$ المعطاة بالعلاقتين $x_{2n} = b^{2n}$ و $x_{2n+1} = a^{2n+1}$. نلاحظ أنّ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} = b < 1$$

فالمتسلسلة $\sum x_n$ متقاربة بناءً على معيار كوشي، في حين يكون

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} = +\infty \quad \text{و} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0$$

ولا يفيد معيار دالمبير في تعيين طبيعة هذه المتسلسلة.

2-9. **نتيجة**. لتكن $(a_n)_{n\geq 0}$ متتالية حدودها موجبة تماماً. إذا كانت النهاية $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ موجودة في $\overline{\mathbb{R}}$ وتساوي ℓ كانت النهاية $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ موجودة وتساوي ℓ أيضاً.

فمثلاً إذا كانت $a_n = C_{2n}^n$، لاحظنا أنّ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$$

ومن ثَمّ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$$

ونستنتج من ذلك أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{C_{2n}^n} = 4$$

ونترك للقارئ أن يدرس بأسلوب مماثل نهايات المتتاليات التي تعطى حدودها العامّة بالعلاقات

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \quad \frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}, \quad \frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(n+n)}}{n}$$

3. المتسلسلات المتقاربة بالإطلاق والمتسلسلات نصف المتقاربة

1-3. تعريف. لتكن $\sum a_n$ متسلسلة عددية. نقول إنّ $\sum a_n$ **متقاربة بالإطلاق** إذا كانت المتسلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum |a_n|$ متقاربة. و نقول إنّ المتسلسلة $\sum a_n$ **نصف متقاربة** إذا كانت متقاربة دون أن تكون متقاربة بالإطلاق. تبيّن المبرهنة 1-4. أنّ كلّ متسلسلة متقاربة بالإطلاق تكون متقاربة :

$$\left(\sum a_n \text{ متقاربة بالإطلاق}\right) \Leftarrow \left(\sum a_n \text{ متقاربة}\right)$$

ولكننا سنرى في المثال الآتي أنّ العكس غير صحيح.

2-3. مثال : لنتأمّل المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$. إنها بالطبع ليست متقاربة بالإطلاق. ولكن

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{k-1}\,\mathrm{d}\,x \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-x)^{k-1}\,\mathrm{d}\,x \\
&= -\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-x)^{k-1}\right) \mathrm{d}\,x \\
&= -\int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}\,x = -\ln 2 + \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}\,x
\end{aligned}$$

ومنه

$$|S_n + \ln 2| \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}\,x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}\,x \leq \frac{1}{1+n}$$

ومن ثَمّ $\lim_{n\to\infty} S_n = -\ln 2$. فالمتسلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة ومجموعها $-\ln 2$.

3-3. تعريف. نقول إنّ المتسلسلة $\sum a_n$ **متناوبة** إذا وفقط إذا كان الحد العام a_n يساوي $\varepsilon(-1)^n \alpha_n$ حيث $\varepsilon \in \{-1,+1\}$، وحدود المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ موجبة.

3-4. **مبرهنة**. لتكن $\sum a_n$ متسلسلة متناوبة، تُحقِّق $a_n = (-1)^n \alpha_n$ و $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية متناقصة ومتقاربة من الصفر. إذن تكون المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة. وإذا كان

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{و} \quad S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

تحقّقت، أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$، المتراجحتان التاليتان

$$|S - S_n| \le \alpha_{n+1} \quad \text{و} \quad S_{2n+1} \le S \le S_{2n}$$

الإثبات

في الحقيقة إنّ المتتاليتين $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ و $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتان، لأنّ:

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_{2n+1} &= \alpha_{2n+1} \ge 0 \\ S_{2n+2} - S_{2n} &= \alpha_{2n+2} - \alpha_{2n+1} \le 0 \\ S_{2n+1} - S_{2n-1} &= \alpha_{2n} - \alpha_{2n+1} \ge 0 \end{aligned}$$

فالمتتالية $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة والمتتالية $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة، والمتتالية $(S_{2n} - S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من الصفر. فالمتتاليتان متقاربتان ولهما النهاية S نفسها.

ولمّا كانت المتتالية $(S_{2n+1})_{n\ge 0}$ تتزايد نحو S، وكانت المتتالية $(S_{2n})_{n\ge 0}$ تتناقص نحو S كانت المتراجحة الأولى واضحة.

وتبيّن المتراجحتان :

$$S_{2n+1} \le S \le S_{2n+2} \quad \text{و} \quad S_{2n+1} \le S \le S_{2n}$$

أنّ $|S - S_n| \le \alpha_{n+1}$. ❒

تستعمل المبرهنة الآتية تقنية مهمّة لدراسة المتسلسلات نصف المتقاربة، تسمّى **تحويل Abel** .

3-5. **مبرهنة**. يكفي لتقارب المتسلسلة $\sum a_n b_n$ تحقُّق الشروط الآتية :

① متتالية المجاميع $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ متتالية محدودة.

② تتقارب المتتالية $(b_n)_{n\ge 0}$ من الصفر.

③ المتسلسلة $\sum |b_{n+1} - b_n|$ متقاربة.

الإثبات

لنضع $A_{-1}=0$ ، يمكننا أن نكتب أياً كان $q \geq p \geq 0$ ما يأتي:

تحويل آبل:

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{q} a_n b_n &= \sum_{n=p}^{q}(A_n - A_{n-1})b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q} A_{n-1}b_n \\ &= \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1} \\ &= \sum_{n=p}^{q} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_{q+1} - A_{p-1}b_p\end{aligned}$$

يوجد، بناءً على الفرْض، عدد $M>0$ يُحقّق

$$\forall n \geq 0, |A_n| \leq M$$

ومنه، في حالة $q \geq p \geq 0$ لدينا

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| \leq M\left(\sum_{n=p}^{q}|b_n - b_{n+1}| + |b_{q+1}| + |b_q|\right) \qquad (*)$$

ليكن $\varepsilon > 0$ ، إنّ تقارب المتتالية $(b_n)_{n\geq 0}$ يبيّن أنّه توجد N_1 تُحقّق

$$k \geq N_1 \Rightarrow |b_k| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

ولمّا كانت $\sum |b_{n+1} - b_n|$ متقاربة، فإنّه توجد N_2 تُحقّق

$$N_2 \leq p \leq q \Rightarrow \sum_{n=p}^{q} |b_{n+1} - b_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

وبالعودة إلى $(*)$ نجد

$$q \geq p \geq \max(N_1, N_2) \Rightarrow \left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| \leq M\left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M}\right) = \varepsilon$$

فالمتتالية $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقّق شرط كوشي وهي من ثَمّ متقاربة. □

3-6. نتيجة. إذا كانت $(b_n)_{n\geq 0}$ متتالية حقيقية متناقصة ومتقاربة من 0، وكانت متتالية المجاميع $\left(A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\geq 0}$ محدودة، عندئذ تكون المتسلسلة $\sum a_n b_n$ متقاربة.

3-7. **مثال مهم.** لتكن $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ متتالية حقيقية متناقصة ومتقاربة من الصفر. عندئذ تكون المتسلسلتان

$$\sum_{n\geq 0}\lambda_n \cos nx \quad \text{و} \quad \sum_{n\geq 0}\lambda_n \sin nx$$

متقاربتين أياً كانت x من $\left]0,2\pi\right[$.

في الحقيقة، تُكافئ هذه النتيجة قولنا إنّ $\sum_{n\geq 0}\lambda_n e^{\mathrm{i}\,nx}$ متقاربة في حالة x من $\left]0,2\pi\right[$. لنعرّف إذن $A_n=\sum_{k=0}^{n-1}e^{\mathrm{i}\,kx}$ في حالة n من $\mathbb{N}^*$ و x من $\left]0,2\pi\right[$ عندئذ نجد بناءً على دستور دوموافر أنّ

$$\begin{aligned}A_n &= \sum_{k=0}^{n-1}(e^{\mathrm{i}\,x})^k = \frac{1-(e^{\mathrm{i}\,x})^n}{1-e^{\mathrm{i}\,x}} = \frac{e^{\mathrm{i}\,nx}-1}{e^{\mathrm{i}\,x}-1}\\ &= \frac{e^{\mathrm{i}\,nx}-1}{e^{\mathrm{i}\,x/2}}\times\frac{1}{2\,\mathrm{i}\sin(x/2)}\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$|A_n| = \frac{\left|e^{\mathrm{i}\,nx}-1\right|}{2}\times\frac{1}{\sin(x/2)}$$

ولأنّ $\left|e^{\mathrm{i}\,nx}-1\right|\leq 1+1=2$ فهذا يقتضي أنّ

$$\forall x\in\left]0,2\pi\right[,\forall n\geq 0,\qquad \left|\sum_{k=0}^{n}e^{\mathrm{i}\,kx}\right|\leq\frac{1}{\sin(x/2)}$$

ويسمح لنا بتطبيق النتيجة السابقة واستنتاج المطلوب.

فمثلاً أياً كان x من $\left]0,2\pi\right[\setminus\{\pi\}$، تكون المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n^\alpha}$ متقاربة بالإطلاق عندما $1<\alpha$ ونصف متقاربة عندما $0<\alpha\leq 1$ ومتباعدة عندما $\alpha\leq 0$.

وكذلك أياً كان x من $\left]0,2\pi\right[$، تكون المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos nx}{n^\alpha}$ متقاربة بالإطلاق عندما $1<\alpha$ ونصف متقاربة عندما $0<\alpha\leq 1$ ومتباعدة عندما $\alpha\leq 0$.

⚠ 3-8. **ملاحظة وتحذير**. لا تبقى المبرهنة 2-3. المتعلّقة بالمتسلسلات ذات الحدود الموجبة صحيحة في الحالة العامّة. وهذا ما يبيّنه المثال الآتي.

لنتأمّل المتسلسلتين $\sum a_n$ و $\sum b_n$ المعرّفتين كما يلي :

$$b_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n} + \cos n} \qquad \text{و} \qquad a_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n} + \sin n}$$

نلاحظ بالاستفادة من العلاقة: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$، أنّ

$$\begin{aligned}
\frac{\sin n}{\sqrt{n} + \sin n} &= \frac{\sin n}{\sqrt{n}} - \frac{\sin^2 n}{n} + \frac{\sin^3 n}{n\sqrt{n}\,(\sqrt{n} + \sin n)}\\
&= \frac{\sin n}{\sqrt{n}} - \frac{1 - \cos 2n}{2n} + \frac{\sin^3 n}{n\sqrt{n}\,(\sqrt{n} + \sin n)}
\end{aligned}$$

ومنه

$$a_n + \frac{1}{2n} = \frac{\sin n}{\sqrt{n}} + \frac{\cos 2n}{2n} + \frac{\sin^3 n}{n\sqrt{n}\,(\sqrt{n} + \sin n)} = c_n$$

المتسلسلة $\sum c_n$ متقاربة بمقتضى نتيجة المثال السابق، ولمّا كانت المتسلسلة $\sum(1/n)$ متباعدة كانت المتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة أيضاً.

من ناحية أخرى،

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{\sin n}{\sqrt{n}} - \frac{\sin n \cos n}{n} + \frac{\sin n \cos^2 n}{n\sqrt{n}\,(\sqrt{n} + \cos n)}\\
&= \frac{\sin n}{\sqrt{n}} - \frac{\sin 2n}{2n} + \frac{\sin n \cos^2 n}{n\sqrt{n}\,(\sqrt{n} + \cos n)}
\end{aligned}$$

فإذا استفدنا مجدّداً من نتيجة المثال السابق وجدنا أنّ المتسلسلة $\sum b_n$ متقاربة.

ومع أنّه لدينا $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ ، نلاحظ في هذا المثال أنّ للمتسلسلتين $\sum a_n$ و $\sum b_n$ طبيعتين مختلفتين، لذلك لا بدّ من الحذر وتَيَقُّنِ كوْنِ حدود المتسلسلات المدروسة موجبة عند استعمال المبرهنة 2-3.

4. جداء متسلسلتين

1-4. تعريف. لتكن $A=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $B=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين عدديتين. نعرّف المتتالية $C=(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي نسميها **جداء تلافٍّ** A و B، ونرمز إليها بالرمز $A*B$ كما يلي:

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\sum_{i+j=n}a_ib_j$$

2-4. مبرهنة -Mertens. لتكن $A=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $B=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين عدديتين. ولنرمز إلى جداء التلاف $A*B$ بالرمز $C=(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. عندئذ يقتضي تقاربُ المتسلسلة $\sum a_n$ بالإطلاق وتقاربُ المتسلسلة $\sum b_n$، تقاربَ المتسلسلة $\sum c_n$ وتتحقق عندها المساواة :

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)$$

الإثبات

لنضع الرموز التالية

$$S_n^B=\sum_{k=0}^{n}b_k\ ،\ S^B=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\ ،\ S^{|A|}=\sum_{n\geq 0}|a_n|\ ،\ M=\sup_{n\geq 0}\left|S_n^B\right|$$

نلاحظ أنّ

$$\begin{array}{ccccccccc}
c_0 & = & a_0b_0 & & & & & & \\
c_1 & = & a_0b_1 & + & a_1b_0 & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \ddots & & \\
c_n & = & a_0b_n & + & a_1b_{n-1} & + & \cdots & + & a_nb_0 \\
\hline
\sum_{k=0}^{n}c_k & = & a_0S_n^B & + & a_1S_{n-1}^B & + & \cdots & + & a_nS_0^B
\end{array}$$

ومن ثَمّ أياً كان $n\geq 0$ ، وجدنا

$$\sum_{k=0}^{n}c_k-S^B\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}(S_k^B-S^B)$$

لتكن $0 < \varepsilon$، نجد في $\mathbb{N}$ عدداً N يُحقّق

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, n \geq N \Rightarrow \left(\left|S_n^B - S^B\right| < \frac{\varepsilon}{2S^{|A|}}\right) \wedge \left(\sum_{k=n}^{n+m} |a_k| < \frac{\varepsilon}{4M}\right)$$

وذلك لأنّ $\sum a_n$ متقاربة بالإطلاق و $\sum b_n$ متقاربة.

ومنه فالشرط $2N < n$ يقتضي أن يكون

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} c_k - S^B \sum_{k=0}^{n} a_k\right| &\leq \left|\sum_{k=0}^{N} a_{n-k}(S_k^B - S^B)\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{n} a_{n-k}(S_k^B - S^B)\right| \\
&\leq 2M \sum_{k=0}^{N} |a_{n-k}| + \frac{\varepsilon}{2S^{|A|}} \sum_{k=N+1}^{n} |a_{n-k}| \\
&\leq 2M \sum_{k=n-N}^{n} |a_k| + \frac{\varepsilon}{2S^{|A|}} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \\
&< 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2S^{|A|}} S^{|A|} = \varepsilon
\end{aligned}$$

ينتج من المناقشة السابقة أنّ $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k - S^B \sum_{k=0}^{n} a_k\right) = 0$ ، وهذا ما يبرهن تقارب المتسلسلة $\sum c_n$ وتحقّق المساواة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$. ❐

4-3. ملاحظة. إنّ تقارب إحدى المتسلسلتين $\sum a_n$ أو $\sum b_n$ بالإطلاق، شرط أساسي لا يمكن حذفه من المبرهنة السابقة.

فمثلاً، لنتأمّل المتتالية $A = (a_n)_{n\geq 1}$ حيث $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$، نعلم أنّ المتسلسلة $\sum a_n$ نصف متقاربة، فإذا عرّفنا $C = A * A = (c_n)_{n\geq 2}$، كان

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}}$$

ولمّا كان $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ في حالة x من $[0,1]$، رأينا بسهولة أنّ

$$n \geq 2 \Rightarrow |c_n| \geq \frac{2(n-1)}{n}$$

فالمتسلسلة $\sum c_n$ متباعدة، لأنّ حدّها العام لا يتقارب من الصفر.

4-4. **مثال**. لنثبت أنّ

$$\forall p \in \mathbb{N},\quad \forall a \in \left]-1,+1\right[,\quad \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+p}^{p} a^{n} = \frac{1}{(1-a)^{p+1}}$$

في الحقيقة، سنثبت هذه الخاصّة بالتدريج على العدد p. إنّ حالة $p = 0$ واضحة وتمثِّل حالة المتسلسلة الهندسيّة.

لنفترض إذن صحة الخاصّة عند قيمة للعدد p من $\mathbb{N}$، وليكن a عدداً من $\left]-1,+1\right[$. ولنتأمّل المتتاليتين $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرَّفتين كما يلي

$$b_n = C_{n+p}^{p} a^{n} \quad \text{و} \quad a_n = a^{n}$$

وأخيراً لنضع $C = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} = B * A$.

لمّا كانت المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة بالإطلاق ومجموعها يساوي $\dfrac{1}{1-a}$، ولمّا كانت $\sum b_n$ متقاربة ومجموعها يساوي $\dfrac{1}{(1-a)^{p+1}}$، فإننا نستنتج، بناءً على المبرهنة السابقة، تقارب $\sum c_n$ ونستنتج كذلك أنّ مجموعها يساوي $\dfrac{1}{(1-a)^{p+2}}$.

ولكن نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
c_n &= \sum_{k=0}^{n} C_{k+p}^{p}\, a^{k} a^{n-k} = a^{n} \sum_{k=0}^{n} C_{k+p}^{p} \\
&= a^{n} \sum_{k=0}^{n} \left(C_{k+p+1}^{p+1} - C_{k+p}^{p+1} \right) \\
&= a^{n} C_{n+p+1}^{p+1}
\end{aligned}$$

وهذا يُثبت الخاصّة المطلوبة، عند القيمة $p+1$.

5-4. **توطئة**. لتكن $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين عدديتين. ولنرمز إلى جداء التلافّ $A * B$ بالرمز $C = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. إذا كان

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

صار لدينا :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n+1} = a \cdot b$$

الإثبات

لنلاحظ أنّه، مهما تكن n من $\mathbb{N}$، يكن

$$\Delta_n = \frac{c_n}{n+1} - \frac{a}{n+1}\sum_{k=0}^{n} b_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(a_k - a)b_{n-k}$$

ولمّا كان $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ كانت المتتالية $(b_n)_{n\geq 0}$ محدودة. ويمكننا عندئذ أن نضع بالتعريف $M = \sup\limits_{n\geq 0}|b_n|$، فيكون

$$|\Delta_n| \leq \frac{M}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|a_k - a|$$

فإذا طبّقنا مبرهنة Cesàro على المتتالية $(|a_n - a|)_{n\geq 0}$ التي تتقارب من الصفر وجدنا أنّ المتتالية $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ تتقارب من الصفر أيضاً. و لمّا كانت المتتالية $\left(\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\right)_{n\geq 0}$ تسعى إلى b بمقتضى مبرهنة Cesàro نفسها، فإننا نستنتج أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_n}{n+1} = a\cdot b$. □

4-6. مبرهنة. لتكن $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين عدديتين. ولنرمز إلى جداء التلاف $A * B$ بالرمز $C = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. إذا تقاربت المتسلسلات $\sum a_n$ و $\sum b_n$ و $\sum c_n$ كان

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

الإثبات

لنضع الرموز التالية : $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ و $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$ و $\Delta_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k$.

نلاحظ أنّ

$$\begin{array}{ccccccccc}
c_0 & = & a_0b_0 & & & & & & \\
c_1 & = & a_0b_1 & + & a_1b_0 & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \ddots & & \\
c_k & = & a_0b_k & + & a_1b_{k-1} & + & \cdots & + & a_kb_0 \\
\hline
\Delta_k & = & a_0B_k & + & a_1B_{k-1} & + & \cdots & + & a_kB_0
\end{array}$$

ومنه

$$\begin{array}{rcccccccc}
\Delta_0 & = & B_0a_0 & & & & & & \\
\Delta_1 & = & B_0a_1 & + & B_1a_0 & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \ddots & & \\
\Delta_n & = & B_0a_n & + & B_1a_{n-1} & + & \cdots & + & B_na_0 \\
\hline
\sum_{k=0}^{n}\Delta_k & = & B_0A_n & + & B_1A_{n-1} & + & \cdots & + & B_nA_0
\end{array}$$

ولمّا كان $\lim_{n\to\infty} A_n = \sum_{n\geq 0} a_n = a$ و $\lim_{n\to\infty} B_n = \sum_{n\geq 0} b_n = b$ ، فإننا نجد بمقتضى التوطئة السابقة أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\Delta_k\right) = a\cdot b$$

ولكن $\lim_{n\to\infty}\Delta_n = \sum_{n\geq 0} c_n = c$ لذلك نستنتج من مبرهنة Cesàro أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\Delta_k\right) = c$$

ومن ثَمّ يكون $c = ab$ ، وهو المطلوب إثباته. ❐

7-4. مثال. لنتأمّل المتتالية $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالعلاقة $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. ولنرمز إلى جداء التلاف $A * A$ بالرمز $C = ((-1)^n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. فيكون

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(n+1-k)}$$

ويمكننا إصلاح عبارة c_n على الوجه الآتي:

$$c_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n+1-k}\right) = \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$$

فإذا رمزنا بالرمز H_n إلى المجموع $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ ، أمكننا أن نكتب $c_n = \dfrac{2}{n+1}H_{n+1}$. لنثبتْ أنّ المتتالية $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة وتسعى إلى الصفر.

في الحقيقة سنرى، في المثال 4-5. أنّ $\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{\ln n}=1$ ، وهذا يثبت أنّ

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

ومن جهة أخرى لدينا، أياً كانت n من $\mathbb{N}^*$،

$$\begin{aligned} c_{n-1}-c_n &= \frac{2}{n}H_n - \frac{2}{n+1}H_{n+1} \\ &= \frac{2}{n}(H_{n+1}-\frac{1}{n+1}) - \frac{2}{n+1}H_{n+1} \\ &= \frac{2}{n(n+1)}(H_{n+1}-1) \\ &= \frac{2}{n(n+1)}\left(\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}\right) > 0 \end{aligned}$$

وهذا يثبت تناقص المتتالية $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. نستنتج، بمقتضى المبرهنة 4-3. أنّ المتسلسلة المتناوبة $\sum(-1)^n c_n$ متقاربة. ولمّا كانت المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة ومجموعها يساوي $\ln 2$، عملاً بالمثال 2-3. فإننا نستنتج أنّ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)^2 = (\ln 2)^2$ ، أو

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

5. العبارات المقارنة المتعلّقة بالمتسلسلات الحقيقية

1-5. **تعريف**. لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حدودها موجبة، ولتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية عدديّة.

- نكتب $\boldsymbol{v_n = O(u_n)}$ إذا وفقط إذا وُجِدَ n_0 في $\mathbb{N}$ و K في $\mathbb{R}_+^*$، يُحقّقان

$$\forall n \geq n_0, \quad |v_n| \leq K\, u_n$$

- نكتب $\boldsymbol{v_n = o(u_n)}$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |v_n| \leq \varepsilon\, u_n$$

- وأخيراً نكتب $\boldsymbol{v_n \sim u_n}$ إذا وفقط إذا كان $v_n - u_n = o(u_n)$.

5-2. ملاحظة. إذا كانت حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ موجبة تماماً. فإنّ

$$v_n = O(u_n) \Leftrightarrow \text{المتتالية } \left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n\geq 0} \text{ محدودة}$$

$$v_n = o(u_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$$

$$v_n \sim u_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$$

5-3. مبرهنة. لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حدودها موجبة، ولتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية عدديّة.

- إذا كانت المتسلسلة $\sum u_n$ متقاربة فإنّ :

1. $v_n = O(u_n) \Leftarrow \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} v_k = O\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)$
2. $v_n = o(u_n) \Leftarrow \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} v_k = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)$
3. $v_n \sim u_n \Leftarrow \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} v_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} u_k$

- إذا كانت المتسلسلة $\sum u_n$ متباعدة فإنّ :

1. $v_n = O(u_n) \Leftarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$
2. $v_n = o(u_n) \Leftarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$
3. $v_n \sim u_n \Leftarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \sim \sum_{k=0}^{n} u_k$

الإثبات

- سنفترض أولاً أنّ $\sum u_n$ متقاربة.

1. لمّا كان $v_n = O(u_n)$ فإنّه يوجد n_0 في $\mathbb{N}$، و K في $\mathbb{R}_+^*$، يُحقّقان

$$\forall n \geq n_0, \quad |v_n| \leq K u_n$$

فالمتسلسلة $\sum v_n$ متقاربة بالإطلاق، ويكون

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right| \leq K \sum_{k=n}^{\infty} u_k$$

2. لنفترض $v_n = o(u_n)$، ولتكن $\varepsilon > 0$ يوجد n_ε في $\mathbb{N}$ تُحقّق

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad |v_n| \leq \varepsilon u_n$$

فالمتسلسلة $\sum v_n$ متقاربة بالإطلاق، ويكون

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right| \leq \varepsilon \sum_{k=n}^{\infty} u_k$$

3. استناداً إلى الفرْض لدينا $v_n - u_n = o(u_n)$، ومن ثمّ بمقتضى 2. نجد

$$\sum_{k=n}^{\infty} v_k - \sum_{k=n}^{\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)$$

وهذا يثبت المطلوب.

- لنفترض الآن أنّ $\sum u_n$ متباعدة.

1. لمّا كان $v_n = O(u_n)$ فإنّه يوجد n_1 في $\mathbb{N}$، و K_1 في $\mathbb{R}_+^*$، يُحقّقان

$$n \geq n_1 \Rightarrow |v_n| \leq K_1 u_n$$

ولكنّ المتسلسلة $\sum u_n$ متباعدة فتوجد $n_1 \leq n_0$ تُحقّق $\sum_{k=0}^{n_0} u_k > 0$. يمكننا من ثَمّ أن نعرّف

$$K_2 = \left|\sum_{k=0}^{n_0} v_k\right| \Big/ \left(\sum_{k=0}^{n_0} u_k\right)$$

عندئذ، أياً كانت $n_0 \leq n$، يكن لدينا

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right| &\leq \left|\sum_{k=0}^{n_0} v_k\right| + \left|\sum_{k=n_0+1}^{n} v_k\right| \\
&\leq K_2 \sum_{k=0}^{n_0} u_k + K_1 \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \\
&\leq \max(K_1, K_2) \sum_{k=0}^{n} u_k
\end{aligned}$$

2. لنفترض $v_n = o(u_n)$ ولتكن $\varepsilon > 0$ يوجد n_ε في $\mathbb{N}$ تُحقّق

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} u_n$$

ومن ثَمّ

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left|\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} v_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

ويوجد $n_\varepsilon \le N_\varepsilon$ تُحقّق

$$n \ge N_\varepsilon \Rightarrow \left|\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} v_k\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

وذلك لأنّ $\sum u_n$ متباعدة. نستنتج من هذا أنّ

$$n \ge N_\varepsilon \Rightarrow \left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right| \le \left|\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} v_k\right| + \left|\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} v_k\right| \le \varepsilon \sum_{k=0}^{n} u_k$$

فيكون عندئذ $\sum_{k=0}^{n} v_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$.

3. لدينا، استناداً إلى الفرْض $v_n - u_n = o(u_n)$ ، ومن ثَمّ يكون بمُقتضى 2.

$$\sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$$

وهذا يثبت المطلوب. ❐

4-5. أمثلة

- لتكن $\alpha > 1$، و لنضع $R_n^{(\alpha)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. لمّا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ متقاربة، ولمّا كان

$$\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)$$

كان

$$R_n^{(\alpha)} \sim \frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}.$$

- ليكن $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. لمّا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة، ولمّا كان

$$\ln(1+n) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

كان $H_n \sim \ln n$.

لنتعمّق أكثر في دراسة هذا المثال، ولنضع $\gamma_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ حين $1 \leq n$ ، فيكون

$$\gamma_n = \int_0^{1/n} (1 - \frac{1}{1+x}) \,\mathrm{d}\, x = \int_0^{1/n} \frac{x}{1+x} \,\mathrm{d}\, x \qquad ❶$$

ومن ثَمّ

$$0 < \gamma_n \leq \int_0^{1/n} x \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2n^2}$$

نستنتج أنّ $\sum \gamma_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة ومتقاربة، لأن $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة. يسمّى مجموع هذه المتسلسلة **ثابت أولر** Euler ونرمز إليه عادة بالرمز γ. ولمّا كان

$$\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k = H_n - \frac{1}{n} - \ln n$$

فإننا نستنتج أنّ $\lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n) = \gamma$.

في الحقيقة، إذا عُدنا إلى العلاقة ❶ ، يمكننا أن نكتب

$$\gamma_n = \int_0^{1/n} \frac{x}{1+x} \,\mathrm{d}\, x \geq \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \int_0^{1/n} x \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

ولمّا كان $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ ، $\forall n \geq 2,$ كان لدينا

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \leq \gamma_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

ومن ثَمّ

$$m > n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+1}\right) \leq \sum_{k=n}^{m} \gamma_k \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{m}\right)$$

وبجعل m تسعى إلى اللانهاية نجد

$$n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \gamma - \left(H_n - \frac{1}{n} - \ln n\right) \leq \frac{1}{2(n-1)}$$

أو

$$n \geq 2 \Rightarrow 0 \leq \gamma - H_n + \frac{1}{2n} + \ln n \leq \frac{1}{2n\,(n-1)}$$

تقتضي هذه العلاقة أن يكون

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n^2}$$

حيث $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ متتالية محدودة. وكذلك تفيدنا المتراجحة السابقة عند $n = 10^5$ بالحصول على قيمة تقريبيّة للعدد γ إذ نجد

$$0.577\ 215\ 664 < \gamma < 0.577\ 215\ 665$$

تمرينات

التمرين 1. ادرس تقارب كلٍّ من المتسلسلات التي حدّها العام:

$$1-\cos\left(\frac{1}{n}\right),\qquad \sin\frac{1}{n^2},\qquad \left(\frac{n-1}{3n}\right)^n,$$

$$\frac{a^n}{n^\alpha n!},\qquad \frac{1}{\sqrt[n]{n!}},\qquad \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdots n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)},$$

$$\frac{1}{n+a^n}(a\in\mathbb{R}_+^*).\qquad \frac{a^n}{n^{n/\alpha}},\qquad \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)},$$

الحل

- إنّ تطبيق معيار كوشي على المتسلسلة التي حدّها العام $\left(\frac{n-1}{3n}\right)^n$ يبيّن أنّها متقاربة.
- بملاحظة أنّ $\frac{1}{n^2} \geq \sin\frac{1}{n^2} \geq 0$ وذلك أياً كانت $n\geq 1$ نستنتج أنّ المتسلسلة التي حدّها العام $\sin\frac{1}{n^2}$ متقاربة.
- بملاحظة أنّ $0\leq 1-\cos\frac{1}{n}=2\sin^2\frac{1}{2n}\leq\frac{1}{2n^2}$ وذلك أياً كانت $n\geq 1$، نستنتج أنّ المتسلسلة التي حدّها العام $1-\cos\frac{1}{n}$ متقاربة.
- إنّ تطبيق معيار دالمبير على المتسلسلة التي حدّها العام $\frac{1\cdot 4\cdots n^2}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}$ يبيّن تباعدها.
- بملاحظة أنّ $\frac{1}{n}\leq\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ وذلك أياً كانت $n\geq 1$ نستنتج أنّ المتسلسلة التي حدّها العام $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ متباعدة.
- إنّ تطبيق معيار دالمبير على المتسلسلة التي حدّها العام $\frac{a^n}{n^\alpha n!}$ يبيّن تقاربها.
- إنّ تطبيق معيار دالمبير على المتسلسلة التي حدّها العام $\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$ يبيّن تقاربها.

- إنّ تطبيق معيار كوشي على المتسلسلة التي حدّها العام $\frac{a^n}{n^{n/\alpha}}$ يبيّن أنها متقاربة إذا كانت $\alpha > 0$ وأنها متباعدة عندما تكون $\alpha < 0$.
- وأخيراً نلاحظ أنّه في حالة $a \leq 1$ يكون

$$\forall n \geq 1, \ \frac{1}{n+a^n} \geq \frac{1}{n+1}$$

فالمتسلسلة التي حدّها العام $\frac{1}{n+a^n}$ متباعدة، وفي حالة $a \geq 1$ يكون

$$\forall n \geq 1, \ \frac{1}{n+a^n} \leq \frac{1}{a^n}$$

وعليه تكون المتسلسلة التي حدّها العام $\frac{1}{n+a^n}$ متقاربة. ∎

التمرين 2. أوجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات التّالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^2 3^{-n},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n^4+n^2+1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right),$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}},$$

الحل

- نعلم أنّ

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall a \in \left]-1,+1\right[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+p}^{p}\, a^n = \frac{1}{(1-a)^{p+1}}$$

فإذا وضعنا $a = 1/3$ و أخذنا $p = 1$ و $p = 2$ استنتجنا أنّ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)3^{-n} = \frac{1}{(1-1/3)^2} = \frac{9}{4}$$

و

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\,3^{-n} = \frac{2}{(1-1/3)^3} = \frac{27}{4}$$

وعليه يكون

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2\,3^{-n} = \frac{27}{4}-\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$$

- لنلاحظ أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \frac{n}{n^4+n^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+n(n-1)}-\frac{1}{1+(n+1)n}\right)$$

ومن ثَمّ

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{n}{n^4+n^2+1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+(m+1)m}\right)$$

وبجعل m تسعى إلى اللانهاية نجد

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^4+n^2+1}=\frac{1}{2}$$

- وبأسلوب مماثل نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right) &= \sum_{n=1}^{m}\left[\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)-\ln\left(\frac{n+3}{n+1}\right)\right]\\ &=\ln 3-\ln\left(\frac{m+3}{m+1}\right)\end{aligned}$$

وبجعل m تسعى إلى اللانهاية نجد

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)=\ln 3$$

- وكذلك، لدينا في حالة $n\geq 2$ ما يأتي:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

استنتجنا بأسلوب مماثل لما سبق أنّ

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

- وأخيراً، لمّا كان

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{\sin \dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos \dfrac{1}{n} \cdot \cos \dfrac{1}{n+1}} = \tan \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n+1}$$

استنتجنا بأسلوب مماثل لما سبق أنّ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n(n+1))}{\cos(1/n) \cdot \cos(1/(n+1))} = \tan(1)$$

التمرين 3. ليكن p عدداً طبيعيّاً أكبر من 2. ولتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة من الأعداد الموجبة. لنضع $b_n = p^n a_{p^n}$. بيّن أنّ للمتسلسلتين $\sum a_n$ و $\sum b_n$ الطبيعة نفسها. ثمّ ادرس طبيعة المتسلسلة $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

الحل

بالاستفادة من تناقص المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نستنتج أنّ

$$\forall n \geq 1, \qquad (p^n - p^{n-1}) \cdot a_{p^n} \leq \sum_{k=p^{n-1}}^{p^n-1} a_k \leq (p^n - p^{n-1}) \cdot a_{p^{n-1}}$$

أو

$$\forall n \geq 1, \qquad \left(1 - \frac{1}{p}\right) b_n \leq \sum_{k=p^{n-1}}^{p^n-1} a_k \leq (p-1) \cdot b_{n-1}$$

ومنه

$$\forall n \geq 1, \qquad \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{p^n-1} a_k \leq (p-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} b_k$$

إذن تكون المتتالية $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة إذا وفقط كانت $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة، وعليه فإنّ للمتسلسلتين $\sum a_n$ و $\sum b_n$ الطبيعة نفسها.

لندرس المتسلسلة ذات الحد العام $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$. نلاحظ أوّلاً أنّ المتتالية $(a_n)_{n\geq 2}$ متتالية ذات حدود موجبة.

- في حالة $\alpha > 1$ نختار γ من $]1, \alpha[$، فيكون $\lim_{n\to\infty} n^\gamma a_n = 0$، وعليه تكون $\sum a_n$ متقاربة لأن $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ متقاربة.
- في حالة $\alpha < 1$ أو $((\alpha = 1)$ و $(\beta < 0))$ يكون $\lim_{n\to\infty} n a_n = +\infty$، وعليه تكون $\sum a_n$ متباعدة لأنّ $\sum \dfrac{1}{n}$ متباعدة.
- في حالة $((\alpha = 1)$ و $(\beta \geq 0))$ نطبّق في هذه الحالة نتيجة التمرين بأخذ $p = 2$ مثلاً فيكون $b_n = 2^n a_{2^n} = \dfrac{(\ln 2)^{-\beta}}{n^\beta}$، وعليه فإنّ المتسلسلة $\sum a_n$ تكون متقاربة في حالة $1 < \beta$ ومتباعدة في حالة $0 \leq \beta \leq 1$.

النتيجة

تتقارب المتسلسلة ذات الحدّ العام $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha > 1$ أو $((\alpha = 1)$ و $(\beta > 1))$. ■

التمرين 4. أثبت صحّة كلٍّ من القضايا الآتية:

1. لتكن $\sum u_n$ و $\sum v_n$ متسلسلتين متقاربتين حدودهما موجبة. عندئذ تكون المتسلسلة $\sum \sqrt{u_n v_n}$ متقاربة.
2. لتكن $\sum u_n$ متسلسلة متقاربة ذات حدود موجبة. عندئذ يوجد عدد $0 < K$ يُحقّق

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{p=1}^{n} \sqrt{u_p} \leq K\sqrt{n}.$$

3. لتكن $\sum u_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة بحيث تكون المتسلسلة $\sum n^2 u_n^2$ متقاربة. عندئذ تكون المتسلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

4. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة من الأعداد الحقيقيّة الموجبة ولنفترض أنّ المتسلسلة $\sum u_n$ متقاربة. عندها يكون لدينا $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$. هل تبقى هذه النتيجة صحيحة إذا لم نفترض المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة ؟

الحل

1. يكفي أن نلاحظ أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{u_n v_n} \le \frac{1}{2}(u_n + v_n)$.

2. لمّا كان $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda > 0, \quad \sqrt{u_n} \le \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{u_n}{\lambda}\right)$ استنتجنا أنّ

$$\forall n \ge 1, \forall \lambda > 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \sqrt{u_k} \le \frac{1}{2}(\lambda n + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} u_k)$$

فإذا اخترنا، عند قيمة معطاة للعدد n، $\lambda = \lambda_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k}$، وكانت $\lambda_n > 0$، وجدنا

$$\forall n \ge 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \sqrt{u_k} \le \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k} \le \sqrt{S} \cdot \sqrt{n}$$

أمّا في الحالة التي تكون فيها $\lambda_n = 0$ فإنّ المتراجحة السابقة تكون واضحة.

3. نستفيد من النقطة 1. بأخذ $v_n = 1/n^2$.

4. لنلاحظ أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ n \cdot u_{2n} \le \sum_{k=n}^{2n-1} u_k$$

وعليه فإنّ $\lim_{n\to\infty} (2nu_{2n}) = 0$. وكذلك فإنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, (2n+1)\, u_{2n+1} \le n\, u_{2n} + u_{2n+1}$$

إذن $\lim_{n\to\infty} ((2n+1)u_{2n+1}) = 0$ ، وهذا يبرهن أنّ المتتالية $(nu_n)_{n\ge 0}$ تسعى إلى الصفر.

في الحقيقة، إنّ شرط تناقص المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ أساسي، إذ لو تأمّلنا المتتالية $(v_n)_{n\ge 1}$ المعرّفة بالشرط $v_n = 1/n$ إذا كان n مربّع عدد طبيعي، و $v_n = 0$ إذا لم يكن n كذلك، لوجدنا أنّ المتسلسلة $\sum v_n$ متقاربة، ومع ذلك فإنّ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, nv_n = 1$. ■

التمرين 5. لتكن $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية من الأعداد الحقيقيّة الموجبة تماماً، ولنعرّف المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ بالعلاقة:

$$v_n = \frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$$

1. أثبت أنّ المتسلسلة $\sum v_n$ متقاربة.
2. أثبت أنّ المتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة إذا وفقط إذا كان $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 1$.

الحل

1. لنعرّف المتتالية $(w_n)_{n\geq 1}$ كما يلي:

$$w_n = \begin{cases} 1 & : \; n = 1 \\ \dfrac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})} & : \; n \geq 2 \end{cases}$$

عندئذ نتحقّق بسهولة أنّ

$$\forall n \geq 1,\; v_n = w_n - w_{n+1}$$

وعليه يكون لدينا

$$\forall m \geq 1, \quad \sum_{n=1}^{m} v_n = w_1 - w_{m+1} \leq w_1 = 1$$

والمتسلسلة $\sum v_n$ متقاربة لأنها ذات حدود موجبة ومتتالية مجاميعها الجزئيّة محدودة. ونرى كذلك أنّ

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = 1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{m\to\infty} w_{m+1} = 0$$
$$\Leftrightarrow\; \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m}(1+a_k) = +\infty$$

ولكن، بالاستفادة من المتراجحة البسيطة

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leq e^x$$

نرى أنّ

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leq \prod_{k=1}^{m}(1+a_k) \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)$$

وهذا يبرهن أنّ

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)=+\infty \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}a_k=+\infty$$

ويُثبتُ 2. ■

التمرين 6. لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين من الأعداد الحقيقيّة الموجبة تماماً، ولنفترض وجود عدد n_0 في $\mathbb{N}$ يُحقّق

$$\forall n\ge n_0,\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

أثبت أنّ تقارب المتسلسلة $\sum b_n$ يقتضي تقارب المتسلسلة $\sum a_n$. ثُمّ أثبت أنه إذا وجِدَ عدد حقيقيّ $1<\alpha$ يُحقّق $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}$ أياً كانت $n_0\le n$، كانت المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة.

تطبيق. ادرس تقارب المتسلسلة $\sum a_n$ حيث

$$a_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\,\frac{1}{2n+1}$$

الحل

ينتج من الفرْض أنّ المتتالية $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\ge n_0}$ متناقصة، وعليه إذا عرّفنا $M=a_{n_0}/b_{n_0}$ كان

$$\forall n\ge n_0,\quad a_n\le M\,b_n$$

ومن ثَمّ فإنّ تقارب المتسلسلة $\sum b_n$ يقتضي تقارب المتسلسلة $\sum a_n$.

وبتطبيق هذه النتيجة في حالة $b_n=1/n^{\alpha}$ نستنتج أنّه إذا وُجِدَ عدد حقيقي $1<\alpha$ يُحقّق المتراجحة $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}$ أياً كانت $n\ge n_0$، كانت المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة.

وأخيراً بملاحظة أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2n+1)(2n+3) \leq 4(n+1)^2$$

نستنتج بسهولة أنّه في حالة

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\,\frac{1}{2n+1}$$

يكون

$$\forall n \geq 1, \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2(n+1)}\cdot\frac{2n+1}{2n+3} \leq \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}}\cdot\frac{2n+1}{2n+3} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

إذا عرّفنا $b_n = \dfrac{1}{(2n+1)^{3/2}}$.

وعليه فإنّ تقارب المتسلسلة $\sum b_n$ يقتضي تقارب المتسلسلة $\sum a_n$. ■

التمرين 7. ليكن $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ تطبيقاً متبايناً. أثبت أنّ المتسلسلة $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\varphi(n)}{n^2}$ متباعدة.

الحل

لنعرّف $A_0 = 0$ ، و $\displaystyle\forall n \geq 1,\ \ A_n = \sum_{k=1}^{n}\varphi(k)$. لمّا كانت الأعداد $\big(\varphi(k)\big)_{1\leq k\leq n}$ أعداداً طبيعيّة موجبة تماماً ومختلفة، فإنّ مجموعها أكبر أو يساوي مجموع الأعداد $\{1,2,\ldots,n\}$. وعليه يكون لدينا :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \geq \frac{n(n+1)}{2}$$

نستنتج إذن أنّ

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(k)}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k - A_{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{k^2} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{A_k}{(k+1)^2}\\ &= \frac{A_n}{n^2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)A_k\\ &\geq \frac{n(n+1)}{2n^2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}\cdot\frac{k(k+1)}{2}\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(k)}{k^2} \geq \frac{n+1}{2n}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{k(k+1)}$$
$$\geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+1\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=H_n$$

ونستنتج من كوْن $\lim_{n\to\infty} H_n=+\infty$ أنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{\varphi(n)}{n^2}$ متباعدة. ■

التمرين 8. احسب مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{C_{n+p}^{1+p}}$ بعد أن تثبت تقاربها أيّاً كان $1\leq p$.

الحل

لنضع $\frac{(1+p)!}{(p+n)\cdots(1+n)n}=\frac{1}{C_{p+n}^{p+1}}=a_n$، ولنعرّف

$$b_n=(p+1)\frac{(p-1)!}{(p-1+n)\cdots(1+n)n}$$

عندئذ نتحقّق بسهولة أنّ $a_n=b_n-b_{n+1}$ وذلك أيّاً كانت n. وعليه فإنّ

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{C_{n+p}^{1+p}}=b_1-b_{m+1}\xrightarrow[m\to\infty]{}b_1=\frac{p+1}{p}$$ ■

التمرين 9. ادرس تقارب المتسلسلة $\sum v_n$ في حالة $v_n=\frac{1}{n^\alpha}\sum_{p=1}^{n}(\ln p)^2$، ثُمّ أعِد السؤال عندما $v_n=\sqrt{n!}\prod_{p=1}^{n}\sin\frac{1}{\sqrt{p}}$.

الحل

- نستفيد هنا من نتيجة التمرين 3. نلاحظ أوّلاً أنّ

$$\forall n\geq 2,\qquad \frac{(n-1)(\ln 2)^2}{n^\alpha}\leq v_n\leq\frac{n(\ln n)^2}{n^\alpha}$$

وعليه تكون المتسلسلة $\sum v_n$ متباعدة في حالة $\alpha\leq 2$، وتكون متقاربة في حالة $\alpha>2$.

- يمكننا الاستفادة من المتراجحة البسيطة $\forall x\in\mathbb{R},\ \sin x\geq x-x^3$ ، فنجد أنّ

$$\forall p\geq 1,\quad \sqrt{p}\sin\frac{1}{\sqrt{p}}\geq 1-\frac{1}{p}=\frac{p-1}{p}$$

وعليه يكون

$$\forall n\geq 1,\qquad v_n=\sqrt{n!}\cdot\prod_{p=1}^{n}\sin\frac{1}{\sqrt{p}}\geq \sin 1\cdot\prod_{p=2}^{n}\frac{p-1}{p}=\frac{\sin 1}{n}$$

إذن المتسلسلة $\sum v_n$ متباعدة. ■

التمرين 10. لتكن $\sum u_n$ متسلسلة متقاربة حدودها موجبة. نفترض أنه يوجد عدد حقيقي موجب $c>0$ يحقق

$$\forall n\geq 0,\qquad \sum_{k>n}u_k\leq c\,u_n$$

أثبت أنه يوجد عددان موجبان a و b يُحقّقان

$$\forall n\geq 0,\quad u_n\leq b\,a^n \quad \text{و}\quad 0<a<1$$

الحل

لنضع $R_n=\sum_{k=n}^{\infty}u_k$ وذلك أياً كانت $0\leq n$. عندئذ يكون لدينا

$$\forall n\geq 0,\qquad R_{n+1}\leq c(R_n-R_{n+1})$$

أو

$$\forall n\geq 0,\qquad R_{n+1}\leq \frac{c}{1+c}R_n$$

وينتج من ذلك أنّ

$$\forall n\geq 0,\qquad u_n\leq R_n\leq\left(\frac{c}{1+c}\right)^n R_0$$

وهذا يُثبتُ المطلوب. ■

التمرين 11. لتكن $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية حدودها موجبة، نفترض أنّ المتسلسلة $\sum a_n^2$ متقاربة. نعرّف α_n و A بالصيغتين: $\alpha_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$ و $A=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$.

1. أثبت أنّ $\forall n \geq 1, \quad \alpha_n^2 - 2\alpha_n a_n \leq (n-1)\,\alpha_{n-1}^2 - n\,\alpha_n^2$.

2. استنتج أنّ المتسلسلة $\sum \alpha_n^2$ متقاربة وأنّ $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \leq 4A$.

3. هل العدد 4 هو أفضل عدد يمكن أن نضعه في المتراجحة السابقة ؟

الحل

1. لنلاحظ أوّلاً أنّ $\forall n > 1,\ n\,\alpha_n = a_n + (n-1)\,\alpha_{n-1}$ وعليه بالتربيع نجد

$$\forall n > 1, \quad (n-1)^2\,\alpha_{n-1}^2 = n^2\alpha_n^2 - 2n\,\alpha_n\,a_n + a_n^2$$

ومنه أياً كانت $1 < n$ فلدينا

$$(n-1)^2\,\alpha_{n-1}^2 - (n^2-1)\alpha_n^2 + 2(n-1)\,\alpha_n\,a_n = (\alpha_n - a_n)^2 \geq 0$$

إذن بالقسمة على العامل المشترك الموجب $n-1$ نجد

$$\forall n > 1, \quad (n-1)\alpha_{n-1}^2 - (n+1)\alpha_n^2 + 2\,\alpha_n a_n \geq 0$$

وهي تُكافئ المتراجحة المطلوبة. لاحظ أنّها تبقى صحيحة مهما كانت القيمة التي نعطيها للحد α_0 .

2. بجمع المتراجحات

$$n \geq k \geq 1, \quad \alpha_k^2 - 2\alpha_k a_k \leq (k-1)\,\alpha_{k-1}^2 - k\,\alpha_k^2$$

طرفاً إلى طرف نجد

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k \leq -n\alpha_n^2 \leq 0$$

أو

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 \leq 2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k$$

وبالاستفادة من متراجحة Cauchy-Schwartz نجد أنّ

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 \leq 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}$$

أو

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 \leq 4\sum_{k=1}^{n}a_k^2 \leq 4A$$

3. ليكن γ ثابتاً يُحقِّق المتراجحة $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2 \leq \gamma\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2$ مهما تكن المتتالية ذات الحدود الموجبة $(a_n)_{n\geq 1}$ التي تكون عندها المتسلسلة $\sum a_n^2$ متقاربة.

لتكن m من $\mathbb{N}^*$، ولنعرّف المتتالية $(a_n^{(m)})_{1\leq n}$ كما يلي:

$$a_n^{(m)} = \begin{cases} \sqrt{n}-\sqrt{n-1} & : \ 1 \leq n \leq m \\ 0 & : \ m < n \end{cases}$$

عندئذ تعطى المتتالية $(\alpha_n^{(m)})_{1\leq n}$ بالعلاقة

$$\alpha_n^{(m)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}} & : \ 1 \leq n \leq m \\ \dfrac{\sqrt{m}}{n} & : \ m < n \end{cases}$$

ويكون

$$\forall n \in \{2,3,\ldots,m\}, \quad a_n^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n-1}}$$

إذن

$$\begin{aligned} H_m &= \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{m}(\alpha_n^{(m)})^2 \leq \gamma\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{(m)})^2\right) \\ &\leq \gamma\left(1+\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{m-1}\frac{1}{n}\right) \leq \frac{3\gamma}{4}+\frac{\gamma}{4}H_m \end{aligned}$$

إذ رمزنا بالرمز H_m إلى العدد التوافقي المألوف. بالقسمة على H_m ثُمّ بجعل m تسعى إلى ما لانهاية نجد أنّ $\frac{\gamma}{4} \geq 1$، أو $\gamma \geq 4$. ينتج من ذلك أنّ العدد 4 هو أصغر ثابت يمكن أن نضعه في المتراجحة المدروسة. ■

التمرين 12. لتكن $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية حدودها موجبة، نعرّف $S_n = \sum_{k=1}^{n}a_k$. ونفترض أنه

$$\forall n \geq 1, \quad a_n \leq \frac{S_n}{n^2}$$

ما طبيعة المتسلسلة $\sum a_n$؟

الحل

بملاحظة أنّ $a_n = S_n - S_{n-1}$ نستنتج أنّه، مهما تكن $n > 1$ فلدينا

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) S_n \leq S_{n-1}$$

أو

$$\frac{n+1}{n} S_n \leq \frac{n}{n-1} S_{n-1}$$

فالمتتالية $\left(\frac{n+1}{n} S_n\right)_{n\geq 1}$ متناقصة، وحدّها الأعلى هو $2S_1 = 2a_1$، نستنتج إذن أنّ $S_n \leq 2a_1$ مهما تكن $n \geq 1$، والمتسلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum a_n$ متقاربة. ■

التمرين 13. ليكن a و b عددين موجبين، ولنتأمّل المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ التي تحقّق :

$$a_0 > 0 \quad \text{و} \quad \forall n \geq 0,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+a}{n+b}.$$

ادرس تقارب المتسلسلة $\sum a_n$، واحسب مجموعها في حال تقاربها.

الحل

نلاحظ أوّلاً أنّ حدود المتتالية $(a_n)_{n\geq 0}$ موجبة تماماً. ومن ناحية أخرى فإنّ

$$\forall n \geq 0, \quad (n+1)a_{n+1} - n\,a_n = a\,a_n - (b-1)a_{n+1}$$

وبجمع هذه العلاقات عندما تتحوّل n من 0 إلى $m-1$ نجد

$$\forall m > 0, \quad m\,a_m = a(S_m - a_m + a_0) - (b-1)S_m$$

وقد عرّفنا $S_m = \sum_{k=1}^{m} a_k$. إذن

$$\forall n > 0, \quad (n+a)a_n = (a-b+1)S_n + a\,a_0 \qquad (1)$$

نناقش إذن الحالتين التاليتين:

- حالة $a-b+1 \geq 0$، عندئذ ينتج من (1) أنّ $a_n \geq \frac{aa_0}{n+a}$ أياً كان $n > 0$ وعليه تكون المتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة.

- حالة $a-b+1<0$، عندئذ ينتج من (1) نفسها أنّ $S_n \leq \dfrac{aa_0}{b-a-1}$ أياً كان العدد $n>0$، والمتسلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum a_n$ متقاربةٌ لأنّ متتالية مجاميعها الجزئيّة محدودةٌ.

ليكن $\ell = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ عندئذ ينتج من (1) أنّ

$$\lim_{n\to\infty} (n+a)\,a_n = (a-b+1)\,\ell + a\,a_0 = \lambda$$

فإذا كان $\lambda \neq 0$ استنتجنا أنّ $\sum a_n$ متباعدة لأنّ لها طبيعة المتسلسلة المتباعدة $\sum \dfrac{1}{n+a}$، وهذا تناقض. إذن لا بُدّ أن يكون $\lambda = 0$ ومن ثَمّ $\ell = \dfrac{aa_0}{b-a-1}$.

وأخيراً نستنتج ما يلي:

- في حالة $a-b+1 \geq 0$، تكون المتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة.
- وفي حالة $a-b+1<0$، تكون المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة ويكون

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{(b-1)a_0}{b-a-1}$$

وهي النتيجة المرجوّة.

التمرين 14. لتكن $(F_n)_{n\geq 0}$ متتالية Fibonacci المعرّفة تدريجيّاً بالعلاقات الآتية:

$$F_0 = F_1 = 1, \qquad \forall n \geq 1, \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

1. أثبت أن $(F_n)_{n\geq 0}$ تسعى إلى $+\infty$.
2. نرمز بالرمز ω إلى الجذر الموجب للمعادلة $x^2 = x+1$. احسب $\dfrac{F_{n+1}-\omega F_n}{F_n - \omega F_{n-1}}$ بدلالة ω و $n \geq 1$. واستنتج أن المتتالية $\left(\dfrac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\geq 0}$ متقاربة، واحسب نهايتها.
3. نسمّي $\mathcal{E}$ مجموعة المتتاليات الحقيقية $(x_n)_{n\geq 0}$ التي تحقق

$$\forall n \geq 1, \quad x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1}$$

   a. أثبت أن المتتاليتين $(F_{2n})_{n\geq 0}$ و $(F_{2n+1})_{n\geq 0}$ تنتميان إلى $\mathcal{E}$.

b. لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ متتالية من $\mathcal{E}$. أثبت أن المقدار $x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1}$ لا يتعلّق بالعدد n. واستنتج بدلالة x_0 و x_1 و x_n و x_{n+1} قيمة المجموع

$$(x_1^2 - x_0x_2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_kx_{k+1}}$$

c. استنتج تقارب المتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2n+2}F_{2n}}$ و $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2n+3}F_{2n+1}}$ واحسب قيمة مجموعيهما.

d. استنتج تقارب المتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{n+2}F_n}$ و $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{F_{n+2}F_n}$ واحسب مجموعيهما.

الحل

1. في الحقيقة، يمكننا أن نثبت بسهولة بالتدريج على n أنّ $\forall n\geq 1,\ F_n \geq n$. إذن نستنتج مباشرة أنّ $\lim_{n\to\infty} F_n = +\infty$.

2. لنلاحظ أنّه مهما تكن $1\leq n$ يكن

$$\begin{aligned}F_{n+1} - \omega F_n &= (1-\omega)F_n + F_{n-1}\\ &= \frac{(\omega^2-\omega)F_n - \omega F_{n-1}}{-\omega}\\ &= \frac{-1}{\omega}(F_n - \omega F_{n-1})\end{aligned}$$

إذن

$$\forall n\geq 1,\quad \frac{F_{n+1}-\omega F_n}{F_n - \omega F_{n-1}} = \frac{-1}{\omega}$$

ينتج من ذلك، بالتدريج على n، ما يلي:

$$\forall n\geq 0,\quad F_{n+1} - \omega F_n = \left(\frac{-1}{\omega}\right)^{n+1}$$

فإذا استفدنا من السؤال السابق ومن كوْن $\omega > 1$ استنتجنا أنّ $\lim_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n = \omega$.

3.a. في الحقيقة لدينا

$$\begin{aligned} F_{2n+2} &= \underbrace{F_{2n}+F_{2n-1}}_{F_{2n+1}} + F_{2n} \\ &= F_{2n} + \underbrace{F_{2n} - F_{2n-2}}_{F_{2n-1}} + F_{2n} \\ &= F_{2n} + F_{2n} - F_{2n-2} + F_{2n} \\ &= 3F_{2n} - F_{2n-2} \end{aligned}$$

وذلك أياً كانت $n \leq 1$. إذن تنتمي المتتالية $(F_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ إلى $\mathcal{E}$. ونبرهن بأسلوب مماثل على انتماء المتتالية $(F_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ إلى $\mathcal{E}$.

$b.3$. لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ متتالية من $\mathcal{E}$. نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - x_n x_{n+2} &= x_{n+1}^2 - x_n(3x_{n+1} - x_n) \\ &= x_n^2 - x_{n+1}(3x_n - x_{n+1}) \\ &= x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1} \end{aligned}$$

وذلك أياً كانت n. إذن المتتالية $\left(x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1}\right)_{n\geq 1}$ ثابتة وتأخذ القيمة $x_1^2 - x_0x_2$.

وعليه، مهما تكن $n \leq 1$، يمكنْ أن نكتب

$$\begin{aligned} (x_1^2 - x_0x_2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_kx_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2 - x_{k-1}x_{k+1}}{x_kx_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{x_{k+1}} - \frac{x_{k-1}}{x_k}\right) \\ &= \frac{x_n}{x_{n+1}} - \frac{x_0}{x_1} \end{aligned}$$

$c.3$. نستنتج مما سبق أنّ

$$\forall m \geq 1, \quad (F_2^2 - F_0F_4)\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}} = \frac{F_{2m}}{F_{2m+2}} - \frac{F_0}{F_2}$$

ومنه

$$\forall m \geq 1, \quad \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}} = \frac{1}{2} - \frac{F_{2m}}{F_{2m+1}}\frac{F_{2m+1}}{F_{2m+2}}$$

وبجعل m تسعى إلى اللانهاية والاستفادة من 2. نستنتج أنّ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\omega^2}$$

وعليه، إذ أضفنا الحدّ ذي الدليل الصفري وجدنا

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}}=1-\frac{1}{\omega^2}=\frac{1}{\omega}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad ❶$$

وكذلك فإنّ

$$\forall m\geq 1,\quad (F_3^2-F_1F_5)\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}}=\frac{F_{2m+1}}{F_{2m+3}}-\frac{F_1}{F_3}$$

ومنه

$$\forall m\geq 1,\quad \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}}=\frac{F_{2m+1}}{F_{2m+2}}\frac{F_{2m+2}}{F_{2m+3}}-\frac{1}{3}$$

وبجعل m تسعى إلى اللانهاية والاستفادة من .2 نستنتج أنّ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}}=\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{3}$$

وعليه

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}}=\frac{1}{\omega^2}=1-\frac{1}{\omega}=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \qquad ❷$$

.d.3 بجمع وطرح المتسلسلتين المتقاربتين في ❶ و ❷ نستنتج بسهولة أنّ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}}=1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{F_nF_{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}}=\sqrt{5}-2$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 15. نشرالأعداد الحقيقيّة بالأساس p. $(p\in\mathbb{N}^*, p\geq 2)$

ليكن x عدداً حقيقيّاً موجباً. نقول إنّ المتتالية $(d_n)_{n\geq 0}$ من الأعداد الطّبيعيّة تمثّل النشر بالأساس p للعدد x إذا وفقط إذا تحقّقت الشّروط التالية:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq d_n < p \qquad ❶$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists m > n : \quad d_m \neq p-1 \qquad ❷$$

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{p^n} \qquad ❸$$

1. ليكن $(d_n)_{n\geq 0}$ و $(d'_n)_{n\geq 0}$ نشرَين للعدد x بالأساس p.

① بيّن أنّ $\displaystyle\frac{1}{p^n} > \sum_{k>n} \frac{d_k - d'_k}{p^k}$ واستنتج أنّ $\lfloor x \rfloor = d_0 = d'_0$.

② لنفترض أنّ $(d'_n)_{n\geq 0} \neq (d_n)_{n\geq 0}$ وليكن n_0 أصغر عدد طبيعيّ يحقّق الشرط $d_{n_0} \neq d'_{n_0}$. بافتراض أنّ $d_{n_0} > d'_{n_0}$ أثبت أنّ $\displaystyle\sum_{k>n_0} \frac{d_k - d'_k}{p^k} > -\frac{1}{p^{n_0}}$ واستنتج أنّ

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n - d'_n}{p^n} > 0$$

③ بيّن أنّ x يقبل على الأكثر نشراً واحداً بالأساس p.

2. لتكن $(d_n)_{n\geq 0}$ متتالية تحقّق ❶ و ❷. بيّن أنّها النشر بالأساس p لعدد حقيقيّ.

3. ليكن x عدداً حقيقيّاً. نعرّف المتتاليتين $(a_n)_{n\geq 0}$ و $(u_n)_{n\geq 0}$ على الوجه التّالي:

$$a_0 = \lfloor x \rfloor, \quad \forall n \geq 1, \quad a_n = \lfloor p^n (x - u_{n-1}) \rfloor,$$
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{p^k}$$

① أثبت أنّ $0 \leq a_n \leq p-1$ أيّاً كانت n من $\mathbb{N}^*$، وأنّه في حالة n من $\mathbb{N}$ لدينا $0 \leq x - u_n < p^{-n}$، ثُمّ استنتج أنّ المتتالية $(a_n)_{n\geq 0}$ تحقّق ❶ و ❸.

② لنفترض أنّ $(a_n)_{n\geq 0}$ لا تحقّق الشّرط ❷. ليكن k' أصغر عدد طبيعيّ يحقّق $\forall n \geq k', a_n = p-1$. لنضع $k = \max(0, k'-1)$، ثُمّ لنعرّف:

$$b_n = \begin{cases} a_n & : \ n < k \\ a_k + 1 & : \ n = k \\ 0 & : \ n > k \end{cases}$$

بيّن أنّ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n - a_n}{p^n} = 0$ وأنّ $(b_n)_{n\geq 0}$ تحقّق الشروط ❶ و ❷ و ❸.

③ استنتج أنّ كلّ عدد حقيقيّ موجب x يقبل نشراً بالأساس p. نكتب إذن

$$x = (d_0 \cdot d_1 d_2 \ldots d_n \ldots)_p$$

☜ إذا كان x عدداً حقيقيّاً سالباً تماماً، نسمّي المتتالية $(-d_n)_{n\geq 0}$ النشر بالأساس p للعدد x إذا كانت $(d_n)_{n\geq 0}$ تمثّل النشر بالأساس p للعدد $(-x)$ ونكتب

$$x = (-d_0 \cdot d_1 d_2 \ldots d_n \ldots)_p$$

4. ليكن $x = \frac{a}{b}$ عدداً عادياً موجباً، ولتكن $(a_n)_{n\geq 0}$ و $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتاليتين المعرّفتين انطلاقاً من x في 3. نعرّف المتتاليتين $(r_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ من الأعداد الطبيعيّة على الوجه الآتي:

$$\begin{aligned} a &= bs_0 + r_0, & 0 \leq r_0 < b \\ pr_n &= bs_{n+1} + r_{n+1}, & 0 \leq r_{n+1} < b \end{aligned}$$

أي s_{n+1} و r_{n+1} هما خارج وباقي قسمة pr_n على b.

① بيّن أنّه أياً كان العدد الطبيعيّ n كان $s_n = a_n$ و $pr_n = p^{n+1}(a - bu_n)$.

② بيّن أنّ المتتاليتين $(r_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ دوريّتان بدءاً من حدّ معيّن، أي:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad r_{n+k} = r_n$$

③ استنتج أنّ النشر بالأساس p للعدد $\frac{a}{b}$ دوريّ بدءاً من حدّ معيّن.

5. ليكن x عدداً حقيقيّاً موجباً ونشره بالأساس p دوريّ و دوره k بدءاً من حدّ معيّن n_0.

بيّن أنّ x عدد عادي (كسري).

6. لنفترض أنّ $\mathbb{R}_+$ مجموعة قابلة للعدّ، وليكن $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+$ تقابلاً. وليكن $\left(d_{n,k}\right)_{n\geq 0}$ النشر بالأساس p للعدد $f(k)$. نعرّف المتتالية $\left(v_n\right)_{n\geq 0}$ على الوجه التالي:

$$v_n = \begin{cases} 0 & : \quad d_{n,n} > 0 \\ 1 & : \quad d_{n,n} = 0 \end{cases}$$

ونضع $x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{v_n}{p^n}$. بيّن أنّ $f(k)\neq x \quad \forall k\in\mathbb{N},$.

استنتج أنّ $\mathbb{R}$ ليست قابلة للعدّ. هذه الخاصّة تعود إلى Cantor ونسمّي طريقة الإثبات هذه إجرائيّة Cantor القطريّة.

الحل

1. ليكن $\left(d_n\right)_{n\geq 0}$ و $\left(d'_n\right)_{n\geq 0}$ نشرَين للعدد x بالأساس p.

①.1 لنلاحظ أنّه استناداً إلى ❶ لدينا

$$\forall k>n,\ \frac{d_k-d'_k}{p^k}\leq\frac{p-1}{p^k}$$

وكذلك يوجد، عملاً بالخاصّة ❷ عدد $n<m$ يُحقّق

$$\frac{d_m-d'_m}{p^m}<\frac{p-1}{p^m}$$

إذن

$$\sum_{k>n}\frac{d_k-d'_k}{p^k}<\sum_{k>n}\frac{p-1}{p^k}=(p-1)\frac{p^{-n-1}}{1-p^{-1}}=\frac{1}{p^n}$$

تنبّه إلى أننا لم نستفد إلاّ من الخاصّتين ❶ و ❷. ينتج من ❸ وبأخذ $n=0$ فيما سبق، أنّ

$$x-d_0=\sum_{k>0}\frac{d_k}{p^k}\in\left[0,1\right[$$

إذن $d_0\leq x<d_0+1$ وعليه $d_0=\lfloor x\rfloor$، ولأنّ $\left(d'_n\right)_{n\geq 0}$ هي أيضاً نشر للعدد x بالأساس p، فإنّ $d'_0=\lfloor x\rfloor$.

②.1 لنفترض أنّ $(d_n)_{n\geq 0} \neq (d'_n)_{n\geq 0}$ وليكن n_0 أصغر عدد طبيعيّ يحقّق $d_{n_0} \neq d'_{n_0}$.
إذا كان مثلاً $d_{n_0} > d'_{n_0}$ كان لدينا

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k\geq 0} d_k p^{-k} - \sum_{k\geq 0} d'_k p^{-k} \\ &= \frac{d_{n_0} - d'_{n_0}}{p^{n_0}} - \sum_{k>n_0} \frac{d'_k - d_k}{p^k} > \frac{1}{p^{n_0}} - \frac{1}{p^{n_0}} = 0 \end{aligned}$$

وهذا تناقض.

③.1 نستنتج من التناقض السابق أنّه لا بُدّ أن يكون $(d_n)_{n\geq 0} = (d'_n)_{n\geq 0}$ وهذا يعني أنّ x يقبل على الأكثر نشراً واحداً بالأساس p.

2. لتكن $(d_n)_{n\geq 0}$ متتالية تحقّق ❶ و ❷. عندئذ تكون المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} d_k p^{-k}$ متقاربة، فإذا رمزنا بالرمز x إلى مجموع هذه المتسلسلة مثّلت المتتالية $(d_n)_{n\geq 0}$ النشر بالأساس p للعدد x.

3. ليكن x عدداً حقيقيّاً. نعرّف المتتاليتين $(a_n)_{n\geq 0}$ و $(u_n)_{n\geq 0}$ على الوجه التالي:

$$\begin{aligned} a_0 &= \lfloor x \rfloor, \quad u_0 = a_0, \\ \forall n \geq 1, \quad a_n &= \lfloor p^n (x - u_{n-1}) \rfloor \\ u_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k p^{-k} \end{aligned}$$

①.3 لنلاحظ أوّلاً أنّ $x - u_0$ هو الجزء الكسري للعدد x إذن $0 \leq x - u_0 < 1$. وعليه يكون

$$0 \leq p(x - u_0) < p$$

وهذا يقتضي أنّ $0 \leq a_1 \leq p-1$.

وكذلك لمّا كان

$$a_n \leq p^n (x - u_{n-1}) < a_n + 1$$

استناداً إلى تعريف الجزء الصحيح لعدد، استنتجنا

$$\frac{a_n}{p^n} \leq x - u_{n-1} < \frac{a_n + 1}{p^n}$$

ومنه
$$0 \le x - u_n < \frac{1}{p^n} \qquad (*)$$
أو
$$0 \le p^{n+1}(x - u_n) < p$$
وهذا يقتضي أنّ $0 \le a_{n+1} \le p-1$. إذن المتتالية $(a_n)_{n\ge0}$ تُحقّق الشرط ❶. وينتج من $(*)$ أنّ $x = \lim_{n\to\infty} u_n$ أي إنّ المتتالية $(a_n)_{n\ge0}$ تُحقّق الشرط ❸ أيضاً.

②.3 لنفترض أنّ $(a_n)_{n\ge0}$ لا تحقّق الشّرط ❷. ليكن k أصغر عدد من $\mathbb{N}^*$ يحقّق $a_n = p-1$ أيّاً كان $k \le n$. عندئذ يكون
$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=0}^{k-1} a_n p^{-n} + \sum_{n=k}^{\infty} (p-1)p^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} a_n p^{-n} + \frac{1}{p^{k-1}} \end{aligned}$$
وعليه في حالة $k = 1$ يكون $x = a_0 + 1$ وهذا تناقض لأنّ $a_0 = \lfloor x \rfloor$. أمّا في حالة $k > 1$ فيكون $p^{k-1}(x - u_{k-2}) = a_{k-1} + 1$ وهذا أيضاً تناقضٌ لأنّ a_{k-1} هي بالتعريف الجزء الصحيح للعدد $p^{k-1}(x - u_{k-2}) = a_{k-1} + 1$. نستنتج من هذا التناقض أنّ المتتالية $(a_n)_{n\ge0}$ تُحقِّق الشرط ❷.

③.3 إذن يقبل كلُ عدد حقيقي موجب نشراً بالأساس p.

.4 ليكن $x = \dfrac{a}{b}$ عدداً عادياً موجباً، ولتكن $(a_n)_{n\ge0}$ و $(u_n)_{n\ge0}$ المتتاليتين المعرّفتين انطلاقاً من x في .3 نعرّف المتتاليتين $(r_n)_{n\ge0}$ و $(s_n)_{n\ge0}$ من الأعداد الطبيعيّة كما يلي
$$\begin{aligned} a &= bs_0 + r_0, & 0 \le r_0 < b \\ pr_n &= bs_{n+1} + r_{n+1}, & 0 \le r_{n+1} < b \end{aligned}$$
أي إنّ s_{n+1} و r_{n+1} هما خارج وباقي قسمة pr_n على b.

①.4 لنثبتْ بالتدريج على n أنّ $s_n = a_n$ و $pr_n = p^{n+1}(a - bu_n)$.

في الحقيقة، من الواضح أنّ $s_0 \le \dfrac{a}{b} = s_0 + \dfrac{r_0}{b} < s_0 + 1$. إذن $s_0 = \lfloor x \rfloor = a_0$. ومن جهة أخرى $p(a - bu_0) = p(a - bs_0) = pr_0$. إذن النتيجة المطلوبة صحيحة في حالة $n = 0$.

لنفترض صحة النتيجة في حالة عدد طبيعي $n \geq 0$ ، عندئذ يكون

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \left\lfloor \frac{pr^n}{b} \right\rfloor = \left\lfloor p^{n+1}(x - u_n) \right\rfloor = a_{n+1} \\ pr_{n+1} &= p(pr_n - bs_{n+1}) = p(p^{n+1}(a - bu_n) - ba_{n+1}) \\ &= p^{n+2}(a - b(u_n + a_{n+1}p^{-n-1})) \\ &= p^{n+2}(a - bu_{n+1}) \end{aligned}$$

فالنتيجة صحيحة في حالة $n+1$ ، ويكتمل الإثبات بالتدريج.

②.4 في الحقيقة، لا يمكن للتابع $n \mapsto r_n$ ، $\mathbb{N} \to \{0,1,\ldots,b-1\}$ أن يكون متبايناً فلا بُدّ أن يكون هناك عددان $k_0 < k_1$ يُحقّقان $r_{k_0} = r_{k_1}$. وهذا يقتضي، بالتدريج على m ، أنّه مهما تكن $1 \leq m$ فلدينا $r_{k_0+m} = r_{k_1+m}$ و $s_{k_0+m} = s_{k_1+m}$. وإذا عرّفنا العددين $k = k_1 - k_0$ ، و $n_0 = k_0 + 1$ صار لدينا

$$\forall n \geq n_0, \quad r_{n+k} = r_n, \, s_{n+k} = s_n$$

أي إنّ المتتاليتين $(r_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ دوريّتان بدءاً من حدّ معيّن.

③.4 وعليه يكون النّشر $(a_n)_{n\geq 0}$ بالأساس p للعدد a/b دورياً بدءاً من حدّ معيّن.

.5 لتكن $(a_n)_{n\geq 0}$ تمثّل النشر بالأساس p لعدد حقيقي موجب x . ولنفترض أنّ المتتالية دوريّة بدءاً من حدٍّ معيّن أي يوجد عددان طبيعيان ℓ و $0 < k$ يُحقّقان

$$\forall n \geq \ell, \, a_{n+k} = a_n$$

عندئذ يكون

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=0}^{\ell-1} a_n p^{-n} + a_\ell \sum_{n=0}^{\infty} p^{-\ell-nk} + a_{\ell+1}\sum_{n=0}^{\infty} p^{-1-\ell-nk} + \cdots + a_{\ell+k-1}\sum_{n=0}^{\infty} p^{-\ell-k+1-nk} \\ &= \sum_{n=0}^{\ell-1} a_n p^{-n} + \left(\frac{a_\ell}{p^\ell} + \frac{a_{\ell+1}}{p^{\ell+1}} + \cdots + \frac{a_{\ell+k-1}}{p^{\ell+k-1}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(p^{-k})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\ell-1} a_n p^{-n} + \left(\frac{a_\ell}{p^\ell} + \frac{a_{\ell+1}}{p^{\ell+1}} + \cdots + \frac{a_{\ell+k-1}}{p^{\ell+k-1}}\right)\frac{p^k}{p^k-1} = \frac{N}{p^{\ell+k-1}(p^k-1)} \end{aligned}$$

حيث N هو عدد صحيح، وهذا ما يُثبتُ أنّ $x \in \mathbb{Q}$.

.6 لنفترض أنّ هناك تطبيقاً غامراً $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. وليكن $(d_{n,k})_{n\geq 0}$ النّشر بالأساس p للعدد $f(k)$.

نعرّف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ على الوجه التالي:

$$v_n = \begin{cases} 0 & : \quad d_{n,n} > 0 \\ 1 & : \quad d_{n,n} = 0 \end{cases}$$

ونضع $x = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n p^{-n}$. عندئذ تكون المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هي النشر بالأساس p للعدد x وهو عنصر من $\mathbb{R}_+$ إذن يوجد في $\mathbb{N}$ عددٌ k يُحقِّق $f(k) = x$ ، ولأن النشر بالأساس p وحيد وجب أن يكون $(v_m)_{m\geq 0} = (d_{m,k})_{m\geq 0}$ وبوجه خاص $d_{m,m} = v_m$ ، وهذا يناقض تعريف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$. إذن لا يوجد أي تطبيق غامر $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ ، ونعبّر عن ذلك بالقول: إنّ $\mathbb{R}$ **مجموعة غير قابلة للعدّ.** ■

التمرين 16. ليكن P كثير حدود غير معدوم من $\mathbb{C}[X]$.

1. أثبت أنّ المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} P(n)z^n$ متقاربة إذا وفقط إذا كان $|z| < 1$.

☜ فيما يلي نفترض أنّ $|z| < 1$ ، ونكتب $S(P)(z)$ دلالة على مجموع هذه المتسلسلة في هذه الحالة.

2. نعرّف على فضاء كثيرات الحدود $\mathbb{C}[X]$ التطبيق الخطّي

$$\Delta : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X], Q \mapsto (\Delta Q)(X) = Q(X+1) - Q(X)$$

a. احسب $(1-z)S(P)(z)$ بدلالة $S(\Delta(P))(z)$. واستنتج علاقة تفيد في حساب $S(P)$ انطلاقاً من $S(\Delta(P))$.

b. قارن بين $\deg P$ و $\deg \Delta(P)$.

c. استنتج طريقة عامّة لحساب $S(P)$. واحسب المجموع $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 z^n$ عند تقاربه.

3. أثبت بوجه عام، أنّه إذا كان P كثير حدود من الدرجة d يوجد كثير حدود وحيد $Q = \varphi(P)$ يُحقّق :

$$|z| < 1 \Rightarrow S(P)(z) = \frac{Q(z)}{(1-z)^{d+1}}$$

واستنتج طريقة لإيجاد أمثال Q بدلالة أمثال P . ثمّ طبّق ذلك في حساب المجموع السابق ذاته.

الحل

1. إنّ تقارب المتسلسلة واضحٌ في حالة $z = 0$. لنفترض أنّ $z \neq 0$. لمّا كان عدد جذور أيّ كثير حدود منتهياً استنتجنا أنّه يوجد n_0 يُحقّق $\forall n \geq n_0, P(n) \neq 0$. لنضع إذن $u_n = \left|P(n)z^n\right|$ فيكون

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{P(n+1)}{P(n)}\right| \cdot \left|z\right|$$

ولكن استناداً إلى منشور تايلور لدينا

$$P(n+1) = P(n) + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} P^{(k)}(n)$$

وعليه نستنتج أنّ

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{P(n+1)}{P(n)} = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \frac{P^{(k)}(n)}{P(n)}$$

ولأنّ $\deg P^{(k)} < \deg P$ في حالة $k \geq 1$، نستنتج أنّ $\lim_{n \to \infty} \frac{P(n+1)}{P(n)} = 1$ ومن ثَمّ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|z\right|$$

إذن في حالة $\left|z\right| \geq 1$ تكون المتسلسلة $\sum P(n)z^n$ متباعدة لأنّ حدّها العام لا يسعى إلى 0 . وتكون متقاربة بالإطلاق في حالة $\left|z\right| < 1$ استناداً إلى معيار دالمبير.

2.a. لنفترض أنّ $\left|z\right| < 1$. عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned}
(1-z)S(P)(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(n)z^n - z\sum_{n=0}^{\infty} P(n)z^n \\
&= P(0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(n)z^n - z\sum_{n=0}^{\infty} P(n)z^n \\
&= P(0) + \sum_{n=0}^{\infty} P(n+1)z^{n+1} - z\sum_{n=0}^{\infty} P(n)z^n \\
&= P(0) + z\sum_{n=0}^{\infty} \big(P(n+1) - P(n)\big) z^n \\
&= P(0) + zS(\Delta(P))(z)
\end{aligned}$$

أو

$$❶\quad \forall z\in\mathbb{C},\quad \left|z\right|<1\Rightarrow S(P)(z)=\frac{P(0)}{1-z}+\frac{z}{1-z}S\big(\Delta(P)\big)(z)$$

$b.2$. في الحقيقة، نعلم استناداً إلى منشور تايلور أنّ

$$P(X+1)=P(X)+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}P^{(k)}(X)$$

ومن ثَمّ

$$\Delta(P)(X)=P(X+1)-P(X)=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}P^{(k)}(X)$$

إذن، إذا لم يكن P معدوماً كان

$$\deg\Delta(P)=\deg P'<\deg P$$

$c.2$. إذن، من حيث المبدأ، يكون حساب $S(\Delta(P))$ أسهل من حساب $S(P)$ لأنّ درجة كثير الحدود $\Delta(P)$ أصغر من درجة P. وفي الحقيقة، يمكننا أنّ نستنتج من ❶ أنّه في حالة $\left|z\right|<1$ و k من $\mathbb{N}$ لدينا

$$S(\Delta^k(P))(z)=\frac{\Delta^k(P)(0)}{1-z}+\frac{z}{1-z}S(\Delta^{k+1}(P))(z)$$

أو

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)^k S(\Delta^k(P))(z)=\frac{\Delta^k(P)(0)z^k}{(1-z)^{k+1}}+\left(\frac{z}{1-z}\right)^{k+1}S(\Delta^{k+1}(P))(z)$$

فإذا جمعنا هذه المساويات، بعد ملاحظة أنّ $\Delta^k(P)=0$ عندما يكون $k>\deg P$، نجد

$$\sum_{k=0}^{\deg P}\left(\left(\frac{z}{1-z}\right)^k S(\Delta^k(P))(z)-\left(\frac{z}{1-z}\right)^{k+1}S(\Delta^{k+1}(P))(z)\right)=\sum_{k=0}^{\deg P}\frac{\Delta^k(P)(0)z^k}{(1-z)^{k+1}}$$

أو

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad \left|z\right|<1\Rightarrow S(P)(z)=\sum_{k=0}^{\deg P}\frac{\Delta^k(P)(0)z^k}{(1-z)^{k+1}}$$

وعليه لحساب $S(P)(z)$ علينا حساب المقادير $\left(\Delta^k(P)(0)\right)_{0\leq k\leq d}$ حيث $d=\deg P$.

يمكن حساب هذه المقادير باستعمال **جدول الفروق** : لأنّ معرفة القيم $(P(k))_{0\leq k\leq d}$ تكفي لحساب $(\Delta(P)(k))_{0\leq k\leq d-1}$ وهذه بدورها تكفي لحساب $(\Delta^2(P)(k))_{0\leq k\leq d-2}$ وهكذا، نحسب انطلاقاً من القيم $(\Delta^r(P)(k))_{0\leq k\leq d-r}$ القيمَ $(\Delta^{r+1}(P)(k))_{0\leq k\leq d-r-1}$ حتّى نصل إلى القيمة الأخيرة $\Delta^d(P)(0)$، وبأخذ العنصر الأوّل من كلّ جماعة، نحصل على $(\Delta^r(P)(0))_{0\leq r\leq d}$. يوضح الجدول الآتي هذا الأسلوب

n	$P(n)$	$\Delta(P)(n)$	$\cdots$	$\Delta^k(P)(n)$	$\cdots$	$\Delta^d(P)(n)$
0	$P(0)$	$\Delta(P)(0)$	$\cdots$	$\Delta^k(P)(0)$	$\cdots$	$\Delta^d(P)(0)$
1	$P(1)$	$\Delta(P)(1)$		$\vdots$	$\iddots$	
$\vdots$	$\vdots$			$\Delta^k(P)(d-k)$		
$\vdots$	$\vdots$		$\iddots$			
$d-1$	$P(d-1)$	$\Delta(P)(d-1)$				
d	$P(d)$					

فمثلاً في حالة $P(X)=X^5$ نجد

n	$P(n)$	$\Delta(P)(n)$	$\Delta^2(P)(n)$	$\Delta^3(P)(n)$	$\Delta^4(P)(n)$	$\Delta^5(P)(n)$
0	0	1	30	150	240	120
1	1	31	180	390	360	
2	32	211	570	750		
3	243	781	1320			
4	1024	2101		$781=1024-243$		
5	3125					

إذن

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^5 z^n = \frac{1z}{(1-z)^2}+\frac{30z^2}{(1-z)^3}+\frac{150z^3}{(1-z)^4}+\frac{240z^4}{(1-z)^5}+\frac{120z^5}{(1-z)^6}$$

3. في الحقيقة، نستنتج من المساواة

$$S(P)(z) = \sum_{k=0}^{d} \frac{\Delta^k(P)(0)z^k}{(1-z)^{k+1}}$$

أنّ

$$(1-z)^{d+1} S(P)(z) = \sum_{k=0}^{d} \Delta^k(P)(0)z^k(1-z)^{d-k}$$

يكفي إذن أن نعرف

$$\varphi(P) = Q = \sum_{k=0}^{d} \Delta^k(P)(0)X^k(1-X)^{d-k}$$

حيث Q هو كثير حدود من الدرجة d على الأكثر. في الحقيقة، تمكن الاستفادة من هذه النتيجة لتعيين أمثال Q انطلاقاً من P. فإذا كان $Q = \sum_{k=0}^{d} b_k X^k$ نستنتج بِمطابقة الأمثال في المساواة

$$(1-z)^{d+1} \sum_{n=0}^{\infty} P(n) z^n = \sum_{k=0}^{d} b_k z^k$$

أو

$$\left(\sum_{m=0}^{d+1} (-1)^m C_{d+1}^m z^m\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(n) z^n\right) = \sum_{k=0}^{d} b_k z^k$$

أنّ

$$b_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_{d+1}^j P(k-j) : k \in \{0,1,\dots,d\}$$

وهذا يُكتب مصفوفيّاً بالشكل

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ -C_{d+1}^1 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ (-1)^k C_{d+1}^k & \cdots & -C_{d+1}^1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ (-1)^d C_{d+1}^d & & \cdots & & -C_{d+1}^1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(k) \\ \vdots \\ P(d) \end{bmatrix}$$

فمثلاً في حالة $P(X) = X^5$ لدينا

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & 0 \\ -6 & 1 & & & & \\ 15 & -6 & 1 & & & \\ -20 & 15 & -6 & 1 & & \\ 15 & -20 & 15 & -6 & 1 & 0 \\ -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 32 \\ 243 \\ 1024 \\ 3125 \end{bmatrix}$$

ومنه $Q(X) = X + 26X^2 + 66X^3 + 26X^4 + X^5$. إذن

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^5 z^n = \frac{z + 26z^2 + 66z^3 + 26z^4 + z^5}{(1-z)^6}$$

وبذا يتمّ الإثبات. ■

التمرين 17. نرغب في حساب قيمة تقريبيّة للمجموع $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$ بدقّة 10^{-p}.

1. أثبت أنّ

$$\forall n \geq 3, \quad \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{n^2}{(1+n^2)^2} \leq \frac{1}{n^2-1}$$

واستنتج متراجحة تحصر المقدار $R_m = S - \sum_{n=1}^{m} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$. كم حدّاً يجب أن نجمع حتّى نصل إلى التقريب المرجو ؟

2. عيِّن العدد a ليكون

$$\left(\frac{1}{n^2-1} - \frac{n^2}{(1+n^2)^2} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a}{(n^2-1)(n^2-4)}$$

واستنتج متراجحة تحصر المقدار $R'_m = R_m - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} \right)$. كم حدّاً يجب أن نجمع حتّى نصل إلى التقريب المرجو؟

3. عيّن إشارة الفرق $\frac{a}{(n^2-1)(n^2-4)}+\frac{1}{n^2-1}-\frac{n^2}{(1+n^2)^2}$، وبيّن أنّه يوجد عددٌ b يجعل هذا الفرق أصغر من $\frac{b}{(n^2-1)(n^2-4)n(n-3)}$ بدءاً من $n=4$, واستنتج متراجحة تحصر المقدار

$$R''_m = R'_m + \frac{2m+1}{2(m-1)m(m+1)(m+2)}$$

كم حدّاً يجب أن نجمع حتّى نصل إلى التقريب المرجو ؟

الحل

1. لنفترض أنّ $n \geq 3$، عندئذ من جهة أولى لدينا

$$\frac{n^2}{(1+n^2)^2}=\frac{n^2}{n^2+1}\times\frac{1}{n^2+1}\leq\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2-1}$$

ومن جهة ثانية

$$\frac{n^2}{(1+n^2)^2}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n^2(n-2)-1}{n(n+1)(1+n^2)^2}\geq\frac{n^2-1}{n(n+1)(1+n^2)^2}>0$$

إذن

$$\forall n\geq 3,\quad \frac{1}{n(1+n)}<\frac{n^2}{(1+n^2)^2}<\frac{1}{n^2-1}$$

فإذا لاحظنا أنّ

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{m+1}$$

وأنّ

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}<\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}=\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{m}$$

استنتجنا أنّ

$$\forall m\geq 2,\quad \frac{1}{m+1}<\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+n^2)^2}<\frac{1}{m}$$

أي إنّ

$$\forall m \geq 2, \quad \frac{1}{m+1} < R_m = S - \sum_{n=1}^{m} \frac{n^2}{(1+n^2)^2} < \frac{1}{m}$$

وعليه فإن $R_m < 10^{-p} \Leftrightarrow m \geq 10^p$. فمثلاً لحساب S بدقّة 10^{-4} علينا حساب S_{10000} ، أي مجموع عشرة آلاف حدٍّ من حدود المتسلسلة.

2. لنلاحظ أنّ

$$\frac{1}{n^2-1} - \frac{n^2}{(1+n^2)^2} = \frac{3n^2+1}{n^6+n^4-n^2-1} \sim \frac{3}{n^4}$$
$$\frac{a}{(n^2-1)(n^2-4)} = \frac{a}{n^4-5n^2+4} \sim \frac{a}{n^4}$$

إذن يكون المقداران السابقان متكافئين إذا وفقط إذا كان $a = 3$. ونستنتج من هذا التكافؤ أنّ

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2-1} - \frac{n^2}{(1+n^2)^2} \right) = O\left(\frac{1}{m^3}\right)$$

لنكن أكثر دقّة. في الحقيقة، نستنتج من المساواة

$$\frac{1}{n^2-1} - \frac{n^2}{(1+n^2)^2} = \frac{3n^2+1}{(1+n^2)^2(n^2-1)}$$

أنّ

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{n^2-1} - \frac{n^2}{(n^2+1)^2} &= \frac{3n^2+1}{(n^2+1)^2\left(n^2-1\right)} < \frac{3}{(n^2+1)(n^2-1)} \\ &< \frac{3}{(n^2-1)(n^2-4)} \end{aligned}$$

وعليه فإنّ

$$0 < \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \right) - R_m < \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{3}{(n^2-1)(n^2-4)}$$

ولكن

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

إذن

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}\right)$$

وكذلك فإنّ

$$\frac{3}{(n^2-1)(n^2-4)}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{(n-1)n(n+1)(n+2)}+\frac{3}{(n-2)(n-1)n(n+1)}\right)$$

ولكن

$$\frac{3}{(n-1)n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n-1)n(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$\frac{3}{(n-2)(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{(n-2)(n-1)n}-\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$

إذن

$$\begin{aligned}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{3}{(n^2-1)(n^2-4)}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m(m+1)(m+2)}+\frac{1}{(m-1)m(m+1)}\right)\\&=\frac{2m+1}{2(m-1)m(m+1)(m+2)}\end{aligned}$$

وهكذا نرى أنّ المقدار

$$R'_m=R_m-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}\right)=S-\sum_{n=1}^{m}\frac{n^2}{(n^2+1)^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}\right)$$

يُحقّق في حالة $m\geq 3$ المتراجحة

$$0<-R'_m<\frac{2m+1}{2(m-1)m(m+1)(m+2)}$$

ولكن

$$\begin{aligned}\frac{2m+1}{2(m-1)m(m+1)(m+2)}&<\frac{2m+2}{2(m-1)m(m+1)(m+2)}\\&<\frac{1}{(m-1)m(m+2)}=\frac{1}{m\left(m^2+m-2\right)}\\&<\frac{1}{m^3}\end{aligned}$$

إذن

$$0 < -R'_m < \frac{1}{m^3}$$

فإذا اخترنا $m > \sqrt[3]{10^p}$ كان $0 > R'_m > -\frac{1}{10^p}$. إذن للحصول على مجموع المتسلسلة S بدقّة 10^{-4} يكفي أن نحسب المجموع الجزئي S_{22} ثمّ نصحّحه بإضافة المقدار $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{22}+\frac{1}{23}\right)$ إليه.

3. لتسريع التقارب أكثر مما سبق سنكرّر العملية نفسها مرّة ثانية. نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\frac{n^2}{(1+n^2)^2} - \frac{1}{n^2-1} + \frac{3}{(n^2-1)(n^2-4)} &= \frac{3}{(n^2-1)(n^2-4)} - \frac{3n^2+1}{(1+n^2)^2(n^2-1)}\\ &= \frac{17n^2+7}{(1+n^2)^2(n^2-1)(n^2-4)}\end{aligned}$$

وعليه يكون

$$\begin{aligned}0 < \frac{n^2}{(1+n^2)^2} - \frac{1}{n^2-1} + \frac{3}{(n^2-1)(n^2-4)} &< \frac{17n^2+17}{(1+n^2)^2(n^2-1)(n^2-4)}\\ &< \frac{17}{(1+n^2)(n^2-1)(n^2-4)}\end{aligned}$$

ومنه، في حالة $n \geq 4$، يكون لدينا

$$0 < \frac{n^2}{(1+n^2)^2} - \frac{1}{n^2-1} + \frac{3}{(n^2-1)(n^2-4)} < \frac{17}{(n-3)n(n^2-1)(n^2-4)}$$

وبالجمع من قيمة $n = m+1$ حتى اللانهاية نجد

$$0 < R''_m < \frac{17}{5(m-2)(m-1)m(m+1)}$$

فإذا اخترنا $m = 15$ كان $0 < R''_{16} < 0.8 \times 10^{-4}$. إذن يكفي أن نحسب المجموع الجزئي S_{15} ثمّ نصحّحه بإضافة المقدار $\frac{31}{2\times14\times15\times16\times17} - \frac{31}{2\times15\times16}$ إليه. ■

التمرين 18. لنذكّر بالخاصّة التالية في حالة متتاليتين حقيقيتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$. نفترض أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ موجبة. عندئذ

❶ ($\sum u_n$ متقاربة و $v_n \sim u_n$) $\Leftarrow$ $\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_k$.

❷ ($\sum u_n$ متباعدة و $v_n \sim u_n$) $\Leftarrow$ $\sum_{k=1}^{n} u_k \sim \sum_{k=1}^{n} v_k$.

لتكن المتتالية $(x_n)_{n\geq0}$ المعرّفة تدريجياً كما يلي:

$$x_0 = 1 \text{ و } \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n + x_n^2}$$

1. أثبت أنّ $(x_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً وتسعى إلى $+\infty$.

2. احسب $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n)$ ، واستنتج أنّ $x_n \sim \frac{n}{2}$.

3. نضع $f(x) = \sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)$ أياً كان $-1 < x$. أثبت وجود النهاية $\lim_{x\to0}\left(x^{-3} f(x)\right)$ واحسبها.

4. نضع $y_n = x_{n+1} - x_n - \frac{1}{2} + \frac{1}{8x_n}$. احسب $\lim_{n\to\infty} (x_n^2 y_n)$ ، واستنتج أنّ $y_n \sim \frac{1}{4n^2}$.

5. استنتج أنّه يوجد عدد حقيقي α (لا يطلب تعيينه) يُحقّق

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n - \frac{n}{2} + \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_k}\right) = \alpha$$

6. أثبت على التوالي كلاً من التكافؤات التالية:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_k} \sim 2\ln n \text{ ، ثمّ } \frac{n}{2} - x_n \sim \frac{\ln n}{4} \text{ ، وأخيراً } \frac{1}{x_n} - \frac{2}{n} \sim \frac{\ln n}{n^2}$$

استنتج من ذلك تقارب المتسلسلة التي حدُّها العام يساوي $\frac{1}{x_n} - 2\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ، ثمّ بيّن وجود عدد حقيقي β (لا يطلب تعيينه) يُحقّق

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_k} - 2\ln n\right) = \beta$$

7. استنتج وجود عدد حقيقي γ (لا يطلب تعيينه) يُحقّق
$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n-\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}\ln n\right)=\gamma$$

8. نضع $\gamma_n=x_n-\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}\ln n$. أثبت أنّ $\gamma_n-\gamma_{n+1}\sim\dfrac{\ln n}{8n^2}$، واستنتج
$$\gamma_n-\gamma\sim\frac{\ln n}{8n}$$

الحل

1. من الواضح أنّ جميع حدود المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ موجبة تماماً. وعليه نستنتج أنّ
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad x_{n+1}=\sqrt{x_n+x_n^2}>\sqrt{x_n^2}=x_n$$
فالمتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماماً، وبوجه خاصّ لدينا $\forall n\in\mathbb{N},\ x_n\geq x_0=1$. لنفترض جدلاً أنّ المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة، عندئذ تكون متقاربة من نهاية ℓ تنتمي إلى المجال $[1,+\infty[$. وعندها تقتضي المساواة $x_{n+1}=\sqrt{x_n+x_n^2}$ أن يكون $\ell=\sqrt{\ell^2+\ell}$ أي إنّ $\ell=0$ وهذا خُلف، فلا بُدّ أن تكون المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة إلى اللانهاية.

2. نستنتج من كون $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ ومن المساواة
$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n+x_n^2}-x_n=\frac{x_n}{\sqrt{x_n+x_n^2}+x_n}=\frac{1}{1+\sqrt{1+1/x_n^2}}$$
أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\frac{1}{2}$. ولأنّ المتسلسلة التي حدّها العام $\frac{1}{2}$ متباعدة استنتجنا اعتماداً على الخاصّة 2 أنّه في جوار اللانهاية لدينا $\sum_{k=1}^{n}(x_{n+1}-x_n)\sim\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}$ ومن ثَمّ
$$x_n\sim\frac{n}{2}.$$

3. نعرّف في حالة $-1<x$ التابع $f(x)=\sqrt{1+x}-\left(1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}\right)$. عندئذ
$$f(x)=\frac{1+x-\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2\right)^2}{\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2}$$

ولكن

$$\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2\right)^2 = 1+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{64}x^4+x-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x^3$$
$$= 1+x-\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{64}x^4$$

إذن

$$f(x)=\frac{x^3}{64}\cdot\frac{8-x}{\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2}$$

ومن ثَمّ

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\frac{1}{16}$$

4. لنضع $\frac{1}{8x_n}+\frac{1}{2}-x_n-x_{n+1}=y_n$. عندئذ

$$y_n = x_n\left(\sqrt{1+\frac{1}{x_n}}-\left(1+\frac{1}{2x_n}-\frac{1}{8x_n^2}\right)\right)=x_n f\left(\frac{1}{x_n}\right)$$

ومن ثَمّ $x_n^2 y_n = x_n^3 f\left(\frac{1}{x_n}\right)$. ولمّا كانت $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0$ و $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\frac{1}{16}$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 y_n = \frac{1}{16}$$

ولكن $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{x_n^2}=4$ استناداً إلى 2. إذن $\lim_{n\to\infty} n^2 y_n=\frac{1}{4}$ أو

$$y_n \sim \frac{1}{4n^2} \text{ .}$$

5. لمّا كانت المتسلسلة $\sum n^{-2}$ متقاربة استنتجنا أنّ المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ متقاربة، نرمز إلى مجموعها بالرمز $\alpha-1$ أي

$$\alpha = 1+\sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

ولكن

$$1+\sum_{k=0}^{n-1} y_k = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(x_{k+1}-x_k-\frac{1}{2}+\frac{1}{8x_k}\right) = x_n - \frac{n}{2}+\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x_k}$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n-\frac{n}{2}+\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_k}\right)=\alpha$$

6. نعلم أنّ $\frac{1}{x_n}\sim\frac{2}{n}\sim 2\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ إذن $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_k}\sim 2\ln n$ استناداً إلى الخاصّة ❷ .

وإذا استفدنا من نتيجة السؤال 5. ومن كون $\lim_{n\to\infty}\ln n=+\infty$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty} 4\left(\frac{\frac{n}{2}-x_n}{\ln n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\ln n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_k}\right)=1$$

أي إنّ $\frac{\ln n}{4}\sim\frac{n}{2}-x_n$. وأخيراً نلاحظ أنّ

$$\frac{1}{x_n}-\frac{2}{n}=\frac{2}{nx_n}\cdot\left(\frac{n}{2}-x_n\right)=\frac{\ln n}{n^2}\cdot\left(\frac{n}{2x_n}\right)\cdot\frac{4}{\ln n}\left(\frac{n}{2}-x_n\right)$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\ln n}\left(\frac{1}{x_n}-\frac{2}{n}\right)=1$$

أو $\frac{\ln n}{n^2}\sim\frac{1}{x_n}-\frac{2}{n}$. نستنتج من ذلك، ومن كون $\frac{1}{2n^2}\sim\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ أنّ

$$\frac{1}{x_n}-2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{x_n}-\frac{2}{n}+2\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

إذن المتسلسلة التي حدُّها العام $\frac{1}{x_n}-2\ln\frac{n+1}{n}$ متقاربة، لنضع

$$\beta=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_n}-2\ln\frac{n+1}{n}\right)$$

عندئذ يكون

$$\beta = \lim_{n\to\infty}\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_k}-2\ln\frac{k+1}{k}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_k}-2\ln n\right)$$

.7 في الحقيقة لدينا

$$x_n-\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}\ln n = x_n-\frac{n}{2}+\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_k}+\frac{1}{8}\left(2\ln n-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_k}\right)$$

وبالاستفادة من .5 و .6 نستنتج أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n-\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\ln n\right)=\alpha-\frac{1}{8}\beta=\gamma$$

.8 نضع $\gamma_n = x_n-\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}\ln n$. عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned}\gamma_n-\gamma_{n+1} &= x_n-\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}\ln n-x_{n+1}+\frac{1}{2}(n+1)-\frac{1}{4}\ln(n+1)\\ &= x_n-x_{n+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

ولكن $x_n-x_{n+1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{8x_n}-y_n$ باستعمال رموز السؤال .4 إذن

$$\gamma_n-\gamma_{n+1}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x_n}-2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)-y_n$$

ولكن بناءً على كون

$$x_n=\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\ln n+\gamma+o(1)=\frac{n}{2}\left(1-\frac{\ln n}{2n}+\frac{2\gamma}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_n} &= \frac{2}{n}\left(1-\frac{\ln n}{2n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1}\\ &= \frac{2}{n}\left(1+\frac{\ln n}{2n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{2}{n}+\frac{\ln n}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

ولأنّ

$$y_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad \text{و}\quad 2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

نستنتج أنّ

$$\gamma_n - \gamma_{n+1} = \frac{\ln n}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ولكن

$$\begin{aligned}\frac{\text{lnn}}{n} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} &= \frac{\ln n}{n^2} - \frac{\ln n}{n^2(n+1)} - \frac{1}{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{\ln n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

إذن

$$\gamma_n - \gamma_{n+1} = \frac{1}{8}\left(\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln(n+1)}{n+1}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

وعليه فإنّ

$$\sum_{k=n}^{\infty}(\gamma_k - \gamma_{k+1}) = \frac{1}{8}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\ln k}{k} - \frac{\ln(k+1)}{k+1}\right) + O\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)$$

ومنه

$$\gamma_n - \gamma = \frac{\ln n}{8n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

أي إنّ المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة تدريجيّاً كما يأتي

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + x_n^2} \quad \text{و} \quad x_0 = 1$$

تُحقّق

$$x_n = \frac{n}{2} - \frac{\ln n}{4} + \gamma + \frac{\ln n}{8n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

حيث γ ثابتٌ حقيقي. في الحقيقة نجد

$$\gamma \approx 1.175177442458$$

وبذا يكتمل الحل. ■

التمرين 19. لتكن (α,β) من $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$، ولنضع $\gamma = \alpha^2 + \beta^2 + \beta$. نعرّف

$$F(x) = \arctan\frac{x+\beta+1}{\alpha} - \arctan\frac{x+\beta}{\alpha} + \arctan\frac{x^2+(2\beta+1)x+\gamma}{\alpha}$$

بسّط عبارة F إلى أبسط صيغة ممكنة، ثُمّ احسب مجموع كلٍّ من المتسلسلات الآتية بعد أن تثبت تقاربها

❶ $$\sum_{n=0}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+3n+3}$$

❷ $$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{n^2+3n+6}$$

❸ $$\sum_{n=0}^{\infty}\arctan\frac{3}{9n^2-15n+5}$$

الحل

في الحقيقة، التابع F معرّفٌ وقابلٌ للاشتقاق على كامل $\mathbb{R}$ ولدينا

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{\alpha}{\alpha^2+(x+\beta+1)^2} - \frac{\alpha}{\alpha^2+(x+\beta)^2} + \frac{(2x+2\beta+1)\alpha}{\alpha^2+(x^2+(2\beta+1)x+\gamma)^2}\\
&= \frac{\alpha((x+\beta)^2-(x+\beta+1)^2)}{\left|x+\beta+1+\mathrm{i}\alpha\right|^2\left|x+\beta-\mathrm{i}\alpha\right|^2} + \frac{(2x+2\beta+1)\alpha}{\alpha^2+((x+\beta)(x+\beta+1)+\alpha^2)^2}\\
&= \frac{-(2x+2\beta+1)\alpha}{\left|(x+\beta+1+\mathrm{i}\alpha)(x+\beta-\mathrm{i}\alpha)\right|^2} + \frac{(2x+2\beta+1)\alpha}{\alpha^2+((x+\beta)(x+\beta+1)+\alpha^2)^2}\\
&= 0
\end{aligned}$$

إذن F تابعٌ ثابتٌ على كامل $\mathbb{R}$. وبملاحظة أنّ $\lim_{x\to\infty}F(x) = \pi/2$ نستنتج أنّه في حالة عدد حقيقي x لدينا

$$\arctan\frac{x+\beta+1}{\alpha} - \arctan\frac{x+\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x^2+(2\beta+1)x+\gamma}{\alpha}$$

وفي حالة عددٍ حقيقي x يُحقّق $x^2+\big(2\beta+1\big)x+\gamma > 0$ يكون لدينا

$$\arctan\frac{x+\beta+1}{\alpha} - \arctan\frac{x+\beta}{\alpha} = \arctan\frac{\alpha}{x^2+(2\beta+1)x+\gamma}$$

❶ ففي حالة $\alpha = \beta = 1$ يكون لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \arctan(n+2) - \arctan(n+1) = \arctan \frac{1}{n^2+3n+3}$$

إذن

$$\forall m \in \mathbb{N}, \ \arctan(m+2) - \arctan(1) = \sum_{n=0}^{m} \arctan \frac{1}{n^2+3n+3}$$

فإذا جعلنا m تسعى إلى $+\infty$ استنتجنا أنّ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+3n+3} = \frac{\pi}{4}$$

❷ وفي حالة $\beta = 1$ و $\alpha = 2$ يكون لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \arctan \frac{n+2}{2} - \arctan \frac{n+1}{2} = \arctan \frac{2}{n^2+3n+6}$$

إذن

$$\forall m \in \mathbb{N}, \ \arctan \frac{m+2}{2} - \arctan(1) = \sum_{n=1}^{m} \arctan \frac{2}{n^2+3n+6}$$

فإذا جعلنا m تسعى إلى $+\infty$ استنتجنا أنّ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2}{n^2+3n+6} = \frac{\pi}{4}$$

❸ وفي حالة $\beta = -\frac{4}{3}$ و $\alpha = \frac{1}{3}$ يكون لدينا

$$\forall n \geq 2, \arctan\left(3n-1\right) - \arctan\left(3n-4\right) = \arctan \frac{3}{9n^2-15n+5}$$

إذن

$$\forall m \geq 2, \ \arctan\left(3m-1\right) - \arctan 2 = \sum_{n=2}^{m} \arctan \frac{3}{9n^2-15n+5}$$

فإذا جعلنا m تسعى إلى $+\infty$ استنتجنا أنّ

$$\sum_{n=2}^{\infty} \arctan \frac{3}{9n^2-15n+5} = \frac{\pi}{2} - \arctan 2$$

ومن ثمّ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\arctan\frac{3}{9n^2-15n+5}=\frac{\pi}{2}-\arctan 2+\arctan\frac{3}{5}-\arctan 3$$

ولكن

$$\begin{aligned}\arctan 2+\arctan 3&=\pi-\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{3}\\&=\pi-\arctan\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

إذن

$$\sum_{n=0}^{\infty}\arctan\frac{3}{9n^2-15n+5}=\arctan\frac{3}{5}-\frac{\pi}{4}$$

وبذا يتحقّق المطلوب. ■

التمرين 20. ليكن λ عدداً حقيقياً من المجال $]0,1[$. نعرّف، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، كثير الحدود $P_n(X)=e^{\mathrm{i}\pi\lambda}(X+1)^{2n}-e^{-\mathrm{i}\pi\lambda}(X-1)^{2n}$ من $\mathbb{C}[X]$.

1. عيّن درجة $P_n(X)$ وثابت الحد الذي له أعلى درجة فيه.
2. نرمز بالرمز x_k إلى المقدار $\mathrm{i}\cot\dfrac{\pi(k+\lambda)}{2n}$. بيّن أنّ $(x_k)_{0\le k\le 2n-1}$ هي جذور لكثير الحدود $P_n(X)$.
3. بحساب مجموع الجذور السابقة، استنتج أنّ

$$\cot(\pi\lambda)=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\cot\left(\frac{\pi(k+\lambda)}{2n}\right)-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\cot\left(\frac{\pi(k+1-\lambda)}{2n}\right)$$

4. أثبت باشتقاق العلاقة السابقة بالنسبة إلى λ أنّ

$$\frac{1}{\sin^2(\pi\lambda)}=\frac{1}{4n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sin^{-2}(\frac{\pi(k+\lambda)}{2n})+\sin^{-2}(\frac{\pi(k+1-\lambda)}{2n})\right)$$

$$\frac{1}{\sin^2(\pi\lambda)}=\frac{1}{4n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cot^2(\frac{\pi(k+\lambda)}{2n})+\cot^2(\frac{\pi(k+1-\lambda)}{2n})\right)+\frac{1}{2n}$$

5. أثبت صحة المتراجحة: $\sin x\le x\le\tan x,\quad \forall x\in[0,\frac{\pi}{2}[$.

6. استنتج مما سبق وجود النهاية $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=-N}^{N}\frac{1}{(k+\lambda)^2}$ ، واحسب قيمتها بدلالة λ ،
واستنتج تقارب وقيمة مجموع المتسلسلتين الآتيتين:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

7. أثبت أنّ المتسلسلة $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+\lambda^2}{(k^2-\lambda^2)^2}$ متقاربة وأنّ:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+\lambda^2}{(k^2-\lambda^2)^2}=\frac{\pi^2}{2\sin^2(\pi\lambda)}-\frac{1}{2\lambda^2}$$

الحل

1. في الحقيقة، من الواضح أنّ $\deg P_n \le 2n$ أمّا أمثال X^{2n} في P_n فهي $2\,\mathrm{i}\sin(\pi\lambda)$.
إذن درجة P_n هي $2n$ وأمثال X^{2n} فيه تساوي $2\,\mathrm{i}\sin(\pi\lambda)$.

2. في حالة $0\le k<2n$، نرمز بالرمز x_k إلى المقدار $\mathrm{i}\cot\frac{\pi(k+\lambda)}{2n}$. عندئذ

$$\begin{aligned}
P_n(x_k) &= e^{\mathrm{i}\pi\lambda}\left(\mathrm{i}\cot\frac{\pi(k+\lambda)}{2n}+1\right)^{2n}-e^{-\mathrm{i}\pi\lambda}\left(\mathrm{i}\cot\frac{\pi(k+\lambda)}{2n}-1\right)^{2n}\\
&= e^{\mathrm{i}\pi\lambda}\left(\frac{\mathrm{i}\exp\left(-\frac{\pi(k+\lambda)}{2n}\mathrm{i}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(k+\lambda)}{2n}\right)}\right)^{2n}-e^{-\mathrm{i}\pi\lambda}\left(\frac{\mathrm{i}\exp\left(\frac{\pi(k+\lambda)}{2n}\mathrm{i}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(k+\lambda)}{2n}\right)}\right)^{2n}\\
&= (-1)^n\left(e^{\mathrm{i}\pi\lambda}\cdot\frac{e^{-\mathrm{i}\pi(k+\lambda)}}{\sin^{2n}\left(\frac{\pi(k+\lambda)}{2n}\right)}-e^{-\mathrm{i}\pi\lambda}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}\pi(k+\lambda)}}{\sin^{2n}\left(\frac{\pi(k+\lambda)}{2n}\right)}\right)\\
&= (-1)^n\left(\frac{e^{-\mathrm{i}\pi k}-e^{\mathrm{i}\pi k}}{\sin^{2n}\left(\frac{\pi(k+\lambda)}{2n}\right)}\right)=0
\end{aligned}$$

إذن جذور P_n هي الأعداد $\{x_0,x_1,\ldots,x_{2n-1}\}$ وهي مختلفة مثنى مثنى لأنّ تابع التظل متناقصٌ تماماً على المجال $]0,\pi[$. ولأنّ درجة $\prod_{k=0}^{2n-1}(X-x_k)$ تساوي درجة P_n أي $2n$ نستنتج أنّه يوجد ثابتٌ α يُحقّق $P_n(X)=\alpha\prod_{k=0}^{2n-1}(X-x_k)$.

ولأنّ ثابت X^{2n} في P_n يساوي $2\,\mathrm{i}\sin(\pi\lambda)$ نستنتج أنّ

$$P_n(X)=2\,\mathrm{i}\sin(\pi\lambda)\prod_{k=0}^{2n-1}\left(X-\mathrm{i}\cot\tfrac{\pi(k+\lambda)}{2n}\right)$$

أو

$$e^{\mathrm{i}\pi\lambda}(X+1)^{2n}-e^{-\mathrm{i}\pi\lambda}(X-1)^{2n}=2\,\mathrm{i}\sin(\pi\lambda)\prod_{k=0}^{2n-1}\left(X-\mathrm{i}\cot\tfrac{\pi(k+\lambda)}{2n}\right)$$

3. نستنتج من المساواة السابقة تَساوي أمثال X^{2n-1} في طرفيها. وعليه فإنّ

$$2n\left(e^{\mathrm{i}\pi\lambda}+e^{-\mathrm{i}\pi\lambda}\right)=-2\,\mathrm{i}\sin(\pi\lambda)\sum_{k=0}^{2n-1}\mathrm{i}\cot\tfrac{\pi(k+\lambda)}{2n}$$

أو

$$\begin{aligned}\cot(\pi\lambda)&=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\cot\tfrac{\pi(k+\lambda)}{2n}=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\cot\tfrac{\pi(k+\lambda)}{2n}+\frac{1}{2n}\sum_{k=n}^{2n-1}\cot\tfrac{\pi(k+\lambda)}{2n}\\&=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\cot\tfrac{\pi(k+\lambda)}{2n}+\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\cot\tfrac{\pi(2n-1-k+\lambda)}{2n}\\&=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\cot\tfrac{\pi(k+\lambda)}{2n}-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\cot\tfrac{\pi(1+k-\lambda)}{2n}\end{aligned}$$

4. لقد أثبتنا أنّ

$$\forall\lambda\in\left]0,1\right[,\quad \cot(\pi\lambda)=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\cot\tfrac{\pi(k+\lambda)}{2n}-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\cot\tfrac{\pi(1+k-\lambda)}{2n}$$

إذن باشتقاق طرفي المساواة السابقة بالنسبة إلى λ نستنتج أنّ

$$\frac{1}{\sin^2\pi\lambda}=\frac{1}{4n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin^{-2}\left(\tfrac{\pi(k+\lambda)}{2n}\right)+\frac{1}{4n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin^{-2}\left(\tfrac{\pi(1+k-\lambda)}{2n}\right)$$

وبالاستفادة من العلاقة $\dfrac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x$ نستنتج أنّ

$$\frac{1}{\sin^2\pi\lambda}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\cot^2\left(\tfrac{\pi(k+\lambda)}{2n}\right)+\frac{1}{4n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\cot^2\left(\tfrac{\pi(1+k-\lambda)}{2n}\right)$$

5. لكن لدينا المتراجحة المألوفة : $\sin x \le x \le \tan x \quad , \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ، التي تنتج من أنّ التابعين $x \mapsto x - \sin x$ و $x \mapsto \tan x - x$ ينعدمان عند $x = 0$ ، وأنّ مشتقّيهما موجبان تماماً على المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

6. نستنتج إذن أنّ

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \cot^2 x \le \frac{1}{x^2} \le \frac{1}{\sin^2 x}$$

وعليه

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2 \pi\lambda} - \frac{1}{2n} &= \frac{1}{4n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\cot^2\left(\tfrac{\pi(k+\lambda)}{2n}\right) + \frac{1}{4n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\cot^2\left(\tfrac{\pi(1+k-\lambda)}{2n}\right)\\
&\le \frac{1}{4n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{4n^2}{\pi^2(k+\lambda)^2} + \frac{1}{4n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{4n^2}{\pi^2(1+k-\lambda)^2}\\
&\le \frac{1}{4n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin^{-2}\left(\tfrac{\pi(k+\lambda)}{2n}\right) + \frac{1}{4n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin^{-2}\left(\tfrac{\pi(1+k-\lambda)}{2n}\right)\\
&= \frac{1}{\sin^2 \pi\lambda}
\end{aligned}$$

أو

$$\frac{1}{\sin^2 \pi\lambda} - \frac{1}{2n} \le \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+\lambda)^2} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(1+k-\lambda)^2} \le \frac{1}{\sin^2 \pi\lambda}$$

وأخيراً

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\lambda} - \frac{\pi^2}{2n} \le \sum_{k=-n}^{n-1}\frac{1}{(k+\lambda)^2} \le \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\lambda}$$

الذي يقتضي أنّ

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\lambda} - \frac{\pi^2}{2n} + \frac{1}{(n+\lambda)^2} \le \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{(k+\lambda)^2} \le \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\lambda} + \frac{1}{(n+\lambda)^2}$$

وبجعل n تسعى إلى اللانهاية نستنتج أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{(k+\lambda)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\lambda}$$

فإذا اخترنا $\lambda = \dfrac{1}{2}$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^2} = \pi^2 .$$

ولكن

$$\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{4}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{4}{(2k+1)^2}$$

إذن

$$8\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \pi^2 \qquad \text{أو} \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

ولمّا كان

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

استنتجنا أنّ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

7. في الحقيقة، لدينا بوجه عام

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{(k+\lambda)^2} &= \frac{1}{\lambda^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+\lambda)^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(-k+\lambda)^2}\\
&= \frac{1}{\lambda^2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+\lambda)^2} + \frac{1}{(k-\lambda)^2}\right)\\
&= \frac{1}{\lambda^2} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+\lambda^2}{(k^2-\lambda^2)^2}
\end{aligned}$$

إذن $\displaystyle\frac{\pi^2}{\sin^2\pi\lambda} = \frac{1}{\lambda^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+\lambda^2}{(k^2-\lambda^2)^2}$ أو

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+\lambda^2}{(k^2-\lambda^2)^2} = \frac{\pi^2}{2\sin^2(\pi\lambda)} - \frac{1}{2\lambda^2}$$

وبذا يكتمل الحل.

التمرين 21. لتكن x من $]2,+\infty[$ ، ولنعرّف المتتالية التدريجيّة $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كما يلي :

$$\lambda_0 = x, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_{n+1} = \lambda_n^2 - 2$$

1. أثبت أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد z من المجال $]1,+\infty[$ يُحقّق

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = z^{2^n} + \frac{1}{z^{2^n}}$$

2. أثبت أيضاً أنه $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n} = \dfrac{z^2-1}{z} \cdot \dfrac{z^{2^{n+1}}}{z^{2^{n+2}}-1}$.

3. لاحظ أنّ $\dfrac{u}{u^2-1} = \dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u^2-1}$ في حالة $1 < u$ ، واستنتج أنّ المتسلسلة $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n}$ متقاربة واحسب مجموعها.

الحل

1. بافتراض صحّة النتيجة المطلوبة في حالة $n = 0$ نرى أنّ z يجب أن يكون حلّ المعادلة $x = z + z^{-1}$ الذي ينتمي إلى المجال $\left]1,+\infty\right[$ ، أي

$$z = \frac{x + \sqrt{x^2-4}}{2}$$

لنعرّف إذن z بهذه الصيغة، عندئذ يكون لدينا $\lambda_0 = z^{2^0} + z^{-2^0}$. ومن ثَمّ

$$\lambda_1 = \lambda_0^2 - 2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = z^2 + \frac{1}{z^2}$$

وإذا افترضنا بوجه عام أنّ $\lambda_n = z^{2^n} + z^{-2^n}$ كان لدينا

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n^2 - 2 = \left(z^{2^n} + \frac{1}{z^{2^n}}\right)^2 - 2 = z^{2^{n+1}} + \frac{1}{z^{2^{n+1}}}$$

إذن

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = z^{2^n} + \frac{1}{z^{2^n}} .$$

2. لنثبت بالتدريج على العدد n أنّ

$$\frac{1}{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n} = \frac{z^2-1}{z} \cdot \frac{z^{2^{n+1}}}{z^{2^{n+2}}-1} .$$

في الحقيقة إنّ هذه المساواة صحيحة وضوحاً في حالة $n=0$. لنفترض صحّتها إذن في حالة n عندئذ

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n\lambda_{n+1}} &= \frac{z^2-1}{z}\cdot\frac{z^{2^{n+1}}}{z^{2^{n+2}}-1}\cdot\frac{1}{z^{2^{n+1}}+\dfrac{1}{z^{2^{n+1}}}}\\ &= \frac{z^2-1}{z}\cdot\frac{z^{2^{n+1}}}{z^{2^{n+2}}-1}\cdot\frac{z^{2^{n+1}}}{z^{2^{n+2}}+1}\\ &= \frac{z^2-1}{z}\cdot\frac{z^{2^{n+2}}}{z^{2^{n+3}}-1}\end{aligned}$$

فهي إذن أيضاً صحيحة في حالة $n+1$.

3. فإذا استفدنا من المساواة الواضحة $\frac{1}{u^2-1}-\frac{1}{u-1}=\frac{u}{u^2-1}$ في حالة $1<u$، استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n} &= \frac{z^2-1}{z}\cdot\frac{z^{2^{n+1}}}{(z^{2^{n+1}})^2-1}\\ &= \frac{z^2-1}{z}\cdot\left(\frac{1}{z^{2^{n+1}}-1}-\frac{1}{z^{2^{n+2}}-1}\right)\end{aligned}$$

وعليه فإنّ

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n} &= \frac{z^2-1}{z}\cdot\left(\frac{1}{z^2-1}-\frac{1}{z^{2^{m+2}}-1}\right)\\ &= \frac{1}{z}-\frac{z^2-1}{z(z^{2^{m+2}}-1)}\end{aligned}$$

فإذا جعلنا m تسعى إلى اللانهاية واستفدنا من كون $z>1$ استنتجنا أنّ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n}=\frac{1}{z}=\frac{2}{x+\sqrt{x^2-4}}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 22. لنتأمّل المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة كما يلي :

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\quad \forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

1. أوجد عدداً **عادياً** $M < 2$ يُحقّق الشرط : $a_n \le M^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

2. أثبت أنّه مهما تكن x من $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$، تكن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة. ثُمّ عبّر عن مجموعها $F(x)$ بصيغة بسيطة بدلالة x.

3. عيِّن الأعداد A و B و α و β ليكون

$$\forall x\in\left[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right],\quad F(x) = \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x}$$

4. استنتج من ذلك صيغة a_n بدلالة n.

الحل

1. في الحقيقة، ليكن M عدداً حقيقيّاً أكبر من 1 ويُحقِّق الشرط $M+1\le M^2$. عندئذ يكون لدينا بالضرورة $\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n \le M^n$. في الحقيقة، من الواضح أنّ $a_0 \le M^0$ و $a_1 \le M^1$. لنفترض إذن أننا قد أثبتنا أنّ $a_k \le M^k$ في حالة $0\le k\le n+1$ عندئذ يكون لدينا

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \le \big(1+M\big)M^n \le M^{n+2}$$

فالنتيجة صحيحة أيضاً في حالة $n+2$، أي نكون قد أثبتنا بالتدريج أنّ $a_n \le M^n$ أياً كان $n\in\mathbb{N}$. يكفي إذن أن نجد عدداً عاديّاً M يُحقِّق الشرطين $1\le M<2$ و $M+1\le M^2$. في الحقيقة، إنّ $M = 5/3$ يفي بالغرض.

2. من الواضح أنّ جميع حدود المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ موجبة. ولأنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \left|a_n x^n\right| \le M^n\left|x\right|^n \le \left(\frac{M}{2}\right)^n$$

والمتسلسلة الهندسيّة $\sum (M/2)^n$ متقاربة لأنّ $M<2$ نستنتج أنّ المتسلسلة $\sum a_n x^n$ متقاربة بالإطلاق أياً كانت قيمة x من المجال $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. لنعرّف إذن $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ عندما تنتمي x إلى $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

لتكن x من المجال $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$، عندئذ

$$\begin{aligned} F(x) &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\ &= x + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} \\ &= x + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+1} + a_n\right) x^{n+2} \\ &= x + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= x + x\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

وأخيراً

$$\forall x \in [-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}], \quad F(x) = x + (x + x^2)F(x)$$

ومن ثمّ

$$\forall x \in [-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}], \quad F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

3. لنلاحظ أنّ

$$1 - x - x^2 = \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 - \frac{5}{4}x^2 = \left(1 - \varphi x\right)\left(1 - \psi x\right)$$

وقد عرّفنا

$$\psi = -\frac{1}{\varphi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{و} \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

ومن ثمّ

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \psi x}\right) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

إذن

$$\forall x \in [-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}], \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \psi x}\right)$$

وهنا نلاحظ أنّ

$$\frac{1}{1-\varphi x}=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n x^n \qquad ☞ \quad |x|<\frac{1}{\varphi}=-\psi$$
$$\frac{1}{1-\psi x}=\sum_{n=0}^{\infty}\psi^n x^n \qquad ☞ \quad |x|<-\frac{1}{\psi}=\varphi$$

وعليه يكون لدينا

$$\forall x\in[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}],\quad F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^n-\psi^n}{\sqrt{5}}x^n$$

وتتيح لنا هذه المساواة أن نثبت بالتدريج على العدد n أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

ملاحظة. تسمّى المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية أعداد فيبوناتشي Fibonacci، ويسمّى العدد $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ النسبة الذهبية.

التمرين 23. في هذا التمرين يرمز الرمز $\lfloor x\rfloor$ إلى الجزء الصحيح للعدد x.

1. أثبت أنّه $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left(\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor-\lfloor\sqrt{n}\rfloor\right)\in\{0,1\}$، وعيّن الشرط اللازم والكافي حتّى يكون المقدار $\left|\sqrt{n+1}\right|-\left|\sqrt{n}\right|$ مساوياً 1.
2. نعرّف في حالة $1\leq n$، المقدار $b_n=\dfrac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor-\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$، أثبت تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$، واحسب مجموعها.

الحل

1. في الحقيقة، ليكن $p=\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ عندئذ يكون لدينا $p\leq\sqrt{n}<p+1$ ومن ثَمّ

$$p^2+1\leq n+1<(p+1)^2+1$$

وعليه

$$p^2<n+1\leq(p+1)^2$$

أي $p+1 \leq \sqrt{n+1} < p$ أو

$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor < \sqrt{n+1} \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$$

وهذا يثبت أنّ

$$\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor \in \left\{\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1\right\}$$

ويثبتُ أيضاً أنّ $\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$ إذا وفقط إذا كان $\sqrt{n+1} \in \mathbb{N}^*$ أي إذا وفقط إذا وُجد عددٌ طبيعي q يُحقّق $n = q^2 - 1$. إذن، إذا عرّفنا

$$\mathcal{N} = \left\{q^2 - 1 : q \in \mathbb{N}^*\right\}$$

ورمزنا بالرمز $\mathbb{1}_{\mathcal{N}}$ إلى التابع المميِّز للمجموعة $\mathcal{N}$ كان

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor = \mathbb{1}_{\mathcal{N}}(n)$$

2. نعرّف إذن

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n} = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{\mathcal{N}}(n)$$

فيكون لدينا

$$\forall q \geq 2, \quad \sum_{n=(q-1)^2}^{q^2-1} b_n = \frac{1}{q^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q(q-1)} - \frac{1}{(q+1)q}\right)$$

ومن ثَمّ، بجمع هذه المقادير عندما تتحوّل q من 2 حتى m نجد

$$\forall m \geq 2, \quad \sum_{n=1}^{m^2-1} b_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(m+1)m}\right)$$

وهذا يثبتُ تقارب المتسلسلة $\sum b_n$ ويثبتُ أيضاً أنّ

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{4}$$

وهو المجموع المطلوب حسابه. ■

التمرين 24. ليكن α عدداً من $\mathbb{R}_+^*$. نهدف إلى دراسة تقارب المتسلسلة $\sum a_n$ في حالة

$$a_n = \ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

1. أثبت أنّ $\frac{1}{2}x^2g(x) \le x - \ln(1+x) \le \frac{1}{2}x^2h(x)$ ،$\forall x > -1,$ حيث h و g هما تابعان موجبان ويسعيان إلى 1 عندما تسعى x إلى 0.

2. استفدْ مما سبق لتدرس تقارب المتسلسلة $\sum a_n$.

الحل

1. هناك طرائق عدّة لإثبات صحّة المتراجحة. يمكننا مثلاً أن نلاحظ أنّه في حالة $x > -1$ لدينا

$$x - \ln(1+x) = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}\,t = \int_0^x \frac{t}{1+t}\mathrm{d}\,t = x^2\int_0^1 \frac{u}{1+xu}\mathrm{d}\,u$$

وبملاحظة أنّه في حالة $x \ge 0$ لدينا

$$\forall u \in [0,1], \quad \frac{u}{1+x} \le \frac{u}{1+xu} \le u$$

وفي حالة $-1 < x < 0$ لدينا

$$\forall u \in [0,1], \quad u \le \frac{u}{1+xu} \le \frac{u}{1+x}$$

نستنتج أنّ

$$\begin{aligned} x \ge 0 \quad &\Rightarrow \frac{x^2}{2(1+x)} \le x - \ln(1+x) \le \frac{x^2}{2} \\ -1 < x < 0 \quad &\Rightarrow \frac{x^2}{2} \le x - \ln(1+x) \le \frac{x^2}{2(1+x)} \end{aligned}$$

وعلى هذا، إذا عرّفنا

$$g(x) = \min\left(1, \frac{1}{1+x}\right) \text{ و } h(x) = \max\left(1, \frac{1}{1+x}\right)$$

استنتجنا أنّ التابعين h و g يأخذان قيماً موجبة تماماً، وأنّ $\lim\limits_{x\to0} h(x) = \lim\limits_{x\to0} g(x) = 1$ ،

وأخيراً أنّ

$$-1 < x \Rightarrow \frac{1}{2}x^2g(x) \le x - \ln(1+x) \le \frac{1}{2}x^2h(x)$$

2. لنعرّف في حالة n من $\mathbb{N}^*$ المقدار

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} - \ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

بناءً على نتيجة السؤال الأوّل، نلاحظ أنّ حدود المتتالية $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ موجبة، وأنّ $\lim_{n\to\infty} n^{2\alpha}b_n = \frac{1}{2}$. وهنا نناقش الحالات الآتية:

- حالة $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$. هنا نستنتج من $b_n \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}}$ أنّ المتسلسلة $\sum b_n$ متباعدة، ولمّا كانت المتسلسلة المتناوبة $\sum(-1)^{n-1}/n^\alpha$ متقاربة استنتجنا أنّ المتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة لأنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} - b_n$$

بل إنّ $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_k = -\infty$.

- حالة $\frac{1}{2} < \alpha$. هنا نستنتج من $b_n \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}}$ أنّ المتسلسلة $\sum b_n$ متقاربة، ولمّا كانت المتسلسلة المتناوبة $\sum(-1)^{n-1}/n^\alpha$ متقاربة، استنتجنا أنّ المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة أيضاً.

نتيجة. تتقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ حيث $u_n = \prod_{k=1}^n\left(1 - \frac{(-1)^k}{k^\alpha}\right)$ ، من عدد حقيقي موجب ℓ . ويكون ℓ مساوياً 0 في حالة $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$. ■

التمرين 25. متراجحة Carlman . لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية حقيقيّة حدودها موجبة. ولنعرّف انطلاقاً منها المتتالية $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ كما يلي

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

نهدف في هذا التمرين إلى إثبات أنّ تقارب المتسلسلة $\sum a_n$ يقتضي تقارب المتسلسلة $\sum b_n$.

1. أثبت، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، صحّة المتراجحة التالية:

$$\forall(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}_+)^n,\ \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

2. لتكن n من $\mathbb{N}^*$، ولتكن $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ أعداداً موجبة تماماً. أثبت أنّ

$$b_n\le\frac{\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\lambda_k}$$

3. لتكن m من $\mathbb{N}^*$، ولتكن $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ أعداداً موجبة تماماً، ولنعرّف

$$\Delta_m=\max\left\{\frac{1}{\lambda_k}\sum_{n=k}^{m}\frac{\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}}{n}:k\in\mathbb{N}_m\right\}$$

أثبت أنّ $\sum_{k=1}^{m}a_k$ Δ_m $\le$ $\sum_{n=1}^{m}b_n$.

4. نختار الأعداد $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ليتحقّق الشرط $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sqrt[n]{\lambda_1\cdots\lambda_n}=\frac{1}{n+1}$.

أوجد عنصراً راجحاً على Δ_m في حالة m من $\mathbb{N}^*$، واستنتج متراجحة كارلمان :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}\le e\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

ومن ثَمّ فإنّ تقارب المتسلسلة $\sum a_n$ يقتضي تقارب المتسلسلة $\sum b_n$.

5. أيَمكن أن نستبدل بالعدد e ثابتاً أصغر منه في متراجحة كارلمان ؟

الحل

1. هذه هي المتراجحة المعروفة بين المتوسّطين الحسابي والهندسي، يمكننا لإثباتها أن نبدأ بإثبات الخاصّة التالية بالتدريج على العدد n.

$$\mathbb{P}_n:\forall(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}_+)^n,\quad x_1+x_2+\cdots+x_n=n\Rightarrow x_1x_2\cdots x_n\le 1$$

في الحقيقة، إنّ $\mathbb{P}_1$ صحيحة وضوحاً.

لنثبت صحّة $\mathbb{P}_2$. إنّ الشرط $x_1+x_2=2$ يقتضي أنّ $1-x_1=-(1-x_2)$ ومن ثَمّ

$$(1-x_1)(1-x_2)\le 0$$

وهذا يُكافئ $x_1x_2\le 1$.

لنفترض، بوجه عامّ صحة $\mathbb{P}_{n-1}$. ولتكن $(x_1,\dots,x_n)$ من $(\mathbb{R}_+)^n$ تُحقّق

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=n$$

عندئذ، يمكننا دون الإخلال بعموميّة الإثبات، أن نفترض أنّ $x_1 \le x_k \le x_n \quad \forall k \in \mathbb{N}_n,$ ،
وعندئذ لا بُدّ أن يكون $nx_1 \le \sum_{k=1}^{n} x_k \le nx_n$ ، ومنه $x_1 \le 1 \le x_n$ ، أي $(1-x_1)(1-x_n) \le 0$ ، أو

$$x_1x_n \le x_1 + x_n - 1$$

وبالاستفادة من الفرْض، نستنتج أنّ

$$x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_1x_n \le x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n - 1 = n - 1$$

إذن يوجد عددٌ حقيقي λ أكبر أو يساوي الواحد يُحقّق

$$\lambda x_2 + \cdots + \lambda x_{n-1} + \lambda x_1 x_n = n - 1$$

وبتطبيق الخاصّة $\mathbb{P}_{n-1}$ نستنتج أنّ

$$\lambda^{n-1} x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n \le 1$$

وهذا يقتضي أنّ $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n \le 1$ لأنّ $\lambda^{n-1} \ge 1$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $\mathbb{P}_n$ صحيحة.

لتكن $(x_1,\ldots,x_n)$ من $(\mathbb{R}_+)^n$ ، ولنعرّف $\lambda = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ ، عندئذ يكون لدينا

$$\frac{x_1}{\lambda} + \frac{x_2}{\lambda} + \cdots + \frac{x_n}{\lambda} = n$$

واستناداً إلى $\mathbb{P}_n$ نستنتج أنّ $\dfrac{x_1}{\lambda} \cdot \dfrac{x_2}{\lambda} \cdot \cdots \cdot \dfrac{x_n}{\lambda} \le 1$ أو $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \le \lambda$ وهي المتراجحة المطلوبة.

2. لتكن n من $\mathbb{N}^*$ ، ولتكن $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ أعداداً موجبة تماماً. عندئذ

$$\begin{aligned}
b_n &= \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} = \sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \frac{a_1}{\lambda_1}\frac{a_2}{\lambda_2}\cdots\frac{a_n}{\lambda_n}}\\
&= \sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}\sqrt[n]{\frac{a_1}{\lambda_1}\frac{a_2}{\lambda_2}\cdots\frac{a_n}{\lambda_n}}\\
&\le \frac{\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\lambda_k}
\end{aligned}$$

وقد استفدنا من المتراجحة التي أثبتناها في 1. لكتابة المتراجحة الأخيرة.

3. لتكن m من $\mathbb{N}^*$، ولتكن $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ أعداداً موجبة تماماً، ولنعرّف

$$\Delta_m = \max\left\{\frac{1}{\lambda_k}\sum_{n=k}^{m}\frac{\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}}{n} : k \in \mathbb{N}_m\right\}$$

عندئذ استناداً إلى ما أثبتناه في 2. يكون لدينا

$$b_n \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\frac{\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}}{n}a_k \quad \text{في حالة} \quad 1 \leq n \leq m$$

وبجمع هذه المتراجحات طرفاً إلى طرف نجد

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}b_n &\leq \sum_{n=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\frac{\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}}{n}a_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{n=k}^{m}\frac{\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}}{n}\right)a_k \leq \Delta_m\sum_{k=1}^{m}a_k\end{aligned}$$

4. نختار الأعداد $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ليتحقّق الشرط $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt[n]{\lambda_1\cdots\lambda_n} = \dfrac{1}{n+1}$. أي

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lambda_1\cdots\lambda_n = \frac{1}{(n+1)^n} \quad \text{و} \quad \lambda_1\cdots\lambda_{n-1} = \frac{1}{n^{n-1}}$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda_n = \frac{n^{n-1}}{(n+1)^n}$$

وعليه مهما تكن k من $\mathbb{N}_m$ يكن

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{m}\frac{\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}}{n} &= \sum_{n=k}^{m}\frac{1}{n(n+1)}\\ &= \sum_{n=k}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{k}-\frac{1}{m+1}\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\frac{1}{\lambda_k}\sum_{n=k}^{m}\frac{\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}}{n} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\left(1-\frac{k}{m+1}\right)$$

ولكن نستنتج من المتراجحة $1+x\leq e^x$ ومن كون $1\leq k\leq m$ أنّ

$$\forall k\in\mathbb{N}_m,\quad \frac{1}{\lambda_k}\sum_{n=k}^{m}\frac{\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}}{n}\leq e\cdot\left(1-\frac{1}{m+1}\right)=\frac{m}{1+m}e<e$$

إذن

$$\forall m\in\mathbb{N}^*,\quad \Delta_m<e$$

وبالعودة إلى نتيجة 3. يمكننا أن نكتب

$$\forall m\in\mathbb{N}^*,\quad \sum_{n=1}^{m}b_n\leq e\cdot\sum_{k=1}^{m}a_k$$

وعليه فإنّ تقارب المتسلسلة $\sum a_n$ يقتضي تقارب المتسلسلة $\sum b_n$، وتتحقّق متراجحة كارلمان:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leq e\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

5. لنفترض أنّ ثابتاً Λ من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّق المتراجحة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leq \Lambda\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

وذلك مهما كانت المتتالية ذات الحدود الموجبة $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ التي تكون عندها المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة. لنختر إذن عدداً p من $\mathbb{N}^*$، ولنعرّف المتتالية ذات الحدود الموجبة $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ بالصيغة $a_k=\frac{1}{k}$ في حالة $k\in\mathbb{N}_p$ و $a_k=0$ في حالة $k>p$. عندئذ تأخذ المتراجحة السابقة الشكل

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sqrt[k]{k!}}\leq\Lambda\cdot\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}=\Lambda\cdot H_p$$

حيث $H_p=\sum_{k=1}^{p}1/k$ هو العدد التوافقي المعروف.

إذن

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{H_p}\cdot\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sqrt[k]{k!}}\leq\Lambda \qquad (*)$$

ولكن إذا عرّفنا $u_k=\dfrac{k^k}{k!}$ لاحظنا أنّ $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{u_{k+1}}{u_k}=e$ ، ومن ثَمّ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{u_k}=e$. أي إنّ $\dfrac{1}{\sqrt[k]{k!}}\sim\dfrac{e}{k}$ ، ولأنّ $\sum\dfrac{1}{k}$ متباعدة نستنتج أنّ $e\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\sim\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt[k]{k!}}$ ، وهذا يعني أنّ

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{1}{H_p}\cdot\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sqrt[k]{k!}}\right)=e$$

وبالعودة إلى $(*)$ نرى أنّه لا بُدّ أن يكون $e\leq\Lambda$ ، فلا يمكن أن نستبدل بالثابت e في متراجحة كارلمان ثابتاً أصغر منه. ■

التمرين 26. نهدف في هذا التمرين إلى دراسة تقارب المتسلسلة $\sum_{n\geq1}a_n$ التي حدّها العام هو

$$a_n=\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^\alpha}$$

حيث α من $\mathbb{R}$ ، و $\lfloor t\rfloor$ هو الجزء الصحيح للعدد t .

1. a. أثبت أنّ : $\forall p\in\mathbb{N},\quad \sum\limits_{k=p^2}^{(p+1)^2-1}(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}=(-1)^p(2p+1)$.

b. أثبت أنّ : $\forall m\in\mathbb{N},\quad \sum\limits_{k=0}^{m^2-1}(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}=(-1)^{m-1}m$.

c. لتكن n من $\mathbb{N}^*$ ، ولنضع $m=\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. أثبت أنّ :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}=(-1)^m\left(n+1-m^2-m\right)$$

d. استنتج ممّا سبق أنّ $\forall n\in\mathbb{N},\quad \left|\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}\right|\leq\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor$.

2. لنضع $A_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}$ ، أثبت في حالة n من $\mathbb{N}^*$ أنّ

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{A_n}{(n+1)^\alpha}-A_0+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)A_k$$

واستنتج تقارب المتسلسلة $\sum_{n\geq1}a_n$ في حالة $\alpha>\dfrac{1}{2}$.

3. نفترض أنّ $\alpha \leq \frac{1}{2}$. أثبت في حالة p من $\mathbb{N}^*$ أنّ

$$(-1)^p \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} a_k \geq p^{1-2\alpha}$$

واستنتج أنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} a_n$ متباعدة في حالة $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

الحل

1. في الحقيقة، إذا كان $p^2 \leq k < (p+1)^2$ كان $p = \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor} &= \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} (-1)^p \\ &= (-1)^p \left((p+1)^2 - p^2\right) \\ &= (-1)^p(2p+1)\end{aligned}$$

وبجمع هذه المساويات عندما تتحوّل p من 0 إلى $m-1$ نجد

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m^2-1} (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor} &= \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p(2p+1) \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} \left((-1)^p(p+1) - (-1)^{p-1}(p)\right) \\ &= (-1)^{m-1} m\end{aligned}$$

ليكن إذن n عدداً من $\mathbb{N}^*$ ولنعرّف $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. عندئذ

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor} &= \sum_{k=0}^{m^2-1} (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor} + \sum_{k=m^2}^{n} (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor} \\ &= (-1)^{m-1} m + (-1)^m (n - m^2 + 1) \\ &= (-1)^m (n + 1 - m - m^2)\end{aligned}$$

ولكن $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ يقتضي أنّ $m \leq \sqrt{n} < m+1$ ومن ثَمّ

$$m^2 \leq n < (m+1)^2$$

ومنه

$$1 - m \leq n + 1 - m - m^2 < (m+1)^2 + 1 - m - m^2$$

وهذا يقتضي

$$1-m \le n+1-m-m^2 \le 1+m$$

إذن في حالة $n+1<(m+1)^2$ يكون $n+1-m-m^2 < 1+m$ ومن ثَمّ

$$\left|n+1-m-m^2\right| \le m \le \lfloor\sqrt{n+1}\rfloor$$

وفي حالة $n+1=(m+1)^2$ يكون $n+1-m-m^2 = 1+m$ ومن ثَمّ

$$\left|n+1-m-m^2\right| = m+1 = \lfloor\sqrt{n+1}\rfloor$$

إذن في جميع الأحوال لدينا

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}\right| \le \left\lfloor\sqrt{n+1}\right\rfloor$$

2. لنضع $A_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}$ ، ولتكن n من $\mathbb{N}^*$ ، عندئذ

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}a_k &= \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k-A_{k-1}}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{n}\frac{A_{k-1}}{k^\alpha}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{k^\alpha} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{A_k}{(k+1)^\alpha}\\
&= \frac{A_n}{(n+1)^\alpha} - A_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{(k+1)^\alpha}\\
&= \frac{A_n}{(n+1)^\alpha} - A_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)A_k
\end{aligned}$$

ولكن

$$\left(\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) = \frac{k}{\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^\alpha - 1\right)\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right)^\alpha\cdot\frac{\alpha}{k^{\alpha+1}}$$

إذن

$$\left(\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) \sim \frac{\alpha}{k^{\alpha+1}}$$

وهذا يبرهن أنّ

$$\left(\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)A_k = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+1/2}}\right)$$

وعليه في حالة $\frac{1}{2} < \alpha$، يتحقّق ما يلي:

- أوّلاً، تتقارب المتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)A_k$$

- وثانياً $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{(n+1)^\alpha}=0$ لأنّ

$$\frac{A_n}{(n+1)^\alpha}=O\left(n^{(1/2)-\alpha}\right).$$

ومنه، في حالة $\frac{1}{2} < \alpha$، تكون المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة ويكون

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=-1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)A_k$$

3. نفترض أنّ $\alpha \leq \frac{1}{2}$. عندئذ في حالة p من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{aligned}(-1)^p\sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1}a_k &= \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1}\frac{1}{k^\alpha}\\
&\geq (2p+1)\min_{p^2\leq k<(p+1)^2}\frac{1}{k^\alpha}\\
&\geq \frac{2p+1}{\max(p^{2\alpha},(p+1)^{2\alpha})}\\
&= \frac{2p+1}{p^{2\alpha}}\frac{1}{\max(1,(1+1/p)^{2\alpha})} \quad : ☞ \quad \left(1+\frac{1}{p}\right)^{2\alpha}\leq 1+\frac{1}{p}\\
&\geq \left(\frac{2p+1}{p+1}\right)p^{1-2\alpha} > p^{1-2\alpha}\end{aligned}$$

وهذا يثبت أنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}a_n$ لا تُحقّق شرط كوشي للتقارب في حالة $\alpha \leq \frac{1}{2}$، فالمتسلسلة $\sum_{n\geq 1}a_n$ متباعدة في هذه الحالة. ■

التمرين 27. ليكن n عدداً طبيعيّاً من $\mathbb{N}^*$، يوجد عددٌ طبيعي وحيد $k(n)$ يُحقِّق المتراجحة $2^{k(n)} \le n < 2^{k(n)+1}$، نعرّف إذن $L(n) = 2^{k(n)}$. وإذا كانت الكتابة بالأساس 2 للعدد n هي $n = \sum_{k\ge0} \varepsilon_k 2^k$ عرّفنا $S(n) = \sum_{k\ge0} \varepsilon_k$، أي مجموع خانات العدد n في كتابته الاثنانيّة. نهدف إلى دراسة المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(L(n))^\alpha S(n)}$$

في حالة $\alpha > 0$، وحساب مجموعها $T(\alpha)$ عند تقاربها.

الحل

① **دراسة التقارب.** لنلاحظ أوّلاً أنّ المتراجحة $2^{k(n)} \le n < 2^{k(n)+1}$ تقتضي

$$L(n) \le n < 2L(n)$$

كما نستنتج من المتراجحة $2^{k(n)} \le n < 2^{k(n)+1}$ أنّ $n = \sum_{k=0}^{k(n)} \varepsilon_k 2^k$، ومن ثَمّ فإنّ

$$1 \le S(n) \le k(n) + 1 \le 1 + \log_2(n)$$

وعلى هذا نرى أنّ

$$\forall n \ge 2, \quad \frac{n^\alpha}{2^\alpha} \le (L(n))^\alpha S(n) \le n^\alpha \big(1 + \log_2(n)\big) \le 4n^\alpha \ln n$$

إذن

$$\forall n \ge 2, \quad \frac{1}{4n^\alpha \ln n} \le \frac{1}{(L(n))^\alpha S(n)} \le \frac{2^\alpha}{n^\alpha}$$

ولمّا كانت المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ متقاربة في حالة $\alpha > 1$، والمتسلسلة $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln n}$ متباعدة في حالة $\alpha \le 1$ استنتجنا أنّ المتسلسلة $\sum \frac{1}{(L(n))^\alpha S(n)}$ تتقارب إذا وفقط إذا كان $\alpha > 1$.

② **حساب المجموع.** نفترض أنّ $\alpha > 1$. لتكن k من $\mathbb{N}$ و s من $\mathbb{N}^*$. عندئذ، نعرّف المجموعة $\mathcal{A}(k,s)$ بأنها مجموعة الأعداد الطبيعيّة n من $\mathbb{N}^*$ التي تُحقّق $k(n) = k$ و $S(n) = s$، أي

$$\mathcal{A}(k,s) = \big\{ n : S(n) = s, k(n) = k \big\}$$

عندئذ تؤلّف الجماعة $\left(\mathcal{A}(k,s)\right)_{(k,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ تجزئة للمجموعة $\mathbb{N}^*$. وبسبب تقارب المتسلسلة المدروسة في هذه الحالة، وكون حدودها موجبة نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(L(n))^\alpha S(n)} &= \sum_{(k,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}\left(\sum_{n\in\mathcal{A}(k,s)}\frac{1}{(L(n))^\alpha S(n)}\right)\\ &= \sum_{(k,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}\frac{\operatorname{card}\mathcal{A}(k,s)}{2^{\alpha k}s}\end{aligned}$$

ولكن في حالة $s>k+1$ يكون $\mathcal{A}(k,s)=\varnothing$ أمّا في حالة $s\leq k+1$ فلدينا

$$\mathcal{A}(k,s)=\left\{2^k+\sum_{p\in B}2^{p-1} : B\subset\mathbb{N}_k, \operatorname{card}(B)=s-1\right\}$$

إذن

$$\operatorname{card}\mathcal{A}(k,s)=C_k^{s-1}=\frac{k\,!}{(k-s+1)!(s-1)!}=\frac{s}{k+1}C_{k+1}^s$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(L(n))^\alpha S(n)} &= \sum_{(k,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}\frac{\operatorname{card}\mathcal{A}(k,s)}{2^{\alpha k}s}\\ &= \sum_{(k,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}\frac{C_{k+1}^s}{2^{\alpha k}(k+1)}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\alpha k}(k+1)}\sum_{s=1}^{k+1}C_{k+1}^s\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k+1}-1}{2^{\alpha k}(k+1)} : \qquad ☞\int_1^2 x^k\,\mathrm{d}\,x=\frac{2^{k+1}-1}{k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\alpha k}}\int_1^2 x^k\,\mathrm{d}\,x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_1^2\left(\frac{x}{2^\alpha}\right)^k\mathrm{d}\,x\right)\\ &= \int_1^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2^\alpha}\right)^k\mathrm{d}\,x=\int_1^2\frac{\mathrm{d}\,x}{1-x/2^\alpha}=2^\alpha\ln\left(\frac{2^\alpha-1}{2^\alpha-2}\right)\end{aligned}$$

وهي قيمة المجموع المطلوبة. ∎

التمرين 28.

1. في حالة $a>1$ و $0<r<a$، احسب، باستعمال تكامل، المقدارين

$$\delta(a,r)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^n\,(na+r)} \quad \text{و} \quad \Delta(a,r)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^n\,(na+r)}$$

2. أثبت صحّة المساواتين التاليتين :

$$\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(16)^n\,(8n+1)}\left(\frac{6}{8n+4}+\frac{4}{8n+5}+\frac{5}{8n+6}\right)$$

$$\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\left(\frac{2}{4n+1}+\frac{2}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}\right)$$

الحل

1. لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a^k(ka+r)}&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a^k}\int_0^1 t^{ak+r-1}\,\mathrm{d}t &&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1\left(\frac{t^a}{a}\right)^k t^{r-1}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{t^a}{a}\right)^k\right)t^{r-1}\,\mathrm{d}t &&=\int_0^1\frac{1-(t^a/a)^n}{1-t^a/a}\cdot t^{r-1}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{t^{r-1}}{1-t^a/a}\,\mathrm{d}t-\underbrace{\int_0^1\frac{(t^a/a)^n}{1-t^a/a}\cdot t^{r-1}\,\mathrm{d}t}_{R_n}\end{aligned}$$

ولكن

$$0\leq R_n\leq\int_0^1\frac{(t^a/a)^n}{1-1/a}\cdot t^{r-1}\,\mathrm{d}t=\frac{a}{a-1}\cdot\frac{1}{a^n(an+r)}$$

وبوجه خاص لدينا

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0$$

إذن

$$\Delta(a,r)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^n(na+r)}=\int_0^1\frac{t^{r-1}}{1-t^a/a}\,\mathrm{d}t$$

وبأسلوب مماثل نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{a^k(ka+r)} &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{a^k}\int_0^1 t^{ak+r-1}\,\mathrm{d}\,t \;= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1\left(-\frac{t^a}{a}\right)^k t^{r-1}\,\mathrm{d}\,t\\ &= \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{t^a}{a}\right)^k\right)t^{r-1}\,\mathrm{d}\,t \;= \int_0^1\frac{1-(-t^a/a)^n}{1+t^a/a}\cdot t^{r-1}\,\mathrm{d}\,t\\ &= \int_0^1\frac{t^{r-1}}{1+t^a/a}\,\mathrm{d}\,t+(-1)^{n-1}\underbrace{\int_0^1\frac{(t^a/a)^n}{1+t^a/a}\cdot t^{r-1}\,\mathrm{d}\,t}_{R'_n}\end{aligned}$$

ولكن

$$0\le R'_n\le\int_0^1\left(\frac{t^a}{a}\right)^n t^{r-1}\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{a^n(an+r)}$$

وبوجه خاص لدينا

$$\lim_{n\to\infty}R'_n=0$$

إذن

$$\delta(a,r)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^n(na+r)}=\int_0^1\frac{t^{r-1}}{1+t^a/a}\,\mathrm{d}\,t$$

2. لإثبات صحّة العلاقة الأولى نلاحظ ما يأتي:

- لمّا كان

$$\begin{aligned}\frac{6}{(8n+1)(8n+4)}&=\frac{2}{8n+1}-\frac{2}{8n+4}\\ \frac{4}{(8n+1)(8n+5)}&=\frac{1}{8n+1}-\frac{1}{8n+5}\\ \frac{5}{(8n+1)(8n+6)}&=\frac{1}{8n+1}-\frac{1}{8n+6}\end{aligned}$$

استنتجنا استناداً إلى ما سبق أنّ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6}{16^n(8n+1)(8n+4)} = 4\Delta(16,2) - 4\Delta(16,8)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{16^n(8n+1)(8n+5)} = 2\Delta(16,2) - 2\Delta(16,10)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{16^n(8n+1)(8n+6)} = 2\Delta(16,2) - 2\Delta(16,12)$$

ومن ثَمّ إذا عرّفنا

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n(8n+1)}\left(\frac{6}{8n+4}+\frac{4}{8n+5}+\frac{5}{8n+6}\right)$$

كان

$$S = 8\Delta(16,2) - 4\Delta(16,8) - 2\Delta(16,10) - 2\Delta(16,12)$$

ولمّا كان $\Delta\big(16,r\big) = 16\int_0^1 \frac{t^{r-1}}{16-t^{16}}\,\mathrm{d}\,t$ في حالة $0 < r < 16$ استنتجنا أنّ

$$S = 16\left(\int_0^1 \frac{8t-4t^7-2t^9-2t^{11}}{16-t^{16}}\,\mathrm{d}\,t\right) = 16\left(\int_0^1 \frac{4-2t^6-t^8-t^{10}}{16-t^{16}}\,2t\,\mathrm{d}\,t\right)$$
$$= 16\left(\int_0^1 \frac{u^5+u^4+2u^3-4}{u^8-16}\,\mathrm{d}\,u\right) : \quad ☞ u \leftarrow t^2$$

ولكن نلاحظ أنّ

$$u^5+u^4+2u^3-4 = \left(u^4+2u^3+4u^2+4u+4\right)\left(u-1\right)$$
$$u^8-16 = \left(u^4+2u^3+4u^2+4u+4\right)\left(u^4-2u^3+4u-4\right)$$

إذن

$$S = 16\left(\int_0^1 \frac{u-1}{u^4-2u^3+4u-4}\,\mathrm{d}\,u\right)$$

ولمّا كان

$$u^4-2u^3+4u-4 = (u^2-2)(u^2-2u+2)$$

أمكننا أن نفرّق الكسر لنكتب

$$\begin{aligned}\frac{16(u-1)}{u^4-2u^3+4u-4} &= \frac{16(u-1)}{(u^2-2)(u^2-2u+2)}\\ &= \frac{-2}{\sqrt{2}-u}+\frac{2}{\sqrt{2}+u}-\frac{4(u-1)}{u^2-2u+2}+\frac{4}{1+(u-1)^2}\\ &= \left(2\ln\left(\frac{2-u^2}{u^2-2u+2}\right)+4\arctan\left(u-1\right)\right)'\end{aligned}$$

وعليه فإنّ

$$S=\left[2\ln\left(\frac{2-u^2}{u^2-2u+2}\right)+4\arctan(u-1)\right]_{u=0}^{u=1}=\pi$$

وبذا يتمّ إثبات صحّة المساواة الأولى. واستناداً إلى عبارة الخطأ يمكننا أن نبرهن أنّ

$$\left|\pi-\sum_{n=0}^{n-1}\frac{1}{16^k(8k+1)}\left(\frac{6}{8k+4}+\frac{4}{8k+5}+\frac{5}{8k+6}\right)\right|<\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{n\cdot 16^n}$$

- لنأتِ إلى المساواة الثانية، ولنستفدْ من عبارة $\delta\left(4,r\right)$ لنجد :

$$\begin{aligned}\widetilde{S} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\left(\frac{2}{4n+1}+\frac{2}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}\right)\\ &= 2\delta(4,1)+2\delta(4,2)+\delta(4,3)\end{aligned}$$

ولمّا كان $\delta(4,r)=\int_0^1\frac{4t^{r-1}}{4+t^4}\,\mathrm{d}\,t$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}\widetilde{S} &= 4\int_0^1\frac{2+2t+t^2}{4+t^4}\,\mathrm{d}\,t = 4\int_0^1\frac{2+2t+t^2}{(2+t^2)^2-(2t)^2}\,\mathrm{d}\,t\\ &= 4\int_0^1\frac{1}{t^2-2t+2}\,\mathrm{d}\,t = 4\int_0^1\frac{1}{1+(t-1)^2}\,\mathrm{d}\,t\\ &= \Big[4\arctan(t-1)\Big]_{t=0}^{t=1}=\pi\end{aligned}$$

ومنه المساواة الثانية. ■

التمرين 29. نعرّف في حالة n من $\mathbb{N}^*$ المقدار $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. نهدف في هذا التمرين إلى إثبات صحّة المساواة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

1. ادرس تحولات التابع $u \mapsto 1 - u + \ln u$ على المجال $[1, +\infty[$. ثُمّ أثبت أنّ التابع $x \mapsto h(x) = -\frac{x \ln x}{1-x}$ يقبل التمديد إلى تابع مستمرٍّ على المجال $I = [0,1]$ وأنّه يُحقّق المتراجحة $\forall x \in I,\ 0 \leq h(x) \leq 1$.

2. نعرّف، في حالة عددٍ طبيعي n من $\mathbb{N}^*$، المقدار $I_n = \int_0^1 x^{n-1} h(x)\,\mathrm{d}x$. أثبت أنّ $I_n = R_n$.

3. أثبت في حالة n من $\mathbb{N}^*$ و x من $[0,1[$ أنّ

$$0 \leq \ln \frac{1}{1-x} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \leq x^n \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

واستنتج أنّ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{n} = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

4. أثبت من جهة أخرى أنّ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

واستنتج المطلوب.

الحل

1. في الحقيقة، نجد باشتقاق التابع $u \mapsto 1 - u + \ln u$ أنّه متناقصٌ تماماً على المجال $[1, +\infty[$، وهو يأخذ قيمة الصفر عند $u = 1$. فهو إذن سالبٌ تماماً على $]1, +\infty[$، وعليه

$$\forall u > 1, \quad 0 < \frac{\ln u}{u-1} < 1 \tag{1}$$

لنعرّف في حالة x من $]0,1[$ المقدار

$$h(x) = -\frac{x \ln x}{1-x}$$

نستنتج من (1) بوضع $x = \dfrac{1}{u}$ أنّ

$$\forall x \in \left]0,1\right[, \quad 0 < h(x) < 1$$

ونلاحظ أنّ

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln' 1 = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$$

إذن يقبل التابع h التمديد إلى تابع مستمرٍّ على المجال $I = \left[0,1\right]$ وهو يُحقّق المتراجحة

$$\forall x \in I,\ 0 \le h(x) \le 1$$

2. نعرّف في حالة n من $\mathbb{N}^*$ المقدار $I_n = \int_0^1 x^{n-1} h(x)\,\mathrm{d}\,x$. عندئذ نستنتج مما سبق أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \le I_n \le \int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{n}$$

إذن $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. ومن جهة أخرى نلاحظ أنّ

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 (x^{n-1} - x^n) h(x)\,\mathrm{d}\,x = -\int_0^1 x^n \ln x\,\mathrm{d}\,x$$

فإذا أجرينا مُكاملة بالتجزئة وجدنا

$$I_n - I_{n+1} = -\cancel{\left[\frac{x^n}{n+1}(x\ln x)\right]_0^1} + \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{(n+1)^2}$$

ومن ثمّ

$$\begin{aligned} R_n &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} (I_{k-1} - I_k) \\ &= \lim_{m\to\infty} (I_n - I_m) = I_n \end{aligned}$$

فنكون قد أثبتنا أنّ $I_n = R_n$، وذلك مهما كانت قيمة n.

3. لتكن n من $\mathbb{N}^*$ و x من $\left]0,1\right[$ عندئذ نعلم أنّ

$$\forall t \in \left[0,x\right], \quad \frac{1}{1-t} - \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \frac{t^n}{1-t}$$

وبالمُكاملة نجد

$$\ln\frac{1}{1-x}-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}=\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}\,t$$

ولكن من الواضح أنّه في هذه الحالة يكون

$$0\le\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}\,t\le x^n\int_0^x\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}\,t=x^n\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

وهذا يثبت أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\left[0,1\right[,\quad 0\le\ln\frac{1}{1-x}-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}\le x^n\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

فإذا ضربنا طرفي هذه المساواة بالمقدار الموجب $\dfrac{-\ln x}{1-x}$ ، واستفدنا من نتيجة السؤال (1) ، وجدنا

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\left[0,1\right[,$$
$$0\le\frac{\ln(1-x)\ln x}{1-x}-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}h(x)}{k}\le -x^{n-1}\ln(1-x)$$

وبالمكاملة على المجال $\left]0,1\right[$ نستنتج أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0\le\int_0^1\frac{\ln(1-x)\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}\,x-\sum_{k=1}^{n}\frac{R_k}{k}\le-\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\,\mathrm{d}\,x$$

ولكن

$$\begin{aligned}-\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\,\mathrm{d}\,x&=\cancel{\left[\frac{1-x^n}{n}\ln(1-x)\right]_0^1}+\frac{1}{n}\int_0^1\frac{1-x^n}{1-x}\,\mathrm{d}\,x\\&=\frac{1}{n}\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n}t^{k-1}\right)\mathrm{d}\,x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

ولمّا كان $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=0$ استناداً إلى توطئة سيزارو استنتجنا أنّ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_n}{n}=\int_0^1\frac{\ln(1-x)\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1\frac{\ln(1-x)\ln x}{x}\,\mathrm{d}\,x$$

4. لقد رأينا أنّه في حالة n من $\mathbb{N}^*$ و x من $\left[0,1\right[$ لدينا

$$\begin{aligned}0 \leq \ln\frac{1}{1-x} - \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} &= \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}\,t\\ &\leq \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}\,t\\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}\end{aligned}$$

فإذا ضربنا طرفي هذه المساواة بالمقدار الموجب $\dfrac{-\ln x}{x}$ استنتجنا أنّه في حالة n من $\mathbb{N}^*$ و x من $\left]0,1\right[$ لدينا

$$0 \leq \frac{\ln x\ln(1-x)}{x} + \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}\ln x}{k} \leq \frac{x^{n-1}}{n+1}h(x) \leq \frac{x^{n-1}}{n+1}$$

ولكن

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \int_0^1 x^{k-1}\ln x\,\mathrm{d}\,x = \cancel{\left[\frac{x^k}{k}\ln x\right]_0^1} - \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{k}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{k^2}$$

إذن بالمكاملة على المجال $\left[0,1\right]$ نجد

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\ln x\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}\,x - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{(n+1)n}$$

وبجعل n تسعى إلى اللانهاية نجد

$$\int_0^1 \frac{\ln x\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$$

إذن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_n}{n} = \int_0^1 \frac{\ln x\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$$

وبذا يتمّ الإثبات. ■

التمرين 30. نتأمّل متتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathbb{R}_+^*$.

1. نفترض أنّ المتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة. أثبت أنّه توجد متتالية $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حدودها موجبة وتسعى إلى الصفر وتجعل المتسلسلة $\sum b_n a_n$ متباعدة أيضاً.
2. نفترض أنّ المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة. أثبت أنّه توجد متتالية $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حدودها موجبة و تسعى إلى اللانهاية وتجعل المتسلسلة $\sum b_n a_n$ متقاربة أيضاً.

الحل

1. لنعرّف $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$، عندئذ يكون لدينا $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ استناداً إلى الفرْض. واعتماداً على المتراجحة $\forall x > -1, \ln(1+x) \le x$ يمكننا أن نكتب

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(1+\frac{a_n}{S_{n-1}}\right) \le \frac{a_n}{S_{n-1}}.$$

وعليه

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln S_n - \ln S_{n-1} \le \frac{a_n}{S_{n-1}}$$

فإذا عرّفنا اصطلاحاً $S_{-1} = 1$، واحظنا عندئذ بقاء العلاقة السابقة صحيحة في حالة $n = 0$، وكان لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln S_n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{S_{k-1}}$$

إذن يكفي أن نختار $b_n = 1/S_{n-1}$ حتى تتحقّق الخاصّة المرجوّة لأنّ $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

2. لنعرّف $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$، عندئذ $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ استناداً إلى الفرْض. ونلاحظ أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{R_n} - \sqrt{R_{n+1}} = \frac{R_n - R_{n+1}}{\sqrt{R_n}+\sqrt{R_{n+1}}} = \frac{a_n}{\sqrt{R_n}+\sqrt{R_{n+1}}}$$

إذن باختيار $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{R_n}+\sqrt{R_{n+1}}}$ نرى أنّ $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ وأنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{R_0} - \sqrt{R_{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} b_k a_k$$

وهذا يُثبتُ تقارب المتسلسلة $\sum b_n a_n$. ■

التوابع لمتحول حقيقي

النهايات والاستمرار

﴿ في هذا البحث $\mathbb{K}$ يمثّل حقل الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$ أو حقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$ ﴾

1. جبر التوابع

1-1. الجبر $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$

لتكن X مجموعة غير خالية، ولتكن $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ مجموعة التوابع التي منطلقها X وتأخذ قيمها في $\mathbb{K}$. نعرِّف على هذه المجموعة قانوني تشكيل داخليين $(+)$ و $(\times)$ وقانون تشكيل خارجيّ $(\cdot)$ مجموعة مؤثراته $\mathbb{K}$ كما يلي:

$$\begin{aligned}
&\forall (f,g) \in (\mathcal{F}(X,\mathbb{K}))^2, && \forall x \in X, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\
&\forall (f,g) \in (\mathcal{F}(X,\mathbb{K}))^2, && \forall x \in X, \quad (f\times g)(x) = f(x) \cdot g(x) \\
&\forall f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{K}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, && \forall x \in X, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)
\end{aligned}$$

إنّ البنية $\left(\mathcal{F}(X,\mathbb{K}),+,\times,\cdot\right)$ **جبرٌ تبديليّ**، والعناصر القَلوبة فيه هي التوابع التي لا تأخذ الصفر قيمةً. نترك للقارئ أنّ يدرس قواسم الصفر في $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$.

2-1. علاقة الترتيب في $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$

نعرّف على $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ علاقة الترتيب $(\leq)$ الآتية:

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{F}(X,\mathbb{R}))^2, \;\; f \leq g \Leftrightarrow \Big(\forall x \in X, \;\; f(x) \leq g(x)\Big)$$

ليست علاقة الترتيب هذه علاقة ترتيب كلّي، ولكنّها منسجمة مع قوانين الجبر $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$. أي

$$\begin{aligned}
&\forall (f,g,h) \in (\mathcal{F}(X,\mathbb{R}))^3, && f \leq g && \Rightarrow f+h \leq g+h \\
&\forall (f,g,h) \in (\mathcal{F}(X,\mathbb{R}))^3, && (f \leq g) \wedge (0 \leq h) && \Rightarrow f\times h \leq g\times h
\end{aligned}$$

1-3. **تعريف**. إذا كان f عنصراً من $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ فإننا نرمز بالرموز $\operatorname{Re} f$ و $\operatorname{Im} f$ و $|f|$ إلى التوابع

$$\operatorname{Re} f : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{Re}(f(x))$$
$$\operatorname{Im} f : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{Im}(f(x))$$
$$\left|f\right| : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left|f(x)\right|$$

وهي جميعاً عناصر من $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$. وكذلك نرمز بالرمز $\overline{f}$ إلى التابع

$$\overline{f} : X \to \mathbb{K},\ x \mapsto \overline{f(x)}$$

وإذا كان f و g عنصرين من $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ فإننا نرمز بالرمزين $\max(f,g)$ و $\min(f,g)$ إلى التابعين

$$\max(f,g) : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max(f(x),g(x))$$
$$\min(f,g) : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min(f(x),g(x))$$

ونتحقّق بسهولة أنّه في حالة f و g عنصرين من $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ يكون

$$\operatorname{Im} f = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(f - \overline{f}\right) \quad \text{و} \quad \operatorname{Re} f = \frac{1}{2}\left(f + \overline{f}\right)$$

وكذلك

$$|f| = \sqrt{|\operatorname{Re} f|^2 + |\operatorname{Im} f|^2} \quad \text{و} \quad f = \operatorname{Re} f + \mathrm{i}\operatorname{Im} f$$

ونتحقّق أيضاً في حالة عنصرين f و g من $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ أنّ

$$\min(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|) \text{ و } \max(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|)$$

و أيضاً $|f| = \max(f,-f)$.

1-4. **تعريف**.

- نقول عن مجموعة جزئية X من $\mathbb{R}$، إنّها **متناظرة بالنسبة إلى 0** إذا وفقط إذا كان
$$\forall x \in X,\ -x \in X$$
لتكن X مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0.
- نقول إنّ التابع f من $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ **فرديّ** إذا وفقط إذا كان
$$\forall x \in X,\ f(-x) = -f(x)$$
- و نقول إنّه **زوجي** إذا وفقط إذا كان $\forall x \in X,\ f(-x) = f(x)$.

لتكن X مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0. وليكن f تابعاً ينتمي إلى $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$. نعرّف انطلاقاً من f التابعين f_{e} و f_{o} من $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ كما يأتي:

$$f_{\mathrm{e}} : X \to \mathbb{K},\ x \mapsto \frac{1}{2}\big(f(x)+f(-x)\big),$$
$$f_{\mathrm{o}} : X \to \mathbb{K},\ x \mapsto \frac{1}{2}\big(f(x)-f(-x)\big).$$

فيكون f_{e} تابعاً زوجياً و f_{o} تابعاً فردياً و $f = f_{\mathrm{e}} + f_{\mathrm{o}}$.
ونترك للقارئ أن يتحقق أنّه إذا كُتِب f مجموعَ تابعين أحدهما زوجي والآخر فردي، كان بالضرورة f_{e} هو الزوجي، وكان من ثَمّ f_{o} هو الفردي.

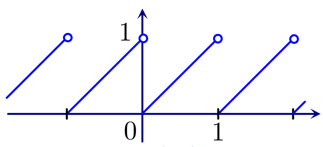
5-1. تعريف. لتكن X مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$. نقول إنّ التابع f من $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ هو تابع ***T*-دوريّ**، حيث $T \in \mathbb{R}_+^*$، إذا وفقط إذا

$$\forall x \in X,\quad \big(x+T \in X\big) \wedge \big(f(x+T) = f(x)\big)$$

وعندئذ نسمّي T **دوراً** للتابع f.

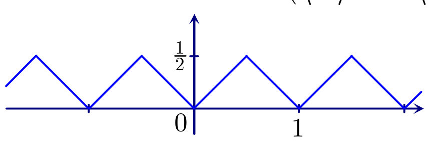
ونقول إنّ التابع f من $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ هو تابع **دوريّ**، إذا وُجِدتْ قيمة T من $\mathbb{R}_+^*$ كان عندها التابع f تابعاً T-دورياً.

- فمثلاً التابع $x \mapsto \langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor$ الذي يقرن بكل عدد x من $\mathbb{R}$ جزأه الكسري، هو تابع 1-دوري.



$x \mapsto \langle x \rangle$

- وكذلك التابع الذي يقرن بكل عدد x من $\mathbb{R}$ بُعدَه عن مجموعة الأعداد الصحيحة : $d(x,\mathbb{Z}) = \inf\{|x-n| : n \in \mathbb{Z}\}$ هو أيضاً تابع 1-دوري، إذ نتحقّق بسهولة صحة العلاقة $d(x,\mathbb{Z}) = \min\big(\langle x \rangle, 1-\langle x \rangle\big)$.



$x \mapsto d(x,\mathbb{Z})$

إذا كان f تابعاً من $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ وعرّفنا

$$P_f = \left\{ t \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+t) \right\}$$

كانت P_f زمرة جزئية من $(\mathbb{R},+)$. وكان التابع f دورياً إذا كان $P_f \neq \{0\}$. فمثلاً $P_{\sin} = 2\pi\mathbb{Z}$ و $P_{\mathcal{X}} = \mathbb{Q}$، وقد عرّفنا $\mathcal{X}(x) = 1$ عندما $x \in \mathbb{Q}$ و $\mathcal{X}(x) = 0$ عندما $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

1-6. تعريف. لتكن X مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$. وليكن التابع f من $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$.

- نقول إنّ التابع f **متزايد** إذا وفقط إذا كان

$$\forall (x_1,x_2) \in X^2, \quad x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

- نقول إنّ التابع f **متناقص** إذا وفقط إذا كان

$$\forall (x_1,x_2) \in X^2, \quad x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$

- نقول إنّ التابع f **متزايد تماماً** إذا وفقط إذا كان

$$\forall (x_1,x_2) \in X^2, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

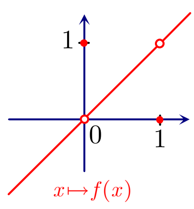
- نقول إنّ التابع f **متناقصٌ تماماً** إذا وفقط إذا كان

$$\forall (x_1,x_2) \in X^2, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- نقول إنّ التابع f **مطَّرد** إذا كان متزايداً أو متناقصاً.

ملاحظة. من الواضح أنّ كلّ تابع مطَّرد تماماً متباينٌ، إلاّ أنّ العكس غير صحيح.

فمثلاً، التابع f من $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. المعرّف بالصيغة $f(x) = x$ عندما $x \notin \{0,1\}$ وبالصيغة $f(x) = 1 - x$ عندما $x \in \{0,1\}$ هو تابع متباين وغير مطّرد. انظر الشكل الآتي:



ولكن سنرى لاحقاً أنّ العكس صحيح إذا كان التابع تابعاً مستمرّاً على مجال.

1-7. ملاحظات

- نلاحظ أنّه إذا كان f من $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ تابعاً متزايداً كان $(-f)$ متناقصاً.
- وإذا كان f و g من $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ تابعين متزايدين وكانت λ عنصراً من $\mathbb{R}_+^*$ كان $f+g$ و λf متزايدين.
- وكذلك فإنّ ناتج تركيب تابعين متزايدين أو متناقصين تابع متزايد.
- وناتج تركيب تابع متزايد مع آخر متناقص تابع متناقص.

1-8. تعريف. لتكن X مجموعة غير خالية ما. وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$.

- نقول إنّ التابع f **محدود من الأعلى** إذا وفقط إذا وُجِدَ عددٌ A من $\mathbb{R}$ يُحقّق
$$\forall x \in X,\ f(x) \le A$$
- نقول إنّ التابع f **محدود من الأدنى** إذا وفقط إذا وُجِدَ عددٌ A من $\mathbb{R}$ يُحقّق
$$\forall x \in X,\ f(x) \ge A$$
- نقول إنّ التابع f **محدود** إذا وفقط إذا وُجِدَ عددٌ A من $\mathbb{R}$ يُحقّق
$$\forall x \in X, |f(x)| \le A$$
وهذا التعريف نافذٌ أيضاً في حالة التوابع التي تأخذ قيمها في $\mathbb{C}$.

في حالة f من $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$،

- نرمزبالرمز $\sup_X f$ إلى المقدار $\sup\{f(x) : x \in X\}$ من $\overline{\mathbb{R}}$.
- وكذلك نرمز بالرمز $\inf_X f$ إلى المقدار $\inf\{f(x) : x \in X\}$ من $\overline{\mathbb{R}}$.

فيكون عندئذ

$$\sup_X f \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ \text{محدوداً من الأعلى } f$$
$$\inf_X f \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ \text{محدوداً من الأدنى } f$$

1-9. **مبرهنة**. لتكن X مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، وليكن التابعان f و g من $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$، والعدد λ من $\mathbb{R}_+^*$.

- إذا كان f محدوداً من الأعلى كان $(-f)$ محدوداً من الأدنى، وكان
$$\inf_X (-f) = -\sup_X f$$
- إذا كان f و g محدودين من الأعلى كان $f+g$ و λf محدودين من الأعلى، وكان
$$\sup_X (f+g) \leq \sup_X f + \sup_X g$$
و
$$\sup_X (\lambda f) = \lambda \sup_X f$$
- إذا كان f و g محدودين من الأعلى وموجبين كان fg محدوداً من الأعلى، وكان
$$\sup_X (fg) \leq \sup_X f \cdot \sup_X g$$

الإثبات

تحقُّق مباشر نتركه تمريناً للقارئ. ❐

ملاحظة. يبيّن التابعان $x \overset{f}{\mapsto} x$ و $x \overset{g}{\mapsto} 1-x$ المعرفان على $X=[0,1]$ أنّه عموماً ليس هنالك مساواة في أيٍ من المتراجحتين الواردتين في المبرهنة السابقة.

2. النهايات

1-2. **تعريف**. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، ولتكن a من $\overline{\mathbb{R}}$ نقطة لاصقة بالمجموعة A، وكذلك ليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$. نقول إنّ f يقبل ℓ من $\overline{\mathbb{R}}$ **نهايةً** عند a إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$$(\mathcal{L}) \qquad \forall W \in \mathbb{V}(\ell),\ \exists V \in \mathbb{V}(a),\ f(V\cap A) \subset W$$

2-2. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، ولتكن a من $\overline{\mathbb{R}}$ نقطة لاصقة بالمجموعة A، وكذلك ليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$. إذا قَبِلَ التابع f كلّاً من ℓ و ℓ' نهايةً عند a كان $\ell = \ell'$.

الإثبات

إذا كان $\ell \neq \ell'$ عندئذ يوجد جوار W_1 للعنصر ℓ وجوار W_2 للعنصر ℓ' يُحقّقان $W_1 \cap W_2 = \varnothing$. وبناءً على التعريف ($\mathcal{L}$) يوجد جواران V_1 و V_2 للعنصر a يُحقّقان

$$f(V_1 \cap A) \subset W_1 \qquad \text{و} \qquad f(V_2 \cap A) \subset W_2$$

ولمّا كان $V_1 \cap V_2$ جواراً للنقطة a اللاصقة بالمجموعة A ، كان $V_1 \cap V_2 \cap A \neq \varnothing$ ونستنتج أنه يوجد عنصر x في $V_1 \cap V_2 \cap A$ ، ومن ثَمّ $f(x) \in W_1 \cap W_2$ ، وهذا يناقض كون التقاطع $W_1 \cap W_2$ خالياً. ومنه $\ell = \ell'$. ❒

☜ تتيح لنا المبرهنة السابقة إدخال الرمز $\lim_a f$ أو $\lim_{x \to a, x \in A} f(x)$ دلالة على نهاية f عند النقطة a ، عندما تكون هذه النهاية موجودة.

ونلاحظ من ناحية أخرى أنّ تعريف النهاية الوارد آنفاً يضم في آنٍ واحد تسعة تعاريف وذلك تبعاً لكوْن $a = -\infty$ أو $a \in \mathbb{R}$ أو $a = +\infty$ وكذلك تبعاً لكوْن $\ell = -\infty$ أو $\ell \in \mathbb{R}$ أو $\ell = +\infty$. فمثلاً

- في حالة $a \in \mathbb{R}$ و $\ell \in \mathbb{R}$ يكافئ التعريف ($\mathcal{L}$) الشرط التالي

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \left.\begin{array}{r} x \in A, \\ |x - a| < \eta \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- في حالة $a \in \mathbb{R}$ و $\ell = +\infty$ يكافئ التعريف ($\mathcal{L}$) الشرط التالي

$$\forall \Omega \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \left.\begin{array}{r} x \in A, \\ |x - a| < \eta \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) > \Omega$$

- في حالة $\ell \in \mathbb{R}$ و $a = +\infty$ يكافئ التعريف ($\mathcal{L}$) الشرط التالي

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \omega \in \mathbb{R}, \quad \left.\begin{array}{r} x \in A, \\ x > \omega \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- في حالة $\ell = +\infty$ و $a = +\infty$ يكافئ التعريف ($\mathcal{L}$) الشرط التالي

$$\forall \Omega \in \mathbb{R}, \quad \exists \omega \in \mathbb{R}, \quad \left.\begin{array}{r} x \in A, \\ x > \omega \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) > \Omega$$

ونترك للقارئ مهمة صياغة التعريف ($\mathcal{L}$) في بقية الحالات.

3-2. **تعريف**. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، ولتكن a من $\overline{\mathbb{R}}$ نقطة لاصقة بالمجموعة A، وكذلك ليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$. نقول إنّ f يقبل ℓ من $\mathbb{C}$ نهايةً عند a إذا وفقط إذا قَبِلَ العدد $\operatorname{Re} f$ نهاية عند a العدد $\alpha = \operatorname{Re}\ell$ وقَبِلَ $\operatorname{Im} f$ العدد $\beta = \operatorname{Im}\ell$ نهاية عند a. وعندئذ يكون لدينا بالتعريف

$$\lim_a f = \alpha + \mathrm{i}\beta = \ell$$

ونلاحظ أنّ هذا الأمر يُكافئ

$$(\mathbb{L})\qquad \forall\varepsilon > 0, \exists V \in \mathbb{V}(a), \quad x \in V\cap A \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$$

4-2. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، ولتكن a من $\overline{\mathbb{R}}$ نقطة لاصقة بالمجموعة A، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. إذا قَبِلَ التابع f نهاية ℓ تنتمي إلى $\mathbb{K}$ عند a فإنّه يكون محدوداً في جوارٍ للعنصر a. أي :

$$\exists V \in \mathbb{V}(a),\ \exists M \in \mathbb{R}_+ : x \in V\cap A \Rightarrow \left|f(x)\right| \leq M$$

الإثبات

يكفي للإثبات أنّ نطبّق التعريف $(\mathbb{L})$ بأخذ $\varepsilon = 1$ ثُمّ نضع $M = 1 + |\ell|$. □

5-2. **مبرهنة** : لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$ ، ولتكن a من $\overline{\mathbb{R}}$ نقطة لاصقة بالمجموعة A ، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. عندئذ يكون هناك تكافؤ بين الخاصتين التاليتين :

① إنّ للتابع f نهاية عند a.

② إنّ للمتتالية $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ نهاية، أياً كانت المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي حدودها من عناصر A وتسعى إلى a.

وفي حالة تحقُّق إحدى الخاصتين السابقتين يكون

$$\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

وذلك أياً كانت المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي حدودها من عناصر A وتسعى إلى a.

الإثبات

① ⇐ ② لنفترض أنّ $\lim_a f = \ell$. لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من A تسعى إلى a. نريد أن نثبت أنّ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$. ليكن W جواراً للعنصر ℓ يوجد عندئذ جوار V للعنصر a يُحقّق $x \in V \cap A \Rightarrow f(x) \in W$. ولمّا كان $\lim_{n\to\infty} x_n = a$، استنتجنا وجود في عددٍ n_0 في $\mathbb{N}$، يُحقّق $n > n_0 \Rightarrow x_n \in V$، ومن ثَمّ

$$n > n_0 \Rightarrow f(x_n) \in W$$

وهذا ما يثبت أنّ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

② ⇐ ① لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من A تسعى إلى a، لنضع $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$. ولتكن متتالية أخرى $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من A تسعى إلى a. نعرّف متتالية جديدة $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من A بوضع $z_{2n} = x_n$ و $z_{2n+1} = y_n$ وذلك أياً كان n من $\mathbb{N}$. لمّا كانت $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من A تسعى إلى a، كان للمتتالية $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ نهاية، وينجم عن ذلك أنّ للمتتاليتين الجزئيتين منها $(f(z_{2n}))_{n\in\mathbb{N}}$ و $(f(z_{2n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ النهاية نفسها. ومنه $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \ell$.

بهذا نكون قد أثبتنا وجود عنصر ℓ يُحقق $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$ أياً كانت المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر A وتسعى إلى a.

لنفترض جدلاً أنّ التابع f **لا** يقبل ℓ نهاية له عند a. إذن يوجد جوار W_0 للعنصر ℓ يُحقِّق $\forall V \in \mathbb{V}(a), \exists x \in V \cap A : f(x) \notin W_0$

نعرف، أياً كان $n \geq 1$، الجوار V_n للعنصر a كما يلي:

$$V_n = \begin{cases}]n,+\infty[& : \quad a = +\infty, \\ ]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}[& : \quad a \in \mathbb{R}, \\ ]-\infty,-n[& : \quad a = -\infty. \end{cases}$$

فنجد عندئذ عنصراً u_n ينتمي إلى $V_n \cap A$ ويُحقِّق $\forall n \geq 1,\ f(u_n) \notin W_0$. وهذا يناقض كون المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر A تسعى إلى a، وهي تحقِّق، إذن، $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$. وعليه يقبل التابع f العنصر ℓ نهاية له عند a. ❐

6-2. **تعريف** : لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$.

نقول إنّ f يقبل ℓ **نهاية من اليمين** عند a من $\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:

① النقطة a نقطة لاصقة بالمجموعة $A^{a,\to} = A \cap]a,+\infty[$.

② إذا كان g هو مقصور f على المجموعة $A^{a,\to}$ كان $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A^{a,\to}}} g(x) = \ell$.

ونرمز إلى هذه النهاية في حال وجودها بالرمز $\lim\limits_{a^+} f$ أو $f(a^+)$.

نقول إنّ f يقبل ℓ **نهاية من اليسار** عند a من $\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:

① النقطة a نقطة لاصقة بالمجموعة $A^{a,\leftarrow} = A \cap]-\infty,a[$.

② إذا كان h مقصور f على المجموعة $A^{a,\leftarrow}$ كان $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A^{a,\leftarrow}}} h(x) = \ell$.

ونرمز إلى هذه النهاية في حال وجودها بالرمز $\lim\limits_{a^-} f$ أو $f(a^-)$.

7-2. **مبرهنة** Cauchy. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، ولتكن a من $\overline{\mathbb{R}}$ نقطة لاصقة بالمجموعة A، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. إن الشرط اللازم والكافي حتى يقبل f نهاية تنتمي إلى $\mathbb{K}$ عند a هو

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathbb{V}(a), \quad (x,x') \in (V\cap A)^2 \Rightarrow \left|f(x)-f(x')\right| < \varepsilon$$

الإثبات

- لنفترض أنّ $\lim\limits_{a} f = \ell \in \mathbb{K}$. ولتكن $\varepsilon > 0$ يوجد جوار V للعنصر a يُحقّق

$$x \in V\cap A \Rightarrow |f(x)-\ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ومنه

$$(x,x') \in (V\cap A)^2 \Rightarrow \left|f(x)-f(x')\right| \le |f(x)-\ell| + \left|\ell - f(x')\right| < \varepsilon$$

- وبالعكس، لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر A تسعى إلى a. ولتكن $\varepsilon > 0$ يوجد، بمقتضى الفَرْض، جوار V للعنصر a يُحقّق

$$(x,x') \in (V\cap A)^2 \Rightarrow \left|f(x)-f(x')\right| < \varepsilon$$

ونجد عدداً n_0 في $\mathbb{N}$ يُحقّق V $n > n_0 \Rightarrow x_n \in V$ لأن $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. إذن

$$m > n > n_0 \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

فالمتتالية $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي في $\mathbb{K}$، هي إذن متقاربة. لقد أثبتنا أنّ للمتتالية $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ نهاية في $\mathbb{K}$، أياً كانت المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي حدودها من عناصر A وتسعى إلى a . وهذا ما يثبت أنّ f يقبل نهاية منتهية عند a بناءً على المبرهنة 2-5. ❒

2-8. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، ولتكن a من $\overline{\mathbb{R}}$ نقطة لاصقة بالمجموعة A، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$. نفترض أنّ $\lim\limits_{a} f = \ell \in \mathbb{R}$.

1. إذا كان $c \in \left]-\infty, \ell\right[$ فيوجد جوار V للعنصر a يُحقِّق
$$x \in V \cap A \Rightarrow c < f(x)$$
2. إذا كان $d \in \left]\ell, +\infty\right[$ فيوجد جوار V للعنصر a يُحقِّق
$$x \in V \cap A \Rightarrow f(x) < d$$
3. إذا كان $d \in \left]\ell, +\infty\right[$ و $c \in \left]-\infty, \ell\right[$ فيوجد جوار V للعنصر a يُحقِّق
$$x \in V \cap A \Rightarrow c < f(x) < d$$

الإثبات

الإثبات واضح لأنّ كلّاً من $\left]c, +\infty\right[$ و $\left]-\infty, d\right[$ و $\left]c, d\right[$ جوار للعنصر ℓ . ❒

2-9. **نتيجة**. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، ولتكن a من $\overline{\mathbb{R}}$ نقطة لاصقة بالمجموعة A، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$. نفترض أنّ $\lim\limits_{a} f = \ell \in \mathbb{R}$.

1. لتكن c من $\mathbb{R}$، ولنفترض أنه يوجد جوار V للعنصر a يُحقّق
$$\forall x \in V \cap A,\quad c \le f(x)$$
عندئذ $c \le \ell$.
2. لتكن d من $\mathbb{R}$، ولنفترض أنه يوجد جوار V للعنصر a يُحقّق
$$\forall x \in V \cap A,\quad f(x) \le d$$
عندئذ $\ell \le d$.

إنّ إثبات المبرهنات التالية واضح وبسيط انطلاقاً من مثيلاتها المتعلّقة بالمتتاليات وذلك بالاستفادة من المبرهنة الأساسية 2-5. لهذا السبب سنعرضها للقارئ دون إثبات تاركين مهمة كتابة تفاصيل هذه البراهين تمريناً له.

2-10. مبرهنة. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، ولتكن a من $\overline{\mathbb{R}}$ نقطة لاصقة بالمجموعة A، ولتكن f و g و h توابع من $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$. نفترض أنّ

① $\lim_a g = \ell$ و $\lim_a h = \ell$ حيث $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

② يوجد جوار V للعنصر a يُحقّق

$$\forall x \in V \cap A, \quad h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

إذن f يقبل ℓ نهايةً عند a.

2-11. مبرهنة. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، ولتكن a من $\overline{\mathbb{R}}$ نقطة لاصقة بالمجموعة A، وليكن f و g تابعين من $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$. نفترض أنّ

① $\lim_a g = +\infty$.

② يوجد جوار V للعنصر a يُحقّق $\forall x \in V \cap A, \quad g(x) \leq f(x)$.

إذن f يقبل $+\infty$ نهاية عند a.

2-12. مبرهنة. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، ولتكن a من $\overline{\mathbb{R}}$ نقطة لاصقة بالمجموعة A، وليكن f و g تابعين من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. وأخيراً نفترض أنّ الأعداد λ و ℓ و ℓ' تنتمي إلى $\mathbb{K}$.

① $\lim_a f = 0 \Leftrightarrow \lim_a |f| = 0$.

② $\lim_a f = \ell \Rightarrow \lim_a |f| = |\ell|$.

③ $\left(\lim_a f = \ell\right) \wedge \left(\lim_a g = \ell'\right) \Rightarrow \lim_a (f + \lambda g) = \ell + \lambda\ell'$.

④ $\left(\lim_a f = \ell\right) \wedge \left(\lim_a g = \ell'\right) \Rightarrow \lim_a fg = \ell \cdot \ell'$.

⑤ إذا كان f لا ينعدم و $\ell \neq 0$ كان $\lim_a f = \ell \Rightarrow \lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$.

2-13. مبرهنة. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، ولتكن a من $\overline{\mathbb{R}}$ نقطة لاصقة بالمجموعة A، وليكن f و g تابعين من $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$. عندئذ

① إذا كان g **محدوداً من الأدنى**، و $\lim_a f = +\infty$ كان

$$\lim_a (f+g) = +\infty$$

② إذا كان g **محدوداً من الأدنى بثابت موجب تماماً**، و $\lim_a f = +\infty$ كان

$$\lim_a f\, g = +\infty$$

2-14. مبرهنة. ليكن (a,b) عنصراً من $\overline{\mathbb{R}}^2$ يُحقّق $a < b$، وليكن f تابعاً من الفضاء $\mathcal{F}(]a,b[,\mathbb{R})$. نفترض أنّ f تابع متزايد. عندئذ

① إذا كان f محدوداً من الأعلى، فإنّه يقبل نهاية منتهية عند b ويكون:

$$\lim_b f = \sup\{f(x) : x \in]a,b[\}$$

② إذا لم يكن f محدوداً من الأعلى، فإنّه يقبل $+\infty$ نهاية له عند b أي:

$$\lim_b f = +\infty$$

③ إذا كان f محدوداً من الأدنى، فإنّه يقبل نهاية منتهية عند a ويكون:

$$\lim_a f = \inf\{f(x) : x \in]a,b[\}$$

④ إذا لم يكن f محدوداً من الأدنى، فإنّه يقبل $-\infty$ نهاية له عند a أي:

$$\lim_a f = -\infty$$

2-15. مبرهنة. لتكن A و B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من $\mathbb{R}$، ولتكن a من $\overline{\mathbb{R}}$ نقطة لاصقة بالمجموعة A، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ و g تابعاً من $\mathcal{F}(B,\mathbb{K})$، مع $f(A) \subset B$. عندئذ

① إذا كانت النهاية $\lim_a f = b$ موجودةً، كانت b نقطة لاصقة بالمجموعة B .

② إذا كانت النهايتان $\lim_a f = b$ و $\lim_b g = c$ موجودتين كان

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} g\circ f(x) = c$$

3. الاستمرار

1-3. تعريف. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، وليكن a عنصراً من A، وأخيراً ليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. نقول إنّ f **مستمر** عند a إذا قَبِل التابع f نهاية عند a، وهذا يُكافئ الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \left.\begin{array}{r} x \in A, \\ |x-a| < \eta \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ملاحظة : من الواضح أنّ هذا الشرط يقتضي $\lim_a f = f(a)$. وبالعكس، لنفترض وجود النهاية $\lim_a f = \ell$. ولتكن $0 < \varepsilon$ إذن يوجد $0 < \eta$ يُحقّق

$$(x \in A) \wedge (|x-a| < \eta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ولمّا كان $a \in A$ و $|a-a| = 0 < \eta$ استنتجنا أنّ $|f(a) - \ell| < \varepsilon$. ومن ثَمّ لا بُدّ أن يكون $f(a) = \ell$ لأنّ ε عدد كيفيّ موجب تماماً.

ينتج من هذا التعريف أنّ جميع المبرهنات المتعلّقة بالنهايات تبقى صحيحة عند دراسة الاستمرار وهذا ما سنستفيد منه لاحقاً.

2-3. تعريف. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، وليكن a عنصراً من A، وأخيراً ليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. نقول إنّ للتابع f **انقطاعاً من النوع الأوّل** عند a إذا تحقّقت الشروط:

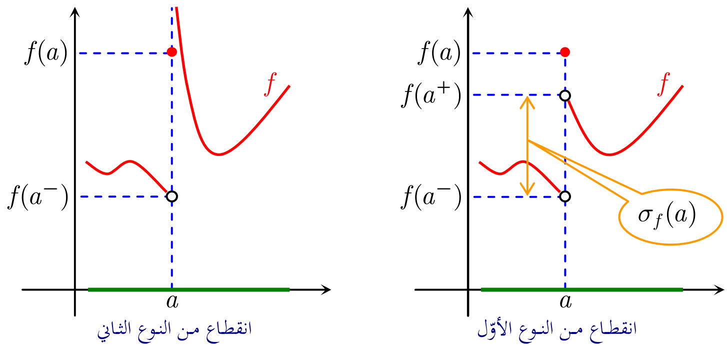
- التابع f ليس مستمراً عند a.
- يقبل التابع f نهاية منتهية من اليسار عند a. (في حالة $A \cap]-\infty, a[\neq \varnothing$).
- يقبل التابع f نهاية منتهية من اليمين عند a. (في حالة $A \cap]a, +\infty[\neq \varnothing$).

ونقول إنّ للتابع f **انقطاعاً من النوع الثاني** عند a إذا لم يكن مستمراً عند a ولم يكن له انقطاع من النوع الأوّل عند a.

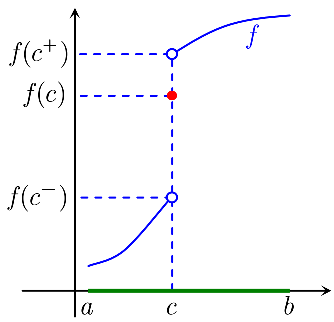
إذا قَبِلَ f نهاية منتهية من اليمين عند a و نهاية منتهية من اليسار عند a أسمينا المقدار:

$$\sigma_f(a) = f(a^+) - f(a^-)$$

قفزة التابع f عند a.



وإذا كان $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ تابعاً **متزايداً** فإنّه يقبل نهاية منتهية من اليمين، ونهاية منتهية من اليسار عند كلّ نقطة c من $]a,b[$، انظر المبرهنة 2-14. ويكون $\sigma_f(c) \geq 0$ أيّاً كان c من $]a,b[$، وتتحقق المساواة إذا وفقط إذا كان f مستمراً عند c.



وكذلك الأمر، إذا كان $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ تابعاً **متناقصاً** فإنّه يقبل نهاية منتهية من اليمين، ونهاية منتهية من اليسار عند كلّ نقطة c من $]a,b[$، ويكون $\sigma_f(c) \leq 0$ أياً كان c من $]a,b[$، وتتحقق المساواة إذا وفقط إذا كان f مستمراً عند c.

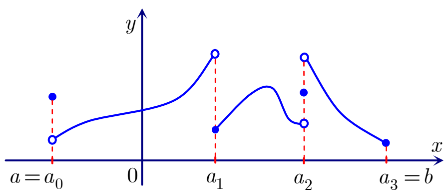
3-3. **تعريف**. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. نقول إنّ ***$f$* مستمر على *$A$*** إذا كان مستمراً عند كل نقطة a من A. ونرمز بالرمز $C(A,\mathbb{K})$ إلى مجموعة التوابع المستمرّة على A.

4-3. **تعريف**. ليكن (a,b) عنصراً من $\overline{\mathbb{R}}^2$ يُحقّق $a < b$، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$. نقول إنّ f **مستمر قِطَعيّاً** على $[a,b]$ إذا وُجِدَ n في $\mathbb{N}^*$، وعناصر $(a_k)_{0\le k\le n}$ من المجال $[a,b]$ تحقّق الشرطين التاليين :

① $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$.

② التابع f مستمرٌ على المجال $]a_i, a_{i+1}[$ ويقبل نهاية منتهية من اليمين عند a_i ونهاية منتهية من اليسار عند a_{i+1} وذلك أيّاً كان i من $\{0,\ldots,n-1\}$. وهذا يكافئ قولنا إنّ مقصور التابع f على المجال المفتوح $]a_i, a_{i+1}[$ يقبل التمديد إلى تابع مستمرٍ على المجال $[a_i, a_{i+1}]$ أياً كان الدليل i من المجموعة $\{0,\ldots,n-1\}$.

يُظهر الشكل التالي مثالاً على منحني تابع مستمرٍ قِطَعِيّاً.



ملاحظة. التابع المستمرّ قِطَعيّاً على مجال $[a,b]$ هو تابع تنتمي جميع انقطاعاته إلى النوع الأوّل.

5-3. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، وليكن a عنصراً من A، وأخيراً ليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ مستمرّاً عند a. عندئذ يكون التابع f محدوداً في جوار للنقطة a.

6-3. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، وليكن a عنصراً من A، وأخيراً ليكن f و g تابعين من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ مستمرّين عند a. عندئذ يكون كلٌّ من التوابع $\overline{f}$ و $\mathrm{Re}\, f$ و $\mathrm{Im}\, f$ و $|f|$ و $f\,g$ و $f+\lambda\, g$، في حالة $\lambda \in \mathbb{K}$، تابعاً مستمرّاً عند a، وإذا كان f لا ينعدم عند أية نقطة من A كان $\dfrac{1}{f}$ مستمرّاً أيضاً عند a.

3-7. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، تكوّن مجموعة التوابع المستمرّة على A، التي نرمز إليها $C(A,\mathbb{K})$، جبراً جزئياً من جبر التوابع $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. فإذا كان f و g تابعين مستمرّين على A، وكان $\lambda \in \mathbb{K}$، كان $f+\lambda g$ و $g\, f$ تابعين مستمرّين على A. وإذا كان f تابعاً مستمراً على A ولا ينعدم عند أية نقطة منها كان $\dfrac{1}{f}$ مستمرّاً على A.

3-8. **مبرهنة**. لتكن A و B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من $\mathbb{R}$، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ و g تابعاً من $\mathcal{F}(B,\mathbb{K})$ مع $f(A) \subset B$. إذا كان f مستمرّاً عند a من A، وكان g مستمرّاً عند $b = f(a) \in B$، كان عندئذ التابع $g \circ f$ مستمراً عند a.

3-9. **مبرهنة**. لتكن A و B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من $\mathbb{R}$، وليكن f تابعاً من $C(A,\mathbb{R})$ و g تابعاً من $C(B,\mathbb{K})$ مع $f(A) \subset B$. عندئذ يكون التابع $g \circ f$ مستمراً على A.

4. مبرهنة القيمة الوسطى

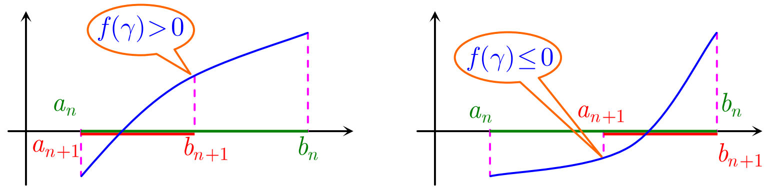
4-1. **توطئة**. ليكن $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً يحقّق $f(1) > 0$ و $f(0) < 0$. عندئذ يوجد في المجال $]0,1[$ عددٌ θ يُحقّق $f(\theta) = 0$.

الإثبات

لنعرّف المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر المجال $[0,1]$ على الوجه التالي:

- نضع أوّلاً $a_0 = 0$ و $b_0 = 1$.
- وإذا كان a_n و b_n معرّفين فإننا نحسب المقدار $\gamma = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ ونناقش تبِعاً لإشارة المقدار $f(\gamma)$:
  - ☜ إذا كان $f(\gamma) \le 0$ عرّفنا $a_{n+1} = \gamma$ و $b_{n+1} = b_n$.
  - ☜ وإذا كان $f(\gamma) > 0$ عرّفنا $a_{n+1} = a_n$ و $b_{n+1} = \gamma$.

ويوضّح الشكل التالي هذا الإنشاء.



يمكننا أن نتحقق بسهولة، بالتدريج على n من $\mathbb{N}$، صحةَ الخواص التالية:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(a_n) \leq 0 \qquad ①$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(b_n) \geq 0 \qquad ②$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \qquad ③$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n - a_n = 2^{-n} \qquad ④$$

نستنتج من ذلك أنّ المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتان، فهما متقاربتان من النهاية θ نفسها وهي تنتمي إلى $[a_0, b_0] = [0,1]$. ولمّا كان التابع f مستمرّاً عند θ، فإننا نجد بجعل n تسعى إلى اللانهاية في ① و ② أنّ $f(\theta) \leq 0 \leq f(\theta)$ وهذا يكافئ $f(\theta) = 0$. وبوجه خاص يكون $\theta \in]0,1[$، ويتم إثبات المطلوب. ❐

2-4. مبرهنة. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً. إذا كان (a,b) عنصراً من $I \times I$ وكان γ عنصراً من $\left]f(a), f(b)\right[$، فيوجد في المجال $]0,1[$ عددٌ θ يُحقّق : $f((1-\theta)a + \theta b) = \gamma$.

الإثبات

لنلاحظ أنّه إذا كان a و b عددين حقيقيّين، وكان $0 \leq t \leq 1$ كان

$$\min(a,b) \leq (1-t)a + tb \leq \max(a,b)$$

أي إنّ $(1-t)a + t\,b$ عدد حقيقي يقع بين a و b. وهذا ما يتيح لنا تعريف التابع :

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(a + t(b-a)) - \gamma$$

إنّ g تابعٌ مستمرٌّ على $[0,1]$، ويحقق $g(0) < 0$ و $g(1) > 0$، إذن نجد، بمقتضى التوطئة السابقة، عدداً θ ينتمي إلى المجال $]0,1[$ يُحقّق $g(\theta) = 0$. ❐

4-3. **نتيجة**. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً. عندئذ يكون $f(I)$ مجالاً في $\mathbb{R}$.

الإثبات

لنضع $J = f(I)$. نريد أن نثبت الخاصة التالية:

$$\forall (x,y) \in J \times J, \quad x < y \Rightarrow]x,y[\subset J$$

ولكن هذا هو بالضبط فحوى المبرهنة السابقة. ❐

نسمّي **مبرهنة القيمة الوسطى**، أيّ واحدة من الصيغ المتكافئة الثلاث السابقة.

4-4. أمثلة

- ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً. نفترض أنّ المجموعة $f(I)$ مجموعة منتهية، عندئذ يكون التابع f ثابتاً.

  لأنّ $f(I)$ مجال، وكلُّ مجال يحتوي على أكثر من قيمتين يكون مجموعة لا نهائيّة.

- ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً. نفترض أنّه يوجد في $\mathbb{R}[X]$ كثير حدود P درجته أكبر أو تساوي 1 ويُحقّق
$$\forall x \in I, \quad P(f(x)) = 0$$
  عندئذ يكون التابع f ثابتاً.

  لأنّه، في هذه الحالة، يكون $f(I) \subset \{a \in \mathbb{R} : P(a) = 0\}$ ولكثير الحدود P عدد منته من الجذور.

- ليكن $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً، يُحقّق $f(0) = 0$ و $f(2) = 4$. عندئذ يوجد عدد α ينتمي إلى $[0,1[$ ويُحقّق $f(\alpha + 1) - f(\alpha) = 2$.

  في الحقيقة، لنتأمّل التابع المستمرّ
$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \; g(x) = f(x+1) - f(x) - 2$$
  عندئذ نلاحظ أنّ
$$g(0) + g(1) = 0$$

- إمّا أن يكون $g(0)=0$ وعندها يمكن أن نأخذ $\alpha=0$.
- أو يكون $g(0)\neq 0$ وهذا يقتضي أنّ $g(0)g(1)<0$. ومن ثَمّ يوجد، استناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى، عدد α ينتمي إلى $]0,1[$ ويُحقِّق $g(\alpha)=0$ أو $f(\alpha+1)-f(\alpha)=2$.

وهذه المناقشة تثبت المطلوب.

- ليكن $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً، ولنفترض أنّ $\forall x\geq 0,\ f(x)\geq 0$، وأنّ النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ موجودة، وتساوي عدداً ℓ ينتمي إلى $[0,1[$. عندئذ يوجد في $\mathbb{R}_+$ عددٌ β يُحقق $f(\beta)=\beta$.

في الحقيقة، إذا كان $f(0)=0$ انتهى الإثبات. لنفترض إذن أنّ $f(0)>0$ ولنتأمّل التابع المستمرّ

$$g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\ g(x)=x-f(x)$$

فنلاحظ أنّ $g(0)<0$. ولمّا كان $\ell<\dfrac{\ell+1}{2}$ فإنّه يوجد في $\mathbb{R}_+$ عددٌ α يُحقّق

$$\forall x\geq\alpha,\quad \frac{f(x)}{x}<\frac{\ell+1}{2}$$

وهذا يقتضي

$$\forall x\geq\alpha,\quad g(x)=x\cdot\left(1-\frac{f(x)}{x}\right)>x\frac{1-\ell}{2}>0$$

إذن $g(0)<0$ و $g(\alpha)>0$. ومن ثَمّ يوجد، استناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى، عدد β ينتمي إلى $\mathbb{R}_+$ ويُحقّق $g(\beta)=0$ أو $f(\beta)=\beta$.

5. الاستمرار والمجموعات المتراصّة

1-5. مبرهنة. لتكن X مجموعة جزئية **متراصّة** وغير خالية من $\mathbb{R}$، وليكن f تابعاً من $C(X,\mathbb{R})$. عندئذ تكون المجموعة $f(X)$ متراصّة، وبوجه خاص يكون التابع f محدوداً ويبلغ حدّيه الأعلى والأدنى على المجموعة X.

الإثبات

- لتكن $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $f(X)$ ، عندئذ نجد، أياً كان n من $\mathbb{N}$ ، عنصراً x_n في X يُحقِّق $y_n = f(x_n)$. ولـمّا كانت المجموعة X متراصّة، أمكننا أن نستخلص من المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية جزئية $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من عنصر x ينتمي إلى X . ومن ثَمّ تتقارب المتتالية $\left(f(x_{\varphi(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ من العنصر $f(x)$ لأنّ التابع f مستمرٌّ. أي تتقارب المتتالية $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ الجزئية من $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عنصرٍ $y = f(x)$ ينتمي إلى $f(X)$. فالمجموعة $f(X)$ مجموعة متراصة.

- المجموعة $f(X)$ محدودة، لأنها متراصّة، فالتابع f محدود على المجموعة X . لنعرّف إذن $m = \inf f(X)$. نجد، بناءً على تعريف الحدّ الأدنى، عنصراً y_n من $f(X)$ يُحقّق $m \le y_n \le m + \dfrac{1}{n}$ وذلك أياً كان $1 \le n$.

فالنقطة m لاصقة بالمجموعة المغلقة $f(X)$ ، ومنه $m \in f(X)$. أي يوجد في A عنصر α يُحقّق $f(\alpha) = \min f(X)$. ونبرهن بأسلوب مماثل على وجود β ينتمي إلى A ويُحقّق $f(\beta) = \max f(X)$. ❐

5-2. **نتيجة**. ليكن (a,b) من $\mathbb{R}^2$ يُحقِّق $a < b$ ، وليكن f تابعاً من $C([a,b],\mathbb{R})$. عندئذ تكون المجموعة $f([a,b])$ مجالاً مغلقاً ومحدوداً، أي:

$$f([a,b]) = [m, M]$$

وقد رمزنا $m = \min\limits_{[a,b]} f$ و $M = \max\limits_{[a,b]} f$.

5-3. **مثال**. ليكن (a,b) من $\mathbb{R}^2$ يُحقِّق $a < b$ ، وليكن f تابعاً من $C([a,b],\mathbb{R})$. نفترض أنّ

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) > 0$$

عندئذ يوجد في $\mathbb{R}_+^*$ عددٌ β يُحقّق

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) \ge \beta > 0$$

وذلك لأنّ f يبلغ حده الأدنى وهذا الحدّ موجب تماماً.

6. الاستمرار والاطّراد

1-6. مبرهنة. ليكن I **مجالاً** غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعاً مطّرداً تماماً. نضع $A = f(I)$، ونعرّف التطبيق : $\tilde{f} : I \to A, x \mapsto f(x)$، فيكون عندئذ :

① التطبيق $\tilde{f}$ تقابلٌ.

② للتطبيق $\tilde{f}^{-1}$ جهة اطّراد f نفسها.

الإثبات

- يمكننا أن نفترض أنّ التطبيق f متزايد تماماً دون الإنقاص من عموميّة الإثبات.
- النقطة الأولى واضحة. إذ إن كون f مطّرداً تماماً يقتضي كونه متبايناً.
- لتكن (y_1, y_2) عنصراً من A^2 يُحقِّق $y_1 < y_2$. نعرّف إذن $x_1 = \tilde{f}^{-1}(y_1)$ و $x_2 = \tilde{f}^{-1}(y_2)$. فإذا كان $x_2 \leq x_1$ نجم عن تزايد f أنّ
$$y_2 = f(x_2) \leq f(x_1) = y_1$$
وهذا خُلفٌ. نستنتج من ذلك أنّ $x_1 < x_2$ أو أنّ $\tilde{f}^{-1}(y_1) < \tilde{f}^{-1}(y_2)$. فالتطبيق $\tilde{f}^{-1}$ متزايد تماماً. ❐

لقد رأينا أنّ مبرهنة القيمة الوسطى تنصّ على أنّ صورة مجال وفق تابع مستمرٍّ هي مجال. لكن إذا كان التابع المدروس، إضافة إلى استمراره، مطّرداً تماماً أمكننا أن نكون أكثر دقّة في استنتاجنا كما توضّح المبرهنة الآتية.

2-6. مبرهنة. ليكن I **مجالاً** غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً ومطّرداً تماماً. عندئذ يمكننا تعيين صورة $f(I)$ كما يأتي:

- حالة f متزايد تماماً:

I	$[a,b]$	$[a,b[$	$]a,b]$	$]a,b[$
$f(I)$	$[f(a), f(b)]$	$\left[f(a), \lim\limits_{b^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{a^+} f, f(b)\right]$	$\left]\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f\right[$

- حالة f متناقص تماماً:

I	$[a,b]$	$[a,b[$	$]a,b]$	$]a,b[$
$f(I)$	$[f(b), f(a)]$	$\left]\lim\limits_{b^-} f, f(a)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{a^+} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f, \lim\limits_{a^+} f\right[$

الإثبات

- إنّ حالة $I = [a,b]$ نتيجة مباشرة من المبرهنة 3-2. أمّا بقيّة الحالات فإثباتاتها متشابهة.
- لنثبت على سبيل المثال حالة f متزايد تماماً و $I = [a,b[$.

ليكن y عنصراً من $f([a,b[)$ ، إذن يوجد x ينتمي إلى $[a,b[$ يُحقّق $f(x) = y$. وعندئذ، إذا اخترنا t أيّ عددٍ يقع تماماً بين x و b كان لدينا

$$a \leq x < t \Rightarrow f(a) \leq f(x) < f(t) \leq \sup_{[a,b[} f = \lim_{b^-} f$$

ومنه $y \in \left[f(a), \lim_{b^-} f \right[$.

وبالعكس، إذا كان y عنصراً من $\left[f(a), \lim_{b^-} f \right[$ ، استنتجنا من كون $\sup_{[a,b[} f = \lim_{b^-} f$ أنّه يوجد في $[a,b[$ عددٌ t يُحقّق $y < f(t)$ ، وعندئذ نستنتج من مبرهنة القيمة الوسطى ومن كون $f(a) \leq y < f(t)$ ، أنّ y هو صورة عددٍ x ينتمي إلى المجال $[a,t]$ المحتوى في $[a,b[$. إذن لقد أثبتنا أنّ $y \in f([a,b[)$. ومنه

$$f\left(\left[a,b\right[\right) = \left[f(a), \lim_{b^-} f \right[$$

وهي النتيجة المرجوّة. ❒

نجد في المبرهنة التالية خاصّة مهمّة أخرى للتوابع المطّردة.

6-3. مبرهنة. ليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعاً مطّرداً على مجال غير تافه I . عندئذ إذا كانت المجموعة $J = f(I)$ مجالاً كان التابع f مستمرّاً.

الإثبات

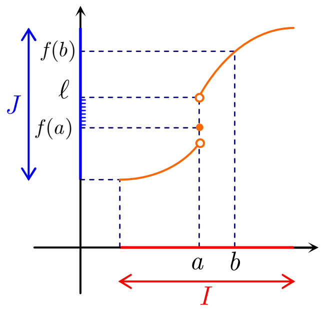
نفترض دون الإقلال من عموميّة الإثبات أنّ التابع f متزايدٌ، على أن نستبدل $-f$ بالتابع f إذا دعت الحاجة.

- ليكن a عنصراً من I لا يساوي الحدّ الأعلى للمجال I ، أي $a < \sup I$. لمّا كان التابع f متزايداً قَبِل هذا التابع نهاية، ولتكن ℓ ، عندما تسعى x إلى a بقيم أكبر من a ، إذن $\ell = f(a^+)$. وبسبب تزايد التابع f يكون لدينا $\ell \geq f(a)$.

لنفترض جدلاً أنّ $f(a) < \ell$. عندئذ مهما تكن x من I يتحقّق الاقتضاءان

$$x \le a \Rightarrow f(x) \le f(a) \quad \text{و} \quad x > a \Rightarrow f(x) \ge \ell$$

إذن لا يأخذ التابع f أيّة قيمة واقعة بين $f(a)$ و ℓ .



ولكن لمّا كان $a < \sup I$ وجدنا في I عنصراً b يكون أكبر تماماً من a وهذا يقتضي أنّ $f(a) \le \ell \le f(b)$.
فإذا تذكّرنا أنّ $J = f(I)$ مجال يحتوي على العنصرين $f(a)$ و $f(b)$ استنتجنا أنّ

$$\left]f(a), \ell\right[\subset \left[f(a), f(b)\right] \subset f(I)$$

أي إنّ f يأخذ جميع قيم المجال $\left]f(a), \ell\right[$ وهذا خُلفٌ.

وعليه لا بُدّ أن يكون $f(a) = \ell = f(a^+)$. إذن لقد أثبتنا أنّ f **مستمرٌ من اليمين** عند كلّ نقطة من I مختلفة عن $\sup I$، وهو بوجه خاص مستمرٌ عند الحد الأدنى للمجال I إذا كان هذا الحدّ عنصراً من هذا المجال.

▪ ونبرهن بأسلوب مماثل أنّ f **مستمرٌّ من اليسار** عند كلّ نقطة من I مختلفة عن $\inf I$.

فنكون بذلك قد أثبتنا استمرار التابع f على I . ❐

ونأتي الآن إلى المبرهنة المهمّة التالية، وهي المبرهنة الأساسيّة في هذه الفقرة.

6-4. مبرهنة. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$. وليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمراً ومطّرداً تماماً. عندئذ يكون $J = f(I)$ مجالاً من $\mathbb{R}$، ويكون التابع العكسيّ للتابع

$$\tilde{f} : I \to J, x \mapsto f(x)$$

مستمراً على J .

الإثبات

التابع f متباينٌ لأنّه مطّردٌ تماماً. إذن يُعرّف التابع $\tilde{f}$ تقابلاً بين I والمجموعة $J = f(I)$ التي هي مجالٌ بسبب استمرار التابع f . وأخيراً $\tilde{f}^{-1}$ هو تابعٌ مطّردٌ تماماً وصورته $\tilde{f}^{-1}(J) = I$ هي مجالٌ. إذن هو تابعٌ مستمرٌّ بناءً على المبرهنة 4-2. ❐

☜ نستعمل عادة الرمز f^{-1} دلالة على التابع $J \to \mathbb{R}, x \mapsto \tilde{f}^{-1}(x)$، و نسمّيه تجاوزاً **التابع العكسي** للتابع f .

6-5. **مبرهنة**. ليكن I **مجالاً** غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً ومتبايناً عندئذ يكون f مطّرداً تماماً.

الإثبات

لنتأمّل المجموعة $\mathcal{A} = \{(x,y) \in I \times I : x < y\}$. لكي نثبت أنّ f مطّردٌ تماماً علينا أن نبرهن أنّ المقدار $f(y) - f(x)$ يُحافظ على إشارة ثابتة عندما تتحوّل الثنائيّة (x,y) في $\mathcal{A}$. لنثبّت إذن عنصراً (a,b) من $\mathcal{A}$. وليكن (x,y) من $\mathcal{A}$ عندئذ نتأمّل التابع

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f((1-t)b + ty) - f((1-t)a + tx)$$

من الواضح أنّ φ تابعٌ مستمرٌّ على $[0,1]$. فإذا كان $\varphi(1)\varphi(0) < 0$ وجب، بمقتضى مبرهنة القيمة الوسطى، أن نجد في $]0,1[$ عدداً θ يُحقّق $\varphi(\theta) = 0$. ولمّا كان f متبايناً اقتضى الشرطُ $\varphi(\theta) = 0$ المساواة

$$b + \theta(y - b) = a + \theta(x - a)$$

وهذا يؤدّي إلى التناقض

$$0 < (1-\theta)(b-a) = \theta(x-y) < 0$$

نستنتج إذن أنّ $\varphi(1)\varphi(0) > 0$، أي إنّ للمقدار $\varphi(1) = f(y) - f(x)$ إشارة $\varphi(0)$ نفسها وذلك أياً كان (x,y) من $\mathcal{A}$. وهذا يثبت الاطراد التام للتابع f. ❐

6-6. **ملاحظة**. إذا كان f تابعاً مطّرداً تماماً على مجموعة A، كان بالضرورة متبايناً. وما أثبتناه آنفاً هو أنّ العكس يكون صحيحاً إذا كانت المجموعة A مجالاً وكان f مستمرّاً ومتبايناً عليه.

6-7. **مثال**. ليكن n من $\mathbb{N}^*$. عندئذ يكون التابع $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^n$ تابعاً مستمرّاً ومتزايداً تماماً ويأخذ القيمة 0 عند 0 ويسعى إلى $+\infty$ عند $+\infty$. إذن هو يُعرّف تقابلاً من $\mathbb{R}_+$ إلى $\mathbb{R}_+$، ويكون تقابله العكسي هو تابع الجذر من المرتبة n :

$$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

وهو من ثَمّ تابعٌ مستمرٌّ استناداً إلى ما سبق.

7. الاستمرار المنتظم

7-1.تعريف. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$. وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. نقول إنّ f مستمرٌّ بانتظام على A إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \quad \left.\begin{array}{c}(x,y) \in A^2 \\ \left|x-y\right| < \eta\end{array}\right\} \Rightarrow \left|f(x)-f(y)\right| < \varepsilon$$

لنقارن هذا التعريفَ بتعريف استمرار التابع f على A الذي نذكِّر به فيما يأتي:

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{\eta} > 0, \quad \left.\begin{array}{c}y \in A \\ \left|x-y\right| < \tilde{\eta}\end{array}\right\} \Rightarrow \left|f(x)-f(y)\right| < \varepsilon$$

نرى أنّ η تتعلّق فقط بالعدد ε في تعريف الاستمرار المنتظم، في حين تتعلّق $\tilde{\eta}$ بكلٍ من ε و x في تعريف الاستمرار. لذلك ننبّه القارئ إلى ضرورة عدم الخلط بين المفهومين.

وكذلك تنتج المبرهنة الآتية بوضوح من ملاحظة التعريفين السابقين:

7-2. مبرهنة : لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$. وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. إذا كان f مستمرّاً بانتظام على A فإنه يكون مستمراً على A.

☜ يبيِّن المثال التالي أنّ عكس المبرهنة السابقة خطأ عموماً. لنتأمّل التابع المستمرّ

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

لو كان f مستمرّاً بانتظام لأمكننا إيجاد $0 < \eta$ تُحقّق

$$(*) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x-y| < \eta \Rightarrow \left|x^2-y^2\right| < 1$$

ولكن إذا اخترنا $y = \frac{1}{\eta}$ و $x = \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2}$، كان لدينا من جهة أولى $|x-y| < \eta$، ومن جهة ثانية

$$x^2 - y^2 = 1 + \frac{\eta^2}{4} > 1$$

و هذا يناقض $(*)$ ويثبت أنّ f ليس مستمرّاً بانتظام.

ولكن هناك حالة خاصة يكون فيها عكس المبرهنة السابقة صحيحاً، وهي مبيّنة فيما يلي.

7-3. **مبرهنة هاينه–بوريل** Heine-Borel. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية و**متراصّة** من $\mathbb{R}$. وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. إذا كان f مستمرّاً على A كان مستمراً بانتظام على A .

الإثبات

لنفترض أنّ f ليس مستمرّاً بانتظام على A . يوجد إذن $0 < \varepsilon_0$ تُحقّق

$$(*)\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists(x_n, y_n) \in A^2, \left(|x_n - y_n| < \frac{1}{n}\right) \wedge \left(|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0\right)$$

ولمّا كانت المجموعة A متراصّة، وجدنا تطبيقاً متزايداً تماماً $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ يجعل المتتالية الجزئية $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب من عنصر x ينتمي إلى A . ولأنّ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ ، يكون:

$$\lim_{n\to\infty} y_{\varphi(n)} = \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = x$$

ولأنّ التابع f مستمرٌّ عند x ، يكون

$$\lim_{n\to\infty} f(y_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(x)$$

وهذا يثبت أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(y_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})\right) = 0$$

ويناقض، من ثَمّ، $(*)$ إذ لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\right| > \varepsilon_0$$

إذن لابدّ أن يكون f مستمرّاً بانتظام على A . ❐

7-4. **تعريف**. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$. وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. نقول إنّ التابع f يحقِّقُ **شرط لِبشتز** Lipschitz على A بثابت $0 < K$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall(x,y) \in A \times A, \ \left|f(x) - f(y)\right| \le K\left|x - y\right|$$

فمثلاً، يحقّق $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{1+|x|}$ شرط لِبشيتز بثابت قدره 1، لأن

$$\left|f(x) - f(y)\right| = \frac{\big||y| - |x|\big|}{(1+|x|)(1+|y|)} \le \frac{|y-x|}{(1+|x|)(1+|y|)} \le |y-x|$$

☜ تنبع أهميّة التوابع التي تحقّق شرط لِبشتز على مجموعة ما من أنها تكون مستمرّة بانتظام على هذه المجموعة، (هذا تحقُّقٌ مباشر من التعريف). إلاّ أنّ عكس هذه الخاصّة خطأ، فالتابع $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرٌّ بانتظام، دون أن يحقق شرط لِبشتز.

5-7. مثال. لنثبت أنّ التابع $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرٌّ بانتظام.

نلاحظ أولاً صحة المتراجحة:

$$❶ \qquad \forall (x,y) \in \big([1,+\infty[\big)^2, \quad \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \le \frac{1}{2}|x-y|$$

لتكن $0 < \varepsilon$. لمّا كان التابع $f_{|[0,2]} : [0,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ مستمراً على المجال المتراصّ $[0,2]$، كان مستمرّاً بانتظام. إذن توجد $0 < \tilde{\eta}$ تُحقّق

$$❷ \qquad \forall (x,y) \in \big([0,2]\big)^2, \quad |x-y| < \tilde{\eta} \Rightarrow \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| < \varepsilon$$

لنضع $\eta = \min(1,\tilde{\eta},2\varepsilon)$. ولتكن (x,y) من $(\mathbb{R}_+^*)^2$ تُحقّق الشرط $|x-y| < \eta$، عندئذ :

- إمّا أن ينتمي x و y إلى المجال $[0,2]$ وعندها يكون لدينا، بناءً على ❷
$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| < \varepsilon$$
- أو يكون أحد العنصرين x أو y في المجال $]2,+\infty[$ فيكونان معاً في المجال $[1,+\infty[$ لأنّ $\eta \le 1$. واستناداً إلى ❶ يكون
$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \le \frac{1}{2}|x-y| < \frac{\eta}{2} \le \varepsilon$$

إذن

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \quad |x-y| < \eta \Rightarrow \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| < \varepsilon$$

وهذا يُثبت الاستمرار المنتظم للتابع $\sqrt{\ }$ على $\mathbb{R}_+$.

ملاحظة. كان بالإمكان إثبات الخاصّة السابقة انطلاقاً من المتراجحة الآتية، التي نترك إثباتها للقارئ:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \le \sqrt{|x-y|}$$

تمرينات

التمرين 1. احسب النهايات التالية في حال وجودها :

① $\lim_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$, ② $\lim_{x\to +\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$, ③ $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$,

④ $\lim_{x\to +\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{x}$, ⑤ $\lim_{x\to 0} \frac{\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor + x}{\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor - x}$, ⑥ $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$,

⑦ $\lim_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)$

⑧ $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - (x+1)\right)$

⑨ $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} - \sqrt{x}\right)$

⑩ $\lim_{x\to +\infty} x^{3/4}\left(\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x-1}\right)$

الحل

① لنلاحظ أنّ

$$\forall x \in \left]0,1\right[,\quad \frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \leq \frac{1}{x}$$

إذن

$$\forall x \in \left]0,1\right[,\quad 1 - x < x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \leq 1$$

وعليه $\lim_{x\to 0} x\lfloor 1/x\rfloor = 1$.

② من جهة أخرى

$$\forall x > 1,\quad x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 0$$

إذن $\lim_{x\to \infty} x\lfloor 1/x\rfloor = 0$.

③ لمّا كان

$$\forall x \in \left]0,1\right[, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} < \sqrt{x}\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

استنتجنا أنّ $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\lfloor 1/x \rfloor = +\infty$.

④ إذا استبدلنا x بالمقدار $1/x$ في ① استنتجنا أنّ $\lim_{x\to\infty} \lfloor x \rfloor / x = 1$.

⑤ أيضاً، بالاستفادة من ① بعد ضرب البسط والمقام في المقدار x، نجد

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + x}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - x} = 1$$

⑥ لنلاحظ من جهة أولى أنّه في حالة عدد طبيعي موجب تماماً n لدينا

$$\frac{(n+\frac{1}{2})^{(n+\frac{1}{2})}}{\left\lfloor n+\frac{1}{2} \right\rfloor^{\lfloor n+\frac{1}{2} \rfloor}} = \frac{(n+\frac{1}{2})^n}{n^n}\sqrt{n+\tfrac{1}{2}} \geq \sqrt{n+\tfrac{1}{2}}$$

إذن $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+\frac{1}{2})^{(n+\frac{1}{2})}}{\left\lfloor n+\frac{1}{2} \right\rfloor^{\lfloor n+\frac{1}{2} \rfloor}} = +\infty$. ولكن لدينا من جهة ثانية : $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{\lfloor n \rfloor^{\lfloor n \rfloor}} = 1$. وعليه

نستنتج أنّ النهاية $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$ غير موجودة.

⑦ لنضع $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+\sqrt{x-1}}$ في حالة $x > 1$. لمّا كان لدينا

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}}\\
&= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+1}}{x}}+\sqrt{1+\frac{\sqrt{x-1}}{x}}}
\end{aligned}$$

استنتجنا أنّ $\lim_{x\to\infty} x\cdot f(x) = \frac{1}{2}$.

⑧ وهنا أيضاً لدينا

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x+1}-x-1 &= \frac{-x}{\sqrt{x^2+x+1}+x+1}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

إذن $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x-1\right)=-1$.

⑨ لنعرّف $g(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}$ عندئذ يكون لدينا

$$g(x)=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x}}+1}$$

ومنه $\lim_{x\to\infty} g(x)=\frac{1}{2}$.

⑩ هنا نستفيد من المطابقة $a-b=\dfrac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$ فإذا كان $0<b<a$ استنتجنا أنّ

$$\frac{a^4-b^4}{4a^3}\le a-b\le\frac{a^4-b^4}{4b^3}$$

وعليه

$$\frac{x^{3/4}}{2(x+1)^{3/4}}\le x^{3/4}(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1})\le\frac{x^{3/4}}{2(x-1)^{3/4}}$$

أو

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-3/4}\le x^{3/4}(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1})\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-3/4}$$

ومنه

$$\lim_{x\to\infty} x^{3/4}(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1})=\frac{1}{2}$$

ويكتمل حل التمرين. ■

التمرين 2. ادرس استمرار التوابع الآتية:

$$① .\qquad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\lfloor x\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}.$$

$$② .\qquad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x)=x+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}.$$

$$③ .\qquad h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad h(x)=\begin{cases}x^2 & : \quad x\in\mathbb{Q}\\ x & : \quad x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$$

$$④ .\qquad k:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad k(x)=\begin{cases}\cos x: & x\in\mathbb{Q}\\ \sin x: & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$$

الحل

① نعلم أنّ تابع الجزء الصحيح مستمر على $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ إذن كذلك يكون التابع f . لنتأمّل عنصراً $x=k$ من $\mathbb{Z}$ عندئذ يكون لدينا

$$\lim_{x\to k^+} f(x)=k+0=k \quad \text{و} \quad \lim_{x\to k^-} f(x)=k-1+1=k$$

إذن التابع f مستمر على $\mathbb{R}$.

② هنا لدينا $g(x)=x-\lfloor x\rfloor+f(x)$ إذن g مستمرٌ فقط على المجموعة $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

③ لنلاحظ أوّلاً أنّه في حالة $a\notin\{0,1\}$ يكون $a^2\neq a$ وعليه فإن النتيجتين التاليتين

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\notin\mathbb{Q}}} h(x)=a \qquad \text{و} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{Q}}} h(x)=a^2$$

تقتضيان عدم وجود النهاية $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ والتابع h غير مستمر عند a .

من جهة أخرى لمّا كان

$$\forall x\in\left]-1,1\right[,\quad \left|h(x)\right|\le\left|x\right|$$

استنتجنا أنّ التابع h مستمرٌ عند 0 . وكذلك فإنّ المتراجحة

$$\forall x\in\left]0,2\right[,\quad \left|h(x)-1\right|\le 3\left|x-1\right|$$

تتيح لنا أن نستنتج أنّ التابع h مستمرٌ عند 1 أيضاً.

④ بأسلوب مماثل لما سبق نجد أنّ التابع k مستمرٌ فقط على المجموعة $\frac{\pi}{4}+\pi\mathbb{Z}$. ■

التمرين 3. عيِّن جميع التوابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المحقِّقة للشروط المطلوبة في كلٍ من الحالات التالية:

① التابع f مستمر عند 0، ويحقّق $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(2x)=f(x)\cos x$.

② التابع f مستمر، ويحقّق $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(2x+1)=f(x)$.

③ التابع f مستمر، ويحقّق $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)=f(x)+f(y)$.

هل يمكن أن نستعيض عن الاستمرار في الحالة الأخيرة بشرط أضعف ؟

الحل

① ليكن f تابعاً يُحقِّق الشرط المذكور، وليكن $x\neq 0$. سنبرهن بالتدريج على العدد n أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)\cdot\frac{\sin x}{2^n\sin(2^{-n}x)}$$

في الحقيقة، إنّ هذه النتيجة واضحة في حالة $n=0$. لنفترض صحّتها عند قيمة n . عندئذ يكون لدينا استناداً إلى فرضْ التدريج ما يلي:

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

ومنه

$$\begin{aligned}
f(x)&=f\left(\frac{x}{2^n}\right)\cdot\frac{\sin x}{2^n\sin(2^{-n}x)}\\
&=f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cdot\frac{\sin x}{2^{n+1}\cos(2^{-n-1}x)\sin(2^{-n-1}x)}\\
&=f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cdot\frac{\sin x}{2^{n+1}\sin(2^{-n-1}x)}
\end{aligned}$$

وبالاستفادة من استمرار f عند 0 وجعل n تسعى إلى اللانهاية نجد

$$f(x)=f(0)\cdot\frac{\sin x}{x}$$

وبالعكس كلُّ تابع من الشكل

$$f_\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}\lambda\dfrac{\sin x}{x} & :\quad x\neq 0\\ \lambda & :\quad x=0\end{cases}$$

حيث $\lambda\in\mathbb{R}$، يُحقِّق الشرط المذكور. فمجموعة التوابع المطلوبة هي $\{f_\lambda:\lambda\in\mathbb{R}\}$.

② ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً عند -1 و يُحقِّق $f(2x+1)=f(x)$ أياً كانت x من $\mathbb{R}$. إذا استبدلنا $u-1$ بالعدد x نجد أنّ

$$\forall u\in\mathbb{R},\quad f(2u-1)=f(u-1)$$

لنعرّف إذن التابع الجديد $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(u)=f(u-1)$ عندئذ يكون g مستمرّاً عند 0 ويكون لدينا

$$\forall u\in\mathbb{R},\quad g(2u)=g(u)$$

لتكن x من $\mathbb{R}$ عندئذ تسمح لنا الخاصّة السابقة أن نبرهن بالتدريج على n أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad g(x)=g\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

وبجعل n تسعى إلى اللانهاية نستنتج أنّ $g(x)=g(0)$. إذن

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=f(-1)$$

وبالعكس كلُّ تابع ثابت يُحقِّق الخاصّة المذكورة.

③ ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً يُحقِّق الخاصّة

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)=f(x)+f(y)\qquad (\mathcal{A})$$

■ من الواضح أنّ f تشاكلٌ زمريٌّ بين الزمرة $(\mathbb{R},+)$ ونفسها، وعليه فإنّ

$$f(0)=0\qquad ❶$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(-x)=-f(x)\qquad ❷$$

ونبرهن، استناداً إلى العلاقة $(\mathcal{A})$، وبالتدريج على n أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\quad f(nx)=n\cdot f(x)$$

فإذا استفدنا من ❶ و ❷ استنتجنا أنّ

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ \forall x\in\mathbb{R},\quad f(nx)=n\cdot f(x)$$

وينتج من ذلك، بتطبيق هذه النتيجة مرة على $(q,px/q)$ ومرّة على (p,x)، أنّ

$$\forall q\in\mathbb{N}^*,\ \forall p\in\mathbb{Z},\ \forall x\in\mathbb{R},\quad q\cdot f\left(\frac{px}{q}\right)=f(px)=p\cdot f(x)$$

أو

$$\forall q\in\mathbb{N}^*,\ \forall p\in\mathbb{Z},\ \forall x\in\mathbb{R},\quad f\left(\frac{p}{q}\cdot x\right)=\frac{p}{q}\cdot f(x)$$

أي

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$$

وعليه لقد أثبتنا أنّ كلّ تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ يُحقّق الشرط $(\mathcal{A})$ يُحقّق أيضاً الشرط

$$\forall (r,x) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R}, \quad f(r \cdot x) = r \cdot f(x) \qquad ❸$$

- لنفترض أنّ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع يُحقّق الشرط $(\mathcal{A})$، ويُحقّق أيضاً الشرط الإضافي التالي:

"التابع f محدود على مجال مغلق غير تافه $[a,b]$ حيث $a < b$" $\qquad (\mathcal{B})$

نعرّفُ إذن $M = \sup\limits_{[a,b]} |f|$، و $I = [a-b, b-a]$. ونتأمّل عنصراً x من I.
عندئذ يوجد عنصران y و z من $[a,b]$ يُحقّقان $x = y - z$.

في الحقيقة يمكننا أن نأخذ

- $y = x + a$ و $z = a$ في حالة $b - a \geq x \geq 0$،
- و $y = x + b$ و $z = b$ في حالة $0 \geq x \geq a - b$.

عندئذ يكون لدينا

$$\left|f(x)\right| = \left|f(y) - f(z)\right| \leq \left|f(y)\right| + \left|f(z)\right| \leq 2M$$

أي

$$\sup_I |f| \leq 2M \qquad ❹$$

ليكن x عدداً حقيقياً مختلفاً عن 0. ولتكن $(r_n)_{n\in\mathbb{R}}$ متتالية **متناقصة** من الأعداد العاديّة تسعى إلى $\frac{|x|}{b-a}$. عندئذ، مهما تكن n من $\mathbb{N}$، يكن $\frac{x}{r_n} \in I$، وعليه

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|f\left(\frac{x}{r_n}\right)\right| \leq 2M$$

وذلك استناداً إلى ❹. وإذا استفدنا من ❸ وجعلنا n تسعى إلى $+\infty$ وجدنا

$$\left|f(x)\right| \leq \frac{2M}{b-a}|x|$$

وهي متراجحة صحيحة أيضاً في حالة $x = 0$. نطبّق هذه المتراجحة على $x - y$ مكان x فنجد، بوضع $K = \dfrac{2M}{b-a}$، أنّ

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leq K\left|x - y\right|$$

ليكن x عدداً حقيقيّاً، ولنتأمّل متتالية $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من الأعداد العاديّة تسعى إلى x. بملاحظة أنّ

$$f(r_n) = f(r_n 1) = r_n f(1)$$

وذلك استناداً إلى ❸، وبالاستفادة من المتراجحة السابقة، نرى أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|f(x) - r_n f(1)\right| \leq K\left|x - r_n\right|$$

فإذا جعلنا n تسعى إلى $+\infty$ وجدنا أنّ $f(x) = x \cdot f(1)$.

إذن مجموعة التوابع التي تُحقّق الشرطين $(\mathcal{A})$ و $(\mathcal{B})$ هي مجموعة التوابع من الصيغة $x \mapsto \lambda x$. ونشير هنا إلى أنّه توجد توابع تُحقّق $(\mathcal{A})$ دون أن تكون من هذا النمط. كما نشير إلى أن كلّاً من الشرطين: استمرار f عند نقطة، أو كونه مطّرداً على مجال جزئي من $\mathbb{R}$ يقتضي الشرط $(\mathcal{B})$. ■

التمرين 4.

① أعطِ مثالاً على تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ غير ثابت ويحقّق $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$.

② أثبت أنه إذا كان $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمراً عندكلٍّ من 0 و 1، ويحقق الشرط $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$ كان ثابتاً.

الحل

① إنّ التابع المعرّف بالعلاقة

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x = 0 \\ 0 & : \quad x \neq 0 \end{cases}$$

يُحقّق الخاصّة $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$ وهو تابع غير ثابت.

② ليكن $x > 0$ عندئذ يكون لدينا، بالتدريج على n،

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(\sqrt[2^n]{x})$$

وبجعل n تسعى إلى $+\infty$ نجد مستفيدين من استمرار f عند 1 أنّ $f(x) = f(1)$. أمّا استمرار f عند 0 فيقتضي أنّ $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = f(1)$.

وأخيراً، في حالة $x < 0$ ، لدينا $f(x) = f(x^2) = f\big(1\big)$ أيضاً. نستنتج من هذا أنّ التابع f تابع ثابتٌ. وبذا يكتمل إثبات المطلوب. ■

التمرين 5. أعطِ مثالاً على تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ غير مستمرٍ عند أية نقطة من $\mathbb{R}$ ، على أن يكون $f \circ f$ مستمراً على $\mathbb{R}$.
ثُمّ أعطِ مثالاً عن تابع $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ يُحقّق أنّ $g \circ g$ غير مستمر عند أية نقطة من $\mathbb{R}$ و $g \circ g \circ g$ مستمرٌّ على $\mathbb{R}$.

الحل

لنتأمّل التابع

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & : \quad x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\} \\ 0 & : \quad x \notin \mathbb{Q}\backslash\{0\} \end{cases}$$

عندئذ نرى بسهولة أنّ f غير مستمر عند أيّة نقطة من $\mathbb{R}$ ومع ذلك فإن $f \circ f = 0$.

وكذلك إذا تأمّلنا التابع

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ g(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \in \{0,1\} \\ 1 & : \quad x \notin \mathbb{Q} \\ \sqrt{2} & : \quad x \in \mathbb{Q}\backslash\{0,1\} \end{cases}$$

فإننا نرى بسهولة أنّ

$$g \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \begin{cases} 1 & : \quad x \in \mathbb{Q}\backslash\{0,1\} \\ 0 & : \quad x \notin \mathbb{Q}\backslash\{0,1\} \end{cases}$$

وهو تابع غير مستمر عند أيّة نقطة من $\mathbb{R}$. ولكنّ $g \circ g \circ g = 0$.وبذا يكتمل الإثبات. ■

التمرين 6.

① أعطِ مثالاً على تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مستمر على $\mathbb{R}$، والمجموعة $f(\mathbb{R})$ مجالٌ مفتوحٌ ومحدود.

② أعطِ مثالاً على تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مستمر على $\mathbb{R}$، والمجموعة $f(\mathbb{R})$ مجالٌ مغلقٌ ومحدود.

③ أعطِ مثالاً على تابع $f:\left]0,1\right]\to\mathbb{R}$ مستمر على $\left]0,1\right]$، والمجموعة $f(\left]0,1\right])$ مجالٌ مفتوحٌ ومحدود.

الحل

① التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ مستمرٌ على $\mathbb{R}$، ويُحقّق $f(\mathbb{R})=\left]-1,+1\right[$.

② التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ مستمرٌ على $\mathbb{R}$، ويُحقّق $f(\mathbb{R})=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

③ التابع $f:\left]0,1\right]\to\mathbb{R},\ x\mapsto (1-x)\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ هو تابع مستمر على $\left]0,1\right]$، ويُحقّق

$$f(\left]0,1\right])=\left]-1,+1\right[$$

وهي التوابع المطلوبة. ■

التمرين 7. ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{R}^2$ يُحقّق $a<b$. وليكن $f:\left[a,b\right]\to\left[a,b\right]$ تابعاً مستمراً. أثبت أنه يوجد في $\left[a,b\right]$ عددٌ x_0 يُحقّق $f(x_0)=x_0$.

الحل

في حالة $f(a)=a$ أو $f(b)=b$ يتحقّق المطلوب وضوحاً. لذلك سنفترض أننا في غير هذه الحالة، حينئذ نتأمل التابع $g:[a,b]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)-x$ وتحقّق بسهولة أنّ التابع g تابع مستمرٌ وأن $g(a)>0$ و $g(b)<0$ إذن لا بُدّ أن يكون هناك عددٌ x_0 ينتمي إلى $[a,b]$ ويُحقّق $g(x_0)=0$ وذلك استناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى. وبذا يكتمل الإثبات. ■

التمرين 8. ليكن f و g تابعين حقيقيين مستمرين على المجال $[0,1]$. نفترض أن

$$f(1) = g(0) = 1 \quad \text{و} \quad f(0) = g(1) = 0$$

أثبت أنّه

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \exists x \in [0,1], \quad f(x) = \lambda g(x)$$

الحل

في حالة $\lambda = 0$ يمكن أن نأخذ $x_0 = 0$ فيكون $f(x_0) = \lambda g(x_0)$.

لتكن $\lambda > 0$ ولنتأمّل التابع :

$$h : [0,1] \to \mathbb{R}, \ h(x) = f(x) - \lambda\, g(x)$$

فنرى أنّ التابع h تابعٌ مستمرٌ على $[0,1]$، ويُحقّق $h(0) = -\lambda < 0$ و $h(1) = 1 > 0$.
إذن استناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى، يوجد x_λ في $[0,1]$ يُحقّق $h(x_\lambda) = 0$. وبذا يكتمل الإثبات. ■

التمرين 9. ليكن (p,q) من $\mathbb{R}_+^{*2}$، وليكن $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمراً يحقّق الشرط $f(0) \neq f(1)$. أثبت أنه يوجد في $]0,1[$ عددٌ x_0 يُحقّق

$$pf(0) + qf(1) = (p+q)f(x_0)$$

الحل

لنتأمّل التابع

$$h : [0,1] \to \mathbb{R}, \ h(x) = f(x) - \frac{pf(0) + qf(1)}{p+q}$$

فنرى أنّ h تابع مستمرٌ على $[0,1]$ ويُحقّق

$$h(1)h(1) = -\frac{pq}{(p+q)^2}\big(f(0) - f(1)\big)^2 < 0$$

إذن استناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى، يوجد x_0 في $[0,1]$ يُحقّق $h(x_0) = 0$. وهذا يثبت المطلوب. ■

التمرين 10. ليكن p عدداً من $\mathbb{N}^*$، وليكن $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً يحقّق الشرط $f(0)=f(1)$. أثبت أنه يوجد في $\left[0,1-\frac{1}{p}\right]$ عددٌ x_0 يُحقّق

$$f\left(x_0+\frac{1}{p}\right)=f(x_0)$$

الحل

حالة $p=1$ واضحة ويمكننا أن نأخذ $x_0=0$.

لنفترض إذن أنّ $p\geq 2$. ولنعرّف، حين يكون k عنصراً من $\{1,\ldots,p-1,\}$ المقدار

$$\delta_k=f\left(\frac{k+1}{p}\right)-f\left(\frac{k}{p}\right)$$

عندئذ يكون لدينا

$$\sum_{k=0}^{p-1}\delta_k=f(1)-f(0)=0$$

وعليه

- إمّا أن يكون $\delta_0=0$ وعندئذ تُحقِّق قيمة $x_0=0$ الخاصّة المطلوبة.
- وإمّا أن يكون $\delta_0\neq 0$ وعندها يكون لدينا $\sum_{k=1}^{p-1}\delta_0\delta_k=-\delta_0^2<0$ فيوجد عدد ℓ يُحقِّق $1\leq\ell<p$ و $\delta_0\delta_\ell<0$. ومن ثَمّ فإنّ التابع

$$h:\left[0,1-\frac{1}{p}\right]\to\mathbb{R},\ x\mapsto f\left(x+\frac{1}{p}\right)-f(x)$$

تابعٌ مستمرٌ ويُحقِّق $h(0)\cdot h\left(\frac{\ell}{p}\right)<0$. إذن، استناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى، يوجد في المجال $\left[0,1-\frac{1}{p}\right]$ عددٌ x_0 يُحقّق $h(x_0)=0$. وهذا يثبت المطلوب.

في الحقيقة، ليكن α عنصراً من $]0,1[$، ولنفترض أنّه مهما يكن التابع المستمر $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ الذي يحقق $f(0)=f(1)$، يوجد في $[0,1-\alpha]$ عددٌ x_0 يُحقِّق $f(x_0+\alpha)=f(x_0)$ عندئذ لا بُدّ أن تكون α من الشكل $\frac{1}{p}$ حيث $p\in\mathbb{N}^*$. وهذا ما نبرهن عليه فيما يلي.

ليكن α عنصراً من $]0,1]$، ولنتأمّل التابع المستمر

$$f_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_\alpha(x) = x\sin^2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{\alpha}\right)$$

فنرى أنّ $f_\alpha(0) = f_\alpha(1) = 0$، وأنّ

$$\forall x \in [0,1-\alpha], \quad f_\alpha(x+\alpha) - f_\alpha(x) = \alpha\sin^2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$$

وعليه حتّى نجد في $[0,1-\alpha]$ عدداً x_0 يُحقّق $f(x_0+\alpha) = f(x_0)$، يجب أن يكون $\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) = 0$، أو أن يكون $\alpha = 1/p$ حيث $p \in \mathbb{N}^*$. ■

التمرين 11. ليكن I مجالاً غير خالٍ من $\mathbb{R}$. وليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمراً ومتبايناً. أثبت أن f تابع مطّرد تماماً.

تطبيق. ليكن $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعاً متناقصاً تماماً، أثبت أنه لا يوجد تطبيق مستمر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ يُحقّق $f \circ f = \varphi$.

الحل

يجب علينا إثبات الاطّراد التام للتابع f. ليكن (a,b) عنصراً من I^2 يُحقّق $a < b$. وليكن (x,y) عنصراً من I^2 يُحقّق $x < y$. ثُمّ لنتأمّل التابع

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto f((1-t)b + ty) - f((1-t)a + tx)$$

من الواضح أنّ φ تابعٌ مستمرٌّ على $[0,1]$. فإذا كان $\varphi(1)\varphi(0) < 0$ وجب، بمقتضى مبرهنة القيمة الوسطى، أن نجد في $]0,1[$ عدداً θ يُحقّق $\varphi(\theta) = 0$. ولمّا كان f متبايناً فإن الشرط $\varphi(\theta) = 0$ يقتضي $b + \theta(y-b) = a + \theta(x-a)$، وهذا يؤدّي إلى التناقض:

$$0 < (1-\theta)(b-a) = \theta(x-y) < 0$$

نستنتج إذن أنّ $\varphi(1)\varphi(0) > 0$، أي إنّ للمقدار $\varphi(1) = f(y) - f(x)$ إشارة $\varphi(0)$ نفسها وذلك أياً كانت (x,y) من I^2 التي تُحقّق $x < y$. وهذا يثبت الاطراد التام للتابع f.

ليكن $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعاً متناقصاً تماماً، ولنفترض أنّه يوجد تطبيق مستمر f من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ يُحقّق $f \circ f = \varphi$. عندئذ يكون f مستمرّاً ومتبايناً لأنّ φ متباينٌ، واستناداً إلى ما سبق يكون f مطّرداً تماماً، وعلى هذا لا بُدّ أن يكون التابع $\varphi = f \circ f$ متزايداً تماماً، وهذا نقيض الفرْض. لذا لا يوجد تابع مستمرٌ f يُحقّق $f \circ f = \varphi$. ■

التمرين 12. ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً يحقّق $\lim_{-\infty} f=\lim_{+\infty} f=+\infty$. أثبت أنه يوجد في $\mathbb{R}$ عددٌ x_0 يُحقّق $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geq f(x_0)$.

الحل

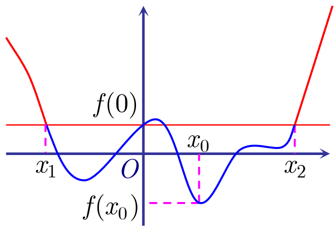
لمّا كان $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ فإنّه يوجد عددٌ حقيقي x_1 يُحقق

$$\forall x<x_1,\ f(x)>f(0) \qquad ❶$$

ولأنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، يوجد كذلك عددٌ حقيقي x_2 يُحقّق

$$\forall x>x_2,\ f(x)>f(0) \qquad ❷$$

ولأنّ العدد 0 لا يُحقّق أيّاً من المتراجحتين السابقتين استنتجنا أنّ $x_1\leq 0\leq x_2$.



لمّا كان f تابعاً مستمرّاً على المجال المغلق والمحدود $[x_1,x_2]$ استنتجنا أنّه يبلغ حدّه الأدنى عليه، فيوجد عددُ x_0 ينتمي إلى $[x_1,x_2]$ يُحقّق

$$\forall x\in[x_1,x_2],\ f(x)\geq f(x_0) \qquad ❸$$

وبوجه خاص $f(0)\geq f(x_0)$ لأنّ $0\in[x_1,x_2]$.

لنتأمّل الأن عدداً x من $\mathbb{R}$ ولنناقش الحالات الآتية :

- إذا كان $x<x_1$ كان $f(x)>f(0)\geq f(x_0)$ بالاستفادة من ❶ .
- إذا كان $x_1\leq x\leq x_2$ كان $f(x)\geq f(x_0)$ بالاستفادة من ❷ .
- إذا كان $x_2<x$ كان $f(x)>f(0)\geq f(x_0)$ بالاستفادة من ❸ .

وعليه فإنّ $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geq f(x_0)$. وهذا يثبتُ المطلوب. ■

التمرين 13. ليكن $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً يُحقّق $\lim_{+\infty} f=f(0)$. أثبت أنّ التابع f يبلغ حديه الأعلى والأدنى على $\mathbb{R}_+$.

الحل

لنتأمّل التطبيق $\varphi : [0,1[\ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$ ، ولنعرّف

$$g : [0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} f \circ \varphi(x) & : \quad 0 \le x < 1 \\ f(0) & : \quad x = 1 \end{cases}$$

عندئذ يكون

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = f(0) = g(1)$$

ومن ثَمّ يكون g تابعاً مستمرّاً على المجال المغلق والمحدود $[0,1]$ فهو يبلغ حدّيه الأعلى والأدنى على هذا المجال. وعليه يوجد عددان x_0 و x_1 من $[0,1]$ يُحقّقان

$$g(x_1) = \inf_{[0,1]} g \quad \text{و} \quad g(x_0) = \sup_{[0,1]} g$$

ويمكننا أن نفترض أنّ x_0 و x_1 ينتميان إلى $[0,1[$ لأنّ $g(0) = g(1)$. ولكنّ التابع φ تقابل بين $\mathbb{R}_+$ و $[0,1[$ ، إذن

$$f\left(\frac{x_0}{1-x_0}\right) = g(x_0) = \sup_{[0,1]} g = \sup_{\mathbb{R}_+} f$$

و

$$f\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right) = g(x_1) = \inf_{[0,1]} g = \inf_{\mathbb{R}_+} f$$

وهذا يُثبتُ أنّ التابع f يبلغ حدّيه الأعلى والأدنى على $\mathbb{R}_+$. ■

التمرين 14.

1. لتكن A مجموعة متراصّة في $\mathbb{R}$. ولتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين من A . أثبت أنه يوجد تطبيق متزايد تماماً $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ يجعل المتتاليتين الجزئيتين $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتين.

2. لتكن A مجموعة متراصّة في $\mathbb{R}$. وليكن $f : A \to A$ تطبيقاً يحقّق

$$\forall (x,y) \in A \times A, \quad \left|x - y\right| \le \left|f(x) - f(y)\right| \qquad ✵$$

أثبت أنّ $\forall (x,y) \in A \times A, \left|x-y\right| = \left|f(x) - f(y)\right|$. ثُمّ استنتج صيغة التابع f .

الحل

1. لمّا كانت A مجموعة متراصّة استنتجنا وجود تطبيق متزايد تماماً $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ يجعل المتتالية الجزئيّة $(x_{\theta(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب من عنصر x في A . ولأنّ $(y_{\theta(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية في المجموعة المتراصّة A ، يوجد أيضاً تطبيق متزايد تماماً $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ يجعل المتتالية الجزئيّة $(y_{\theta\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب من عنصر y في A . ولكنّ المتتالية $(x_{\theta\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية جزئيّة من المتتالية المتقاربة $(x_{\theta(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ فهي تسعى أيضاً إلى x . وعليه إذا عرّفنا $\varphi = \theta \circ \psi$ كان φ تطبيقاً متزايداً تماماً من $\mathbb{N}$ إلى نفسها ويُحقّق

$$\lim_{n\to\infty} y_{\varphi(n)} = y \in A \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = x \in A$$

2. ليكن (x,y) عنصراً من $A \times A$ ، ولنعرّف $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من A كما يلي:

$$\begin{aligned} x_0 &= x, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n) \\ y_0 &= y, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = f(y_n) \end{aligned}$$

عندئذ نجد استناداً إلى ما سبق تطبيقاً متزايداً تماماً $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ وعنصراً (a,b) في $A \times A$ يُحقّق

$$\lim_{n\to\infty} y_{\varphi(n)} = b \in A \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = a \in A$$

وعليه يكون

$$\lim_{n\to\infty}\left(y_{\varphi(n+1)} - y_{\varphi(n)}\right) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}\left(x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right) = 0$$

فإذا عرّفنا $\lambda(n) = \varphi(n+1) - \varphi(n)$ كان لدينا استناداً إلى ❈ وأياً كانت n من $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left|f^{\lambda(n)}(x) - x\right| &\le \left|f^{\varphi(n+1)}(x) - f^{\varphi(n)}(x)\right| = \left|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right| \\ \left|f^{\lambda(n)}(y) - y\right| &\le \left|f^{\varphi(n+1)}(y) - f^{\varphi(n)}(y)\right| = \left|y_{\varphi(n+1)} - y_{\varphi(n)}\right| \end{aligned}$$

ومن جهة ثانية، لمّا كان $\lambda(n) \ge 1$ أمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned} \left|f(x) - f(y)\right| &\le \left|f^{\lambda(n)}(x) - f^{\lambda(n)}(y)\right| \\ &\le \left|f^{\lambda(n)}(x) - x\right| + \left|x - y\right| + \left|y - f^{\lambda(n)}(y)\right| \\ &\le \left|x - y\right| + \left|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right| + \left|y_{\varphi(n+1)} - y_{\varphi(n)}\right| \end{aligned}$$

فإذا جعلنا n تسعى إلى $+\infty$ استنتجنا أنّ $\left|f(x) - f(y)\right| \le \left|x - y\right|$ وهذا مع ❈ يُثبتُ المساواة المطلوبة.

لمّا كان f مستمرّاً على المجموعة المتراصّة A فإنّه يبلغ حدّه الأدنى عليها، أي يوجد في A عددٌ x_0 يُحقّق $\min_A f = f(x_0)$. لنعرّف $\alpha = \min A$ و $\beta = \max A$. عندئذ يكون لدينا

$$f(\alpha) - f(x_0) = x_0 - \alpha$$
$$f(\beta) - f(x_0) = \beta - x_0$$

وعليه $\beta - \alpha = \left|f(\beta) - f(\alpha)\right| = \left|\beta + \alpha - 2x_0\right|$.

وبالتربيع والإصلاح نجد أنّ $x_0^2 - (\alpha+\beta)x_0 + \alpha\beta = 0$ أي $x_0 = \alpha$ أو $x_0 = \beta$.

- في حالة $x_0 = \alpha$ يكون $\min_A f = f(\alpha)$ وينتج من ذلك أنّه

$$\forall x \in A, \quad f(x) - f(\alpha) = \left|f(x) - f(\alpha)\right| = \left|x - \alpha\right| = x - \alpha$$

وبوجه خاص يكون $f(\beta) - f(\alpha) = \beta - \alpha$ ، ولكن $f(\alpha) \in A$ و $f(\beta) \in A$. إذن

$$0 \geq f(\beta) - \beta = f(\alpha) - \alpha \geq 0$$

وعليه فإنّ $f(\alpha) = \alpha$ ، ومن ثَمّ $\forall x \in A, f(x) = x$.

- أمّا في حالة $x_0 = \beta$ فيكون $\min_A f = f(\beta)$ ، وينتج من ذلك أنّه

$$\forall x \in A, \quad f(x) - f(\beta) = \left|f(x) - f(\beta)\right| = \left|x - \beta\right| = \beta - x$$

وبوجه خاص يكون $f(\alpha) - f(\beta) = \beta - \alpha$ ، ولكن $f(\alpha) \in A$ و $f(\beta) \in A$ إذن

$$0 \geq f(\alpha) - \beta = f(\beta) - \alpha \geq 0$$

وعليه فإنّ $f(\beta) = \alpha$ ، ومن ثَمّ $\forall x \in A, f(x) = \beta + \alpha - x$.

النتيجة. إذا كانت A مجموعة متراصّة في $\mathbb{R}$ ، وكان $f : A \to A$ تابعاً مستمرّاً يُحقّق ❋ فإمّا أن يكون $\forall x \in A, f(x) = x$ ، وإمّا أن يكون $\forall x \in A, f(x) = \beta + \alpha - x$ ، حيث α و β هما الحدّان الأدنى والأعلى للمجموعة A . ■

التمرين 15. لتكن A مجموعة متراصّة في $\mathbb{R}$. وليكن $f : A \to A$ تطبيقاً يحقّق

$$\forall (x,y) \in A \times A, \quad x \neq y \Rightarrow \left|f(x) - f(y)\right| < \left|x - y\right|$$

أثبت أنه توجد في A قيمة x وحيدة تُحقّق $f(x) = x$. أثبت أيضاً أن المتتالية التدريجية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالعلاقات $x_0 \in A$ و $f(x_n) = x_{n+1}$ تتقارب من النقطة الثابتة الوحيدة x للتابع f .

الحل

لنتأمّل التابع المستمرّ $g : A \to \mathbb{R},\ t \mapsto \left|f(t) - t\right|$ ، لمّا كانت المجموعة A متراصّة استنتجنا أنّ g يبلغ حدّه الأدنى على A أي يوجد في A عنصر α يُحقّق

$$m = \min_A g = g(\alpha)$$

فإذا كان $m \neq 0$ استنتجنا أنّ $f(\alpha) \neq \alpha$ وعليه يكون

$$m \leq g(f(\alpha)) = \left|f(f(\alpha)) - f(\alpha)\right| < \left|f(\alpha) - \alpha\right| = m$$

وهذا تناقض واضح. إذن لا بُدّ أن يكون $m = 0$ أي $f(\alpha) = \alpha$.

لنفترض أنّ $f(\beta) = \beta$ وأنّ $\beta \neq \alpha$ عندئذ يكون لدينا

$$\left|\beta - \alpha\right| = \left|f(\beta) - f(\alpha)\right| < \left|\beta - \alpha\right|$$

وهذا تناقض أيضاً، إذن يوجد في A عنصر وحيد x يُحقّق $f(x) = x$.

لنعرّف المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة $a_n = \left|x_n - x\right|$ عندئذ يكون لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_{n+1} = \left|f(x_n) - f(x)\right| \leq \left|x_n - x\right| = a_n$$

وعليه نرى أنّ المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة وذات حدود موجبة، فهي متقاربة. لنرمز بالرمز ℓ إلى نهايتها :

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$$

من ناحية أخرى يوجد في A عنصر z ومتتالية جزئيّة $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ من $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تسعى إلى z لأنّ المجموعة A متراصّة. إذن

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_{\varphi(n)} = \left|z - x\right|$$

ولكن لدينا أيضاً

$$\begin{aligned}\left|f(z) - x\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|f(x_{\varphi(n)}) - x\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|x_{\varphi(n)+1} - x\right| = \lim_{n\to\infty} a_{\varphi(n)+1} = \ell\end{aligned}$$

فإذا كان $z \neq x$ كان لدينا

$$\ell = \left|f(z) - x\right| = \left|f(z) - f(x)\right| < \left|z - x\right| = \ell$$

وهذا تناقض إذن لا بُدّ أن يكون $z = x$ ومن ثَمّ $\ell = 0$ أي إنّ $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ، وبذا يتم الإثبات. ∎

التمرين 16. ليكن $f:\left[0,+\infty\right[\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً. نفترض أنّه عند قيمة معطاة $0<a$ يتحقّق الشرط $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x+a)-f(x)\big)=\ell$. أثبت أنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{\ell}{a}$.

هل يمكن استبدال الشرط " f متزايد" بالشرط " f مستمر" ؟

الحل

لتكن $0<\varepsilon$ عندئذ يوجد في $\mathbb{R}_+$ ، استناداً إلى الفرْض، عددٌ x_ε يُحقّق

$$x\geq x_\varepsilon \Rightarrow \left|f(x+a)-f(x)-\ell\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad ❶$$

ولكنّ التابع f مستمر على المجال المتراص $[x_\varepsilon,x_\varepsilon+a]$ إذن يمكننا أنّ نعرّف

$$M_\varepsilon=\sup_{[x_\varepsilon,x_\varepsilon+a]}\left|f\right|$$

ثُمّ نضع $X_\varepsilon=x_\varepsilon+a\left\lfloor 1+2M_\varepsilon/\varepsilon\right\rfloor$. ونرمز أخيراً بالرمز k_x إلى $\left\lfloor (x-x_\varepsilon)/a\right\rfloor$.

لتكن $X_\varepsilon<x$. لمّا كان

$$f(x)-f(x-k_xa)-k_x\ell=\sum_{m=1}^{k_x}\big(f(x-(m-1)a)-f(x-ma)-\ell\big)$$

استنتجنا أنّ

$$\left|f(x)-k_x\ell\right|\leq\left|f(x-k_xa)\right|+\sum_{m=1}^{k_x}\left|f(x-(m-1)a)-f(x-ma)-\ell\right|$$

ولكن إذا استفدنا من ❶ ومن كوْن $x_\varepsilon\leq x-k_xa\leq x_\varepsilon+a$ استنتجنا أنّ

$$\left|f(x)-k_x\ell\right|\leq M_\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}k_x$$

وعليه يكون

$$\left|\frac{f(x)}{k_x}-\ell\right|\leq\frac{M_\varepsilon}{k_x}+\frac{\varepsilon}{2}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

وقد استفدنا من أنّ الشرط $X_\varepsilon<x$ يقتضي $k_x\geq 2M_\varepsilon/\varepsilon$ تبعاً لاختيارنا لقيمة X_ε .

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{k_x}=\ell$$

ومن ناحية أخرى، من الواضح أنّ $\lim_{x\to\infty}(k_x/x) = 1/a$ ، نستنتج إذن أنّ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \frac{\ell}{a}\ .$$

يمكن أن نستبدل بشرط استمرار f شرط كونه متزايداً لأنّنا في الحقيقة لم نستفدْ من الاستمرار إلّا لنستنتج من ذلك كوْن f محدوداً على المجال $[x_\varepsilon, x_\varepsilon + a]$.

التمرين 17. ليكن $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ تابعاً متزايداً. نفترض أنّه عند قيمة معطاة $1 < a$ يتحقّق الشرط $\lim_{x\to+\infty}\big(f(ax) - f(x)\big) = \ell$. أثبت أنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\ln x} = \frac{\ell}{\ln a}$.

الحل

لنضع $b = \ln a$ ولنعرّف التابع المتزايد $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(t) = f(e^t)$ عندئذ يكون لدينا

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad g(t+b) - g(t) = f(ae^t) - f(e^t)$$

وعليه فإنّ $\lim_{t\to\infty}\big(g(t+b) - g(t)\big) = \ell$. وبالاستفادة من نتيجة التمرين السابق نجد أنّ

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t} = \frac{\ell}{b}$$

ومن ثَمّ فإنّ $\lim_{x\to\infty}\frac{g(\ln x)}{\ln x} = \frac{\ell}{\ln a}$ أو $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\ln x} = \frac{\ell}{\ln a}$.

التمرين 18. ليكن $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ تابعاً مستمراً يحقِّق

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\quad f(x+y) \le f(x) + f(y)$$

أثبت أنّ النهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ موجودة وتساوي $\inf_{x>0}\frac{f(x)}{x}$.

الحل

لنعرّف $\lambda = \inf\{f(x)/x : x > 0\}$. ولتكن $0 < \varepsilon$ عندئذ يوجد $0 < x_\varepsilon$ يُحقِّق

$$\frac{f(x_\varepsilon)}{x_\varepsilon} < \lambda + \frac{\varepsilon}{2}$$

ولمّا كان f مستمراً على المجال المتراص $[0,x_\varepsilon]$ أمكننا أن نعرّف $M_\varepsilon = \sup_{[0,x_\varepsilon]} f$ ، لنضع

$$A_\varepsilon = \max\left(x_\varepsilon, \frac{2M_\varepsilon}{\varepsilon}\right)$$

عندئذ، مهما تكن $x > A_\varepsilon$ ، يكن لدينا:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f\left(x - x_\varepsilon\left\lfloor\frac{x}{x_\varepsilon}\right\rfloor + x_\varepsilon\left\lfloor\frac{x}{x_\varepsilon}\right\rfloor\right)\\
&\le f\left(x - x_\varepsilon\left\lfloor\frac{x}{x_\varepsilon}\right\rfloor\right) + f(\underbrace{x_\varepsilon + \cdots + x_\varepsilon}_{\lfloor x/x_\varepsilon\rfloor}) \le M_\varepsilon + \left\lfloor\frac{x}{x_\varepsilon}\right\rfloor f(x_\varepsilon)\\
&\le M_\varepsilon + \frac{x}{x_\varepsilon} f(x_\varepsilon) \le \frac{\varepsilon}{2}A_\varepsilon + x\left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right) \le x\left(\lambda + \varepsilon\right)
\end{aligned}$$

إذن مهما تكن $0 < \varepsilon$ يوجد $0 < A_\varepsilon$ يُحقّق

$$\forall x > A_\varepsilon,\ \lambda \le \frac{f(x)}{x} \le \lambda + \varepsilon$$

وهذا يُكافئ قولنا إنّ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ وهو المطلوب إثباته. ■

التمرين 19. ليكن $f : [0,1] \to [0,1]$ و $g : [0,1] \to [0,1]$ تابعين مستمرين يحقّقان

$$f \circ g = g \circ f$$

أثبت أنه يوجدفي المجال $[0,1]$ عددٌ x يُحقِّق $f(x) = g(x)$.

الحل

إنّ صورة المجال المتراصّ $[0,1]$ وفق التابع $h = f - g$ المستمرّ مجالٌ متراصٌ، وليكن هذا المجال هو $h([0,1]) = [m, M]$. عندئذ يكون لدينا

$$\forall x \in [0,1], \quad M + g(x) \ge f(x) \ge g(x) + m$$

وعندئذ ينتج بالتدريج على n أنّ

$$\forall n \ge 1, \forall x \in [0,1], \quad nM + g^n(x) \ge f^n(x) \ge g^n(x) + nm$$

وقد عرّفنا f^n و g^n بأنهما ناتجا تركيب كلٍّ من f و g مع نفسه n مرّةً.

في الحقيقة، هذه النتيجة صحيحة في حالة $n = 1$، وإذا افترضنا صحّتها عند قيمةٍ n عندئذ، مهما تكن x من $[0,1]$، يكن لدينا، من جهة أولى

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) &= f^n(f(x)) \geq nm + g^n(f(x)) \\ &= nm + f(g^n(x)) \\ &\geq nm + m + g^{n+1}(x) \end{aligned}$$

ومن جهة ثانية

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) &= f^n(f(x)) \leq nM + g^n(f(x)) \\ &= nM + f(g^n(x)) \\ &\leq nM + M + g^{n+1}(x) \end{aligned}$$

وهذا يُثبت المتراجحة المطلوبة في حالة $n+1$. نستنتج من هذه المتراجحة ومن كوْن f و g يأخذان قيمهما في $[0,1]$ أنّ

$$\forall n \geq 1, \quad \left(M \geq -\frac{1}{n}\right) \wedge \left(\frac{1}{n} \geq m\right)$$

فإذا جعلنا n تسعى إلى $+\infty$ استنتجنا أنّ $M \geq 0 \geq m$ أي إنّ العدد 0 ينتمي إلى $h\big([0,1]\big)$، وهذا يعني وجود عنصر x في $[0,1]$ يُحقّق $f(x) = g(x)$. وبذا يتم إثبات المطلوب. ■

التمرين 20. ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمراً ولنفترض أنّ النهايتين $\lim_{+\infty} f$ و $\lim_{-\infty} f$ موجودتان في $\mathbb{R}$. أثبت أن f مستمر بانتظام على $\mathbb{R}$.

الحل

لتكن $\varepsilon > 0$، إنّ وجود النهايتين $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ يقتضي وجود عددين $x_1 > 0$ و $x_0 < 0$ يُحقّقان

$$(x < x_0) \wedge (y < x_0) \Rightarrow \left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon \qquad (1)$$

$$(x > x_1) \wedge (y > x_1) \Rightarrow \left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon \qquad (2)$$

ولكنّ التابع f مستمرٌ بانتظام على المجال المتراص $I=[x_0-1,x_1+1]$ إذن يوجد عدد η من المجال $]0,1[$ يُحقّق

$$\forall(x,y)\in I^2,\quad \left(\left|x-y\right|<\eta\right)\Rightarrow\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon \qquad (3)$$

لتكن (x,y) من $\mathbb{R}^2$ تُحقِّق $\left|x-y\right|<\eta$، ولنناقش الحالات التالية:

- في حالة $(x,y)\in I^2$ تتحقّق استناداً إلى (3) المتراجحة $\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$.
- في حالة $x_1+1<x$ أو $x_1+1<y$ يكون لدينا $x_1<x$ و $x_1<y$ لأنّ العدد η ينتمي إلى $]0,1[$، وعليه يكون لدينا استناداً إلى (2) المتراجحة: $\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$.
- في حالة $x_0-1>x$ أو $x_0-1>y$ يكون لدينا $x_0>x$ و $x_0>y$ لأنّ العدد η ينتمي إلى $]0,1[$، لذا يكون لدينا استناداً إلى (1) المتراجحة: $\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$.

ومن ثَمّ في جميع الحالات يكون لدينا $\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$ وهذا يُثبتُ الاستمرار المنتظم للتابع f على $\mathbb{R}$.

☜ **طريقة ثانية**. لنتأمّل التابع

$$g:[-1,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}\lim\limits_{-\infty} f & :\quad x=-1,\\ f\left(\dfrac{x}{1-|x|}\right) & :\quad x\in\left]-1,+1\right[,\\ \lim\limits_{+\infty} f & :\quad x=+1,\end{cases}$$

نرى بسهولة أنّ g تابع مستمرٌ على المجال المتراصّ $[-1,+1]$، وهو من ثَمّ مستمرٌ بانتظام على هذا المجال.

إذن مهما تكن $\varepsilon>0$ يوجد $\eta>0$ يُحقّق

$$\forall(u,v)\in\ ]-1,+1[^2,\quad \left|u-v\right|<\eta\Rightarrow\left|g(u)-g(v)\right|<\varepsilon$$

لتكن إذن (x,y) من $\mathbb{R}^2$ تُحقّق $\left|x-y\right|<\eta$ عندئذ يُحقّقُ العددان

$$u=\frac{x}{1+\left|x\right|} \quad \text{و} \quad v=\frac{y}{1+\left|y\right|}$$

من $\left]-1,+1\right[$ الشرط $\left|u-v\right|<\eta$ ومن ثَمّ يكون لدينا

$$\left|f(x)-f(y)\right|=\left|g(u)-g(v)\right|<\varepsilon$$

وهذا يُثبتُ الاستمرار المنتظم للتابع f على $\mathbb{R}$. ■

التمرين 21. ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً ودورياً. أثبت أن f مستمر بانتظام على $\mathbb{R}$.

الحل

لنفترض أنّ $T>0$ هو دورٌ للتابع f. لمّا كان f مستمرّاً على المجال المتراص $[-T,2T]$ استنتجنا أنّه مستمرٌ عليه بانتظام. لتكن $\varepsilon>0$ إذن يوجد η تنتمي إلى $\left]0,T\right[$ وتُحقّق

$$(*) \qquad \forall(x,y)\in\left]-T,2T\right[^2,\quad \left|x-y\right|<\eta\Rightarrow\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$$

لتكن إذن (x,y) من $\mathbb{R}^2$ تُحقّق $\left|x-y\right|<\eta$، ولنعرّف $k_x=\left\lfloor x/T\right\rfloor$، عندئذ يكون لدينا، من جهة أولى $0\leq x-k_xT<T$، ومن جهة ثانية

$$-T<-\eta\leq y-k_xT<T+\eta<2T$$

فإذا عرّفنا العددين $x_0=x-k_xT$ و $y_0=y-k_xT$ كان لدينا في آن واحد

$$(x_0,y_0)\in\left]-T,2T\right[^2 \quad \text{و} \quad \left|x_0-y_0\right|<\eta$$

واستناداً إلى $(*)$ لا بُدَّ أن يكون

$$\left|f(x)-f(y)\right|=\left|f(x_0)-f(y_0)\right|<\varepsilon$$

وهذا ما يُثبتُ الاستمرار المنتظم للتابع f على $\mathbb{R}$. ■

التمرين 22. ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً بانتظام على $\mathbb{R}$. أثبت أنه يوجد a و b من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّقان

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \left|f(x)\right|\leq a\left|x\right|+b \ .$$

الحل

يقتضي الاستمرار المنتظم للتابع f وجود عدد $\alpha > 0$ يُحقّق

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \left|x-y\right|\le\alpha \Rightarrow \left|f(x)-f(y)\right|\le 1$$

ليكن $0<x$، عندئذ نعرّف $m_x=\lfloor x/\alpha\rfloor$ فيكون لدينا

$$f(x)-f(0)=f(x)-f(m_x\alpha)+\sum_{k=0}^{m_x-1}\big(f((k+1)\alpha)-f(k\alpha)\big)$$

و لأنّ كلّ حدٍّ من الحدود السابقة أصغر من الواحد، نستنتج أنّ

$$\left|f(x)-f(0)\right|\le 1+m_x\le 1+\frac{x}{\alpha}$$

وكذلك في حالة $x<0$ نعرّف $m_x=\lfloor x/\,\alpha\rfloor$ فيكون لدينا

$$f(x)-f(0)=f(x)-f(m_x\alpha)+\sum_{k=0}^{-m_x-1}\big(f(-(k+1)\alpha)-f(-k\alpha)\big)$$

وبناءً على ذلك، لأنّ كلّ حدٍّ من الحدود السابقة أصغر من الواحد، نستنتج أنّ

$$\left|f(x)-f(0)\right|\le 1-m_x\le 2-\frac{x}{\alpha}=2+\frac{1}{\alpha}\left|x\right|$$

ومن ثَمّ نجد

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \left|f(x)\right|\le 2+\left|f(0)\right|+\frac{1}{\alpha}\left|x\right|$$

وهذا يُثبت المطلوب. ■

التمرين 23. أوجد تابعاً $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مستمراً ومحدوداً على $\mathbb{R}$، دون أن يكون مستمراً بانتظام.

الحل

من الواضح أنّ التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin(x^2)$ تابع مستمرٌ على $\mathbb{R}$ ولكنّه ليس مستمراً بانتظام عليها. فإذا تأمّلنا المتتاليتين $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفتين كما يلي:

$$y_n=\sqrt{2\pi n+\tfrac{\pi}{2}}\quad \text{و}\quad x_n=\sqrt{2\pi n}$$

وجدنا أنّ $f(x_n)=0$ و $f(y_n)=1$ أيّاً كانت n ومع ذلك فإنّ $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$،

وهذا يُثبتُ أنّ f ليس مستمراً بانتظام على $\mathbb{R}$. ■

التمرين 24. أثبت أن التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{x}$. مستمر بانتظام على $\mathbb{R}$.

الحل

لنلاحظ أوّلاً أنّه في حالة $(x,y) \neq (0,0)$ لدينا

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x-y}{(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{y})^2 + \frac{3}{4}\sqrt[3]{y^2}} = \frac{x-y}{(\sqrt[3]{y} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x})^2 + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}}$$

إذن

$$\max(|x|,|y|) \geq 1 \Rightarrow \left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right| \leq \frac{4}{3}|x-y|$$

لتكن ε من $]0,1[$. لمّا كان التابع f مستمراً بانتظام على المجال المتراصّ $[-2,2]$، نجد في المجال $]0,\frac{3}{4}\varepsilon[$ عدداً η يُحقّق

$$\forall (x,y) \in [-2,2]^2, \quad |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

لتكن إذن (x,y) من $\mathbb{R}^2$ تُحقّق $|x-y| < \eta$، ولنناقش الحالات التالية :

- إذا كان العددان x و y من المجال $[-2,2]$ استنتجنا أنّ $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- إذا كان أحد العددين x أو y من خارج المجال $[-2,2]$ استنتجنا، لأنّ $0 < \eta < 1$، أنّه لا بُدّ أن يكون $\max(|x|,|y|) \geq 1$ وعليه $|f(x) - f(y)| < \frac{4}{3}\eta < \varepsilon$.

بذا نكون قد أثبتنا الاستمرار المنتظم للتابع f على $\mathbb{R}$. ■

ملاحظة. يمكننا بوجه عام أن نثبت في حالة $0 < \alpha < 1$ أنّ

$$\forall t \geq 1,\ t^\alpha - 1 \leq (t-1)^\alpha$$

ومنه نستنتج صحّة المتراجحة

$$\forall \left(x,y\right) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \left|x^\alpha - y^\alpha\right| \leq \left|x-y\right|^\alpha$$

التي تقتضي الاستمرار المنتظم للتابع $x \mapsto x^\alpha$ على $\mathbb{R}_+$ في حالة $0 < \alpha < 1$.

التمرين 25. ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً عند نقطةٍ x_0 من $\mathbb{R}$، ويُحقِّق

$$\exists c\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \big|f(x+y)-f(x)-f(y)\big|\le c$$

أثبت أنه يوجد عددٌ حقيقي a يُحقّق $\forall x\in\mathbb{R},\quad \big|f(x)-ax\big|\le c$.

الحل

لدينا استناداً إلى الفرْض

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \big|\,f(2x)-2f(x)\,\big|\le c$$

وعليه، نبرهن بالتدريج على n أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\quad \left|\frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}}-\frac{f(2^nx)}{2^n}\right|\le\frac{c}{2^{n+1}}\tag{1}$$

نستنتج من ذلك أنّه، مهما تكن x من $\mathbb{R}$، تكن المتسلسلة ذات الحدّ العام $\frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}}-\frac{f(2^nx)}{2^n}$ متقاربة بالإطلاق وهذا يعني وجود النهاية $\lim\limits_{n\to\infty}2^{-n}f(2^nx)$. نعرّف إذن التابع g من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^nx)}{2^n}$$

وينتج من الفرْض، أنّه مهما تكن (x,y) من $\mathbb{R}^2$، ومهما تكن n من $\mathbb{N}$ فلدينا

$$\left|\frac{f(2^n(x+y))}{2^n}-\frac{f(2^nx)}{2^n}-\frac{f(2^ny)}{2^n}\right|\le\frac{c}{2^n}$$

فإذا جعلنا n تسعى إلى اللانهاية استنتجنا أنّ

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad g(x+y)=g(x)+g(y)\tag{2}$$

وبالعودة إلى (1) وبأخذ مجموع هذه المتراجحات من $n=0$ حتى $n=m-1$ نجد

$$\forall m\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\quad \left|\frac{f(2^mx)}{2^m}-f(x)\right|\le c\sum_{n=0}^{m-1}2^{-n-1}\le c$$

فإذا جعلنا m تسعى إلى اللانهاية وجدنا

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \big|f(x)-g(x)\big|\le c\tag{3}$$

ينتج من استمرار f عند نقطة x_0 أنّه محدود في جوار x_0، وعليه فإنّ g هو أيضاً محدود في جوار x_0 وذلك استناداً إلى (3). ولقد أثبتنا في التمرين 3. أنّه إذا حقّق التابع g الشرط (2) وكان محدوداً في جوار نقطةٍ حقَّق التابع g الشرط

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = g(1) \cdot x$$

وعليه، استناداً إلى (3)، يوجد عدد $a = g(1)$ يُحقّق

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| f(x) - ax \right| \le c$$

وهذا يُثبت المطلوب. ■

التمرين 26. ليكن $f : \mathbb{R} \to \left]-1,+1\right[$ التطبيق المعرّف بالعلاقة

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

أثبت أن f تقابل مستمرٌّ وعيّن تابعه العكسي.

الحل

هذا تمرين سهلٌ. ونجد أنّ $\forall y \in \left]-1,+1\right[, \ f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-|y|}$. ■

التمرين 27. ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{R}^2$ يُحقِّق $a < b$. أوجد الشرط اللازم والكافي على (a,b) حتى يُكوِّن التابع

$$x \mapsto f(x) = x^2 - 3x + 2$$

تقابلاً بين $[a,b]$ و $f([a,b])$ ثُمّ عيِّن التابع العكسي في حال تحقُّق هذا الشرط.

الحل

حتّى يكوِّن f تقابلاً بين $[a,b]$ و $f([a,b])$ يلزم ويكفي أن يكون مقصور f على المجال $[a,b]$ متبايناً، ولأنّ f تابع مستمر، فهذا يُكافئ أن يكون مقصور f على المجال $[a,b]$ مطّرداً تماماً. لكنّ f متناقص تماماً على $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]$، ومتزايد تماماً على $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$. إذن الشرط اللازم والكافي حتّى يكوِّن التابع f تقابلاً بين $[a,b]$ و $f([a,b])$ هو

$$\frac{3}{2} \le a \quad \text{أو} \quad b \le \frac{3}{2}$$

- حالة $b \leq \dfrac{3}{2}$. في هذه الحالة :

$$f^{-1} : f([a,b]) \to [a,b],\ y \mapsto \frac{3}{2} - \sqrt{y + \frac{1}{4}}$$

- حالة $\dfrac{3}{2} \leq a$. في هذه الحالة :

$$f^{-1} : f([a,b]) \to [a,b],\ y \mapsto \frac{3}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}}$$

وهذا هو المطلوب.

التمرين 28. أثبت أنّ التطبيق $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^5 + x - 1$ تَقَابلٌ، ثُمّ حلّ المعادلة $f(x) = f^{-1}(x)$.

الحل

من الواضح أنّ f تابع مستمرٌ ومتزايد تماماً على $\mathbb{R}$، ولمّا كان من الواضح أنّ

$$\lim_{-\infty} f = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty$$

استنتجنا أنّ f تقابل من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$.

التابع $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - x$ هو تابع متزايد تماماً. وعليه يكون التابع $h \circ f + h$ أيضاً تابعاً متزايداً تماماً. وهذا يُثبتُ أنّ التابع $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f^2(x) - x$ متزايد تماماً أيضاً.

وبملاحظة أنّ $g(1) = 0$ نرى أنّ 1 هو الحل الحقيقي الوحيد للمعادلة $f^2(x) = x$. فإذا كان $f(\alpha) = f^{-1}(\alpha)$ استنتجنا أنّ $f^{-1}(\alpha)$ هو حلّ للمعادلة $f^2(x) = x$ فلا بُدّ أن يكون $f^{-1}(\alpha) = 1$ أو $\alpha = 1$. نستنتج أنّ $\alpha = 1$ هو الحل الحقيقي الوحيد للمعادلة $f(x) = f^{-1}(x)$.

التمرين 29. أثبت أن كل تابع حقيقي يُحقق شرط لِبشتز هو الفرق بين تابعين متزايدين.

الحل

ليكن $f : A \to \mathbb{R}$ تابعاً يُحقِّق شرط ليبشتز، بثابت قدره K أي يُحقِّق الشرط

$$\forall (x,y) \in A^2, \quad \left|f(x) - f(y)\right| \le K\left|x - y\right|$$

نعرّف التابعين

$$h : A \to \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{2}\big(Kx + f(x)\big)$$
$$g : A \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2}\big(Kx - f(x)\big)$$

فيكون لدينا من جهة أولى $f = h - g$ ، ونتحقّق بسهولة ومباشرة انطلاقاً من التعريف أنّ التابعين h و g متزايدان.

التمرين 30. نتأمّل تابعاً $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ ، ونفترض أنّ التابع $x \mapsto f(x)$ متزايدٌ وأنّ التابع $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ متناقصٌ. أثبت أنّ التابعَ f مستمرٌ على $\mathbb{R}_+^*$.

الحل

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}_+^*$. ولنفترض أنّ $\alpha = \min(x,y)$ و $\beta = \max(x,y)$ عندئذ نستنتج من كون $\alpha \le \beta$ ومن الفرْض ما يلي :

$$\frac{f(\beta)}{\beta} \le \frac{f(\alpha)}{\alpha} \quad \text{و} \quad f(\alpha) \le f(\beta)$$

إذن

$$0 \le f(\beta) - f(\alpha) \le \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) f(\alpha) = \big(\beta - \alpha\big)\frac{f(\alpha)}{\alpha}$$

أو

$$\left|f(y) - f(x)\right| \le \frac{2\left|y - x\right|}{x + y - \left|x - y\right|} f(x)$$

ومن ثَمّ

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lim_{y \to x}\left|f(y) - f(x)\right| = 0$$

وهذا يثبت استمرار f على $\mathbb{R}_+^*$.

التمرين 31. نتأمّل تابعين حقيقيّين f و g مستمرّين على المجال $[a,b]$، ونفترض أنّ

$$\forall x \in [a,b],\ \exists z \in [a,b], \quad f(x) = g(z)$$

أثبت أنّه يوجد x_0 في $[a,b]$ يُحقّق $f(x_0) = g(x_0)$.

الحل

- استناداً إلى الفرْض، مهما تكن x من $[a,b]$ يكن $g^{-1}(\{f(x)\}) \cap [a,b] \neq \varnothing$ ، نعرّف إذن

$$\forall x \in [a,b], \quad h(x) = \inf(g^{-1}(\{f(x)\}) \cap [a,b])$$

وبالاستفادة من استمرار التابع g نستنتج أنّ

$$\forall x \in [a,b], \quad g(h(x)) = f(x)$$

- لنفترض جدلاً أنّ التابع $x \mapsto \lambda(x) = f(x) - g(x)$ لا ينعدم على المجال $[a,b]$، فهو إذن يُحافظ على إشارة ثابتة على هذا المجال.

لنناقش إذن حالتين :

❶ حالة $\forall x \in [a,b],\ \lambda(x) > 0$ ، عندئذ ينتج من كون المجال $[a,b]$ مجالاً متراصّاً أنّه يوجد عددٌ α يُحقّق $\forall x \in [a,b], \quad \lambda(x) \geq \alpha > 0$ ، وعليه

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) \geq g(x) + \alpha$$

أو

$$\forall x \in [a,b],, \quad g(h(x)) \geq g(x) + \alpha$$

وينتج من ذلك بالتدريج أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], \quad g\Big(h^{k+1}(x)\Big) \geq g\Big(h^k(x)\Big) + \alpha$$

وبالجمع نجد

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b], \quad g\Big(h^n(x)\Big) \geq g(x) + n\alpha$$

فإذا عرّفنا $m_g = \inf g$ و $M_g = \sup g$ استنتجنا أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_g \geq m_g + n\alpha$$

ونصل إلى تناقض بجعل n تسعى إلى اللانهاية.

❷ حالة $\forall x \in [a,b],\ \lambda(x) < 0$ ، عندئذ ينتج من كون المجال $[a,b]$ مجالاً متراصّاً أنّه يوجد عددٌ α يُحقّق $\forall x \in [a,b],\ \lambda(x) \leq \alpha < 0$ ، وعليه

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leq g(x) + \alpha$$

أو

$$\forall x \in [a,b], \quad g(h(x)) \leq g(x) + \alpha$$

وينتج من ذلك أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], \quad g\left(h^{k+1}(x)\right) \leq g\left(h^{k}(x)\right) + \alpha$$

وبالجمع نجد

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], \quad g\left(h^{n}(x)\right) \leq g(x) + n\alpha$$

فإذا عرّفنا $m_g = \inf g$ و $M_g = \sup g$ كما في السابق استنتجنا أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m_g \leq M_g + n\alpha$$

ونصل إلى تناقض بجعل n تسعى إلى اللانهاية.

نستنتج من التناقضين السابقين في ❶ و ❷ أنّ التابع λ لا بُدّ أن ينعدم على $[a,b]$، أي لا بُدّ أن يوجد عددٌ x_0 يُحقّق $f(x_0) = g(x_0)$. ■

التمرين 32. أوجد جميع التوابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المستمرّة عند الصفر وتُحقِّق المعادلة التابعية

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ f(x + 2f(y)) = f(x) + y + f(y) \qquad \mathcal{E}$$

الحل

سنثبت أنّ مجموعة حلول المسألة تقتصر على التابعين $x \mapsto x$ و $x \mapsto -\dfrac{x}{2}$. من الواضح أنّ هذين التابعين حلاّن للمعادلة التابعيّة $\mathcal{E}$. لنثبت إذن العكس.

لنتأمّل تابعاً f يُحقِّق المعادلة التابعيّة $\mathcal{E}$.

- ليكن z من $\mathbb{R}$. بتعويض $(x,y) = (-z - 2f(-z), -z)$ في المعادلة التابعيّة نجد
$$f\left(-z - 2f(-z) + 2f(-z)\right) = f(-z - 2f(-z)) + (-z) + f(-z)$$
أو
$$z = f(-z - 2f(-z))$$
وهذا ما يُثبتُ أنّ التابع f غامرٌ أي $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- إذن للمعادلة $f(x) = 0$ حلولٌ، وليكن α أحد هذه الحلول. عندئذ
$$f(0) = f\left(0 + 2f(\alpha)\right) = f(0) + \alpha + f(\alpha) = f(0) + \alpha$$
ومن ثَمّ $\alpha = 0$. إذن 0 هو الحلُّ الوحيد للمعادلة $f(x) = 0$، أي
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

- ومن ثَمّ بتعويض $x=0$ في المعادلة التابعيّة التابعيّة نجد

$$\forall y\in\mathbb{R},\quad f\bigl(2f(y)\bigr)=y+f(y) \qquad (*)$$

وعندئذ تُكتب المعادلة التابعيّة بالشكل

$$f\bigl(x+2f(y)\bigr)=f(x)+y+f(y)=f(x)+f\bigl(2f(y)\bigr)$$

في حالة (x,y) من $\mathbb{R}^2$. ولمّا كان التابع $y\mapsto 2f(y)$ غامراً استنتجنا من المعادلة السابقة أنّ

$$\forall(x,z)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+z)=f(x)+f(z)$$

وهنا نستفيد من استمرار التابع f عند نقطة من $\mathbb{R}$ لنستنتج من المعادلة التابعيّة السابقة أنّه يوجد عددٌ حقيقي λ يحقّق $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\lambda x$. ولكن بالعودة إلى $(*)$، واختيار $y=1$ نرى أنّ

$$f(2f(1))=1+f(1)$$

وهذا يُكافئ $2\lambda^2-\lambda-1=0$ أو $(2\lambda+1)(\lambda-1)=0$. فلا بُدّ أن يكون $\lambda\in\left\{1,-\frac{1}{2}\right\}$. وبذا نكون قد أثبتنا أنّ f هو أحد التابعين $x\mapsto x$ أو $x\mapsto-\dfrac{x}{2}$. ■

التمرين 33. أوجد جميع التوابع $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ التي تُحقّق الشروط التالية :

① $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2,\ f\bigl(xf(y)\bigr)f(y)=f(x+y)$.

② $f(2)=0$.

③ $\forall x\in[0,2[,\quad f(x)\neq 0$.

الحل

لنفترض وجود تابع $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ يُحقّق الشروط السابقة.

- لنختر $y=2$ في ① فنجد بالاستفادة من ② أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad f(x+2)=f(xf(2))\underbrace{f(2)}_{0}=0$$

إذن نستنتج أنّ

$$\forall x\geq 2,\quad f(x)=0 \qquad ④$$

- ليكن z عنصراً من $[0,2[$ عندئذ بعد تعويض $(x,y)=(2-z,z)$ في ① نجد

$$f((2-z)f(z))f(z)=f(2-z+z)=f(2)=0$$

ولمّا كان $f(z)\neq 0$ بناءً على ③ استنتجنا أنّ $f\big((2-z)f(z)\big)=0$. وهذا يقتضي بعد ملاحظة ③ و ④ أنّ $(2-z)f(z)\geq 2$. إذن لقد أثبتنا أنّ

$$\forall x\in[0,2[,\quad f(x)\geq\frac{2}{2-x}$$

▪ ومن جهة أخرى، ليكن z عنصراً من $[0,2[$، ولنختر عدداً ما α من $]z,2[$. عندئذ بالاستفادة من ① بعد تعويض $(x,y)=(\alpha-z,z)$ ومن ③ نجد أنّ

$$f\big((\alpha-z)f(z)\big)f(z)=f(\alpha-z+z)=f(\alpha)\neq 0$$

إذن $f\big((\alpha-z)f(z)\big)\neq 0$. وبعد ملاحظة ③ و ④ نستنتج أنّ $(\alpha-z)f(z)<2$.

إذن لقد أثبتنا أنّ $f(z)<\dfrac{2}{\alpha-z}$ وذلك أيّاً كانت قيمة α من $]z,2[$. فإذا جعلنا α تسعى إلى 2 بقيم أصغر منها استنتجنا أنّ $f(z)\leq\dfrac{2}{2-z}$. إذن لقد أثبتنا أنّ

$$\forall x\in[0,2[,\quad f(x)=\frac{2}{2-x}$$

ومن ثَمّ

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad f(x)=\begin{cases}0 & : \quad x\geq 2\\ \dfrac{2}{2-x} & : \quad x\in[0,2[\end{cases}$$

وبالعكس، نتيقّن بسهولة أنّ التابع المعرّف آنفاً يُحقّق الشروط ① و ② و ③، فهو الحلّ الوحيد للمسألة المطروحة. ■

التمرين 34. أوجد جميع التوابع $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$ التي تُحقّق الشروط التالية :

① $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad f\big(xf(y)\big)=yf(x)$.

② $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

الحل

لنفترض وجود تابع $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ يُحقّق الشرطين السابقين.

▪ باستبدال $x/f(y)$ بالمقدار x في ① نجد

$$\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ f\left(\frac{x}{f(y)}\right)=\frac{f(x)}{y}\qquad ③$$

- وبتعويض $x = y = 1$ في العلاقة ① نستنتج أنّ $f(f(1)) = f(1)$. وبتعويض $x = y = f(1)$ في ③ نستنتج، بالاستفادة من $f(f(1)) = f(1)$ ، أنّ $f(1) = 1$.
- ليكن z عنصراً من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّق $f(z) = z$. عندئذ نبرهن بالتدريج على العدد n من $\mathbb{N}$ أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ f(z^{2^n}) = z^{2^n}$$

إنّ هذه النتيجة صحيحة في حالة $n = 0$ ، وإذا افترضنا أنّها صحيحة في حالة قيمة ما n ، كان

$$f(z^{2^{n+1}}) = f(z^{2^n} f(z^{2^n})) = z^{2^n} f(z^{2^n}) = z^{2^{n+1}}$$

لنناقش الحالتين الآتيتين:

- حالة $z > 1$. عندئذ $\lim\limits_{n\to\infty} z^{2^n} = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} f(z^{2^n}) = 0$ بالاستفادة من ② . وهذا يناقض المساواة : $\forall n \in \mathbb{N},\quad f(z^{2^n}) = z^{2^n}$.
- حالة $z < 1$. هنا نستفيد من العلاقة ③ لنكتب

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad f(z^{-2^n}) = f\left(\frac{1}{f(z^{2^n})}\right) = \frac{f(1)}{z^{2^n}} = z^{-2^n}$$

وهنا يكون $\lim\limits_{n\to\infty} z^{-2^n} = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} f(z^{-2^n}) = 0$ بالاستفادة من ② .

وهذا يناقض المساواة : $\forall n \in \mathbb{N},\quad f(z^{-2^n}) = z^{-2^n}$.

نستنتج من التناقضين السابقين أنّ z يجب أن يساوي 1، فنكون قد أثبتنا التكافؤ $f(z) = z \Leftrightarrow z = 1$.

- لتكن x من $\mathbb{R}_+^*$ ، ولنضع $z = xf(x)$. عندئذ

$$f(z) = f(xf(x)) = xf(x) = z$$

إذن لا بُدّ أن يكون $z = 1$ أي $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

وبالعكس، يُحقّق التابع $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ وضوحاً الخاصّتين ① و ② . ■

التمرين 35. ليكن m من $\mathbb{R}^*$. أوجد جميع التوابع المستمرّة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ التي تُحقّق :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f\left(2x - \frac{1}{m} f(x)\right) = mx \qquad \mathcal{E}_m$$

الحل

لنتأمّل أوّلاً حالة $m = 1$. ليكن إذن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً يحقّق
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x - f(x)) = x$$
ولنعرّف التابع $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بالعلاقة $h(x) = 2x - f(x)$.

- التابع h تابعٌ مستمرٌّ ومتباينٌ لأنّ $f \circ h = I_{\mathbb{R}}$ ، فهو إذن تابعٌ مطّردٌ تماماً.
- لا يمكن للتابع h أن يكون متناقصاً تماماً، لأنّ هذا يقتضي أن يكون التابع $f = 2I_{\mathbb{R}} - h$ متزايداً تماماً، ومن ثَمّ أن يكون $f \circ h = I_{\mathbb{R}}$ متناقصاً تماماً وهذا تناقضٌ واضحٌ. نستنتج إذن أنّ التابع h تابعٌ متزايدٌ تماماً.
- لنفترض جدلاً أنّ $\sup h = \alpha < +\infty$. فيكون $\lim_{x\to\infty} h(x) = \alpha$ ، ونستنتج من استمرار التابع f عند α أنّ $f(\alpha) = \lim_{x\to\infty} f \circ h(x)$ وهذا تناقضٌ لأنّ $f \circ h = I_{\mathbb{R}}$. إذن لا بُدّ أن يكون $\alpha = +\infty$ ومن ثَمّ $\lim_{x\to\infty} h(x) = +\infty$.
- ونبرهن بأسلوب مماثل أنّ $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$. فالتابع h تقابلٌ مستمرٌ ومتزايدٌ تماماً من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$. وكذلك يكون تابعه العكسي $h^{-1} = f$.
- في حالة عددين x و y من $\mathbb{R}$ لدينا
$$\begin{aligned} x < y \Rightarrow h(x) < h(y) \\ &\Rightarrow f(y) - f(x) < 2(y - x) \\ &\Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < 2 \end{aligned}$$
إذن المجموعة الجزئيّة غير الخالية
$$\left\{\frac{f(y) - f(x)}{y - x} : y \neq x\right\} \subset \mathbb{R}$$
محدودة من الأعلى بالعدد 2، يمكننا إذن أن نعرّف حدّها الأعلى
$$\lambda = \sup\left\{\frac{f(y) - f(x)}{y - x} : y \neq x\right\}$$
الذي يُحقِّق $0 < \lambda \leq 2$.

▫ في حالة عددين x و y من $\mathbb{R}$ يُحقّقان $x \neq y$ يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned} 1 = \frac{y-x}{y-x} &= \frac{h\big(f(y)\big) - h\big(f(x)\big)}{y-x} \\ &= \frac{2f(y) - 2f(x) - f\big(f(y)\big) + f\big(f(x)\big)}{y-x} \\ &= \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\left(2 - \frac{f\big(f(y)\big) - f\big(f(x)\big)}{f(y)-f(x)}\right) \\ &\leq \lambda\left(2 - \frac{f\big(f(y)\big) - f\big(f(x)\big)}{f(y)-f(x)}\right) \end{aligned}$$

ومنه

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y \Rightarrow \frac{f(f(y)) - f(f(x))}{f(y)-f(x)} \leq 2 - \frac{1}{\lambda}$$

ولمّا كان $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تقابلاً استنتجنا أنّ

$$\left\{\frac{f(y)-f(x)}{y-x} : y \neq x\right\} = \left\{\frac{f\big(f(y)\big) - f\big(f(x)\big)}{f(y)-f(x)} : y \neq x\right\}$$

إذن

$$\sup\left\{\frac{f(f(y)) - f(f(x))}{f(y)-f(x)} : y \neq x\right\} = \lambda$$

وبالعودة إلى ما أثبتناه سابقاً نستنتج أنّ $\lambda \leq 2 - \dfrac{1}{\lambda}$ أو $(\lambda-1)^2 \leq 0$ وهذا يقتضي أن يكون $\lambda = 1$.

☜ لقد أثبتنا أنّ كلّ تابع مستمرٍّ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ يُحقِّق $\mathcal{E}_1$ يُحقّق أيضاً الخاصّة

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 1$$

▪ ولكنّ التابع $h = 2I_{\mathbb{R}} - f$ يُحقّق أيضاً $\mathcal{E}_1$ لأنّ

$$h \circ (2I_{\mathbb{R}} - h) = h \circ f = h \circ h^{-1} = I_{\mathbb{R}}$$

إذن لا بُدّ أن يكون لدينا أيضاً

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y \Rightarrow \frac{h(y)-h(x)}{y-x} \leq 1$$

أو

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x\neq y \Rightarrow 1\leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

- فنكون قد أثبتنا أنّ كلّ تابع مستمرٍّ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ يُحقّق $\mathcal{E}_1$ يُحقّق أيضاً الخاصّة

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(y)-f(x)=y-x$$

وبوجه خاص $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=x+f(0)$.

وبالعكس، كلُّ تابع f من الصيغة $x\mapsto x+\lambda$ يُحقّق المعادلة التابعيّة $\mathcal{E}_1$.

نتيجة

مجموعة التوابع المستمرّة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ التي تُحقّق $\mathcal{E}_1$ هي التوابع من الصيغة $x\mapsto x+\lambda$. لنأتِ إلى دراسة الحالة العامّة الموافقة لقيمة m من $\mathbb{R}^*$. وليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً يُحقّق المعادلة التابعيّة $\mathcal{E}_m$. عندئذ نضع $g=\frac{1}{m}f$ فيكون $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً وحلاً للمعادلة التابعيّة $\mathcal{E}_1$، فهو إذن من الصيغة $x\mapsto x+\lambda$، وعليه يأخذ f الصيغة $x\mapsto mx+\lambda$. وكلُّ تابع من هذه الصيغة هو حلٌّ للمعادلة التابعيّة $\mathcal{E}_m$، فهذه هي إذن مجموعة حلول المعادلة التابعيّة $\mathcal{E}_m$. ■

التمرين 36. نهدف في هذه المسألة إلى إثبات الخاصّة التالية :

> ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً ويقبل العددين الحقيقيَّيْن الموجبين تماماً α و β أدواراً. إنّ الشرط $\frac{\alpha}{\beta}\notin\mathbb{Q}$ يقتضي أنّ التابع f تابعٌ ثابتٌ.

ليكن إذن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً، ويقبل العددين الحقيقيين الموجبين تماماً α و β أدواراً.

1. أثبت أنّ $\forall (p,q)\in\mathbb{Z}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\quad f(x+p\alpha+q\beta)=f(x)$.
2. نفترض في هذه الفقرة أنّ $\beta=1$ و $\alpha=\sqrt{2}$.

   a. أثبت أنّ :

$$\forall (n,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z},\ \forall x\in\mathbb{R},\quad f(x+q(\sqrt{2}-1)^n)=f(x)$$

   b. اختر q في المساواة السابقة اختياراً مناسباً واستنتج أنّ التابع f تابعٌ ثابتٌ.

3. نفترض في هذه الفقرة أنّ $\beta = 1$ و $\alpha \notin \mathbb{Q}$. لتكن N من $\mathbb{N}^*$، ولنعرّف المجالات $I_k = \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right[$ ، في حالة k من $\mathbb{N}_N$، عندئذ تكوّن المجالات $\left(I_k\right)_{1\leq k\leq N}$ تجزئة للمجال $[0,1[$.

a. بيّن أنّ $D = \left\{p\alpha - \lfloor p\alpha \rfloor : p \in \{0,1,\ldots,N\}\right\}$ مجموعة جزئية من المجال $[0,1[$. وأنّ أحد المجالات $\left(I_k\right)_{1\leq k\leq N}$ يحتوي على عنصرين من D.

b. استنتج أنه يوجد في $\mathbb{Z}^2$ عنصرٌ (p_N, q_N) يجعل العدد $p_N\alpha + q_N = x_N$ يُحقّق المتراجحة $0 < x_N < \frac{1}{N}$.

c. أثبت أنّ :

$$\forall (N,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z},\ \ \forall x \in \mathbb{R},\quad f(x + qx_N) = f(x)$$

d. استنتج أنّ :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\quad f\left(x - x_N \left\lfloor x/x_N \right\rfloor\right) = f(x)$$

ثُمّ استنتج أنّ التابع f تابعٌ ثابتٌ.

4. نفترض الآن أنّ $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ و $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$، أثبت أنّ f تابعٌ ثابتٌ.

5. أعطِ مثالاً على تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ غير ثابتٍ ويقبل العددين $\sqrt{2}$ و 1 أدواراً.

الحل

1. في الحقيقة، ينتج من كون α دوراً للتابع f أنّ $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x+\alpha) = f(x)$، وبتطبيق ذلك على $x - \alpha$ بدلاً من x نستنتج أنّ $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x-\alpha) = f(x)$.

نستنتج من ذلك بالتدريج على العدد n من $\mathbb{N}$ أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x+n\alpha) = f(x-n\alpha) = f(x)$$

أي

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R},\quad f(x+p\alpha) = f(x)$$

لتكن p من $\mathbb{Z}$. نستنتج من كون β دوراً للتابع f أنّه في الحقيقة دورٌ للتابع $x \mapsto f(x+p\alpha)$، وبتطبيق ما أثبتناه آنفاً على هذا التابع نستنتج أنّ

$$\forall q \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R},\quad f(x+p\alpha+q\beta) = f(x+p\alpha) = f(x)$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall(p,q)\in\mathbb{Z}^2,\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x+p\alpha+q\beta)=f(x)$$

2. نفترض في هذه الفقرة أنّ $\beta=1$ و $\alpha=\sqrt{2}$.

a.2. نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}-1\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^{n-k}\left(\sqrt{2}\right)^k\\ &= \underbrace{(-1)^n\sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k}2^k}_{a_n}+\sqrt{2}\,\underbrace{(-1)^{n-1}\sum_{0\le 2k+1\le n} C_n^{2k+1}2^k}_{b_n}\end{aligned}$$

إذن يوجد عددان صحيحان a_n و b_n يُحقّقان

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$$

وعليه، أيّاً كانت q من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$، كان

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f\left(x+q\left(\sqrt{2}-1\right)^n\right)=f\left(x+qa_n 1+ab_n\sqrt{2}\right)=f(x)$$

b.2. لتكن x من $\mathbb{R}$، ولنعرّف في حالة n من $\mathbb{N}$ المقدار z_n التالي

$$z_n=x-\underbrace{\left\lfloor\left(\sqrt{2}+1\right)^n x\right\rfloor}_{q}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^n$$

عندئذ يكون لدينا

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad f(z_n)=f(x)\qquad(*)$$

ومن جهة أخرى، لمّا كان

$$\left\lfloor\left(\sqrt{2}+1\right)^n x\right\rfloor\le\left(\sqrt{2}+1\right)^n x<1+\left\lfloor\left(\sqrt{2}+1\right)^n x\right\rfloor$$

استنتجنا أنّ

$$0\le z_n<\left(\sqrt{2}+1\right)^n<2^{-n}$$

وعليه فإنّ $\lim_{n\to\infty} z_n=0$ ، ولمّا كان f مستمراً عند 0 استنتجنا من المساواة $(*)$ أنّ $f(x)=f(0)$. والتابع f تابعٌ ثابتٌ لأنّ x عنصرٌ اختياري من $\mathbb{R}$.

3. نفترض في هذه الفقرة أنّ $\beta = 1$ و $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

لتكن N من $\mathbb{N}^*$ ، ولنعرّف المجالات $I_k = \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right[$ ، في حالة k من $\mathbb{N}_N$ ، عندئذ تكوّن المجالات $\left(I_k\right)_{1\leq k\leq N}$ تجزئة للمجال $[0,1[$. ونتأمّل المجموعة

$$D = \left\{p\alpha - \lfloor p\alpha \rfloor : p \in \{0,1,\ldots,N\}\right\}$$

a.3 من الواضح أنّ $D \subset [0,1[$. والتطبيق $p \mapsto p\alpha - \lfloor p\alpha \rfloor$ يعرّف تقابلاً بين المجموعتين $\{0,\ldots,N\}$ و D ، فهو غامرٌ وضوحاً، وهو متباينٌ لأنّ $\alpha \notin \mathbb{Q}$. إذن $\operatorname{card} D = N+1$.

المجالات $\left(I_k\right)_{1\leq k\leq N}$ تؤلّف تجزئة للمجموعة $[0,1[$ ، لنفترض على سبيل الجدل أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}_N, \operatorname{card}\left(D \cap I_k\right) \leq 1$$

عندئذ

$$N+1 = \operatorname{card} D = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{card}(D \cap I_k) \leq N$$

وهذا خُلفٌ واضح. إذن لا بُد أن نجد ℓ في $\mathbb{N}_N$ يُحقّق $\operatorname{card}(D \cap I_\ell) \geq 2$.

b.3 لمّا كان $\operatorname{card}(D \cap I_\ell) \geq 2$ ، فإنّه يوجد عددان مختلفان i و j من $\{0,\ldots,N\}$ يُحقّقان

$$\frac{\ell-1}{N} \leq j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor < i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor < \frac{\ell}{N}$$

ومن ثَمّ

$$0 < \underbrace{(i-j)}_{p_N}\alpha + \underbrace{\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor}_{q_N} < \frac{1}{N}$$

إذن، إذا عرّفنا

$$q_N = \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor \quad \text{و} \quad p_N = i - j$$

كان p_N و q_N عنصرين من $\mathbb{Z}$ وحقّق العدد $x_N = p_N\alpha + q_N$ المتراجحة $0 < x_N < \dfrac{1}{N}$.

.c.3 لمّا كان العددان 1 و α دورين للتابع f استنتجنا اعتماداً على .1 أنّه مهما تكن x من $\mathbb{R}$ و N من $\mathbb{N}^*$ و q من $\mathbb{Z}$ يكن

$$f(x+qx_N)=f(x+qp_N\alpha+qq_N 1)=f(x)$$

.d.3 لتكن x من $\mathbb{R}$، عندئذ نختار، أيّاً كانت N من $\mathbb{N}^*$، $q=-\lfloor x/x_N \rfloor$ في المساواة السابقة ، ونعرّف $z_N=x-\lfloor x/x_N \rfloor x_N$ فيكون

$$\forall N\in\mathbb{N}^*,\quad f(z_N)=f(x)$$

ولكن، استناداً إلى تعريف x_N ، لدينا

$$\forall N\in\mathbb{N}^*,\quad 0\le z_N\le\frac{1}{N}$$

وعليه $\lim_{N\to\infty} z_N=0$ ، فإذا استفدنا من استمرار التابع f عند 0 استنتجنا أنّ $f(x)=f(0)$ ، والتابع f تابعٌ ثابتٌ لأنّ x عددٌ كيفي من $\mathbb{R}$.

.4 لنفترض أنّ α و β دوران موجبان تماماً للتابع المستمرّ f وأنّ $\gamma=\frac{\alpha}{\beta}\notin\mathbb{Q}$. عندئذ يكون 1 و γ دورين للتابع المستمر $x\mapsto f(\beta x)$. ونستنتج، استناداً إلى ما أثبتناه في .3، أنّ $f(\beta x)=f(0)$ أياًكانت x من $\mathbb{R}$ ، وهذا يعني أنّ التابع f ثابتٌ.

.5 لتكن $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\left\{a+b\sqrt{2}:(a,b)\in\mathbb{Q}^2\right\}$. لمّا كان من الواضح أنّ

$$x\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\Leftrightarrow x+1\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

و

$$x\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\Leftrightarrow x+\sqrt{2}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

استنتجنا أنّ التابع

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\mathbb{1}_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]}(x)=\begin{cases}1 & : \quad x\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\\ 0 & : \quad x\notin\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\end{cases}$$

يقبل العددين 1 و $\sqrt{2}$ أدواراً. ولكنّه ليس مستمرّاً عند أيّة نقطة من $\mathbb{R}$. ■

التمرين 37. ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعاً متزايداً. وليكن ε عدداً موجباً تماماً.أثبت وجود تابعين متزايدين ومستمرّين h و g معرّفين على $[a,b]$ ويُحقّقان

$$h \le f \le g \quad \text{و} \quad \int_a^b \big(g-h\big) \le \varepsilon$$

الحل

لنمدّد التابع f إلى تابع معرّف ومتزايدٍ على كامل $\mathbb{R}$ بوضع :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} f(b) & : \quad x\ge b\\ f(x) & : \quad x\in[a,b]\\ f(a) & : \quad x\le a\end{cases}$$

ثُمّ لنختر n من $\mathbb{N}^*$، ولنعرّف التابعين $g_n:[a,b]\to\mathbb{R},$ و $h_n:[a,b]\to\mathbb{R},$ بالعلاقتين

$$g_n(x)=n\int_x^{x+1/n} f(t)\,\mathrm{d}\,t=\int_0^1 f\big(x+u/n\big)\,\mathrm{d}\,u$$

و

$$h_n(x)=n\int_{x-1/n}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t=\int_0^1 f\big(x-u/n\big)\,\mathrm{d}\,u$$

- نستنتج من الصيغة الثانية ومن تزايد التابع f أنّ كلّاً من g_n و h_n تابعٌ متزايدٌ، كما نستنتج صحّة المتراجحة :

$$\forall x\in[a,b],\quad h_n(x)\le f(x)\le g_n(x)$$

- بملاحظة أنّ

$$\begin{aligned} g_n(y)-g_n(x) &= n\int_y^{y+1/n} f(t)\,\mathrm{d}\,t-n\int_x^{x+1/n} f(t)\,\mathrm{d}\,t\\ &= n\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}\,t+n\int_{x+1/n}^{y+1/n} f(t)\,\mathrm{d}\,t\\ &= n\int_x^y \Big(f\Big(t+\tfrac{1}{n}\Big)-f(t)\Big)\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

نستنتج أنّ

$$\forall (x,y)\in[a,b]^2,\quad \left|g_n(y)-g_n(x)\right|\leq n\big(f(b)-f(a)\big)\left|y-x\right|$$

وهذا يُثبتُ استمرار التابع g_n .

- ونبرهن بأسلوب مماثل أنّ التابع h_n تابعٌ مستمرٌّ على $[a,b]$.
- بقي أن نتأمّل الفرق فنجد في حالة x من $[a,b]$ أنّ

$$\begin{aligned} g_n(x)-h_n(x) &= \int_0^1\left(f\left(x+\frac{u}{n}\right)-f\left(x-\frac{u}{n}\right)\right)\mathrm{d}\,u\\ &\leq f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} \int_a^b (g_n(x)-h_n(x))\,\mathrm{d}\,x &\leq \int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}\,x-\int_a^b f\left(x-\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}\,x\\ &= \int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x)\,\mathrm{d}\,x-\int_{a-1/n}^{b-1/n} f(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &\leq \int_{a+1/n}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x+\frac{f(b)-f(a)}{n}-\int_{b}^{b-1/n} f(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &\leq \frac{f(b)-f(a)}{n}+\int_0^{1/n} f(b-t)\,\mathrm{d}\,t-\int_0^{1/n} f(a+t)\,\mathrm{d}\,t\\ &\leq \frac{f(b)-f(a)}{n}+\int_0^{1/n}\big(f(b-t)-f(a+t)\big)\,\mathrm{d}\,t\\ &\leq \frac{2}{n}\big(f(b)-f(a)\big)\end{aligned}$$

يكفي إذن أن نختار $n>\frac{2}{\varepsilon}\big(f(b)-f(a)\big)$ ، ونضع $h=h_n$ و $g=g_n$ ليكتمل الإثبات.■

التوابع لمتحول حقيقي

الاشتقاق

﴿ في كل ما يلي يمثّل الرمز I مجالاً غير خالٍ وغير مؤلّف من نقطة واحدة في $\mathbb{R}$.﴾

1. عموميات

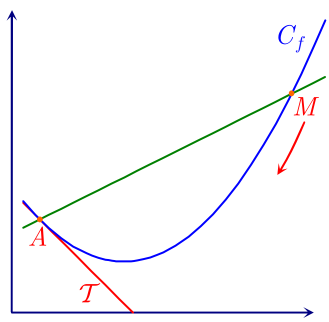
1-1. تعريف. ليكن a عنصراً من I، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. نقول إنّ f **قابلٌ للاشتقاق عند a** إذا وفقط إذا قَبِلَ تابع نسبة التغيّر

$$\Delta_{f,a} : I\backslash\{a\} \to \mathbb{K},\ x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

نهاية منتهية عند a . نرمز إلى هذه النهاية إن وُجِدتْ بالرمز $f'(a)$ أو $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$. ونسمّي المقدار $\Delta_{f,a}(x)$ نسبة تغيّر التابع f بين a و x .

المعنى الهندسي للعدد المشتق

إذا كان التابع f تابعاً حقيقيّاً، دَلّ المقدار $\Delta_{f,a}(x)$ على مَيْل الوتر $[AM]$ الذي يصل بين النقطتين $A(a,f(a))$ و $M(x,f(x))$. وعليه يكون الشعاع $(1,\Delta_{f,a}(x))$ شعاعَ توجيهٍ للمستقيم (AM) . فإذا كان f قابلاً للاشتقاق عند a دلَّ المستقيم $\mathcal{T}$ الذي شعاع توجيهه $(1,f'(a))$ على وضعٍ نهائي للمستقيم (AM) عندما تقترب M من A على الخط البياني C_f للتابع f ، فهو إذن المماس في A للخط البياني للتابع f .



ملاحظة. نستنتج من هذا المعنى الهندسي للمشتق، أنّه إذا حدث في حالة تابع حقيقي أن كان $\lim\limits_{x\to a}\Delta_{f,a}(x)=+\infty$ أو كان $\lim\limits_{x\to a}\Delta_{f,a}(x)=-\infty$ ، فعندئذ لا يقبل f الاشتقاق عند a ، ولكن يكون لخطّه البياني C_f مماسٌّ شاقوليٌّ معادلته $y=f(a)$ عند النقطة $A(a,f(a))$.

1-2. **تعريف**. ليكن a عنصراً من I ، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. نقول إنّ f **قابل للاشتقاق من اليمين** عند a إذا وفقط إذا كان $I\cap\left]a,+\infty\right[\neq\varnothing$ وقَبِلَ التابع

$$\Delta^+_{f,a}:I\cap\left]a,+\infty\right[\to\mathbb{K},\quad x\mapsto\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

نهاية منتهية عند a ، نرمز إلى هذه النهاية إن وُجِدتْ بالرمز $f'(a^+)$ ونسمّيها مشتق f من اليمين عند a .

ونقول إنّ f **قابل للاشتقاق من اليسار** عند a إذا وفقط إذا تحقّق الشرط التالي $I\cap\left]-\infty,a\right[\neq\varnothing$ ، وقَبِلَ التابع

$$\Delta^-_{f,a}:I\cap\left]-\infty,a\right[\to\mathbb{K},\quad x\mapsto\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

نهاية منتهية عند a ، نرمز إلى هذه النهاية إن وُجِدتْ بالرمز $f'(a^-)$ ونسمّيها مشتق f من اليسار عند a .

1-3. **مبرهنة**. ليكن I مجالاً مفتوحاً. لكي يكون التابع f من $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ ، قابلاً للاشتقاق عند a من I ، يلزم ويكفي أن يكون f قابلاً للاشتقاق من اليمين ومن اليسار عند a ، وأن يكون $f'(a^+)=f'(a^-)$. وفي هذه الحالة يكون

$$f'(a)=f'(a^-)=f'(a^+)$$

الإثبات

الإثبات بسيط انطلاقاً من التعريف ومتروك للقارئ. ❒

1-4. **مبرهنة**. إذا كان التابع f من $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ قابلاً للاشتقاق عند a من I ، كان مستمراً عند a .

الإثبات

لمّا كان

$$x \in I \backslash \{a\} \Rightarrow f(x) - f(a) = \Delta_{f,a}(x) \cdot (x - a)$$

ولمّا كانت النهاية $\lim\limits_{a} \Delta_{f,a}$ موجودة، بمقتضى الفَرْض، وجدنا جواراً V_0 للنقطة a وعدداً M من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقِّقان

$$x \in (I \cap V_0) \backslash \{a\} \Rightarrow \left| f(x) - f(a) \right| \leq M \left| x - a \right|$$

هذه المتراجحة صحيحة أيضاً عند $x = a$، نستنتج إذن ما يلي :

$$x \in I \cap V_0 \Rightarrow \left| f(x) - f(a) \right| \leq M \left| x - a \right|$$

ليكن $\varepsilon > 0$ فنجد جواراً $V_\varepsilon = V_0 \cap \left] a - \frac{\varepsilon}{M}, a + \frac{\varepsilon}{M} \right[$ للعدد a يُحقّق

$$x \in I \cap V_\varepsilon \Rightarrow \left| f(x) - f(a) \right| \leq \varepsilon$$

وهذا يثبت استمرار f عند a. ❐

ملاحظة. إنّ العكس بالطبع ليس صحيحاً فالتابع $x \mapsto |x|$ مستمرٌّ على $\mathbb{R}$ ولكنّه غير قابل للاشتقاق عند 0. وكذلك يوجد تابع مستمرٌّ على $\mathbb{R}$ وغير قابل للاشتقاق عند أيّة نقطة من $\mathbb{R}$.

تلخّص المبرهنة التالية عدداً من الخواص البسيطة لقابلية الاشتقاق، سنذكرها للقارئ تاركين له مهمة صياغة الإثبات.

1-5. **مبرهنة**. ليكن a عنصراً من I، وليكن λ من $\mathbb{K}$، وأخيراً ليكن f و g تابعين من $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$، قابلَين للاشتقاق عند a. عندئذ يكون :

① التابع $(f + g)$ قابلاً للاشتقاق عند a و $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

② التابع λf قابلاً للاشتقاق عند a و $(\lambda f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$.

③ التابع $f \cdot g$ قابلاً للاشتقاق عند a و $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

④ إذا كان g لا ينعدم على I، كان $\frac{1}{g}$ قابلاً للاشتقاق عند a وكان

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$$

⑤ إذا كان g لا ينعدم على I، فإنّ $\frac{f}{g}$ قابل للاشتقاق عند a ويكون

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

ملاحظة مهمّة. يقبل تابع $f : I \to \mathbb{C}$ الاشتقاق عند a من I، إذا وفقط إذا قَبِلَ كلٌّ من جزئه الحقيقي $\operatorname{Re} f$ وجزئه التخيّلي $\operatorname{Im} f$ الاشتقاق عند a.

1-6. مبرهنة. ليكن I و J مجالين من $\mathbb{R}$، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ و g تابعاً من $\mathcal{F}(J,\mathbb{K})$ يُحقّق $f(I) \subset J$. لنضع $g \circ f : I \to \mathbb{K}, x \mapsto g(f(x))$. إذا كان f قابلاً للاشتقاق عند a من I، وكان g قابلاً للاشتقاق عند $f(a)$ كان $g \circ f$ قابلاً للاشتقاق عند a وتحقّقت العلاقة

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

الإثبات

نلاحظ، من جهة أولى، أنّ التابعين

$$\tilde{\Delta}_{f,a} : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \Delta_{f,a}(x) & : \quad x \neq a \\ f'(a) & : \quad x = a \end{cases}$$

و

$$\tilde{\Delta}_{g,f(a)} : J \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \begin{cases} \Delta_{g,f(a)}(x) & : \quad x \neq f(a) \\ g'(f(a)) & : \quad x = f(a) \end{cases}$$

مستمران بسبب قابلية اشتقاق f عند a وقابليّة اشتقاق g عند $f(a)$. ونلاحظ من ناحية أخرى أيضاً أنّ

$$\forall x \in I \backslash \{a\}, \quad \Delta_{g \circ f}(x) = \tilde{\Delta}_{g,f(a)}(f(x)) \cdot \tilde{\Delta}_{f,a}(x)$$

ومن ثَمّ تكون النهاية $\lim_{a} \Delta_{g \circ f,a}$ موجودة وتساوي $g'(f(a)) \cdot f'(a)$. ❐

1-7. مبرهنة اشتقاق التابع العكسي. ليكن a عنصراً من I، وليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً ومطّرداً تماماً على I، وقابلاً للاشتقاق عند a ويحقّقُ $f'(a) \neq 0$. عندئذ يكون "**التابع العكسي**" $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ قابلاً للاشتقاق عند $f(a)$ ويكون

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

الإثبات

لقد خلطنا في هذا النص بين $f : I \to \mathbb{R}$ و $\tilde{f} : I \to f(I)$، إذ إنَّ هذا الأخير هو الذي يقبل تابعاً عكسياً، ورمزنا تجاوزاً بالرمز f^{-1} إلى التابع $\tilde{f}^{-1}$. لقد أثبتنا سابقاً أنّ f^{-1} مستمرٌّ على المجال $J = f(I)$، وله جهة اطّراد f نفسها.

لـمّا كان التابع

$$\tilde{\Delta}_{f,a} : I \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \begin{cases} \Delta_{f,a}(x) & : \ x \neq a \\ f'(a) & : \ x = a \end{cases}$$

مستمرّاً على I وقيمته عند a مختلفة عن الصفر، وجدنا جواراً V للعدد a يُحقّق

$$x \in I \cap V \Rightarrow \tilde{\Delta}_{f,a}(x) \neq 0$$

ومن ثَمّ يكون للتابع $I \cap V \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{\tilde{\Delta}_{f,a}(x)}$ نهاية عند a تساوي $\dfrac{1}{f'(a)}$، ولأنّ f^{-1} مستمرٌّ عند $f(a)$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{y \to f(a)} f^{-1}(y) = a$، ومنه

$$\lim_{y \to f(a)} \frac{1}{\tilde{\Delta}_{f,a}(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(a)}$$

ولـمّا كان

$$y \neq f(a) \Rightarrow \frac{1}{\tilde{\Delta}_{f,a}(f^{-1}(y))} = \frac{f^{-1}(y) - a}{y - f(a)} = \Delta_{f^{-1},f(a)}(y)$$

استنتجنا أنّ $\lim\limits_{f(a)} \Delta_{f^{-1},f(a)} = \dfrac{1}{f'(a)}$، فالتابع f^{-1} قابلٌ للاشتقاق عند $f(a)$، ومشتقه عندها يحقّق المساواة $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$. ❐

2. التابع المشتق

2-1. تعريف. ليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. نسمّي **مشتقَّ** f التابع الذي يربط بكلّ نقطةٍ x من I، يكون عندها f قابلاً للاشتقاق، قيمة المشتق $f'(x)$. ونرمز إلى هذا التابع بالرمز f' أو بالرمز $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. فمجموعة تعريف التابع f' هي مجموعة قيم x من I التي يكون f قابلاً للاشتقاق عندها.

فمثلاً إذا كان $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto \left|x\right|$ ، كان

$$f':\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, x\mapsto\begin{cases}1 & : \quad x>0\\ -1 & : \quad x<0\end{cases}$$

تنتج المبرهنات التالية مباشرة من خواص قابليّة الاشتقاق عند نقطة التي درسناها في الفقرة السابقة.

2-2. مبرهنة. ليكن f و g تابعين من $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ ، وليكن λ من $\mathbb{K}$. نفترض أنّ f و g يقبلان الاشتقاق على المجال I . عندئذ يكون

- $f+\lambda g$ قابلاً للاشتقاق على I ، ويكون $(f+\lambda g)'=f'+\lambda g'$.
- $f\,g$ قابلاً للاشتقاق على I ، ويكون $(f\,g)'=f'\,g+f\,g'$.
- إذا كان g لا ينعدم على I ، كان $\dfrac{1}{g}$ قابلاً للاشتقاق على I ، وكان

$$\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2}$$

ويمكن تعميم خاصّة الجداء كما يأتي:

3-2. مبرهنة. لتكن $f_n,\ldots,f_2,f_1$ توابع من $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ قابلة للاشتقاق على I . عندئذ يكون عندئذ الجداء $f=\prod_{k=1}^{n}f_k$ قابلاً للاشتقاق على I ، ويكون

$$f'=\sum_{j=1}^{n}f_j'\cdot\Big(\prod_{k\in\mathbb{N}_n\setminus\{j\}}f_k\Big)$$

4-2. مبرهنة. ليكن I و J مجالين من $\mathbb{R}$ ، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ ، وكذلك ليكن g تابعاً من $\mathcal{F}(J,\mathbb{K})$. نفترض أنّ f و g يقبلان الاشتقاق على I و J على التوالي، وأنّ $f(I)\subset J$. عندئذ يكون التابع $g\circ f$ قابلاً للاشتقاق على I ويكون

$$(g\circ f)'=g'\circ f\cdot f'$$

3. المشتقات من مراتب عليا

☜ **نصطلح أن نرمز بالرمز $f^{(0)}$ إلى التابع f وبالرمز $f^{(1)}$ إلى مشتقه f'.**

3-1. **تعريف**. ليكن I مجالاً من $\mathbb{R}$، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. نعرِّف المشتقّات المتلاحقة للتابع f تدريجياً على الوجه التالي : أياً كان n من $\mathbb{N}^*$، وأياً كان a من I، $f^{(n)}(a)$ هو مشتق $f^{(n-1)}$ عند a في حال وجوده. و $f^{(n)}$ هو التابع مشتق التابع $f^{(n-1)}$. ونسمّي المقدار $f^{(n)}(a)$ **المشتقّ من المرتبة n** للتابع f عند a. ونسمّي $f^{(n)}$ المشتق من المرتبة n للتابع f. ونقول إنّ التابع f يقبل الاشتقاق n مرّة على المجال I إذا كان $f^{(n)}$ معرّفاً على I. وأخيراً نكتب أحياناً $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ عوضاً عن $f^{(n)}$.

لاحظ أنّه يمكن لمجموعات تعريف التوابع f و f' و $f''=f^{(2)}$ أن تكون مختلفة. وأنّ وجود $f^{(n)}(a)$ يتطلّب أن يكون $f^{(n-1)}$ معرّفاً على تقاطع I مع جوارٍ للعنصر a.

3-2. **مبرهنة**. ليكن f و g تابعين من $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$، وليكن λ من $\mathbb{K}$، و n من $\mathbb{N}^*$. نفترض أنّ f و g يقبلان الاشتقاق n مرّة على المجال I. عندئذ يكون

① $f+\lambda g$ قابلاً للاشتقاق n مرّة على I، و $(f+\lambda g)^{(n)} = f^{(n)}+\lambda g^{(n)}$.

② $f\,g$ قابلاً للاشتقاق n مرّة على I، وتتحقّق علاقة Leibniz التالية :

$$(f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

③ إذا كان g لا ينعدم على I، كان $\dfrac{f}{g}$ قابلاً للاشتقاق n مرّة على I.

الإثبات

النقطة ① بسيطة ونتركها للقارئ. لنثبت النقطة ② بالتدريج على n. لقد عولجت حالة $n=1$ سابقاً. لنفترض أنّ f و g يقبلان الاشتقاق $n+1$ مرّة على المجال I. إذن استناداً إلى فرْض التدريج يقبل $f\,g$ الاشتقاق n مرّة، ويكون

$$(f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

ولمّا كان $f^{(k)}$ و $g^{(n-k)}$ يقبلان الاشتقاق على I، أياً كان k من $\{0,1,\ldots,n\}$، قَبِل التابع $f^{(k)}g^{(n-k)}$ الاشتقاق على I وكان

$$(f^{(k)}g^{(n-k)})' = f^{(k+1)} \cdot g^{(n-k)} + f^{(k)} \cdot g^{(n-k+1)}$$

نستنتج إذن أنّ $(f\,g)^{(n)}$ يقبل الاشتقاق على I، وتنتج العلاقة المطلوبة بملاحظة ما يلي :

$$\begin{aligned}
((f\,g)^{(n)})' &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n+1-k-1)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}\\
&= f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f\,g^{(n+1)}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k\, f^{(k)}\, g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

يجري إثبات الخاصّة ③ أيضاً بالتدريج على n، إنّ حالة $n = 1$ واضحة. لنفترض أنّ f و g يقبلان الاشتقاق $n+1$ مرّة على I. إذن يقبل التابع f/g الاشتقاق على I، و

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

ولمّا كان كلٌّ من التوابع f و f' و g و g' يقبل الاشتقاق n مرّة على المجال I، فكلٌّ من التابعين $f'\,g - f\,g'$ و g^2 يقبل إذن الاشتقاق n مرّة على المجال I، وبناءً على فرْض التدريج يقبل التابع $\left(f/g\right)'$ الاشتقاق n مرة على المجال I. ومن ثَمّ يقبل التابع f/g الاشتقاق $n+1$ مرة على المجال I. ❐

3-3. **تعريف**. ليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$، ولتكن n من $\mathbb{N}$. نقول إنّ f ينتمي إلى **الصف** C^n على المجال I. إذا وفقط إذا كان f قابلاً للاشتقاق n مرّة على I، وكان $f^{(n)}$ مستمرّاً على المجال I. ونكتب في هذه الحالة $f \in C^n(I,\mathbb{K})$.

ونقول إنّ f من **الصف** C^∞ على I، و نكتب $f \in C^\infty(I,\mathbb{K})$، إذا وفقط إذا كان f قابلاً للاشتقاق n مرّة على I، وذلك مهما تكن n من $\mathbb{N}$، أي :

$$C^\infty(I,\mathbb{K}) = \bigcap_{n\geq 0} C^n(I,\mathbb{K})$$

3-4. **مبرهنة**. لتكن ω من $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. وليكن I و J مجالين من $\mathbb{R}$، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$، وكذلك ليكن g تابعاً من $\mathcal{F}(J,\mathbb{K})$. نفترض أنّ f و g من الصف C^ω على I و J على التوالي، وأنّ $f(I)\subset J$. عندئذ يكون التابع $g\circ f$ من الصف C^ω على I.

الإثبات

لقد عالجنا سابقاً حالة $\omega = 1$. لنفترض صحة الخاصة عندما $n = \omega$ من $\mathbb{N}$، وليكن f و g كما في المبرهنة ولكن من الصف C^{n+1}. لمّا كان $(g\circ f)' = g'\circ f\cdot f'$ ولأنّ كلّاً من التوابع f و g' و f' ينتمي إلى الصف C^n نجد بناءً على فرْض التدريج أنّ $(g\circ f)'$ ينتمي إلى الصف C^n على I، ومن ثَمّ يكون $g\circ f$ من الصف C^{n+1}. تثبت هذه المناقشة صحّة المبرهنة أياً كان ω من $\mathbb{N}$. وتنتج حالة $\omega = +\infty$ مباشرة مما سبق. ❐

3-5. **تعريف**. ليكن (a,b) من $\mathbb{R}^2$ يُحقّق $a > b$، وليكن n من $\mathbb{N}$. نقول عن تابع f من $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$ إنّه من **الصف C^n قِطَعيّاً**. إذا وفقط إذا وُجِدَ p من $\mathbb{N}^*$ ووُجِدتْ أعداد $a_0, a_1, \ldots, a_p$ من $\mathbb{R}$ تُحقّق

① $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{p-1} < a_p = b$.

② يمكن تمديد مقصور التابع f على المجال $]a_i, a_{i+1}[$ إلى تابع من الصف C^n على المجال $[a_i, a_{i+1}]$ وذلك أياً كان i من $\{0,1,\ldots,p-1\}$.

4. مبرهنة رول ومبرهنة التزايدات المحدودة

4-1. **مبرهنة رول**–Rolle. ليكن (a,b) من $\mathbb{R}^2$ يُحقّق $a < b$. وليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. نفترض أنّ f مستمرٌّ على $[a,b]$، وقابل للاشتقاق على $]a,b[$، ونفترض أيضاً أنّ $f(a) = f(b)$. عندئذ يوجد في المجال $]a,b[$ عددٌ c يُحقِّق $f'(c) = 0$.

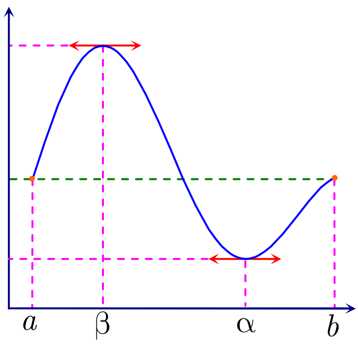
الإثبات

لمّا كان f مستمرّاً على $[a,b]$، و لمّا كان $[a,b]$ مجموعة متراصّة في $\mathbb{R}$، فإننا نجد عنصرين α و β من $[a,b]$، يُحقِّقان

$$f(\alpha) = \inf_{[a,b]} f \quad \text{و} \quad f(\beta) = \sup_{[a,b]} f$$

لنناقش الحالتين التاليتين :

- إذا كان $f(\beta) = f(\alpha)$ وجب أن يكون $\forall x \in [a,b], f(x) = f(\alpha)$ ويمكن أن نأخذ c أيّة نقطة من $]a,b[$.



- أمّا إذا كان $f(\beta) > f(\alpha)$ فلا بدَّ أن ينتمي أحد العنصرين α أو β إلى $]a,b[$ ، لأنّ $f(a)$ يساوي $f(b)$.
  - فإذا انتمى α إلى $]a,b[$ حقّق العدد $c = \alpha$ الخاصّة المطلوبة، لأنّ

$$x \in \left]a,\alpha\right[\Rightarrow \frac{f(z) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0$$

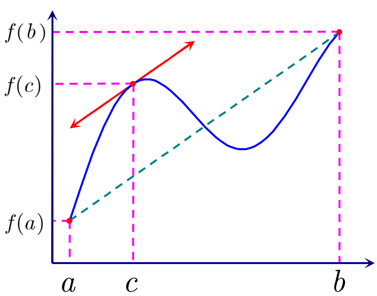
وبجعل x تسعى إلى α بقيم أصغر منها نجد $f'(\alpha) \leq 0$.
وكذلك

$$x \in \left]\alpha,b\right[\Rightarrow \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 0$$

وبجعل x تسعى إلى α بقيم أكبر منها نجد $f'(\alpha) \geq 0$ ، إذن $f'(\alpha) = 0$.
  - وبأسلوب مماثل نجد أنّ $\beta \in]a,b[$ يقتضي $f'(\beta) = 0$.

وبذلك يتم إثبات المبرهنة. ❐

2-4. مبرهنة التزايدات المحدودة. ليكن (a,b) من $\mathbb{R}^2$ يُحقّق $a < b$. و $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. تابعاً مستمرّاً على $[a,b]$، وقابلاً للاشتقاق على $]a,b[$. عندئذ يوجد في المجال $]a,b[$ عددٌ c يُحقّق :



$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$$

الإثبات

نعرّف التابع

$$g:[a,b]\to\mathbb{R},\quad g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

فنجد أنّ g مستمرٌّ على $[a,b]$ وقابلٌ للاشتقاق على $]a,b[$ ويحقّق

$$g(a)=g(b)=f(a)$$

نجد إذن في المجال $]a,b[$ عدداً c يُحقِّق $g'(c)=0$ ، وهذا يكافئ

$$f(b)-f(a)=(b-a)\cdot f'(c)$$

وهي النتيجة المرجوّة. ❐

3-4. نتيجة. ليكن $f:I\to\mathbb{K}$ تابعاً مستمراً على I ، ولتكن x_0 عنصراً من I . نفترض أنّ التابع f قابلٌ للاشتقاق عند كلّ نقطة من $X=I\backslash\{x_0\}$. ونفترض أنّ النهاية $\lim\limits_{t\to x_0,t\in X} f'(t)$ موجودة ومنتهية وتساوي ℓ . عندئذ يكون f قابلاً للاشتقاق عند x_0 ويكون $f'(x_0)=\ell$.

الإثبات

يمكن أن نفترض أنّ f يأخذ قيمه في $\mathbb{R}$ ، ثُمّ نُطبّق النتيجة على كلٍّ من $\mathrm{Re}\, f$ و $\mathrm{Im}\, f$.

لتكن $\varepsilon>0$ نجد، بناءً على تعريف النهاية، عدداً $\eta>0$ يُحقِّق

$$(t\in X)\wedge(|t-x_0|<\eta)\Rightarrow\left|f'(t)-\ell\right|<\varepsilon$$

ليكن x من X عنصراً يُحقِّق $|x-x_0|<\eta$. بتطبيق مبرهنة التزايدات المحدودة على التابع

$$\varphi:[0,1]\to\mathbb{R},\ t\to\frac{f(x_0+t(x-x_0))}{x-x_0}$$

نجد في $]0,1[$ عدداً θ_x يُحقِّق

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0+\theta_x(x-x_0))$$

ولمّا كان $x_0+\theta_x(x-x_0)$ عنصراً من X، وكان $|x_0+\theta_x(x-x_0)-x_0|<\eta$ استنتجنا أنّ

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\ell\right|<\varepsilon$$

ومنه $\lim\limits_{x\to x_0}\Delta_{f,x_0}(x)=\ell$. وهذا يثبت قابلية اشتقاق f عند x_0، و $f'(x_0)=\ell$. □

ملاحظة مهمّة. يمكن أن يقبل تابعٌ $f:I\to\mathbb{R}$ الاشتقاق عند x_0 من I، دون أن تكون النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}}f'(x)$ موجودة.

فمثلاً، إذا تأمّلنا التابع

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\, x\mapsto\begin{cases}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & : \quad x\neq 0,\\ 0 & : \quad x=0.\end{cases}$$

نجده قابلاً للاشتقاق عند $x=0$ دون أن تكون النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}}f'(x)$ موجودةً.

4-4. **مثال**. ليكن f تابعاً قابلاً للاشتقاق على مجال I . حتّى يحقّق f شرط لِبشتز يلزم ويكفي أن يكون المشتق f' محدوداً على I .

الإثبات

- إذا كان f يحقّق شرط لِبشتز وجدنا عدداً $M>0$ يُحقّق

$$\forall(x,y)\in I^2,\quad \left|f(y)-f(x)\right|\le M\left|y-x\right|$$

فإذا كانت x_0 عنصراً من I، كان

$$\forall x\in I\backslash\{x_0\},\quad \left|\Delta_{f,x_0}(x)\right|\le M$$

ومنه $\left|f'(x_0)\right|\le M$.

- وبالعكس، لنفترض أنّ

$$\forall x\in I, \left|f'(x)\right|\le M$$

عندئذ، أياً كان العنصر (x,y) من I^2 الذي يُحقّق $x \neq y$، يمكننا أن نجد في $]0,1[$ عدداً θ يُحقق

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{x-y}\right| = \left|f'(x+\theta(y-x)\right| \leq M$$

فالتابع f يحقّق شرط لِبشتز.

ملاحظة. في الحقيقة، لقد أثبتنا الخاصّة المهمّة الآتية:

$$\sup_{\substack{(x,y)\in I^2\\ x\neq y}}\left|\frac{f(y)-f(x)}{x-y}\right| = \sup_{t\in I}\left|f'(t)\right|$$

4-5. مبرهنة منشور تايلور–لاغرانج Taylor-Lagrange. ليكن I مجالاً غير تافه في $\mathbb{R}$. وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ يقبل الاشتقاق $n+1$ مرّة على I. عندئذ أياً كان العنصر (a,b) من I^2 المحقّق للشرط $b \neq a$، يوجد في المجال $]0,1[$ عددٌ θ يُحقّق

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(b-a))}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

الإثبات

لنضع $h = b-a$، ولنعرّف التابع $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ بالعلاقة

$$\varphi(t) = f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(1-t)^k}{k!}f^{(k)}(a+th)h^k - \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}h^{n+1}A$$

وقد جرى تعيين الثابت A بالشرط $\varphi(0) = 0$.

نلاحظ أنّ φ مستمرٌ وقابل للاشتقاق على $[0,1]$ ويحقِّق $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. إذن، بمقتضى مبرهنة رول، يوجد في المجال $]0,1[$ عددٌ θ يُحقّق $\varphi'(\theta) = 0$. ولكن نجد بحساب بسيط أنّ

$$\varphi'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!}h^{n+1}\left(A - f^{(n+1)}(a+th)\right)$$

فالشرط $\varphi'(\theta) = 0$ يثبت أنّ

$$A = f^{(n+1)}(a+\theta(b-a))$$

والعلاقة $\varphi(0) = 0$ تمثِّل النشر المنشود. ❐

.6-4 **نتيجة** متراجحة تايلور–لاغرانج. ليكن I مجالاً غير تافه في $\mathbb{R}$. وليكن f تطبيقاً من الصف C^{n+1} على I ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}$. نفترض أنّه يوجد في $\mathbb{R}_+^*$ عددٌ M يُحقق

$$\forall x \in I, \quad \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$$

عندئذ يكون

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad \left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leq \frac{\left|b-a\right|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

.7-4 **تطبيق**. علاقة سيمبسون Simpson. ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{R}^2$ يُحقِّق $a < b$، وليكن $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^5 على المجال $[a,b]$. عندئذ يوجد في المجال $]a,b[$ عنصر c يُحقِّق:

$$g(b) - g(a) = \frac{b-a}{6}\left(g'(a) + 4g'\left(\frac{a+b}{2}\right) + g'(b)\right) - \frac{(b-a)^5}{2880} g^{(5)}(c)$$

الإثبات

لنبدأ بدراسة الحالة الخاصّة حيث $a = -1$ و $b = 1$. ولنتأمّل في هذه الحالة التابع المساعد $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ المعرّف بالعلاقة

$$h(x) = g(x) - g(-x) - \frac{x}{3}\big(g'(x) + 4g'(0) + g'(-x)\big) + \frac{x^5}{90} A$$

وقد جرى تعيين A بالشرط $h(1) = 0$.

لمّا كان h ينتمي إلى الصف C^1 على $[0,1]$ ويُحقِّق $h(0) = h(1) = 0$، فإنه يوجد، بمقتضى مبرهنة رول، عدد θ_1 ينتمي إلى $]0,1[$ ويحقِّق $h'(\theta_1) = 0$. ولكن

$$h'(x) = \frac{2}{3}\big(g'(x) - 2g'(0) + g'(-x)\big) - \frac{x}{3}\big(g''(x) - g''(-x)\big) + \frac{x^4}{18} A$$

فالتابع h' من الصف C^1 على $[0,1]$، ويُحقِّق $h'(0) = h'(\theta_1) = 0$، إذن يوجد، بمقتضى مبرهنة رول ذاتها، عددٌ θ_2 ينتمي إلى $]0,\theta_1[$ ويُحقّق $h''(\theta_2) = 0$. ولكن

$$h''(x) = \frac{1}{3}\big(g''(x) - g''(-x)\big) - \frac{x}{3}\big(g^{(3)}(x) + g^{(3)}(-x)\big) + \frac{2x^3}{9} A$$

ونلاحظ مجدّداً أنّ h'' من الصف C^1 على $[0,1]$، ويُحقِّق $h''(0) = h''(\theta_2) = 0$، إذن يوجد، بتطبيقٍ ثالث لمبرهنة رول، عدد θ_3 ينتمي إلى المجال $]0,\theta_2[$، ويُحقّق المساواة $h^{(3)}(\theta_3) = 0$. ولكن

$$h^{(3)}(x) = -\frac{x}{3}\left(g^{(4)}(x) + g^{(4)}(-x) - 2xA\right)$$

إذن

$$2A = \frac{g^{(4)}(\theta_3) - g^{(4)}(-\theta_3)}{\theta_3}$$

وأخيراً عند تطبيق مبرهنة التزايدات المحدودة على التابع

$$f : [0,\theta_3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = g^{(4)}(x) - g^{(4)}(-x)$$

نجد θ_4 ينتمي إلى المجال $]0,\theta_3[$، ويُحقّق $f(\theta_3) = \theta_3 f'(\theta_4)$. وهذا يكافئ

$$A = \frac{g^{(5)}(\theta_4) + g^{(5)}(-\theta_4)}{2} \in g^{(5)}([-\theta_4,\theta_4]) \subset g^{(5)}(]-1,+1[)$$

أي توجد θ تنتمي إلى $]-1,+1[$ تُحقّق $A = g^{(5)}(\theta)$. والشرط $h(1) = 0$ الذي يعيِّن A يكافئ

$$g(1) - g(-1) = \frac{1}{3}\left(g'(1) + 4g'(0) + g'(-1)\right) - \frac{1}{90}g^{(5)}(\theta)$$

وهي العلاقة المطلوبة في الحالة الخاصّة حيث $a = -1$ و $b = 1$.

أمّا لإثبات الحالة العامّة، فيكفي أنّ نطبّق ما سبق على التابع الآتي:

$$k : [-1,+1] \to \mathbb{R}, \quad k(x) = g\left(\frac{a+b}{2} + x\frac{b-a}{2}\right) \qquad \square$$

تُصاغ هذه النتيجة عادة على الوجه التالي الذي يتطلّب دراية برمز التكامل المحدود ويمكن تأجيلها إلى حين دراسة بحث التكامل المحدود.

4-8. نتيجة. ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{R}^2$ يُحقِّق $a < b$، وليكن $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^4 على المجال $[a,b]$. عندئذ يوجد في المجال $]a,b[$ عنصر c يُحقِّق

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{6}\left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)\right) - \frac{(b-a)^5}{2880}g^{(4)}(c)$$

وتعدُّ هذه العلاقة أساس **طريقة سيمبسون** في الحساب العددي للتكاملات.

5. تغيّرات التوابع

نذكّر بأنّه إذا كان I مجالاً، رمز نا بالرمز $\overset{\circ}{I}$ إلى أكبر مجال مفتوح محتوى في I فمثلاً إذا كان I أحد المجالات $[a,b]$ أو $[a,b[$ أو $]a,b]$ أو $]a,b[$ كان $\overset{\circ}{I}=]a,b[$. وفيما يلي يمثّل الرمز I مجالاً غير خالٍ ولا يقتصر على نقطة واحدة.

5-1. مبرهنة. ليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. نفترض أنّ f مستمرٌّ على المجال I، وقابلٌ للاشتقاق على $\overset{\circ}{I}$، وكذلك نفترض أنّ $\forall x\in\overset{\circ}{I}, f'(x)=0$. عندئذ يكون f تابعاً ثابتاً على المجال I.

الإثبات

ليكن (x_1,x_2) عنصراً من I^2 يُحقّق $x_1<x_2$. بتطبيق مبرهنة التزايدات المحدودة نجد في $]x_1,x_2[$ عدداً c، يُحقّق $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c)=0$، إذن لقد أثبتنا أنّ

$$\forall(x_1,x_2)\in I^2,\quad f(x_1)=f(x_2)$$

فالتابع f ثابتٌ. ❐

ملاحظة. بتطبيق النتيجة السابقة على كلٍّ من الجزأين الحقيقي والتخيّلي للتابع f يمكننا أن نرى أنّ النتيجة السابقة تبقى صحيحة إذا كان f تابعاً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.

5-2. مبرهنة. ليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. نفترض أنّ f مستمرٌّ على المجال I وقابلٌ للاشتقاق على $\overset{\circ}{I}$. حتى يكون f متزايداً على I يلزم ويكفي أن يتحقّق الشرط

$$\forall x\in\overset{\circ}{I},\quad f'(x)\geq 0$$

الإثبات

- لنفترض أنّ f متزايد على I، وليكن x_0 عنصراً من $\overset{\circ}{I}$. لمّا كان

$$\forall x\in I\backslash\{x_0\},\quad \Delta_{f,x_0}(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$$

استنتجنا أنّ $f'(x_0)=\lim\limits_{x_0}\Delta_{f,x_0}\geq 0$.

- وبالعكس، ليكن (x_1, x_2) عنصراً من I^2 يُحقّق $x_1 < x_2$. بتطبيق مبرهنة التزايدات المحدودة نجد في $]x_1, x_2[$ عنصراً c، يُحقِّق
$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \geq 0$$
والتابع f متزايد على I. ❐

5-3. **نتيجة**. ليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. نفترض أنّ f مستمرٌّ على المجال I وقابلٌ للاشتقاق على $\overset{\circ}{I}$. حتى يكون f متناقصاً على I يلزم ويكفي أن يتحقَّق الشرط
$$\forall x \in \overset{\circ}{I}, \quad f'(x) \leq 0$$

5-4. **مبرهنة**. ليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. نفترض أنّ f مستمرٌّ على المجال I وقابلٌ للاشتقاق على $\overset{\circ}{I}$ ومطَّرد على I. حتى يكون f مطَّرداً تماماً، يلزم ويكفي ألاّ تحوي المجموعة $\{x \in I : f'(x) = 0\}$ مجالاً مفتوحاً غير خالٍ.

الإثبات

يكون f غير مطَّردٍ تماماً على I، إذا وفقط إذا وُجِدَ (α, β) في I^2 يُحقِّقان $\beta > \alpha$ و $f(\beta) = f(\alpha)$، ولمّا كان f مطّرداً فإنّ الشرط السابق يكافئ
$$\exists(\alpha, \beta) \in I^2, \ (\alpha < \beta) \wedge \Big(\forall x \in \,]\alpha, \beta[, \quad f(x) = f(\alpha)\Big)$$
وهذا يكافئ بمقتضى المبرهنة 5-1. ما يلي:
$$\exists(\alpha, \beta) \in I^2, \ (\alpha < \beta) \wedge \Big(\forall x \in]\alpha, \beta[, \quad f'(x) = 0\Big)$$
أو أنّ المجال المفتوح وغير الخالي $]\alpha, \beta[$ محتوى في $\{x \in I : f'(x) = 0\}$. ❐

5-5. **مبرهنة**. ليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. نفترض أنّ f قابلٌ للاشتقاق على I، ويحقِّق أحد الشرطين $\forall x \in I, f'(x) > 0$ أو $\forall x \in I, f'(x) < 0$. عندئذ يكون التطبيق
$$\tilde{f} : I \to f(I), x \mapsto f(x)$$
تقابلاً، ويكون تقابله العكسيّ $\tilde{f}^{-1}$ قابلاً للاشتقاق على $J = f(I)$ ويحقِّق مشتقُّه العلاقة
$$(\tilde{f}^{-1})' = \frac{1}{f' \circ \tilde{f}^{-1}}$$
وإذا كان f من الصّف C^n على I كان $\tilde{f}^{-1}$ من الصّف C^n على J.

الإثبات

التطبيق f مطَّردٌ تماماً استناداً إلى المبرهنة السابقة. ومن ثَمّ يكون $\tilde{f}$ تقابلاً ويكون J مجالاً في $\mathbb{R}$، وذلك بناءً على خواص التوابع المستمرّة. ونجد اعتماداً على المبرهنة 1-7. أنّ $\tilde{f}^{-1}$ قابلٌ للاشتقاق عند كلّ نقطة من J. وأنّ $(\tilde{f}^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ \tilde{f}^{-1}}$. ويتحقق القارئ بسهولة وبالتدريج على n من $\mathbb{N}^*$، أنّه إذا كان f من الصّف C^n على I كان $\tilde{f}^{-1}$ من الصّف C^n على J. ❐

5-6. تعريف. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$، وأخيراً ليكن a عنصراً من A.

- نقول إنّ f **يبلغ قيمة عظمى محليّاً** عند a إذا وفقط إذا
$$\exists V \in \mathbb{V}(a), \quad x \in V \cap A \Rightarrow f(x) \leq f(a)$$
- نقول إنّ f **يبلغ قيمة صغرى محليّاً** عند a إذا وفقط إذا
$$\exists V \in \mathbb{V}(a), \quad x \in V \cap A \Rightarrow f(x) \geq f(a)$$
- نقول إنّ f **يبلغ قيمة عظمى محليّاً بالمعنى الدقيق** عند a إذا وفقط إذا
$$\exists V \in \mathbb{V}(a), \quad (x \in V \cap A) \wedge (x \neq a) \Rightarrow f(x) < f(a)$$
- نقول إنّ f **يبلغ قيمة صغرى محليّاً بالمعنى الدقيق** عند a إذا وفقط إذا
$$\exists V \in \mathbb{V}(a), \quad (x \in V \cap A) \wedge (x \neq a) \Rightarrow f(x) > f(a)$$

5-7. مبرهنة أولر - Euler. ليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$، وليكن a عنصراً من $\overset{\circ}{I}$. لنفترض أنّ f قابلٌ للاشتقاق عند a، وأنّه **يبلغ قيمة حدّية** (أي عظمى أو صغرى) محليّاً عند a. عندئذ يكون $f'(a) = 0$.

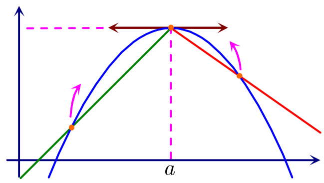
الإثبات

لنفترض أنّ f يأخذ قيمة عظمى محليّاً عند a. يوجد إذن ، بناءً على التعريف، عددٌ ε ينتمي إلى $\mathbb{R}_+^*$ يُحقِّق
$$x \in I \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\Rightarrow f(x) \leq f(a)$$

ولمّا كان

$$x \in I \cap \,]a-\varepsilon, a[\; \Rightarrow \Delta_{f,a}(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$$

استنتجنا، بأخذ النهاية عندما تسعى x إلى a بقيم أصغر من a، أنّ $f'(a) \geq 0$.



ومن جهة أخرى، لمّا كان

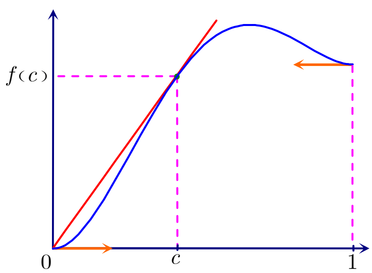
$$x \in I \cap \,]a, a+\varepsilon[\; \Rightarrow \Delta_{f,a}(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$$

فإننا نستنتج، بأخذ النهاية عندما تسعى x إلى a بقيم أكبر من a، أنّ $f'(a) \leq 0$. ومما سبق نجد $f'(a) = 0$ ، وهي النتيجة المرجوّة. ❐

8-5. تطبيق

ليكن $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^1 . يُحقِّق $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ عندئذ يوجد في المجال $]0,1]$ عددٌ c يُحقّق:

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}$$



الإثبات

في الحقيقة، إذا كان $f(1) = 0$ أمكن أن نأخذ $c = 1$ وينتهي الإثبات. إذن يمكننا أن نفترض $f(1) > 0$ ، على أن نستبدل التابع $(-f)$ بالتابع f إذا دعت الحاجة.

لنتأمّل التابع المستمرّ المعرّف على المجموعة المتراصّة $[0,1]$ كما يلي:

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} : g(x) = \begin{cases} f(x)/x & : \quad x \in \,]0,1] \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

لا بُدّ أن يبلغ g حدّه الأعلى عند نقطةٍ c من $[0,1]$، أي

$$g(c) = \max_{t\in[0,1]} g(t)$$

لنثبت أنّ $c \notin \{0,1\}$.

- إذا كان $c = 1$ رأينا أنّ

$$\begin{aligned} x \in \left]0,1\right[\quad &\Rightarrow \quad \frac{f(x)}{x} \le g(1) = f(1) \\ &\Rightarrow \quad f(x) - f(1) \le f(1)(x-1) \\ &\Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \ge f(1) \end{aligned}$$

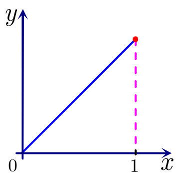
وإذا جعلنا x تسعى إلى 1، وصلنا إلى التناقض $0 = f'(1) \ge f(1) > 0$. إذن لا بُدّ أن يكون $c \ne 1$.

- ومن جهة أخرى، نلاحظ أنّ $g(1) = f(1) > 0 = g(0)$ إذن $c \ne 0$.

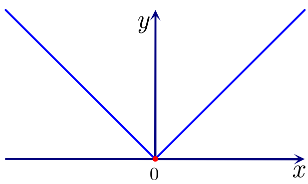
لمّا كان التابع g يبلغ قيمة عظمى محلياً عند c وهي نقطة من المجال $\left]0,1\right[$، ولمّا كان g قابلاً للاشتقاق على $\left]0,1\right[$، وجب أن يكون $g'(c) = 0$، وهذه النتيجة تكافئ العلاقة المطلوبة.

5-9. ملاحظات

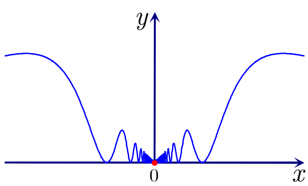
- إذا كان في المبرهنة السابقة العدد a عنصراً من $I \setminus \mathring{I}$، أصبحت نتيجتها خاطئة. كما يبيِّن مثال التابع $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x$، الذي يبلغ قيمة عظمى محلياً عند $a = 1$.



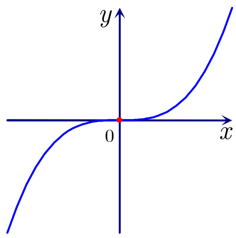
- يمكن أن يبلغ تابعٌ قيمة عظمى أو صغرى محلّياً عند a من $\mathring{I}$ دون أن يكون قابلاً للاشتقاق عند a. كما يبيِّن مثال التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ الذي يبلغُ قيمة صغرى محليّاً عند $a = 0$.



- يمكن أن يبلغ تابعٌ قيمة عظمى أو صغرى محليّاً عند a من $\mathring{I}$، دون أن يقبل الاشتقاق لا من اليمين ولا من اليسار عند a. كما يبيِّن مثال التابع التالي عند $a = 0$.



$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} |x| \sin^2(1/x) & : \quad x \ne 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$$



- لا يقتضي انعدام المشتق عند a من $\overset{\circ}{I}$، أنّ التابع f يبلغ قيمة عظمى أو صغرى محليّاً عند a. كما يبيّن مثال التابع المألوف $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x^3$، الذي ينعدم مشتقُّه عند $a=0$ دون أن يقبل قيمة عظمى أو صغرى محليّاً عند 0.

6. التوابع المحدّبة

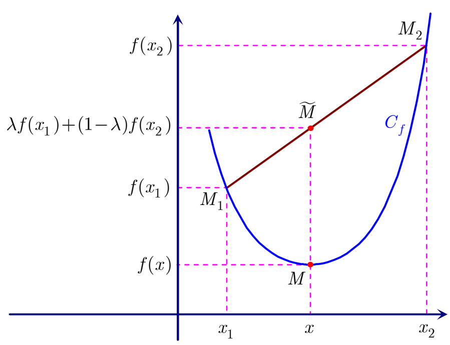
6-1. تعريف. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$. نقول إنّ التابع $f:I\to\mathbb{R}$ **محدّبٌ** إذا وفقط إذا، مهما يكن (x_1,x_2) من I^2، ومهما يكن λ من $]0,1[$، تحقّقت المتراجحة :

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

ونقول إنه **مقعّرٌ** إذا وفقط إذا كان $-f$ محدّباً.

المعنى الهندسي للتحدُّب :

فإذا رمزنا بالرمز x إلى $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$، وكانت M_1 هي النقطة $(x_1,f(x_1))$، و M_2 هي النقطة $(x_2,f(x_2))$، وأخيراً كانت M هي النقطة $(x,f(x))$، كانت M_1 و M و M_2 نقاط الخط البياني C_f للتابع f الموافقة للقيم x_1 و x و x_2.



ومن ثَمّ يكون التابع f محدّباً، إذا وفقط إذا كان كلُّ وتر واصل بين نقطتين M_1 و M_2 من المنحني C_f واقعاً فوق جميع النقاط M من المنحني C_f الواقعة بين M_1 و M_2.

2-6. مبرهنة. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن f تابعاً محدّباً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. عندئذ أياً كانت n من $\mathbb{N}^*$ وأياً كانت $(x_1,\ldots,x_n)$ من I^n، وأياً كانت $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ من $(\mathbb{R}_+)^n$ بحيث $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 1$، تتحقق المتراجحة

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)$$

الإثبات

يجري الإثبات بالتدريج على n. حالة $n = 1$ واضحة، وحالة $n = 2$ هي تعريف التوابع المحدّبة.

لنفترض صحّة النتيجة عند قيمة n. وليكن $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1})$ عنصراً من $(\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$ يُحقّق $\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k = 1$، وليكن $(x_1,\ldots,x_{n+1})$ عنصراً من I^{n+1}. لنضع $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = \mu$، ولنعرّف $\mu_k = \dfrac{\lambda_k}{\mu}$ في حالة k من $\{1,\ldots,n\}$. فيكون

$$\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k = \mu\sum_{k=1}^{n}\mu_k x_k + (1-\mu)\,x_{n+1}$$

ومنه

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right) \leq \mu f\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k x_k\right) + (1-\mu)\,f(x_{n+1})$$

بمُقتضى فرْض التدريج

$$\leq \mu\sum_{k=1}^{n}\mu_k f(x_k) + (1-\mu)\,f(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f(x_k)$$

وهو المطلوب إثباته. □

3-6. مبرهنة. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. إنّ الخاصّتين التاليتين متكافئتان:

① التابع f محدّبٌ.

② أيّاً كان a من I، كان تابع نسبة التغيّر الآتي

$$\Delta_{f,a} : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

متزايداً.

الإثبات

① ⇐ ② لتكن a من I ، ولنتأمّل عنصراً (x,y) من $(I\backslash\{a\})^2$ يُحقّق $x<y$. سنناقش الحالات الآتية:

■ **حالة** $x<y\le a$. عندئذ يكون $y=\lambda x+(1-\lambda)a$ حيث $\lambda=\dfrac{a-y}{a-x}$ ، وهو عنصر من المجال $[0,1]$. ومن ثمّ

$$f(y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(a)$$

أو

$$f(y)-f(a)\le\lambda(f(x)-f(a))$$

وهذا يقتضي أنّ $\Delta_{f,a}(x)\le\Delta_{f,a}(y)$.

■ **حالة** $a\le x<y$. عندئذ يكون $x=\lambda y+(1-\lambda)a$ حيث $\lambda=\dfrac{x-a}{y-a}$ ، وهو عنصر من المجال $[0,1]$. ومن ثمّ

$$f(x)\le\lambda f(y)+(1-\lambda)f(a)$$

أو

$$f(x)-f(a)\le\lambda(f(y)-f(a))$$

وهذا يقتضي مجدّداً أنّ $\Delta_{f,a}(x)\le\Delta_{f,a}(y)$.

■ **حالة** $x<a<y$. عندئذ يكون $a=\lambda x+(1-\lambda)y$ حيث $\lambda=\dfrac{y-a}{y-x}$ ، وهو عنصر من المجال $[0,1]$. ومن ثمّ

$$f(a)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

أو

$$0\le(y-a)(f(x)-f(a))+(a-x)(f(y)-f(a))$$

أو

$$-(y-a)(f(x)-f(a))\le(a-x)(f(y)-f(a))$$

وهذا يقتضي أيضاً أنّ $\Delta_{f,a}(x)\le\Delta_{f,a}(y)$.

وهكذا نكون قد أثبتنا تزايد التابع $\Delta_{f,a}$.

② ⇐ ① ليكن (x,y) عنصراً من I^2، يمكننا أن نفترض $x < y$ دون الإقلال من عموميّة الإثبات. ليكن λ عنصراً من $]0,1[$، ولنضع تعريفاً $z = \lambda x + (1-\lambda) y$، فيكون $x < z < y$. و لمّا كان التابع $\Delta_{f,z}$ متزايداً على $I\backslash\{z\}$، كان $\Delta_{f,z}(x) \leq \Delta_{f,z}(y)$ ومنه

$$\frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

وهذا يُكافئ على التوالي

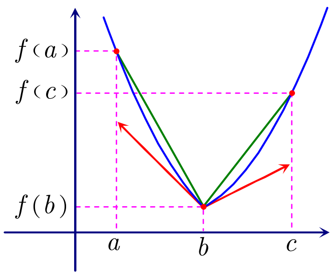
$$-\frac{f(x)-f(z)}{(1-\lambda)(y-x)} \leq \frac{f(y)-f(z)}{\lambda(y-x)}$$

$$0 \leq (1-\lambda)(f(y)-f(z)) + \lambda(f(x)-f(z))$$

$$f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

فالتابع f محدّبٌ. ❐

4-6. **مبرهنة**. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن f تابعاً محدّباً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. عندئذ يكون f قابلاً للاشتقاق من اليمين ومن اليسار عند كلّ نقطة b من $\overset{\circ}{I}$، وعندئذ أيّاً كان (a,b,c) من I^3، يُحقّق $a < b < c$، كان



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b^-) \leq f'(b^+) \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

الإثبات

لمّا كان تابع نسبة التغير $\Delta_{f,b}^- : I \cap \left]-\infty, b\right[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$ متزايداً ومحدوداً من الأعلى بالعدد $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$، وذلك بمقتضى المبرهنة السابقة، كانت النهاية $\lim\limits_{b} \Delta_{f,b}^-$ موجودة وتساوي الحدّ الأعلى للتابع $\Delta_{f,b}^-$، فالتابع f قابل للاشتقاق من اليسار عند b، وتتحقّق المتراجحة

$$\forall x \in I \cap \left]-\infty, b\right[, \quad \Delta_{f,b}^-(x) \leq f'(b^-)$$

وبوجه خاص

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b^+)$$

وبأسلوب مماثل يكون التابع

$$\Delta_{f,b}^+ : I \cap \left]b,+\infty\right[\rightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

متزايداً ومحدوداً من الأدنى بالعدد $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ وذلك بناءً على المبرهنة السابقة. إذن النهاية $\lim\limits_{b} \Delta_{f,b}^+$ موجودة وتساوي الحدّ الأدنى للتابع $\Delta_{f,b}^+$، فالتابع f قابل للاشتقاق من اليمين عند b، وتتحقّق المتراجحة

$$\forall x \in I \cap \left]b,+\infty\right[, \quad \Delta_{f,b}^+(x) \geq f'(b^+)$$

وبوجه خاص

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b} \geq f'(b^+)$$

وأخيراً لـمّا كان $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ عنصراً قاصراً عن جميع قيم التابع $\Delta_{f,b}^+$ فإننا نستنتج أنّ

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} \leq f'(b^+)$$

وهذه المتراجحة صحيحة أياً كان العنصر a من I الذي يُحقّق $a < b$، فإذا جعلنا a تسعى إلى b بقيم أصغر تماماً من b وجدنا $f'(b^-) \leq f'(b^+)$. وبذلك يتم الإثبات. □

5-6. نتيجة. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن f تابعاً محدّباً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. عندئذ يكون f مستمراً على $\overset{\circ}{I}$.

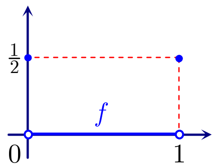
الإثبات

إذا كان f تابعاً محدّباً على المجال I، كان قابلاً للاشتقاق من اليمين ومن اليسار عند كلّ نقطة من $\overset{\circ}{I}$، وكان، من ثَمّ، مستمراً عند كلّ واحدة من هذه النقاط. ❐

6-6. ملاحظات

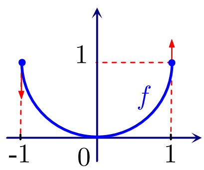
- ❖ يمكن لتابع f أن يكون محدّباً على $[a,b]$ دون أن يكون مستمراً عند a أو عند b كما يبيّن المثال التالي:

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}\frac{1}{2} & : \ x\in\{0,1\}\\ 0 & : \ x\notin\{0,1\}\end{cases}$$



- ❖ يمكن لتابع f أن يكون محدّباً و مستمراً على $[a,b]$ دون أن يكون قابلاً للاشتقاق عند a أو عند b كما يبيّن المثال التالي:

$$f:[-1,+1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto 1-\sqrt{1-x^2}$$



7-6. مبرهنة. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن f من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ تابعاً قابلاً للاشتقاق على I. عندئذ هناك تكافؤ بين الخاصّتين:

① التابع f محدّبٌ.

② التابع المشتق f' متزايدٌ.

الإثبات

لنفترض أنّ f تابع محدّب، وليكن (a,b) عنصراً من I^2 يُحقّق $a<b$. عندئذ نجد بناءً على المبرهنة 4-6. أنّ :

$$f'(a)\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq f'(b)$$

فالتابع f' متزايدٌ.

وبالعكس، لنفترض أنّ f' متزايدٌ. وليكن (a,b) عنصراً من I^2 يُحقّق $b > a$. نعرّف التابع $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ بالصيغة :

$$\lambda \mapsto \varphi(\lambda) = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) - f(\lambda a + (1-\lambda)b)$$

فنلاحظ أنّ $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$، وأنّ φ قابل للاشتقاق ومشتقه يُعطى بالصيغة التالية :

$$\varphi'(\lambda) = f(a) - f(b) - (a-b)f'(\lambda a + (1-\lambda)b)$$

فالتابع φ' متناقص على المجال $[0,1]$. وبتطبيق مبرهنة التزايدات المحدودة يوجد في $]a,b[$ عددٌ c يُحقّق :

$$f(a) - f(b) = (a-b)f'(c)$$

ومنه

$$\varphi'(0) = (b-a)(f'(b) - f'(c)) \geq 0$$

و

$$\varphi'(1) = (b-a)(f'(a) - f'(c)) \leq 0$$

نستنتج إذن أنّه يوجد في المجال $[0,1]$ عددٌ θ ينعدم عنده التابع φ' وهذا ما يُعطي للتابع φ جدول التحولات الآتي :

λ	0		θ		1
φ'		$+$		$-$	
φ	0	$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	0

ومنه $\forall \lambda \in [0,1], \quad \varphi(\lambda) \geq 0$. والتابع f محدّبٌ. ❐

إنّ الخاصة التالية نتيجة واضحة مما سبق.

6-8. مبرهنة. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ قابلاً للاشتقاق مرّتين على I. عندئذ تكون الخاصتان التاليتان متكافئتين:

① التابع f محدّبٌ.

② $\forall x \in I,\ f''(x) \geq 0$.

9-6. أمثلة

❖ لمّا كان المشتق الثاني للتابع $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto -\ln(1+x)$ موجباً تماماً فإننا نستنتج أنّ التابع

$$\tilde{\Delta}_{f,0} : \left]-1,+\infty\right[\to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & : \quad x \neq 0 \\ -1 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

متزايدٌ، أو أنّ التابع الآتي متناقصٌ

$$\varphi :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & : \quad x \neq 0 \\ 1 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

▫ لتكن إذن (x,y) من $\mathbb{R}_+^{*2}$، عندئذ يكون

$$\frac{x}{y} > 0 > -\frac{x}{x+y} > -1$$

ومن ثَمّ

$$-\frac{x+y}{x}\ln\left(1-\frac{x}{x+y}\right) \geq 1 \geq \frac{y}{x}\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$$

أو

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)^{(x+y)/x} \geq e \geq \left(1+\frac{x}{y}\right)^{y/x}$$

ومنه

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad \left(1+\frac{x}{y}\right)^{x+y} \geq e^x \geq \left(1+\frac{x}{y}\right)^{y}$$

وبوجه خاص نجد المتراجحة

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq e \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

▫ ونجد فيما يلي تطبيقاً آخر على ما أثبتناه. في حالة $0 < x \leq \frac{1}{2}$، لدينا $-x \geq x-1$. وإذا استفدنا من تناقص التابع φ كتبنا

$$\frac{\ln(1-x)}{-x} \leq \frac{\ln x}{x-1}$$

وهذا يُكافئ

$$0 \leq \ln x \times \ln'(1-x) + \ln(1-x) \times \ln' x$$

وعلى هذا نكون قد أثبتنا أنّ التابع $x \overset{\psi}{\mapsto} \ln x \ln(1-x)$ المعرّف على $]0,1[$ متزايدٌ على المجال $]0,\frac{1}{2}]$، ولأنّ $\psi(x) = \psi(1-x)$ استنتجنا أنّ ψ متناقصٌ على $[\frac{1}{2},1[$، وهكذا تكون $\psi(\frac{1}{2})$ أكبر قيمة يبلغها التابع ψ على المجال $]0,1[$. إذن لقد استفدنا من التحدّب لإثبات المتراجحة الآتية:

$$\forall x \in]0,1[, \qquad 0 < \ln x \ln(1-x) \leq \ln^2 2$$

❖ لتكن $(a_1,\ldots,a_n)$ من $\mathbb{R}_+^{*n}$، نعرف المتوسّطَين الحسابي والهندسي لهذه الأعداد بأنهما على التوالي :

$$A(a_1,\ldots,a_n) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

و

$$G(a_1,\ldots,a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

نهدف في هذا المثال إلى إثبات المتراجحة :

$$G(a_1,\ldots,a_n) \leq A(a_1,\ldots,a_n)$$

لمّا كان التابع $f : \ ]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto -\ln x$ محدّباً لأنّ مشتقه الثاني موجب تماماً، استنتجنا أنه، أياً كان العنصر $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ من $(\mathbb{R}_+)^n$ الذي يُحقّق $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$، فلدينا المتراجحة

$$-\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) \leq -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ln a_k$$

أو

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \geq \prod_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k}$$

ونحصل على المتراجحة المطلوبة بأخذ $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$.

تمرينات

التمرين 1. هل يقبل التابع $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos\sqrt{x}$ الاشتقاق عند الصفر؟

الحل

الجواب هو نعم لأنّ

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\sqrt{x}/2)}{\sqrt{x}/2}\right)^2 \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\frac{1}{2}$$

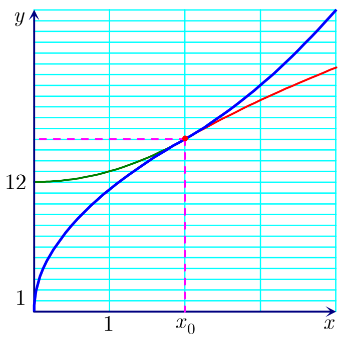
وعليه فالتابع f يقبل الاشتقاق عند 0 ومشتقّه $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

التمرين 2. عيّن (a, x_0) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ حتى يكون التابع

$$f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} a\sqrt{x} & : x \in]0, x_0[\\ x^2+12 & : x \in]x_0, +\infty[\end{cases}$$

من الصف C^1 على $]0,+\infty[$.

الحل



يُكافئ شرط استمرار f عند x_0 أن يكون :

$$x_0^2 + 12 = a\sqrt{x_0}$$

أمّا قابليّة اشتقاقه عند هذه النقطة فتُكافئ $2x_0 = \frac{a}{2\sqrt{x_0}}$،

أو

$$4x_0^2 = a\sqrt{x_0}$$

وبالحل المشترك لجملة هاتين المعادلتين نجد $(a, x_0) = (8\sqrt{2}, 2)$. وهذا هو المطلوب.

التمرين 3. أثبت أنّ التابع

$$g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{6}\left(|x+2|^3 - |x|^3\right)$$

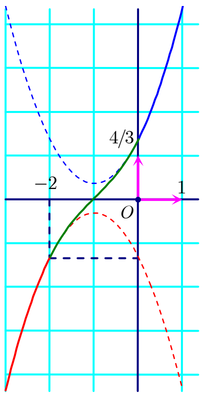
ينتمي إلى الصف C^2 على $\mathbb{R}$. ثم ارسم خطّه البياني.

الحل

نلاحظ بسهولة أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}-x^2-2x-\frac{4}{3} & : \quad x<-2\\ \frac{1}{3}x^3+x^2+2x+\frac{4}{3} & : \quad -2\le x<0\\ x^2+2x+\frac{4}{3} & : \quad 0\le x\end{cases}$$

إذن نستنتج مباشرة أنّ



$$\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=\begin{cases}-2x-2 & : \quad x<-2\\ x^2+2x+2 & : \quad -2\le x<0\\ 2x+2 & : \quad 0\le x\end{cases}$$

وكذلك أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g''(x)=\begin{cases}-2 & : \quad x<-2\\ 2x+2 & : \quad -2\le x<0\\ 2 & : \quad 0\le x\end{cases}$$

فالتابع g ينتمي إلى الصف C^2 على $\mathbb{R}$ ولكنّه لا ينتمي إلى الصف C^3، لأنّ g'' لا يقبل الاشتقاق عند 0 أو -2. ■

التمرين 4. احسب المشتقات من المرتبة n للتوابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرّفة بالعلاقات الآتية:

$$f(t)=e^{t\sqrt{3}}\sin t,\quad f(t)=(1+3t-t^2)e^t,$$
$$f(t)=t^{n-1}e^t,\qquad f(t)=\cos^3 t\sin^2 t.$$

الحل

- بملاحظة أنّ $f(t)=\operatorname{Im}(e^{(\sqrt{3}+\mathrm{i})t})$ نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}f^{(n)}(t)&=\operatorname{Im}((e^{(\sqrt{3}+\mathrm{i})t})^{(n)})\\&=\operatorname{Im}((\sqrt{3}+\mathrm{i})^n e^{(\sqrt{3}+\mathrm{i})t})\end{aligned}$$

ولمّا كان

$$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^n = 2^n \exp\left(\frac{\mathrm{i}\,\pi n}{6}\right)$$

استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) &= \operatorname{Im}\left(2^n \exp\left(\frac{\mathrm{i}\,\pi n}{6}\right)\exp((\sqrt{3}+\mathrm{i})t)\right) \\ &= 2^n e^{\sqrt{3}t} \sin\left(t+\frac{\pi n}{6}\right) \end{aligned}$$

- لنتأمّل التابع $f(t)=(1+3t-t^2)e^t$ ، بتطبيق علاقة لايبنتز نجد أنّ

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1+3t-t^2)^{(k)} e^t \\ &= e^t \sum_{k=0}^{2} C_n^k (1+3t-t^2)^{(k)} \\ &= e^t \left((1+3t-t^2)+n(1+3t-t^2)'+\frac{n(n-1)}{2}(1+3t-t^2)''\right) \\ &= e^t \big((1+3t-t^2)+n(3-2t)-n(n-1)\big) \\ &= \Big((1+4n-n^2)+(3-2n)t-t^2\Big)\cdot e^t \end{aligned}$$

- لنتأمّل التابع $f(t)=t^{n-1}e^t$ ، بتطبيق علاقة لايبنتز نجد أنّ

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (t^{n-1})^{(k)} e^t \\ &= e^t \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} t^{n-1-k} \\ &= e^t \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(n-1)!}{(k-1)!} t^{k-1} \end{aligned}$$

▪ لنتأمّل التابع $f(t)=\cos^3 t\sin^2 t$ ، نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{4}\cos t\sin^2 2t = \frac{1}{8}(1-\cos 4t)\cos t \\ &= \frac{1}{8}\cos t - \frac{1}{16}\cos 5t - \frac{1}{16}\cos 3t \end{aligned}$$

وعليه يكون

$$f^{(n)}(t) = \frac{1}{8}\cos\left(t+\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{3^n}{16}\cos\left(3t+\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{5^n}{16}\cos\left(5t+\frac{\pi n}{2}\right)$$

بذا يتم الإثبات. ■

التمرين 5. لتكن α من $\mathbb{R}$ ، وليكن التابع

$$f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha \ln x$$

أثبت أنّه مهما تكن n من $\mathbb{N}$ ، يوجدْ (a_n, b_n) في $\mathbb{R}^2$ يُحقّق

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f_\alpha^{(n)}(x) = x^{\alpha-n}(a_n\ln x + b_n)$$

واحسب a_n و b_n بدلالة n.

الحل

بتطبيق علاقة لايبنتز نجد أنّ

$$\begin{aligned} f_\alpha^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^\alpha)^{(k)}(\ln x)^{(n-k)} \\ &= (x^\alpha)^{(n)}\ln x + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (x^\alpha)^{(k)}(\ln x)^{(n-k)} \\ &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\ln x \\ &\qquad + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}\,\frac{(-1)^{n-k+1}(n-k)!}{x^{n-k}} \\ &= x^{\alpha-n}\left(n!\,C_\alpha^n \ln x - n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}(-1)^{n-k}\right) \\ &= n!\,x^{\alpha-n}\left(C_\alpha^n\ln x - (-1)^n\sum_{k=0}^{n-1} C_\alpha^k(-1)^k\right) \end{aligned}$$

حيث وضعنا

$$C_\alpha^m = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!}$$

وهذا يُعطي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 6. ليكن التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. أثبت أنه أياً كان n من $\mathbb{N}$ ، يوجد، في $\mathbb{R}[X]$ ، كثير حدود وحيد P_n درجته n يُحقِّق

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n\sqrt{1+x^2}}$$

2. أثبت أن المتتالية $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق العلاقات:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (1+X^2)P_n' - (2n+1)XP_n, \\ P_{n+1} + (2n+1)XP_n + n^2(1+X^2)P_{n-1} &= 0, \\ (1+X^2)P_n'' - (2n-1)XP_n' + n^2P_n &= 0 \end{aligned}$$

3. أوجد العلاقات التدريجية التي تفيد في تعيين أمثال كثير الحدود P_n .

الحل

1. النتيجة صحيحة في حالة $n = 0$ ، إذ يكون $P_0 = 1$. لنفترض صحّة النتيجة عند قيمة ما n ، فيكون

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (1+x^2)^{-n-1/2}P_n(x)$$

وبالاشتقاق نجد أنّ

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (-2n-1)x(1+x^2)^{-n-3/2}P_n(x) + (1+x^2)^{-n-1/2}P_n'(x) \\ &= (1+x^2)^{-n-3/2}(-(2n+1)xP_n(x) + (1+x^2)P_n'(x)) \\ &= \frac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

وقد عرّفنا P_{n+1} بالصيغة

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - (2n+1)\,x\,P_n(x)$$

أو

$$P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - (2n+1)\,XP_n \qquad (1)$$

وإذا افترضنا أنّ $\deg P_n = n$، وأنّ الحدّ المسَيْطِر في P_n هو a_nX^n فإنّ العلاقة السابقة تبيِّن أنّ $\deg P_{n+1} = n+1$ وأنّ الحدّ المسيطر في P_{n+1} هو

$$a_{n+1}X^{n+1} = -(n+1)a_nX^{n+1}$$

نستنتج إذن، بالتدريج على n، أنّ $\deg P_n = n$ وأنّ الحدّ المسيطر في P_n هو $(-1)^n n!\,X^n$.

2. لمّا كان $f'(x) = \dfrac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ استنتجنا أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)f'(x) = -x\,f(x)$$

فإذا اشتققنا طرفي هذه المساواة $n \geq 1$ مرّة واستفدنا من علاقة لايبنتز وجدنا

$$\begin{aligned}(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x)\\ = -xf^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)\end{aligned}$$

أو أياً كانت x من $\mathbb{R}$:

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + (2n+1)\,x\,f^{(n)}(x) + n^2f^{(n-1)}(x) = 0$$

وبالعودة إلى تعريف كثيرات الحدود $(P_n)_{n\in\mathbb{R}}$ نستنتج أنّ

$$(2) \qquad \forall n \geq 1, \quad P_{n+1} + (2n+1)\,X\,P_n + n^2(1+X^2)P_{n-1} = 0$$

وبمُقارنة هذه النتيجة بالعلاقة (1) نجد

$$(3) \qquad \forall n \geq 1, \quad P_n' = -n^2P_{n-1}$$

فإذا اشتققنا العلاقة (1) مرّة واحدةً ثمّ استبدلنا $-(n+1)^2P_n$ بكثير الحدود P_{n+1}' وذلك استناداً إلى العلاقة (3) استنتجنا أنّ

$$(4) \qquad \forall n \geq 0, \quad (1+X^2)P_n'' - (2n-1)X\,P_n' + n^2P_n = 0$$

3. لنفترض أنّ $P_n = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$، فيكون لدينا بالتعويض في العلاقة السابقة:

$$\sum_{k\geq 0}(k+2)(k+1)b_{k+2}X^k + \sum_{k\geq 0}k(k-1)b_kX^k \\ -(2n-1)\sum_{k\geq 0}kb_kX^k + n^2\sum_{k\geq 0}b_kX^k = 0$$

أو

$$\sum_{k\geq 0}\Big((k+1)(k+2)b_{k+2} + (n-k)^2 b_k\Big)X^k = 0$$

وعليه يكون لدينا

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_{k+2} = -\frac{(n-k)^2}{(k+2)(k+1)}b_k$$

وإذا استفدنا من كوْن P_{2n} زوجياً، ومن كوْن P_{2n+1} فردياً، ومن العلاقة $b_n = (-1)^n n!$ استنتجنا أنّ

$$P_n(X) = \sum_{0\leq k\leq n/2}(-1)^{n-k}\frac{(n!)^2}{(n-2k)!\cdot(k!)^2}\cdot\frac{1}{4^k}X^{n-2k}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 7. ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تطبيقاً من الصف C^∞. أثبت أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

الحل

العلاقة صحيحة في حالة $n = 1$، لنفترض صحّتها عند قيمة ما للعدد n، عندئذ يكون

$$\begin{aligned}\left(x^n f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n+1)} &= \left(x\,x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n+1)} \\ &= x\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n+1)} + (n+1)\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}\end{aligned}$$

وبالاستفادة من فرض التدريج نجد

$$\begin{aligned}\left(x^n f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n+1)} &= x\left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' + (n+1)\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &\quad + (n+1)\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

وهذا يثبت الخاصّة المطلوبة في حالة $n+1$. ■

التمرين 8. ليكن a من $\mathbb{R}_+^*$، وليكن $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ تطبيقاً من الصف C^1 يحقّق

$$f(0)=0 \quad \text{و} \quad f(a)f'(a)<0$$

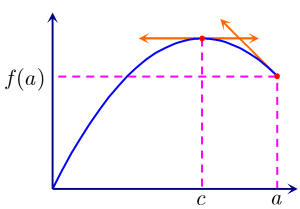
أثبت أنه يوجد في المجال $]0,a[$ عنصرٌ c يُحقّق $f'(c)=0$.

الحل

باستبدال $-f$ بالتابع f إذا دعا الأمر، يمكننا أن نفترض أنّ $f(a)>0$. فيكون $f'(a)<0$.
وهذا يقتضي وجود x_0 ينتمي إلى $]0,a[$ ويُحقّق

$$x_0<x<a \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0 \Rightarrow f(a)<f(x)$$

إذن يوجد في $]0,a[$ عنصر $\tilde{x}$ يُحقّق



$$0=f(0)<f(a)<f(\tilde{x})$$

ومن ثَمّ

$$\sup_{[0,a]} f > \max(f(0),f(a))$$

ولكنَّ التابع f تابع مستمرٌ على المجال المتراص $[0,a]$ فهو يبلغ حدّه الأعلى على هذا المجال، أي يوجد في المجال $[0,a]$ عنصر c يُحقّق $f(c) = \sup\limits_{[0,a]} f$.

ولمّا كان $f(c) > \max(f(0), f(a))$ استنتجنا أنّ $c \in]0,a[$. إذن النقطة c نقطة حرجة للتابع القابل للاشتقاق f ولا بُدّ أن ينعدم مشتقُّه عندها أي أن يكون $f'(c) = 0$. وهذه هي النتيجة المرجوّة.

التمرين 9. لتكن a من $\mathbb{R}$، وليكن $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ تطبيقاً مستمراً وقابلاً للاشتقاق على $]a,+\infty[$. نفترض أنّ $f(a) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، أثبت وجود عنصر c ينتمي إلى المجال $]a,+\infty[$ يُحقّق $f'(c) = 0$.

الحل

لنتأمّل التابع

$$h : [0,1] \to h(x) = \begin{cases} f\left(a + \dfrac{x}{1-x}\right) & : \quad 0 \le x < 1 \\ f(a) & : \quad x = 1 \end{cases}$$

إنّ h تابعٌ مستمرٌ وقابل للاشتقاق على $[0,1[$. ثُمّ إنّ

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = f(a) = h(1)$$

إذن التابع h هو تابع مستمر على المجال المتراصّ $[0,1]$ وقابل للاشتقاق على $]0,1[$ ويُحقّق $h(0) = h(1)$. وعملاً بمبرهنة رول يوجد في $]0,1[$ عنصرٌ c_0 يُحقّق $h'(c_0) = 0$.

وهذا يثبتُ أنّ $f'(c) = 0$ حيث $c = a + \dfrac{c_0}{1-c_0}$. بذا يتم الإثبات.

التمرين 10. ليكن $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ قابلاً للاشتقاق. نفترض أنّ $f'(0) < 0 < f'(1)$. أثبت أنه يوجد عددٌ c ينتمي إلى $]0,1[$ ويُحقّق $f'(c) = 0$. واستنتج أنّ صورة مجالٍ وفق مشتق تابعٍ قابلٍ للاشتقاق على هذا المجال هي مجالٌ أيضاً. تُعرف هذه الخاصّة باسم "مبرهنة داربو Darboux".

الحل

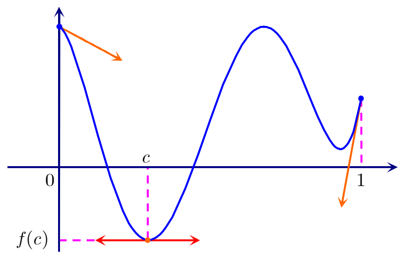
التابع f مستمرٌّ على المجال المتراصّ $[0,1]$. إذن يوجد في $[0,1]$ عنصرٌ c يُحقق $f(c)=\min\limits_{[0,1]} f$. ولمّا كان $f'(0)<0$ استنتجنا وجود α في $]0,1[$ يُحقّق $\dfrac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha}<0$ وعليه

$$f(c) \le f(\alpha) < f(0)$$

وكذلك لمّا كان $f'(1)>0$ استنتجنا وجود β في $]0,1[$ يُحقّق $\dfrac{f(1)-f(\beta)}{1-\beta}>0$ وعليه

$$f(c) \le f(\beta) < f(1)$$

نستنتج من ذلك أنّ $c \in]0,1[$، والنقطة c نقطة حرجة للتابع f، أي $f'(c)=0$.



لنتأمّل تابعاً $f: I \to \mathbb{R}$ قابلاً للاشتقاق. ولتكن (a,b) عنصراً من I^2 يُحقّق $f'(a)<f'(b)$، ولتكن γ عنصراً من $\left]f'(a),f'(b)\right[$. عندئذ نستفيد من التابع ψ الآتي:

$$\psi:[0,1]\to\mathbb{R},\ \psi(t)=\frac{f(a+t(b-a))}{b-a}-\gamma t$$

فيكون ψ قابلاً للاشتقاق على $[0,1]$، ويُحقّق مشتقّه المتراجحتين الآتيتين :

$$\psi'(0)=f'(a)-\gamma<0$$
$$\psi'(1)=f'(b)-\gamma>0$$

إذن يوجد، استناداً إلى ما سبق عنصر θ ينتمي إلى $]0,1[$ ويُحقّق $\psi'(\theta)=0$ ومن ثَمّ

$$f'(a+\theta(b-a))=\gamma$$

وهذا يُثبتُ أنّ $]f'(a),f'(b)[\subset f'(I)$.

لقد برهنّا أنّه مهما يكن العنصر (u,v) من $\left(f'(I)\right)^2$ يُحقّق $u<v$، يكن المجال $]u,v[$ محتوى في $f'(I)$، وهذا يُبرهنُ أنّ المجموعة $f'(I)$ مجال. ■

التمرين 11. ليكن $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً عند 0. نفترض أنّه توجد عددٌ c ينتمي إلى $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ تكون عنده النهاية $\lim\limits_{t\to0,t\neq0}\dfrac{f(ct)-f(t)}{t}$ موجودة. أثبت أنّ f قابل للاشتقاق عند 0.

الحل

لنفترض أوّلاً أنّ $c<1$، ولنعرّف $\lambda=\lim\limits_{t\to0,t\neq0}\dfrac{f(ct)-f(t)}{t}$. لتكن $\varepsilon>0$ عندئذ يوجد $\eta>0$ يُحقّق

$$0<t<\eta\Rightarrow\left|f(c\,t)-f(t)-t\lambda\right|\leq\varepsilon(1-c)\,t$$

ومنه، بتطبيق ما سبق على c^kt عوضاً عن t، نستنتج أنّ

$$\left.\begin{array}{c}0<t<\eta\\ k\in\mathbb{N}\end{array}\right\}\Rightarrow\Rightarrow\left|f(c^{k+1}t)-f(c^kt)-c^kt\lambda\right|\leq\varepsilon(1-c)c^kt$$

وبجمع هذه المتراجحات، من $k=0$ إلى $k=n-1$، نستنتج أيضاً أنّ

$$\left.\begin{array}{c}0<t<\eta\\ n\in\mathbb{N}^*\end{array}\right\}\Rightarrow\left|f(c^nt)-f(t)-t\lambda\sum_{k=0}^{n-1}c^k\right|\leq\varepsilon(1-c)\sum_{k=0}^{n-1}c^k\leq\varepsilon t$$

لأنّ $(1-c)\sum\limits_{k=0}^{\infty}c^k=1$. فإذا جعلنا n تسعى إلى اللانهاية وجدنا

$$0<t<\eta\Rightarrow\left|f(0)-f(t)-\frac{t\lambda}{1-c}\right|\leq\varepsilon t$$

إذن لقد أثبتنا

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ 0<t<\eta\Rightarrow\left|\frac{f(0)-f(t)}{t}-\frac{\lambda}{1-c}\right|\leq\varepsilon$$

وهذا يعني أنّ f قابل للاشتقاق عند 0 وأنّ $f'(0)=\dfrac{\lambda}{1-c}$.

أمّا في حالة $c > 1$، فإنّ الفرض، بوضع $u = ct$، يُكافئ

$$\lim_{u\to 0, u\neq 0} \frac{f(u/c)-f(u)}{u} = -\frac{\lambda}{c}$$

ولأنّ $1/c < 1$، استنتجنا من الحالة السابقة أنّ f قابلٌ للاشتقاق عند 0 وأنّ

$$f'(0) = \frac{-\lambda/c}{1-1/c} = \frac{\lambda}{1-c}$$

إذن في جميع الحالات، يكون f قابلاً للاشتقاق عند 0 ويكون

$$f'(0) = \frac{\lambda}{1-c}$$

وبذا يتمّ الإثبات. ■

التمرين 12. ليكن $f : [-a, +a] \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^2. أثبت أنه

$$\forall t \in [-a, +a], \quad \left|f'(t)\right| \leq \frac{\left|f(a)-f(-a)\right|}{2a} + \frac{a^2+t^2}{2a} \operatorname*{Sup}_{[-a,+a]} \left|f''\right|$$

الحل

لنضع بالتعريف $M_2 = \sup\limits_{[-a,a]} \left|f''\right|$. استناداً إلى متراجحة تايلور- لاغرانج يمكننا أن نكتبَ، أياً كانت t من $[-a, a]$، ما يأتي:

$$\left|f(t)-f(a)+f'(t)(a-t)\right| \leq \frac{M_2}{2}(a-t)^2$$

وكذلك

$$\left|f(t)-f(-a)-f'(t)(a+t)\right| \leq \frac{M_2}{2}(a+t)^2$$

وعليه يكون

$$\begin{aligned}
\left|f(a)-f(-a)-2af'(t)\right| &= \Big|\big(f(t)-f(-a)-f'(t)(a+t)\big) \\
&\qquad -\big(f(t)-f(a)+f'(t)(a-t)\big)\Big| \\
&\leq \left|f(t)-f(-a)-f'(t)(a+t)\right| \\
&\qquad +\left|f(t)-f(a)+f'(t)(a-t)\right|
\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}\left|f(a)-f(-a)-2af'(t)\right| &\le M_2\frac{(a-t)^2+(a+t)^2}{2}\\ &= M_2(a^2+t^2)\end{aligned}$$

أو

$$\left|\frac{f(a)-f(-a)}{2a}-f'(t)\right| \le M_2\frac{a^2+t^2}{2a}$$

ومنه

$$\left|f'(t)\right| \le \frac{\left|f(a)-f(-a)\right|}{2a}+M_2\frac{a^2+t^2}{2a}$$

وهذه هي المتراجحة المطلوبة.

ملاحظة : لقد أثبتنا أيضاً المتراجحة الآتية:

$$\sup_{[-a,a]}\left|f'\right| \le \frac{1}{a}\sup_{[-a,a]}\left|f\right| + a\sup_{[-a,a]}\left|f''\right|$$

وذلك مهما كان التابع $f:[-a,+a]\to\mathbb{R}$ من الصف C^2 .

التمرين 13. ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ تابعاً من الصف C^2، نفترض وجود عددٍ M يحقّق العلاقة : $\forall t\in\mathbb{R},\quad \left|f''(t)\right|\le M$.

1. أثبت أنّ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x)+yf'(x)+\frac{1}{2}y^2M\ge 0$.
2. استنتج أنّ $\forall x\in\mathbb{R},\quad \left|f'(x)\right|\le\sqrt{2Mf(x)}$.

الحل

1. ليكن (x,y) عنصراً من $\mathbb{R}^2$. نعلم استناداً إلى مبرهنة تايلور أنّه يوجد في $[0,1]$ عنصرٌ θ يُحقّق

$$f(x+y)=f(x)+y\,f'(x)+\frac{1}{2}y^2f''(x+\theta\,y)$$

ولكن $f(x+y) \geq 0$ و $f''(x+\theta\, y) \leq M$ إذن لا بُدَّ أن يكون

$$0 \leq f(x) + y\, f'(x) + \frac{1}{2} y^2 M$$

2. نستنتج مما سبق أنّ مميّز كثير الحدود من الدرجة الثانية $f(x) + Y\, f'(x) + \frac{1}{2} Y^2 M$ سالبٌ مهما تكن x من $\mathbb{R}$، أي $(f'(x))^2 - 2M\, f(x) \leq 0$، وعليه

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|f'(x)\right| \leq \sqrt{2M\, f(x)}$$

وهذا هو المطلوب.

التمرين 14. ليكن $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^1. أثبت أنّ

$$g(b) - g(a) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g'\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

الحل

لمّا كان g' مستمرّاً على المجال المتراصّ $[a,b]$ كان مستمراً بانتظام. لتكن إذن $\varepsilon > 0$ فيوجد $\eta > 0$ تُحقّق

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \quad \left|x - y\right| < \eta \Rightarrow \left|g'(x) - g'(y)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

لنعرّف $n_0 = 1 + \left\lfloor (b-a)/\eta \right\rfloor$، ولتكن $n \geq n_0$. ثُمّ لنعرّف $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ عندئذ :

$$\begin{aligned} g(b) - g(a) &= \sum_{k=0}^{n-1} \big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \big((x_{k+1} - x_k) g'(\xi_k)\big) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g'(\xi_k) \end{aligned}$$

حيث ξ_k عنصرٌ من $]x_k, x_{k+1}[$، عملاً بمبرهنة التزايدات المحدودة. وعليه يكون

$$g(b) - g(a) - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g'(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \big(g'(\xi_k) - g'(x_k)\big)$$

ولمّا كان $\eta > \frac{b-a}{n} \geq \left|x_k - \xi_k\right|$ أيّاً كانت k من $\{0,1,\ldots,n-1\}$، استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}\left|g(b)-g(a)-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g'(x_k)\right| &\leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|g'(\xi_k)-g'(x_k)\right|\\ &\leq \frac{b-a}{n}\cdot\frac{\varepsilon n}{b-a}=\varepsilon\end{aligned}$$

وهذا يُبرهنُ أنّ

$$g(b)-g(a)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g'\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\right)$$

وهو المطلوب إثباته. ■

التمرين 15. ليكن $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعاً متزايداً من الصف C^1، و $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ تابعاً قابلاً للاشتقاق عند 0، ويحقّق $f(0)=0$. أثبت أنّ

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{n}f\left(\frac{1}{n}g'\left(\frac{p}{n}\right)\right)=f'(0)\big(g(1)-g(0)\big).$$

تطبيق. ليكن $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ تابعاً قابلاً للاشتقاق عند 0، ويحقق $f(0)=0$.

احسب النهايتين

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{1}{n+k}\right) \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

الحل

لنعرّف $M=\sup_{[0,1]}\left|g'\right|$. ولتكن $0<\varepsilon$ عندئذ، بسبب قابليّة اشتقاق f عند 0 يوجد $0<\eta$ يُحقِّق :

$$0<x<\eta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x}-f'(0)\right|<\frac{\varepsilon}{M}$$

أو

$$0\leq x<\eta \Rightarrow \left|f(x)-f'(0)x\right|\leq\frac{\varepsilon}{M}x$$

فإذا عرّفنا $n_0 = 1 + \lfloor M/\eta \rfloor$، أصبح لدينا $0 \le \frac{1}{n} g'\left(\frac{p}{n}\right) < \eta$ وذلك مهما تكن $n_0 < n$، ومهما تكن p من $\{0,1,\ldots,n\}$. وعليه

$$\forall p \in \{0,1,\ldots,n\},$$
$$\left| f\left(\frac{1}{n} g'\left(\frac{p}{n}\right)\right) - f'(0)\left(\frac{1}{n} g'\left(\frac{p}{n}\right)\right)\right| \le \frac{\varepsilon}{M} \cdot \frac{1}{n} g'\left(\frac{p}{n}\right) \le \frac{\varepsilon}{n}$$

وبالجمع نجد، مهما تكن $n_0 < n$، أنّ

$$\left| \sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{1}{n} g'\left(\frac{p}{n}\right)\right) - f'(0) \cdot \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n} g'\left(\frac{p}{n}\right)\right| \le \varepsilon$$

أي إنّ

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{1}{n} g'\left(\frac{p}{n}\right)\right) - f'(0) \cdot \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n} g'\left(\frac{p}{n}\right)\right) = 0$$

ولكن، استناداً إلى التمرين السابق لدينا

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n} g'\left(\frac{p}{n}\right)\right) = g(1) - g(1)$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{1}{n} g'\left(\frac{p}{n}\right)\right)\right) = f'(0)\big(g(1) - g(0)\big)$$

وهي النتيجة المطلوبة.

باختيار $g(x) = x^2/2$ في الحالة الأولى، و $g(x) = \ln(1+x)$ في الحالة الثانية، نجد أنّه مهما يكن التابع $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ القابل للاشتقاق عند 0، والذي يُحقّق $f(0) = 0$، يكن :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{p}{n^2}\right)\right) = \frac{f'(0)}{2}$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+p}\right)\right) = f'(0) \cdot \ln 2$$

وبذا يتم إثبات المطلوب. ■

التمرين 16. ليكن $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ تابعاً قابلاً للاشتقاق، نفترض وجود عددٍ حقيقي ℓ يُحقّق $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)+f'(x)\big)=\ell$. أثبت أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.

الحل

لنضع بالتعريف:

$$g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) + f'(x)$$

لتكن $0 < \varepsilon$، ولنعرّف $\varepsilon' = \varepsilon/2$، عندئذ يوجد x_0 يُحقّق :

$$x_0 \le x \quad \Rightarrow \quad \ell - \varepsilon' \le g(x) \le \ell + \varepsilon'$$

ولأنّ $g(x) = e^{-x}(e^x f(x))'$ استنتجنا

$$x_0 \le x \quad \Rightarrow \quad \big(\ell - \varepsilon'\big)e^x \le \big(e^x f(x)\big)' \le \big(\ell + \varepsilon'\big)e^x$$

ينتج من ذلك أنّ التابعين التاليين متزايدان

$$A : \big[x_0, +\infty\big[\to \mathbb{R},\ A(x) = e^x f(x) - \big(\ell - \varepsilon'\big)e^x$$
$$B : \big[x_0, +\infty\big[\to \mathbb{R},\ B(x) = \big(\ell + \varepsilon'\big)e^x - e^x f(x)$$

فإذا عرّفنا

$$m = \min(A(x_0), B(x_0)) = \big(\varepsilon' - \big|\ell - f(x_0)\big|\big)e^{x_0}$$

استنتجنا أنّ

$$x_0 \le x \quad \Rightarrow \quad \big(\ell + \varepsilon'\big)e^x - e^x f(x) \ge m$$
$$x_0 \le x \quad \Rightarrow \quad e^x f(x) - \big(\ell - \varepsilon'\big)e^x \ge m$$

ومن ثَمّ

$$x_0 \le x \Rightarrow \ell - \varepsilon' + me^{-x} \le f(x) \le \ell + \varepsilon' - me^{-x}$$

وعليه، إذا عرّفنا $x_1 = \max\big(x_0, \ln\big(2\big|m\big|/\varepsilon\big)\big)$ كان لدينا

$$x_1 \le x \Rightarrow \ell - \varepsilon' - \varepsilon' \le f(x) \le \ell + \varepsilon' + \varepsilon'$$

أو

$$x_1 \le x \Rightarrow \big|f(x) - \ell\big| \le \varepsilon$$

وهذا يُثبتُ أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. ■

التمرين 17. ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{R}^2$ يُحقّق $a > b$، وليكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تطبيقاً من الصف C^1 على $[a,b]$ وقابلاً للاشتقاق مرتين على $]a,b[$. أثبت أنه، أيّاً كان x_0 من $]a,b[$، توجدْ c تنتمي إلى $]a,b[$ وتُحقّق

$$f(x_0) = f(a) + (x_0 - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} f''(c)$$

الحل

ليكن x_0 عنصراً من $]a,b[$، ولنتأمّل التابع $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ المعطى بالصيغة:

$$\psi(t) = f(t) - f(a) - (t - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \frac{(t - a)(t - b)}{2} A$$

إذ يتعيَّن الثابت A بالشرط $\psi(x_0) = 0$.

لمّا كان $\psi(a) = \psi(x_0) = \psi(b)$ استنتجنا، بتطبيق مبرهنة رول، أنّه يوجد عددان حقيقيّان c_1 من $]a, x_0[$ و c_2 من $]x_0, b[$ يُحقّقان $\psi'(c_1) = \psi'(c_2) = 0$. وبتطبيق مبرهنة رول من جديد على التابع المشتق ψ' نستنتج أنّه يوجد في $]c_1, c_2[$ عددٌ c يُحقّق $\psi''(c) = 0$. ولكن

$$\forall t \in\ ]a,b[,\quad \psi''(t) = f''(t) - A$$

وعليه $A = f''(c)$. إذن يوجد c ينتمي إلى $]a,b[$ يُحقّق

$$f(x_0) = f(a) + (x_0 - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} f''(c)$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 18. ليكن (a,h) عنصراً من $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$، وليكن $f : [a, a + h] \to \mathbb{R}$ تطبيقاً من الصف C^3 على $[a, a + h]$. أثبت أنه توجد θ في $]0,1[$ تُحقّق

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{2}\big(f'(a) + f'(a + h)\big) - \frac{h^3}{12} f'''(a + \theta h)$$

الحل

لنتأمّل التابع $\varphi : [0,h] \to \mathbb{R}$ المعطى بالصيغة:

$$\varphi(x) = f(a + x) - f(a) - \frac{f'(a + x) + f'(a)}{2} x + \frac{x^3}{12} A$$

إذ يتعيَّن الثابت A بالشرط $\varphi(h) = 0$.

لمّا كان $\varphi(0)=\varphi(h)=0$ استنتجنا بتطبيق مبرهنة رول أنّه يوجد c_1 ينتمي إلى $]0,h[$ يُحقّق $\varphi'(c_1)=0$. ولكن

$$\forall x\in]0,h[,\quad \varphi'(x)=\frac{1}{2}\big(f'(a+x)-f'(a)\big)-\frac{x}{2}f''(a+x)+\frac{x^2}{4}A$$

إذن $\varphi'(0)=0$ أيضاً. وبتطبيق مبرهنة رول مرّة ثانية على $[0,c_1]$ نستنتج أنّه يوجد c_2 ينتمي إلى $]0,c_1[$ يُحقّق $\varphi''(c_2)=0$. ولكن

$$\forall x\in]0,h[,\quad \varphi''(x)=-\frac{x}{2}f'''(a+x)+\frac{x}{2}A$$

إذن

$$A=f'''(a+c_2)=f'''(a+\theta h)$$

حيث $]0,1[\ni\theta=\frac{c_2}{h}$، والشرط $\varphi(h)=0$ يُكافئ :

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{2}\big(f'(a)+f'(a+h)\big)-\frac{h^3}{12}f'''(a+\theta h)$$

وهذا هو المُراد إثباته. ■

تطبيق

في حالة التابع

$$f:\left[1,1+\tfrac{1}{10}\right]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\ln x$$

نرى أنّ

$$\begin{aligned}\ln(1.1)&=\frac{1}{20}\left(1+\frac{10}{11}\right)-\frac{1}{12000}\cdot\frac{2}{(1+\theta/10)^3}\\&=\frac{21}{220}-\frac{1}{6000}\cdot\frac{1}{(1+\theta/10)^3}\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$0.000126<\frac{1}{6\times 11^3}<\frac{21}{220}-\ln(1.1)<\frac{1}{6\times 10^3}<0.000167$$

التمرين 19. ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{R}^2$ يُحقّق $a > b$، وليكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تطبيقاً من الصف C^2 على $[a,b]$ وقابلاً للاشتقاق ثلاث مرات على $]a,b[$. أثبت أنه يوجد عنصر c في $]a,b[$ يُحقّق

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\frac{b+a}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f'''(c)$$

الحل

لنتأمّل أوّلاً تابعاً فردياً $h : [-1,+1] \to \mathbb{R}$ من الصف C^2 وقابلاً للاشتقاق ثلاث مرّات على $]-1,+1[$. ولنبرهن أنّه يوجد في $]0,1[$ عنصرٌ θ يُحقّق $h(1) = h'(0) + \dfrac{h'''(\theta)}{6}$.

في الحقيقة، لنعرّف، على $[0,1]$ التابع

$$\psi(x) = h(x) - x\,h'(0) - \frac{x^3}{6}A$$

إذ يتعيّن الثابت A بالشرط $\psi(1) = 0$. فيكون التابع ψ تابعاً قابلاً للاشتقاق على المجال $[0,1]$ ويُحقّق $\psi(0) = \psi(1) = 0$. إذن يوجد استناداً إلى مبرهنة رول ثابتٌ c_1 ينتمي إلى المجال $]0,1[$ ويُحقّق $\psi'(c_1) = 0$ ، ولكن نتحقّق بسهولة أيضاً أنّ $\psi'(0) = 0$ إذن ينتج من تطبيق مبرهنة رول مرّة ثانية على التابع ψ' أنّه يوجد c_2 ينتمي إلى $]0,c_1[$ ويُحقّق $\psi''(c_2) = 0$ ، ولكنّ التابع h'' فرديٌ أيضاً إذن لا بُدّ أن يكون $\psi''(0) = 0$ وبتطبيق ثالث لمبرهنة رول نستنتج وجود θ في $]0,c_2[$ يُحقّق $\psi'''(\theta) = 0$ وهذا يُكافئ أنّ $A = h'''(\theta)$.
إذن الثابتُ A المعيَّن بالعلاقة $h(1) = h'(0) + A/6$ يساوي $h'''(\theta)$ حيث $\theta \in]0,1[$.
وهذا يبرهن صحّة الخاصة المذكورة آنفاً.

لنأتِ إلى تمريننا، ولنضع بالتعريف:

$$h : [-1,+1] \to \mathbb{R},\ h(x) = f\left(\tfrac{a+b}{2} + x\,\tfrac{b-a}{2}\right) - f\left(\tfrac{a+b}{2} - x\,\tfrac{b-a}{2}\right)$$

عندئذ يُحقِّق هذا التابع الخواص المذكورة في بداية هذا الحل، وعليه يوجد في المجال $]0,1[$ عنصرٌ θ يُحقّق $h(1) = h'(0) + h'''(\theta)/6$. وبالعودة إلى التابع f نرى أنّ هذا يكافئ ذلك وجود عددين α_1 و α_2 من $]a,b[$ يحقّقان المساواة الآتية:

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}\cdot\frac{f'''(\alpha_1) + f'''(\alpha_2)}{2}$$

ولكنّ التابع f''' يُحقّق مبرهنة القيمة الوسطى استناداً إلى نتيجة التمرين 10، إذن يوجد عدد c ينتمي إلى $]a,b[$ ويُحقّق

$$f'''(c) = \frac{f'''(\alpha_1) + f'''(\alpha_2)}{2}$$

وهذا يبرهن صحّة المساواة المطلوبة. ■

التمرين 20.

1. أثبت أنه يوجد في $\mathbb{R}[X]$ كثير حدود وحيد U من درجة أصغر أو تساوي 3 يحقّق
$$U(0) = 0, U(1) = 1, U'(0) = 0, U'(1) = 0$$
2. أثبت أنه يوجد في $\mathbb{R}[X]$ كثير حدود وحيد V من درجة أصغر أو تساوي 3 يحقّق
$$V(0) = 0, V(1) = 0, V'(0) = 0, V'(1) = 1$$
3. أثبت أن كل كثير حدود P من $\mathbb{R}[X]$ درجته أصغر أو تساوي 3 يحقّق
$$P(X) = P(1)U(X) + P'(1)V(X) + P(0)U(1-X) - P'(0)V(1-X)$$
4. ليكن $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ من الصف C^4. نعرّف P_f من $\mathbb{R}[X]$ بالعلاقة :
$$P_f(X) = f(1)U(X) + f'(1)V(X) + f(0)U(1-X) - f'(0)V(1-X)$$

① لتكن x من $]0,1[$، ولنعرّف التابع $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ من الصف C^4 بالعلاقة

$$\varphi(t) = f(t) - P_f(t) - \frac{t^2(1-t)^2}{24} A$$

إذ تتعيّن A بالشرط $\varphi(x) = 0$.

- أثبت أنه توجد t_1 في $]0,x[$، و t_2 في $]x,1[$ تُحقّقان
$$\varphi'(t_1) = \varphi'(t_2) = 0$$
- احسب $\varphi'(0)$ و $\varphi'(1)$. واستنتج أنه يوجد c في $]0,1[$ يحقّق
$$\varphi^{(4)}(c) = 0$$

② استنتج أن

$$\forall x \in [0,1],\ \left|f(x) - P_f(x)\right| \le \frac{x^2(1-x)^2}{24} \sup_{[0,1]} \left|f^{(4)}\right|$$

③ نضع $f(x) = \sqrt{1+3x}$. عيّن P_f وأعطِ قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{2}$ مع تحديد الخطأ المرتكب.

الحل

لنلاحظ أنّه إذا كان P كثير حدود حقيقي من درجة أصغر أو تساوي 3، وكان كثير الحدود P يُحقّق $P(0) = P'(0) = P(1) = P'(1) = 0$ عندئذ يكون $P = 0$. في الحقيقة تقتضي الشروط المذكورة أنّ كلّاً من 0 و 1 جذر مضاعف من المرتبة الثانية على الأقل لكثير الحدود P، أي إنّ كثير الحدود $X^2(X-1)^2$ وهو من الدرجة 4 يقسم P، وهذا يقتضي أنّ $P = 0$ لأنّ $\deg P \leq 3$. تُثبتُ هذه الخاصّة الفقرة المتعلّقة بالوحدانيّة في 1. و 2.

1. إنّ $U(X) = -2X^3 + 3X^2$ يُحقّق الشروط المطلوبة.

2. إنّ $V(X) = X^3 - X^2$ يُحقّق الشروط المطلوبة.

3. لنلاحظ أوّلاً أنّ

Q	$U(1-X)$	$U(X)$	$-V(1-X)$	$V(X)$
$Q(0)$	1	0	0	0
$Q(1)$	0	1	0	0
$Q'(0)$	0	0	1	0
$Q'(1)$	0	0	0	1

ليكن إذن P كثير حدود لا تزيد درجته على 3، ولنعرّف كثير الحدود

$$H(X) = P(X) - P(0)U(1-X) - P(1)U(X) + P'(0)V(1-X) - P'(1)V(X)$$

عندئذ نتحقّق بسهولة مستفيدين من الجدول السابق أنّ

$$H(0) = H'(0) = H(1) = H'(1) = 0$$

ولأنّ $\deg H \leq 3$ استنتجنا مباشرة استناداً إلى المقدّمة أنّ $H = 0$، وهي المساواة المطلوبة.

4.① لمّا كان $\varphi(0) = \varphi(x) = \varphi(1) = 0$، فإننا نجد بتطبيق مبرهنة رول مرّتين أنّه يوجد عددان t_1 من $]0,x[$ و t_2 من $]x,1[$ يُحقّقان $\varphi'(t_1) = \varphi'(t_2) = 0$، ولكن لدينا أيضاً من جهة أخرى أنّ $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$. إذن بتطبيق مبرهنة رول ثلاث مرّات توجد ثلاثة أعداد u_1 من $]0,t_1[$ و u_2 من $]t_1,t_2[$ و u_3 من $]t_2,1[$ تُحقّق

$$\varphi''(u_1) = \varphi''(u_2) = \varphi''(u_3) = 0$$

وبتطبيق مبرهنة رول مجدّداً نجد عددين v_1 من $\left]u_1,u_2\right[$ و v_2 من $\left]u_2,u_3\right[$ يُحقّقان

$$\varphi'''(v_1)=\varphi'''(v_2)=0$$

وبالاستفادة من مبرهنة رول مرّة أخيرة نجد c في المجال $\left]v_1,v_2\right[$ يُحقّق $\varphi^{(4)}(c)=0$.

②.4 هذا يُكافئ قولنا $A=f^{(4)}(c)$. بذا نكون قد أثبتنا وجود c في المجال $\left]0,1\right[$ يُحقّق

$$f(x)-P_f(x)=\frac{x^2(1-x)^2}{24}f^{(4)}(c)$$

وعليه يكون

$$\forall x\in[0,1],\quad \left|f(x)-P_f(x)\right|\le\frac{x^2(1-x)^2}{24}\sup_{[0,1]}\left|f^{(4)}\right|$$

③.4 لنلاحظ أنّه إذا كان $f(x)=\sqrt{3x+1}$ كان

$$f(0)=1,\ f(1)=2,\ f'(0)=\frac{3}{2},\ f'(1)=\frac{3}{4}$$

ولكن

$$f^{(4)}(x)=-\frac{81\times 15}{16\,(3x+1)^{7/2}}$$

إذن $M_4=\dfrac{1215}{16}$ وعليه

$$\forall x\in[0,1],\quad \left|\sqrt{3x+1}-P_f(x)\right|\le\frac{405}{128}x^2(1-x)^2$$

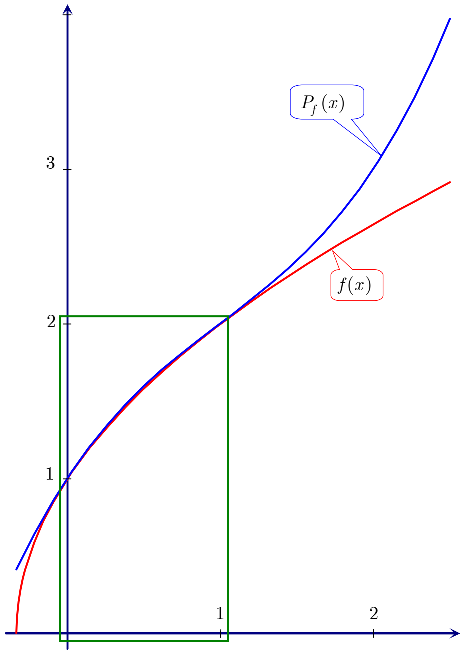
حيث

$$P_f(X)=1+\frac{3}{2}X-\frac{3}{4}X^2+\frac{1}{4}X^3$$

وبأخذ $x=\dfrac{1}{3}$ نستنتج أنّ

$$\left|\sqrt{2}-\frac{77}{54}\right|\le\frac{5}{32}$$

يبيّن الشكل التالي مدى التطابق بين التابع f والتقريب P_f على المجال $[0,1]$.



ملاحظة. في الحقيقة، بدراسة تغيرات الفرق $x \mapsto P_f(x) - \sqrt{1+3x}$ نجد أنّه يبلغ حدّه الأعلى عند $x \approx 0.441979\cdots$ وأنّ هذا الحدّ الأعلى يساوي تقريباً 0.0129418 وهو إذن أصغر من $\frac{13}{1000}$.

التمرين 21. ليكن التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

1. احسب $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\neq y} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|$.
2. استنتج أنه إذا كانت A و B و C زوايا مثلث كان

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

و

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

وأنه في أيّ مثلث مساحته S ومحيطه P تتحقق المتراجحة $12\sqrt{3}\, S \leq P^2$. هل هذه أفضل متراجحة ممكنة ؟

الحل

لنلاحظ أوّلاً أنّه، مهما تكن x من $\mathbb{R}$ ، فلدينا

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \qquad \text{و} \qquad f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

إذن يمكننا استنتاج جدول التحوّلات التالي للتابع f' :

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}/8$	$\searrow$	$-3\sqrt{3}/8$	$\nearrow$	0

ونستنتج من هذه الدراسة أنّ

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| f'(t) \right| = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

بالاستفادة من مبرهنة التزايدات المحدودة نستنتج، من جهة أولى، أنّ

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad x\neq y \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

ومن جهة ثانية، بملاحظة أنّ

$$\lim_{x\to -1/\sqrt{3}} \frac{f(x)-f(-1/\sqrt{3})}{x+1/\sqrt{3}} = f'(-1/\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

نرى بسهولة

$$\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2\\ x\neq y}} \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

وهذا يقتضي

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot \left| x-y \right|$$

لنتأمّل الآن θ و φ من $]0,\pi[$ يُحقّقان $\varphi \neq \theta$. بتطبيق المتراجحة السابقة علىكلٍّ من $x = \operatorname{cotan}\theta$ و $y = \operatorname{cotan}\varphi$ نجد أنّ

$$\left|\sin^2\theta - \sin^2\varphi\right| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}\left|\operatorname{cotan}\theta - \operatorname{cotan}\varphi\right| = \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{\left|\sin(\varphi-\theta)\right|}{\sin\theta\sin\varphi}$$

ولكن

$$\begin{aligned}\sin^2\theta - \sin^2\varphi &= \sin^2\theta\cdot(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi) - \sin^2\varphi\cdot(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\ &= (\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi)\cdot(\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi)\\ &= \sin(\theta-\varphi)\cdot\sin(\theta+\varphi)\end{aligned}$$

وعليه ينتج بالعودة إلى المتراجحة السابقة والاختصار على $\sin(\theta-\varphi) \neq 0$ ثُمّ الإصلاح

$$\left|\sin\theta\cdot\sin\varphi\cdot\sin(\theta-\varphi)\right| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

في الحقيقة، هذه المتراجحة الأخيرة تبقى صحيحة في حالة $\varphi = \theta$، وبالاستفادة من كون التابع $x \mapsto \left|\sin x\right|$ دورياً ويقبل العدد π دوراً له نرى أنّ

$$\forall(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2,\quad \left|\sin\theta\cdot\sin\varphi\cdot\sin(\theta+\varphi)\right| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

لنفترض الآن أنّ A و B و C هي زوايا مثلّث. ولنضع

$$\theta = \frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\text{، و } \varphi = \frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}$$

عندئذ يكون $\theta+\varphi = \frac{\pi}{2}+\frac{C}{2}$، وعليه يكون لدينا:

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

ولكن

$$\begin{aligned}4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} &= 4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{A+B}{2}\\ &= 2\cos\frac{A}{2}\cdot\left(\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)+\sin\frac{A}{2}\right)\\ &= \sin(A+B)+\sin B+\sin A\end{aligned}$$

إذن لقد أثبتنا أنّ

$$\sin C + \sin B + \sin A \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ولكن إذا كان R هو نصف قطر الدائرة المارّة برؤوس هذا المثلّث كان

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

وعليه

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{4RS} &= 2R \cdot \sqrt[3]{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}\\ &\leq 2R\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right) = \frac{P}{3}\end{aligned}$$

أو

$$S \leq \frac{P^2}{54} \cdot \frac{P}{2R}$$

ولكن

$$\frac{P}{2R} = \sin C + \sin B + \sin A \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

إذن $S \leq P^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{36}$ أو

$$12\sqrt{3}\, S \leq P^2$$

وهذه أفضل متراجحة ممكنة، إذ تتحقّق المساواة في حالة مثلّث متساوي الأضلاع. وتُقرأ هذه الخاصّة بالقول إنّ أكبر المثلّثات ذات محيط معطى مساحةً هو المثلّث المتساوي الأضلاع، وأصغر المثلّثات ذات مساحة معطاة محيطاً هو المثلّث المتساوي الأضلاع. ■

التمرين 22. احسب المقدار $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}_+^{*2}} \sqrt{x+y}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$.

الحل

لنعرّف، أياً كانت (x,y) من $(\mathbb{R}_+^*)^2$ المقدار

$$f(x,y) = \sqrt{x+y} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned} f^2(x,y) &= (x+y)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{\sqrt{xy}}\right)\\ &= 2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\\ &= 8+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)+2\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}-2\right)\\ &= 8+\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2+2\left(\sqrt[4]{\frac{x}{y}}-\sqrt[4]{\frac{y}{x}}\right)^2 \end{aligned}$$

وهذا يبرهن على أنّ $f^2(x,y)\geq 8$ ، وتتحقّق المساواة إذا وفقط إذا كان $x=y$. ومنه

$$\operatorname*{Inf}_{(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*}\sqrt{x+y}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)=2\sqrt{2}$$

وهي النتيجة المرجوّة.

التمرين 23. ليكن f التابع من الصف C^∞ المعرّف كما يأتي:

$$f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, x\mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. أثبت أنه، أياً كانت $n\geq 1$، يوجد كثير حدود وحيد P_n من $\mathbb{R}[X]$ يُحقّق

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n}{x^{2n}}P_n(x)\,e^{1/x}$$

وبيّن أنّ $\deg P_n=n-1$ وأنّ

$$P_{n+1}(X)=(2nX+1)P_n(X)-X^2P_n'(X)$$

ثُمّ احسب P_3, P_2, P_1 .

2. عبّر عن $x\mapsto x^2f'(x)$ بدلالة f واستنتج أنّ

$$\forall n\geq 2,\quad P_{n+1}(X)=(2nX+1)P_n(X)-n(n-1)X^2P_{n-1}(X)$$

3. أثبت بالاستفادة مما سبق أنّ

$$\forall n\geq 1,\quad P_{n+1}'(X)=(n+1)P_n(X)$$

4. أثبت أنّ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} k!\,C_n^k C_{n-1}^k X^k$.

5. أثبت أنّ $\forall m \in \mathbb{N},\ \forall t > 0,\ e^t \geq \dfrac{t^m}{m!}$ ، واستنتج

$$\forall n \geq 1, \forall x < 0, \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leq (2n+1)! \cdot |x| \cdot \left|P_n(x)\right|$$

ثُمّ احسب $\lim_{x\to 0^-} f^{(n)}(x)$.

6. ليكن التابع

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & : \quad x \geq 0, \\ f(x) & : \quad x < 0. \end{cases}$$

أثبت أنّ Φ من الصف C^∞ . وبوجه خاص أثبت أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Phi^{(n)}(0) = 0$$

7. استنتج من الدراسة السابقة أنّ التابع التالي من الصف C^∞:

$$\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & : \quad x \notin \left]0,1\right[, \\ \exp\left(\dfrac{1}{x(x-1)}\right) & : \quad x \in \left]0,1\right[. \end{cases}$$

الحل

1. لنلاحظ أوّلاً أنّه إذا عرّفنا $P_1(X) = 1$ كان

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{(-1)^1}{x^2} P_1(x) e^{1/x}$$

حيث $\deg P_1 = 0$. لنفترض إذن أنّه في حالة $1 \leq n$ ، لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{2n}} P_n(x) e^{1/x}$$

وأنّ $\deg P_n = n-1$. عندئذ باشتقاق العلاقة السابقة مرّة أخرى نستنتج أنّ

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{2n(-1)^{n+1}}{x^{2n+1}} P_n(x) e^{1/x} + \frac{(-1)^n}{x^{2n}} P_n'(x) e^{1/x} + \frac{(-1)^{n+1}}{x^{2n+2}} P_n(x) e^{1/x} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{x^{2n+2}} \Big((2nx+1) P_n(x) - x^2 P_n'(x) \Big) e^{1/x} \end{aligned}$$

إذن يُحقّق كثير الحدود $P_{n+1}(X) = (2nX+1)P_n(X) - X^2P_n'(X)$ المساواة

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{2n+2}} P_{n+1}(x)\, e^{1/x}$$

وهو كثير الحدود الوحيد الذي يُحقّق ذلك.

وإذا كان الحدُّ المسيطر في P_n هو aX^{n-1} كان الحدّ المسيطر في P_{n+1} هو $(n+1)aX^n$.

إذن لا بُدّ أن يكون $\deg P_{n+1} = n$.

بذا نكون قد أثبتنا أنّه مهما تكن n من $\mathbb{N}^*$ يوجد كثير حدود وحيد P_n من الدرجة $n-1$ يُحقّق

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n}}{x^{2n}} P_{n}(x)\, e^{1/x}$$

وتُحقّق المتتالية $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ما يلي :

$$P_1(X) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1} = (2nX+1)P_n - X^2P_n'$$

وبوجه خاص لدينا

$$\begin{aligned} P_1(X) &= 1 \\ P_2(X) &= 2X+1 \\ P_3(X) &= 6X^2+6X+1 \end{aligned}$$

هذا ونلاحظ انطلاقاً من العلاقة التدريجيّة أنّ

$$P_1(0) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1}(0) = P_n(0)$$

مما يبرّر أنّ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(0) = 1$.

2. نلاحظ اعتماداً على عبارة f' أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2f'(x) = -f(x)$$

فإذا اشتققنا الطرفين n مرّة، في حالة $n \geq 2$، استنتجنا أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)} (f')^{(n-k)}(x) = -f^{(n)}(x)$$

ومنه، في حالة عدد حقيقي غير صفري x يكون لدينا

$$x^2\left(f'\right)^{(n)}(x) + 2nx\left(f'\right)^{(n-1)}(x) + n(n-1)\left(f'\right)^{(n-2)}(x) = -f^{(n)}(x)$$

أو

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 f^{(n+1)}(x) + (2nx+1)f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad P_{n+1}(x) - (2nx+1)P_n(x) + n(n-1)x^2 P_{n-1}(x) = 0$$

ومنه

$$\forall n \geq 2, \quad P_{n+1}(X) = (2nX+1)P_n(X) - n(n-1)X^2 P_{n-1}(X)$$

3. وبمقارنة العلاقتين التدريجيّتين

$$P_{n+1}(X) = (2nX+1)P_n(X) - n(n-1)X^2 P_{n-1}(X)$$

$$P_{n+1}(X) = (2nX+1)P_n(X) - X^2 P_n'(X)$$

نستنتج أنّه

$$\forall n \geq 1, \quad P'_{n+1}(X) = n(n+1)P_n(X)$$

4. وهكذا نستنتج أنّ

$$n > k \Rightarrow P_n^{(k)}(X) = \frac{n!(n-1)!}{(n-k)!\cdot(n-k-1)!} P_{n-k}(X)$$

وبوجه خاص

$$n > k \Rightarrow P_n^{(k)}(0) = \frac{n!(n-1)!}{(n-k)!\cdot(n-k-1)!}$$

إذن

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!(n-1)!}{(n-k)!\cdot(n-k-1)!\cdot k!} X^k$$

أو

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} k! C_n^k C_{n-1}^k X^k$$

5. نعلم أنّه $\forall t \in \mathbb{R}, e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$ إذن

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall t > 0,\ e^t \geq \frac{t^m}{m!}$$

وعليه، باستبدال $\frac{1}{u}$ بالمقدار t نجد $\forall m \in \mathbb{N}, \forall u > 0, m!u^m \geq e^{-1/u}$ ومنه

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall x < 0, \quad e^{1/x} \leq m!\left|x\right|^m$$

فإذا اخترنا $m = 2n+1$ استنتجنا من عبارة $f^{(n)}$ أنّ

$$\forall n \geq 1, \forall x < 0, \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leq (2n+1)! \cdot \left|P_n(x)\right| \left|x\right|$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \to 0^-} f^{(n)}(x) = 0$$

6. ليكن التابع

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & : \ x \geq 0 \\ f(x) & : \ x < 0 \end{cases}$$

من الواضح أنّ Φ ينتمي إلى الصف C^∞ على $\mathbb{R}^*$. ونستنتج من دراستنا السابقة أنّ

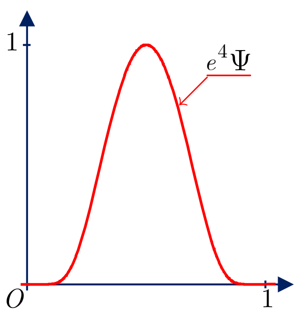
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \to 0^-} \Phi^{(n)}(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} \Phi^{(n)}(x)$$

إذن Φ ينتمي إلى الصف C^∞ على $\mathbb{R}$. وبوجه خاص

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Phi^{(n)}(0) = 0$$

7. نستنتج إذن أنّ $x \mapsto \Phi(x)\Phi(1-x)$ ينتمي إلى الصف C^∞ على $\mathbb{R}$. وهذا هو تماماً التابع Ψ المنصوص عنه في التمرين.

ويبين الشكل البياني المجاور الخط البياني للتابع $\alpha\Psi$ حيث $\alpha = e^4$.



التمرين 24. لتكن $(x_k)_{k\geq 1}$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة تماماً. نرمز بالرمز A_n إلى المتوسط الحسابي للأعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n$، وبالرمز G_n إلى المتوسّط الهندسي للأعداد نفسها. أثبت صحة المتراجحتين التاليتين:

1. **متراجحة** Rado. $\forall n > 1,\ n(A_n - G_n) \geq (n-1)\cdot(A_{n-1} - G_{n-1})$.

2. **متراجحة** Popoviciu. $\forall n > 1,\ \left(\dfrac{A_n}{G_n}\right)^n \geq \left(\dfrac{A_{n-1}}{G_{n-1}}\right)^{n-1}$.

الحل

1. لتكن $1 < n$، ولتكن (x,a) من $\mathbb{R}_+^{*2}$، عندئذ نجد بمُقارنة المتوسّطين الحسابي والهندسي أنّ:

$$\frac{x+(n-1)a}{n} - \sqrt[n]{xa^{n-1}} \geq 0 \qquad (*)$$

فإذا اخترنا $a = G_{n-1}$، و $x = x_n$ استنتجنا أنّ

$$x_n - n\cdot\sqrt[n]{G_{n-1}^{n-1}\cdot x_n} \geq -(n-1)G_{n-1}$$

وبجمع $(n-1)A_{n-1}$ إلى طرفي المتراجحة السابقة نستنتج أنّ

$$n(A_n - G_n) \geq (n-1)(A_{n-1} - G_{n-1})$$

2. كذلك إذا اخترنا $a = A_{n-1}$ و $x = x_n$ في $(*)$ وجدنا:

$$A_n \geq (A_{n-1})^{1-1/n}(x_n)^{1/n}$$

وهذا يُكافئ

$$\frac{(A_n)^n}{x_n} \geq (A_{n-1})^{n-1}$$

وبقسمة طرفي هذه العلاقة على $(G_{n-1})^{n-1}$ نجد

$$\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n \geq \left(\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}}\right)^{n-1}$$

وهي المتراجحة المطلوبة. ∎

التمرين 25. ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً. أثبت أنّ التابع f يكون محدّباً إذا وفقط إذا تحقّق الشرط :
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

الحل

من الواضح أنّ تحدُّب التابع f يقتضي هذا الشرط. لنبرهن إذن صحّة العكس. لتكن القضيّة $\mathcal{P}_n$ التالية:

أيّاً كان (x,y) من $\mathbb{R}^2$، وأيّاً كان k من $\{0,1,\ldots,2^n\}$ كان
$$f\left(\frac{k}{2^n}x+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)y\right)\le\frac{k}{2^n}f(x)+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)f(y)$$

إنّ $\mathcal{P}_1$ قضيّة صحيحة استناداً إلى الفرْض. لنفترض صحّة $\mathcal{P}_n$. وليكن (x,y) عنصراً من $\mathbb{R}^2$، و k عنصراً من المجموعة $\{0,1,\ldots,2^{n+1}\}$.

- في حالة $k=2p$ يكون لدينا، استناداً إلى فرْض التدريج:
$$\begin{aligned}f\left(\frac{k}{2^{n+1}}x+\left(1-\frac{k}{2^{n+1}}\right)y\right)&=f\left(\frac{p}{2^n}x+\left(1-\frac{p}{2^n}\right)y\right)(n)\\&\le\frac{p}{2^n}f(x)+\left(1-\frac{p}{2^n}\right)f(y)\\&=\frac{k}{2^{n+1}}f(x)+\left(1-\frac{k}{2^{n+1}}\right)f(y)\end{aligned}$$
- في حالة $k=2p+1$، نعرّف
$$v=\frac{p+1}{2^n}x+\left(1-\frac{p+1}{2^n}\right)y \text{ و } u=\frac{p}{2^n}x+\left(1-\frac{p}{2^n}\right)y$$

فيكون لدينا استناداً إلى فرض التدريج
$$\begin{aligned}f(u)&\le\frac{p}{2^n}f(x)+\left(1-\frac{p}{2^n}\right)f(y)\\f(v)&\le\frac{p+1}{2^n}f(x)+\left(1-\frac{p+1}{2^n}\right)f(y)\end{aligned}$$

واستناداً إلى الفرض
$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}x+\left(1-\frac{k}{2^{n+1}}\right)y\right)=f\left(\frac{u+v}{2}\right)\le\frac{1}{2}\big(f(u)+f(v)\big)$$

ومما سبق نستنتج مباشرة أنّ

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}x+\left(1-\frac{k}{2^{n+1}}\right)y\right)\leq \frac{k}{2^{n+1}}f(x)+\left(1-\frac{k}{2^{n+1}}\right)f(y)$$

وهذا يُثبتُ صحّة الخاصّة $\mathcal{P}_{n+1}$.

ليكن (x,y) عنصراً من $\mathbb{R}^2$ ، ولتكن λ من $]0,1[$ ، عندئذ نضع $k_n=\lfloor \lambda 2^n\rfloor$ فيكون لدينا

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad f\left(\frac{k_n}{2^n}x+\left(1-\frac{k_n}{2^n}\right)y\right)\leq \frac{k_n}{2^n}f(x)+\left(1-\frac{k_n}{2^n}\right)f(y)$$

وبالاستفادة من استمرار f ، ومن كوْن $\lim\limits_{n\to\infty}2^{-n}k_n=\lambda$ ، نجد، بجعل n تسعى إلى $+\infty$ ، أنّ

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

بذا نكون قد أثبتنا تحدُّب التابع f . ■

التمرين 26. ليكن $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ تابعاً محدّباً.

1. أثبت أن $x\mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ يسعى إلى نهاية منتهية أو إلى $+\infty$ عندما تسعى x إلى $+\infty$.
2. أثبت أنه إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\ell\in\mathbb{R}$ ، فإنّ $x\mapsto f(x)-\ell x$ يسعى إلى نهاية منتهية أو إلى $-\infty$ عندما تسعى x إلى $+\infty$.

الحل

1. نعلم أنّ التابع

$$\Delta:\left]1,+\infty\right[\to\mathbb{R},\ \Delta(x)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

تابع متزايد وهو من ثَمّ يسعى إلى عنصر ℓ من $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. ولكن

$$\forall x>1,\quad \frac{f(x)}{x}=\left(1-\frac{1}{x}\right)\Delta(x)+\frac{f(1)}{x}$$

ومنه نرى مباشرة أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\ell$.

2. لتكن $0 < y$، عندئذ يكون لدينا

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{f(y)}{x}}{1-\dfrac{y}{x}}=\ell$$

ولكنّ التابع $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ تابع متزايد على $]y,+\infty[$ إذن

$$\forall x > y,\quad \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\le \ell$$

بذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x\ge y \Rightarrow f(x)-\ell\, x\le f(y)-\ell\, y$$

إذن التابع $x\mapsto f(x)-\ell\, x$ تابع متناقص، فلا بُدّ أن يسعى إلى نهاية منتهية أو إلى $-\infty$ عند $+\infty$. وبذا يتم إثبات المطلوب.

التمرين 27. أثبت أنّ $\forall n\in\mathbb{N}^*, \ln(n!)\ge n\ln\left(\dfrac{e}{n}\right)$. واستنتج أنّه مهما تكن α من $\mathbb{R}_+^*$، ومهما تكن n من $\mathbb{N}^*$، يكن

$$\forall (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}_+^{*n},\quad \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}x_k}\le\frac{e^\alpha}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n}k^\alpha x_k$$

الحل

لتكن $1 < n$، ولتكن $(x_1,\ldots,x_n)$ من $(\mathbb{R}_+^*)^n$. في الحقيقة، بمُقارنة المتوسّطين الحسابي والهندسي نجد

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}x_k}=\frac{1}{(\sqrt[n]{n!})^\alpha}\cdot\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}k^\alpha x_k}\le\frac{1}{(\sqrt[n]{n!})^\alpha}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^\alpha x_k$$

ولكن بتطبيق مبرهنة التزايدات المحدودة على التابع $t\mapsto\ln(1+t)$ نستنتج أنّه

$$\forall x>0,\ \exists c\in\left]0,x\right[,\quad \ln(1+x)=\frac{x}{1+c}$$

إذن

$$\forall x\ge 0,\ \ln(1+x)\le x$$

وعليه، مهما يكن $1 < n$ يكن لدينا

$$\ln(n) - \ln(n-1) = \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \le \frac{1}{n-1}$$

وهذا يُكافئ

$$\forall n > 1, \quad n \ln n - (n-1)\ln(n-1) - 1 \le \ln n$$

وبجمع هذه المتراجحات من $n = 2$ حتّى $n = m$ نجد

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad m \ln m - (m-1) \le \ln(m!)$$

وهذا يقتضي أنّ $\frac{e}{n} \le \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ وذلك مهما تكن $1 \le n$. إذن

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \le \frac{e^{\alpha}}{n^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} x_k$$

وهذا يُثبت المطلوب. ■

التمرين 28. أثبت أن التابع $x \mapsto \ln\,(1 + e^x)$ محدّب على $\mathbb{R}$ واستنتج أنّه في حالة n من $\mathbb{N}^*$ يكون لدينا

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}, \quad 1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \le \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k)\right)^{1/n}$$

الحل

لنعرّف $f(x) = \ln(1 + e^x)$ في حالة x من $\mathbb{R}$، نلاحظ بالاشتقاق مرّتين أنّ

$$f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \quad \text{و} \quad f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

إذن $f'' \ge 0$ والتابع f محدّب على $\mathbb{R}$.

وعليه مهما تكن n من $\mathbb{N}^*$، ومهما تكن الأعداد $(x_1, \ldots, x_n)$ من $(\mathbb{R}_+^*)^n$، يكن

$$f\left(\frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n}{n}\right) \le \frac{f(\ln x_1) + f(\ln x_2) + \cdots + f(\ln x_n)}{n}$$

وهذا يُكافئ

$$1+\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \le \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 29. ليكن p و q عددين من $]1,+\infty[$ يُحقّقان $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

1. أثبت أنّ

$$\forall (x,y)\in (\mathbb{R}_+)^2,\quad x\,y \le \frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}x^q$$

2. استنتج أنّه أياً كان $(a_1,\ldots,a_n)$ و $(b_1,\ldots,b_n)$ من $(\mathbb{R}_+)^n$، كان لدينا

متراجحة Hölder :
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q}$$

3. استنتج أنّه أياً كان $(a_1,\ldots,a_n)$ و $(b_1,\ldots,b_n)$ من $(\mathbb{R}_+)^n$، كان لدينا

متراجحة Minkowski :
$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{1/p}$$

4. لتكن $(a_1,\ldots,a_n)$ من $(\mathbb{R}_+)^n$، ولتكن t من $\overline{\mathbb{R}}$. نعرّف

$$M_t(a_1,\ldots,a_n)=\begin{cases}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^t\right)^{1/t} & : \ t\in\mathbb{R}^*\\ \max(a_1,\ldots,a_n) & : \ t=+\infty\\ \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} & : \ t=0\\ \min(a_1,\ldots,a_n) & : \ t=-\infty\end{cases}$$

أثبت أنّ

- $\lim_{t\to+\infty} M_t(a_1,\ldots,a_n)=M_{+\infty}(a_1,\ldots,a_n)$.
- $\lim_{t\to-\infty} M_t(a_1,\ldots,a_n)=M_{-\infty}(a_1,\ldots,a_n)$.
- $\lim_{t\to 0} M_t(a_1,\ldots,a_n)=M_0(a_1,\ldots,a_n)$.
- وأنّ التابع $t\mapsto M_t(a_1,\ldots,a_n)$ متزايد على $\overline{\mathbb{R}}$.

الحل

1. التابع الأسّي $t \mapsto e^t$ محدّب، إذن مهما يكن u و v من $\mathbb{R}$ يكن

$$e^u \cdot e^v = e^{u+v} = \exp\Big(\frac{1}{p}\cdot pu + \underbrace{(1-\frac{1}{p})}_{1/q}\cdot q\ v\Big) \le \frac{1}{p}e^{pu} + \frac{1}{q}e^{qv}$$

وإذا أخذنا $x = e^u$ و $y = e^v$ في المتراجحة السابقة وجدنا

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad x\,y \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

وهذه المتراجحة تبقى صحيحة إذا انعدم x أو y.

2. لنعرّف

$$\beta = \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q} \quad \text{و} \quad \alpha = \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p}$$

إذا كان $\alpha = 0$ أو $\beta = 0$ كانت المتراجحة المطلوبة صحيحة. لنفترض إذن أنّ $\alpha \ne 0$، وأنّ $\beta \ne 0$. ولنستفدْ من المتراجحة السابقة مطبّقة على $x = \dfrac{a_k}{\alpha}$، و $y = \dfrac{b_k}{\beta}$ عندئذ

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,n\}, \quad \frac{a_k b_k}{\alpha\beta} \le \frac{1}{p}\cdot\frac{a_k^p}{\alpha^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{b_k^q}{\beta^q}$$

وبجمع هذه المتراجحات طرفاً إلى طرف نجد

$$\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{k=1}^n a_k b_k \le \frac{1}{p}\cdot\frac{\alpha^p}{\alpha^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{\beta^q}{\beta^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

وهذا يقتضي المتراجحة المطلوبة.

3. لنعرف $q = \dfrac{p}{p-1}$، بحيث يكون $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. عندئذ نلاحظ أنّ

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^n a_k(a_k+b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^n b_k(a_k+b_k)^{p-1}$$

ولكن استناداً إلى متراجحة هولدر لدينا

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (a_k + b_k)^{p-1} \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k (a_k + b_k)^{p-1} \le \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

وإذن بالجمع والاختصار على $\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}$ نجد المتراجحة المطلوبة.

4. لنلاحظ أوّلاً أنّه، مهما تكن t من $\overline{\mathbb{R}}$، ومهما تكن $(a_1,\ldots,a_n)$ من $\mathbb{R}_+^{*n}$، لدينا

$$M_{-t}\left(\frac{1}{a_1},\ldots,\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{M_t(a_1,\ldots,a_n)} \tag{1}$$

لنفترض أوّلاً أنّ $0 < t < s$، ولنطبّق متراجحة هولدر بأخذ $p = \dfrac{s}{t}$ فنجد:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k^t &= \sum_{k=1}^{n} a_k^t \cdot 1 \le \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k^t)^{s/t}\right)^{t/s} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (1)^{s/(s-t)}\right)^{1-t/s} \\ &\le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^s\right)^{t/s} \cdot n^{1-t/s} = n \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^s\right)^{t/s}\end{aligned}$$

وهذا يقتضي أنّ $M_t(a_1,\ldots,a_n) \le M_s(a_1,\ldots,a_n)$ وذلك مهما تكن $0 < t < s$. إذن مقصور التابع $t \mapsto M_t(a_1,\ldots,a_n)$ على $\mathbb{R}_+^*$ مستمرٌّ ومتزايد.

وبالاستفادة من (1) نجد أنّه في حالة $t < s < 0$ يكون لدينا

$$\begin{aligned}M_t(a_1,\ldots,a_n) &= \frac{1}{M_{-t}(a_1^{-1},\ldots,a_n^{-1})} \\ &\le \frac{1}{M_{-s}(a_1^{-1},\ldots,a_n^{-1})} = M_s(a_1,\ldots,a_n)\end{aligned}$$

إذن مقصور التابع $t \mapsto M_t(a_1,\ldots,a_n)$ على $\mathbb{R}_-^*$ مستمرٌّ ومتزايد أيضاً.

لنعرّف التابع

$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(t)=\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{t\ln a_k}\right)$$

نرى مباشرة أنّ h قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$، وأنّ

$$h'(t)=\sum_{k=1}^{n}e^{t\ln a_k}\ln a_k\Big/\sum_{k=1}^{n}e^{t\ln a_k}$$

وبوجه خاص يكون لدينا $h'(0)=\ln\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=\ln M_0(a_1,\ldots,a_n)$. ولكن

$$h'(0)=\lim_{t\to0}\frac{h(t)-h(0)}{t}$$

وكذلك

$$\frac{h(t)-h(0)}{t}=\ln M_t(a_1,\ldots,a_n)$$

إذن لقد أثبتنا أنّ

$$M_0(a_1,\ldots,a_n)=\lim_{t\to0}M_t(a_1,\ldots,a_n)$$

وعليه نستنتج أنّ مقصور التابع $t\mapsto M_t(a_1,\ldots,a_n)$ على $\mathbb{R}$ مستمرٌّ ومتزايد.

لنفترض أنّ $M_\infty(a_1,\ldots,a_n)=\max(a_1,\ldots,a_n)=a_\lambda$ عندئذ يكون لدينا

$$\forall t>0,\ \frac{M_t(a_1,\ldots,a_n)}{a_\lambda}=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{a_\lambda}\right)^t\right)^{\frac{1}{t}}\in\left[\frac{1}{n^{1/t}},1\right]$$

أي

$$\forall t>0,\ \frac{1}{n^{1/t}}\le\frac{M_t(a_1,\ldots,a_n)}{a_\lambda}\le1$$

وبجعل t تسعى إلى $+\infty$ نستنتج مباشرة أنّ

$$\lim_{t\to+\infty}M_t(a_1,\ldots,a_n)=a_\lambda=M_{+\infty}(a_1,\ldots,a_n)$$

وبالاستفادة من (1) نجد مباشرة أنّ

$$\lim_{t\to-\infty}M_t(a_1,\ldots,a_n)=M_{-\infty}(a_1,\ldots,a_n)$$

وبذا يتم الإثبات. ■

التمرين 30. المتراجحة الإيزوبيريمترية في المثلّث

1. ادرس تحدّب التابع $f : [0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, x \mapsto \tan x$.

2. ليكن Δ مثلثاً رؤوسه A و B و C. ولنرمز إلى أطوال أضلاعه المقابلة للرؤوس A و B و C بالرموز a و b و c، وإلى قياس زوايا هذه الرؤوس بالرموز $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ على الترتيب.

① أثبت أنّ

$$\tan\frac{\widehat{A}}{2} + \tan\frac{\widehat{B}}{2} + \tan\frac{\widehat{C}}{2} \geq \sqrt{3}$$

② لتكن $\mathcal{S}_\Delta$ مساحة المثلث Δ أثبت أنّ $a^2 = (b-c)^2 + 4\mathcal{S}_\Delta \tan\frac{\widehat{A}}{2}$، واستنتج :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 + 4\sqrt{3} \cdot \mathcal{S}_\Delta$$

③ ليكن $\mathcal{P}_\Delta$ محيط المثلّث Δ أثبت أنّ :

$$\mathcal{P}_\Delta^2 \geq 2\big((b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2\big) + 12\sqrt{3} \cdot \mathcal{S}_\Delta$$

④ استنتج أنّه في أيّ مثلث Δ تتحقّق المتراجحة : $\mathcal{P}_\Delta^2 \geq 12\sqrt{3}\,\mathcal{S}_\Delta$، واذكر الشرط اللازم والكافي حتى تكون هناك مساواة في المتراجحة السابقة.

الحل

1. في الحقيقة، نلاحظ أنّ

$$\forall x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right[, \quad f'(x) = 1 + \tan^2 x = 1 + \big(f(x)\big)^2$$

ومنه نستنتج على التوالي أنّ

- التابع f متزايدٌ تماماً على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- التابع f موجبٌ على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ لأنّ $f(0) = 0$.
- التابع f' متزايدٌ تماماً على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

وهذا يقتضي أنّ f تابعٌ محدّبٌ على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2. ليكن Δ مثلثاً رؤوسه A و B و C. ولنرمز إلى أطوال أضلاعه المقابلة للرؤوس A و B و C بالرموز a و b و c، وإلى قياس زوايا هذه الرؤوس بالرموز A و B و C على الترتيب.

①.2 في الحقيقة، نستنتج من كون الأعداد $A/2$ و $B/2$ و $C/2$ تنتمي إلى $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$، ومن تحدّب تابع الظل أنّ

$$\frac{1}{3}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\geq\tan\left(\frac{1}{3}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ومنه

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}$$

②.2 لتكن $\mathcal{S}_\Delta$ مساحة المثلث Δ عندئذ

$$\begin{aligned}a^2-\left(b-c\right)^2&=b^2+c^2-2bc\cos A-b^2-c^2+2bc\\&=2bc\left(1-\cos A\right)\\&=4bc\sin^2\frac{A}{2}=4bc\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}\tan\frac{A}{2}\\&=4\mathcal{S}_\Delta\tan\frac{A}{2}\end{aligned}$$

وبسبب تناظر الرموز نكون قد أثبتنا أنّ

$$\begin{aligned}a^2&=(b-c)^2+4\mathcal{S}_\Delta\tan(A/2)\\b^2&=(c-a)^2+4\mathcal{S}_\Delta\tan(B/2)\\c^2&=(a-b)^2+4\mathcal{S}_\Delta\tan(C/2)\end{aligned}$$

وبالجمع والاستفادة من ①.2 نجد

$$a^2+b^2+c^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2+4\sqrt{3}\,\mathcal{S}_\Delta$$

③.2 ليكن $\mathcal{P}_\Delta$ محيط المثلّث Δ عندئذ

$$\mathcal{P}_\Delta^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

ولكن

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$$

إذن

$$\mathcal{P}_\Delta^2+(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2=3(a^2+b^2+c^2)$$

وبالاستفادة من المتراجحة التي أثبتناها آنفاً نستنتج أنّ

$$\mathcal{P}_{\Delta}^2 \geq 2\Big((b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\Big)+12\sqrt{3}\cdot\mathcal{S}_{\Delta}$$

④.2 نستنتج إذن أنّه في أيّ مثلّث Δ تتحقّق المتراجحة $\mathcal{P}_{\Delta}^2 \geq 12\sqrt{3}\,\mathcal{S}_{\Delta}$، وتتحقّق المساواة فيها إذا وفقط إذا كان المثلّث Δ متساوي الأضلاع.

تنص هذه المتراجحة، أن أكبر المثلّثات ذات محيط مُعطى مساحةً هي المتساوية الأضلاع. وأنّ أصغر المثلثات ذات مساحة معطاة محيطاً هي المتساوية الأضلاع أيضاً. ■

التمرين 31. نعرّف، أياًكانت n من $\mathbb{N}^*$ و k من $\mathbb{N}_n$، المقدار $\left\{ n \atop k \right\}$ بالعلاقات

$$\left\{ n \atop 1 \right\} = 1, \quad \left\{ n \atop n \right\} = n\,!,$$
$$\left\{ n \atop k \right\} = k\left(\left\{ n-1 \atop k \right\} + \left\{ n-1 \atop k-1 \right\}\right), \quad (n \geq 2, n > k > 1)$$

I

1. أعطِ قيم $\left\{ n \atop k \right\}$ عندما $n \geq 5$ و $1 \leq k \leq n$.

2. ليكن $F :]1,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^n مع $(n \geq 1)$. نعرّف التابع
$$g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R},\, t \mapsto F(e^t)$$
أثبت أن

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad g^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,!}\left\{ n \atop k \right\} F^{(k)}\left(e^t\right)e^{kt} \qquad (1)$$

3. استنتج أنه أياًكان p من $\mathbb{N}_n$ فلدينا $p^n = \sum_{k=1}^{p} C_p^k \left\{ n \atop k \right\}$.

4. استنتج أنه أياًكان Q كثير حدود من $\mathbb{R}[X]$ درجته أصغر من n تتحقق العلاقة:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^n}{k\,!} Q^{(k)}(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,!}\left\{ n \atop k \right\} Q^{(k)}(1)$$

5. لتكن p من $\mathbb{N}_n$، باختيار مناسب لكثير الحدود Q، استفدْ مما سبق لإثبات أن

$$\left\{ n \atop p \right\} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k k^n \qquad (2)$$

6. استعمل العلاقة (1) لإثبات أنه مهما تكن $0 < t$ ومهما تكن $1 \leq n$ فلدينا

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \frac{e^{-t}}{(1-e^{-t})^{k+1}} \\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(\exp(e^t)) &= \exp(e^t)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} e^{kt} \end{aligned} \tag{3}$$

II

لتكن $0 < t$ و $0 \leq n$. أثبت تقارب المتسلسلتين $\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}e^{kt}$ و $\sum_{k\geq 0}k^n e^{-kt}$،
نصطلح أنّ $k^n = 1$ في حالة $(k,n) = (0,0)$، و نعرّف من ثَمّ

$$h_n(t) = \sum_{k\geq 0} k^n e^{-kt} \quad \text{و} \quad g_n(t) = \sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}e^{kt}$$

1. عبّر عن $g_0(t)$ بدلالة $\exp(e^t)$، وعن $h_0(t)$ بدلالة $\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$.

2. أثبت صحة المتراجحة $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2}e^{|x|}$.

3. لتكن t_0 من $\mathbb{R}_+^*$ و ℓ من $\left]-\frac{t_0}{2}, \frac{t_0}{2}\right[$. أثبت أن

$$\begin{aligned} |g_n(t_0+\ell) - g_n(t_0) - \ell g_{n+1}(t_0)| &\leq \frac{\ell^2}{2}\, g_{n+2}\left(\frac{3t_0}{2}\right) \\ |h_n(t_0+\ell) - h_n(t_0) + \ell h_{n+1}(t_0)| &\leq \frac{\ell^2}{2}\, h_{n+2}\left(\frac{t_0}{2}\right) \end{aligned}$$

واستنتج أنه، أياً كان n، يقبلِ التابعان g_n و h_n الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$، ويحقق

$$h_n' = -h_{n+1} \quad \text{و} \quad g_n' = g_{n+1}$$

4. استخلص مما سبق أنه أياً كان $0 < t$ و $1 \leq n$، فإنّ

$$\begin{aligned} h_n(t) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}\frac{e^{-t}}{(1-e^{-t})^{k+1}} \\ g_n(t) &= \exp(e^t)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} e^{kt} \end{aligned}$$

5. أثبت أنه، مهما يكن العدد الطبيعي n، يوجدْ كثير حدود G_n من $\mathbb{R}[X]$ يحقق

$$\forall x > 1, \quad G_n(x) = e^{-x}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}x^k\right)$$

6. أثبت أنه، مهما يكن العدد الطبيعي n، يوجد كثير حدود H_n من $\mathbb{R}[X]$ يحقّق

$$\forall x \geq 1, \quad H_n(x) = \sum_{k\geq 1} k^n \left(1 - \frac{1}{x}\right)^k$$

ثُمّ أثبت أنّ $X(X-1)$ يقسم $H_n(X)$ أياً كانت $1 \leq n$.

7. أثبت أنّ مجموع المتسلسلة $\sum_{k\geq 1} k^n \left(\frac{m}{m+1}\right)^k$ عددٌ طبيعي زوجي، في حالة (m,n) من $\mathbb{N}^2$.

8. عبّر بدلالة $H_n(X)$ عن المجموعين

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k H_k(X) \quad \text{و} \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} C_n^k H_k(X)$$

III

1. أثبت أنه مهما يكن p من $\mathbb{N}^*$ و z من $\mathbb{C}$ يكن

$$|z| < \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-pz} = \sum_{n=0}^{\infty} p^n z^n$$

2. حلّل الكسر العادي التالي إلى عناصره البسيطة

$$\frac{1}{\prod_{1\leq p\leq k}(1-pz)} = \frac{1}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-kz)}$$

3. استفدْ مما سبق لتثبت أنه مهما تكن z من $\mathbb{C}$ تُحقق $|z| < \frac{1}{k}$، فلدينا

$$\frac{1}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-kz)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\{ {k+m \atop k} \right\} z^m$$

IV

لتكن n من $\mathbb{N}^*$ و k من $\{1,2,\ldots,n\}$، نرمز بالرمز S_k^n إلى عدد التوابع الغامرة من مجموعة عدد عناصرها n إلى مجموعة عدد عناصرها k. أثبت أن $S_k^n = \left\{ {n \atop k} \right\}$، واذكر لماذا يقسِم العددُ $k!$ العددَ $\left\{ {n \atop k} \right\}$.

الحل

I.1. نجد في الجدول التالي قيم $\left\{ {n \atop k} \right\}$ عندما $n \le 5$ و $1 \le k \le n$.

$n \backslash k$	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	2			
3	1	6	6		
4	1	14	36	24	
5	1	30	150	240	120

I.2. في حالة $n \ge 1$ لتكن $\mathbb{P}_n$ الخاصّة التالية :

إذا كان $F : \left]1,+\infty\right[\to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^n. وعرّفنا التابع $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, t \mapsto F(e^t)$ عندئذ

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\quad g^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left\{ {n \atop k} \right\} F^{(k)}(e^t)e^{kt}$$

في الحقيقة، الخاصّة $\mathbb{P}_1$ صحيحة وضوحاً إذ تنصّ على أنّ $g'(t) = F'(e^t)e^t$. لنفترض إذن صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_{n-1}$ في حالة $n \ge 2$، وليكن $F :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^n.

عندئذ نستنتج من فرْض التدريج أنّ

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\quad g^{(n-1)}(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left\{ {n-1 \atop k} \right\} F^{(k)}(e^t)e^{kt}$$

وباشتقاق طرفي المساواة السابقة نستنتج أنّه في حالة t من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا

$$\begin{aligned}
g^{(n)}(t) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left\{ {n-1 \atop k} \right\}\left(F^{(k+1)}(e^t)e^{(k+1)t} + kF^{(k)}(e^t)e^{kt} \right)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left\{ {n-1 \atop k} \right\} F^{(k+1)}(e^t)e^{(k+1)t} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left\{ {n-1 \atop k} \right\} kF^{(k)}(e^t)e^{kt}\\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{k!}\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} F^{(k)}(e^t)e^{kt} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left\{ {n-1 \atop k} \right\} kF^{(k)}(e^t)e^{kt}
\end{aligned}$$

ومن ثمّ

$$\begin{aligned} g^{(n)}(t) &= F^{(n)}(e^t)e^{nt} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{k}{k\,!}\left(\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right\}\right)F^{(k)}(e^t)e^{kt} + F'(e^t)e^t \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,!}\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}F^{(k)}(e^t)e^{kt} \end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_n$.

3.I. لتكن p من $\mathbb{N}_n$. ولنختر في (1) التابع $F(x) = x^p$ فيكون $g(t) = e^{pt}$ ، ومنه

$$p^n e^{pt} = \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k\,!}\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}p(p-1)\cdots(p-k+1)e^{(p-k)t}e^{kt}$$

إذن

$$p^n = \sum_{k=1}^{p} C_p^k \left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$$

4.I. لتكن p من $\mathbb{N}_n$. ولنفترض أنّ $Q(X) = X^p$ عندئذ

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^n}{k\,!}Q^{(k)}(0) = p^n$$

و

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,!}\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}Q^{(k)}(1) &= \sum_{k=1}^{p}\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k\,!}\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{p} C_p^k\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\} \end{aligned}$$

نستنتج أنّ المساواة

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^n}{k\,!}Q^{(k)}(0) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,!}\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}Q^{(k)}(1)$$

محقّقة أياً كان Q من $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ ولأنّ الطرفين خطيّان بالنسبة إلى Q نستنتج أنّ هذه المساواة تبقى محقّقة أياً كان كثير الحدود Q من $\mathbb{R}[X]$ الذي درجته أصغر أو تساوي n .

.5.I لتكن p من $\mathbb{N}_n$. ولنضع في المساواة السابقة $Q(X)=\widetilde{Q}(X)=(X-1)^p$ عندئذ نستنتج مباشرة من المساواة

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^n}{k!}\widetilde{Q}^{(k)}(0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\begin{Bmatrix} n\\ k\end{Bmatrix}\widetilde{Q}^{(k)}(1)$$

أنّ

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}k^n(-1)^{p-k}=\begin{Bmatrix} n\\ p\end{Bmatrix}$$

أو

$$\begin{Bmatrix} n\\ p\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}C_p^k k^n$$

.6.I في حالة $F(x)=\dfrac{1}{x-1}$ يكون لدينا

$$g(t)=\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \quad \text{و} \quad F^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}}$$

إذن تُكتب العلاقة (1) في هذه الحالة الخاصّة بالشكل

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\begin{Bmatrix} n\\ k\end{Bmatrix}\frac{(-1)^k k!}{(e^t-1)^{k+1}}e^{kt}\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\begin{Bmatrix} n\\ k\end{Bmatrix}\frac{e^{-t}}{(e^t-1)^{k+1}}\end{aligned}$$

وذلك مهما تكن $0<t$ ومهما تكن $1\leq n$.

في حالة $F(x)=e^x$ يكون لدينا

$$g(t)=\exp(e^t) \quad \text{و} \quad F^{(k)}(x)=e^x$$

إذن تُكتب العلاقة (1) في هذه الحالة الخاصّة بالشكل

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\Big(\exp(e^t)\Big)=\exp(e^t)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\begin{Bmatrix} n\\ k\end{Bmatrix}e^{kt}$$

وذلك مهما تكن $0<t$ ومهما تكن $1\leq n$.

II. لتكن $0 < t$ و $0 \leq n$. نصطلح أنّ $k^n = 1$ في حالة $(k,n) = (0,0)$، عندئذ تتقارب المتسلسلتان $\sum_{k\geq 0} \frac{k^n}{k!} e^{kt}$ و $\sum_{k\geq 0} k^n e^{-kt}$ اعتماداً على معيار دالمبرت مثلاً، نعرّف من ثَمّ

$$h_n(t) = \sum_{k\geq 0} k^n e^{-kt} \quad \text{و} \quad g_n(t) = \sum_{k\geq 0} \frac{k^n}{k!} e^{kt}$$

II.1. نعلم أنّ $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ إذن $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ g_0(t) = \exp(e^t)$.

ومن جهة أخرى، لمّا كان

$$\forall x > 1, \quad \frac{1}{x-1} = \frac{1/x}{1-1/x} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{-k}$$

استنتجنا أنّ

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad h_0(t) = 1 + \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

II.2. تنصّ متراجحة تايلور–لاغرانج على أنّه في حالة تابع f من الصف C^{n+1} على $\mathbb{R}$ لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{\left|x\right|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[0,1]} \left| f^{(n+1)}(tx) \right|$$

وفي حالة $n = 1$ و $f(x) = e^x$ نستنتج أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| e^x - 1 - x \right| \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}$$

II.3.

- لتكن t_0 من $\mathbb{R}_+^*$ و ℓ من $\left]-t_0/2, t_0/2\right[$. عندئذ

$$\begin{aligned} g_n(t_0+\ell) - g_n(t_0) - \ell g_{n+1}(t_0) &= \sum_{k\geq 0} \frac{k^n}{k!} \Big(e^{k(t_0+\ell)} - e^{kt_0} - k\ell e^{kt_0} \Big) \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{k^n}{k!} e^{kt_0} \left(e^{k\ell} - 1 - k\ell \right) \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\left|g_n(t_0+\ell)-g_n(t_0)-\ell g_{n+1}(t_0)\right| &\le \sum_{k\ge 0}\frac{k^n}{k!}e^{kt_0}\left|e^{k\ell}-1-k\ell\right|\\ &\le \sum_{k\ge 0}\frac{k^n}{k!}e^{kt_0}\,\frac{k^2\ell^2}{2}e^{k|\ell|}\\ &\le \frac{\ell^2}{2}\sum_{k\ge 0}\frac{k^{n+2}}{k!}e^{k(t_0+|\ell|)}\\ &\le \frac{\ell^2}{2}g_{n+2}\left(\frac{3t_0}{2}\right)\end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أنّه في حالة t_0 من $\mathbb{R}_+^*$ و n من $\mathbb{N}$ يكون لدينا

$$\lim_{\ell\to 0}\frac{g_n(t_0+\ell)-g_n(t_0)}{\ell}=g_{n+1}(t_0)$$

أي إنّ g_n قابلٌ للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ومشتقّه هو g_{n+1}.

- لتكن t_0 من $\mathbb{R}_+^*$ و ℓ من $\left]-t_0/2,t_0/2\right[$. عندئذ

$$\begin{aligned}h_n(t_0+\ell)-h_n(t_0)+\ell h_{n+1}(t_0) &= \sum_{k\ge 0}k^n\left(e^{-k(t_0+\ell)}-e^{-kt_0}+k\ell e^{-kt_0}\right)\\ &= \sum_{k\ge 0}k^n e^{-kt_0}\left(e^{-k\ell}-1+k\ell\right)\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\left|h_n(t_0+\ell)-h_n(t_0)+\ell h_{n+1}(t_0)\right| &\le \sum_{k\ge 0}k^n e^{-kt_0}\left|e^{-k\ell}-1+k\ell\right|\\ &\le \sum_{k\ge 0}k^n e^{-kt_0}\,\frac{k^2\ell^2}{2}e^{k|\ell|}\\ &\le \frac{\ell^2}{2}\sum_{k\ge 0}k^{n+2}e^{k(-t_0+|\ell|)}\\ &\le \frac{\ell^2}{2}h_{n+2}\left(\frac{t_0}{2}\right)\end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أنّه في حالة t_0 من $\mathbb{R}_+^*$ و n من $\mathbb{N}$ يكون لدينا

$$\lim_{\ell\to 0}\frac{h_n(t_0+\ell)-h_n(t_0)}{\ell}=-h_{n+1}(t_0)$$

أي إنّ h_n قابلٌ للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ومشتقّه هو $-h_{n+1}$.

.4.II نستخلص مما سبق أنّ g_0 و h_0 ينتميان إلى الصف C^∞ وأنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad g^{(n)}=g_n,\quad h^{(n)}=(-1)^n h_n$$

فإذا استفدنا من العلاقة (3) استنتجنا أنّه في حالة $0<t$ و $1\leq n$ يكون لدينا

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}e^{kt}&=g_n(t)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,t^n}\big(\exp(e^t)\big)\\&=\exp(e^t)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left\{{n\atop k}\right\}e^{kt}\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}k^n e^{-kt}&=h_n(t)=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,t^n}\left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\left\{{n\atop k}\right\}\frac{e^{-t}}{(1-e^{-t})^{k+1}}\end{aligned}$$

.5.II لنعرّف كثيرات الحدود $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathbb{R}[X]$ كما يلي :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad G_n(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left\{{n\atop k}\right\}X^k \text{ و } G_0(X)=1$$

عندئذ من الواضح أنّه في حالة $n=0$ تتحقّق المساواة

$$\forall x>1,\quad G_n(x)=e^{-x}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}x^k\right)$$

أمّا في حالة n من $\mathbb{N}^*$ فيكون لدينا استناداً إلى ما سبق

$$\forall t>0,\quad G_n(e^t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left\{{n\atop k}\right\}e^{kt}=e^{-e^t}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}(e^t)^k\right)$$

وهذا يبرهن أنّ

$$\forall x > 1, \quad G_n(x) = e^{-x}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}x^k\right)$$

.6. II لنعرّف كثيرات الحدود $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathbb{R}[X]$ كما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n(X) = (X-1)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\left\{ {n \atop k} \right\}X^k \quad \text{و} \quad H_0(X) = X-1$$

عندئذ من الواضح أنّه في حالة $n = 0$ تتحقّق المساواة

$$\forall x \geq 1, \quad H_n(x) = \sum_{k\geq 1}k^n\left(1-\frac{1}{x}\right)^k$$

أمّا في حالة n من $\mathbb{N}^*$ فيكون لدينا استناداً إلى ما سبق

$$\forall t > 0, \quad H_n\left(\frac{1}{1-e^{-t}}\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\left\{ {n \atop k} \right\}\frac{e^{-t}}{(1-e^{-t})^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}k^n e^{-kt}$$

وهذا يبرهن أنّ

$$\forall x \geq 1, \quad H_n(x) = \sum_{k\geq 1}k^n\left(1-\frac{1}{x}\right)^k$$

ومن الواضح أنّه في حالة $n \geq 1$ يقسم $X(X-1)$ كثير الحدود $H_n(X)$، لأنّه عندئذ

$$H_n(X) = (X-1)X\cdot\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\left\{ {n \atop k} \right\}X^{k-1}$$

.7. II ليكن (m,n) من $\mathbb{N}^2$، عندئذ في حالة $n > 0$ لدينا

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}k^n\left(\frac{m}{m+1}\right)^k &= H_n(m+1)\\ &= m(m+1)\cdot\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\left\{ {n \atop k} \right\}(m+1)^{k-1}\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ العدد الموجب $\sum_{k\geq 1}k^n\left(\frac{m}{m+1}\right)^k$ عددٌ طبيعي زوجي في حالة $n \in \mathbb{N}^*$، فهو ينتمي إلى $2\mathbb{N}^*$.

$.8.\mathrm{II}$ لتكن x من $\mathbb{R}_+^*$. عندئذ

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} C_n^k H_k(x) &= \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} C_n^k \left(\sum_{p\geq 1} p^k \left(1-\frac{1}{x}\right)^p \right) \\
&= \sum_{p\geq 1} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^{n-k} p^k \right) \left(1-\frac{1}{x}\right)^p \\
&= \sum_{p\geq 1} \big(\lambda + p\big)^n \left(1-\frac{1}{x}\right)^p
\end{aligned}$$

ففي حالة $\lambda = 1$ نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} C_n^k H_k(x) &= \sum_{p\geq 1} (p+1)^n \left(1-\frac{1}{x}\right)^p \\
&= \frac{x}{x-1} \sum_{p\geq 2} p^n \left(1-\frac{1}{x}\right)^p \\
&= \frac{x}{x-1} \left(H_n(x) - 1 + \frac{1}{x} \right) \\
&= H_n(x) + \frac{1}{x-1} H_n(x) - 1
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ $\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k H_k(x) = \frac{H_n(x)}{x-1} - 1$ ، إذن

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k H_k(X) = \frac{H_n(X)}{X-1} - 1$$

وفي حالة $\lambda = -1$ نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k H_k(x) &= \sum_{p\geq 2} (p-1)^n \left(1-\frac{1}{x}\right)^p \\
&= \frac{x-1}{x} \sum_{p\geq 1} p^n \left(1-\frac{1}{x}\right)^p \\
&= H_n(x) - \frac{1}{x} H_n(x)
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ $\dfrac{H_n(x)}{x} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}C_n^k H_k(x)$ ، إذن

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}C_n^k H_k(X) = \frac{H_n(X)}{X}$$

III.1. نعلم أنّه في حالة $|w| < 1$ لدينا $\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \dfrac{1}{1-w}$، وهذا يثبتُ أنّه في حالة p من $\mathbb{N}^*$ و z من $\mathbb{C}$ يتحقّق الاقتضاء التالي $\sum_{n=0}^{\infty} p^n z^n = \dfrac{1}{1-pz} \quad \Leftarrow \quad |z| < \dfrac{1}{p}$.

III.2. نعلم أنّه توجد أعداد $(\lambda_p)_{1\le p\le k}$ تحقّق

$$\frac{1}{\prod_{1\le p\le k}(1-pz)} = \sum_{p=1}^{k}\frac{\lambda_p}{1-pz}$$

حيث

$$\begin{aligned}
\lambda_m &= \frac{1}{\prod_{\substack{1\le p\le k\\ p\ne m}}\left(1-p/m\right)}\\
&= \frac{m^{k-1}}{(m-1)(m-2)\cdots 1(-1)\cdots\left(m-k\right)}\\
&= \frac{(-1)^{m-k}m^k}{m!(k-m)!}
\end{aligned}$$

III.3. إذن، في حالة $|z| < 1/k$ ، يكون لدينا

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\prod_{1\le p\le k}(1-pz)} &= \frac{1}{k!}\sum_{p=1}^{k}(-1)^{p-k}C_k^p p^k\frac{1}{1-pz}\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{p=1}^{k}(-1)^{p-k}C_k^p p^k\left(\sum_{n=0}^{\infty}p^n z^n\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{p=1}^{k}(-1)^{p-k}C_k^p p^{n+k}\right)z^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left\{\begin{matrix} n+k\\ k\end{matrix}\right\}z^n
\end{aligned}$$

IV. لتكن n من $\mathbb{N}^*$ و k من $\mathbb{N}_n$، نرمز بالرمز S_k^n إلى عدد التوابع الغامرة من مجموعة عدد عناصرها n إلى مجموعة عدد عناصرها k. لتكن p من $\mathbb{N}_n$ ولنرمز بالرمز $\mathcal{F}\left(\mathbb{N}_n,\mathbb{N}_p\right)$ إلى مجموعة التوابع التي منطلقها $\mathbb{N}_n$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{N}_p$. في حالة مجموعة جزئيّة B من $\mathbb{N}_p$ نرمز بالرمز $\mathcal{S}_B^n$ إلى مجموعة التوابع $f:\mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_p$ وتُحقّق $\operatorname{Im} f = B$، في هذه الحالة $\operatorname{card}\left(\mathcal{S}_B^n\right) = S_{\operatorname{card}(B)}^n$. وتؤلِّف الجماعة $\left(\mathcal{S}_B^n\right)_{\varnothing\neq B\subset\mathbb{N}_p}$ تجزئة لـ $\mathcal{F}\left(\mathbb{N}_n,\mathbb{N}_p\right)$. ومن ثَمّ

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{F}\left(\mathbb{N}_n,\mathbb{N}_p\right)\right) = \sum_{\varnothing\neq B\subset\mathbb{N}_p} \operatorname{card}\left(\mathcal{S}_B^n\right) = \sum_{\varnothing\neq B\subset\mathbb{N}_p} S_{\operatorname{card}(B)}^n$$

إذن

$$p^n = \sum_{k=1}^{p} C_p^k S_k^n$$

وكنّا قد أثبتنا في 4.I و 5.I أنّ المساواة السابقة في حالة $1 \leq p \leq n$ تقتضي أن يكون

$$S_p^n = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k k^n = \begin{Bmatrix} n \\ p \end{Bmatrix}$$

وعليه فإنّ العدد $\dfrac{1}{k!}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ يمثّل عدد تجزئات المجموعة $\mathbb{N}_n$ إلى p جزءاً، وهو من ثَمّ عددٌ طبيعي. ■

التمرين 32. ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً. نفترض أنّ f يُحقّق الشرط $\mathcal{H}$ التالي: أياً كان العنصران u و v من $[a,b]$ اللذان يُحقّقان المتراجحة $u<v$ **فيوجدُ** عددٌ λ من $]0,1[$ يُحقّق

$$f\left(\lambda u + (1-\lambda)v\right) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v)$$

أثبت أنّ التابع f تابعٌ محدّبٌ.

الحل

لنتأمّل التابع

$$g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(t) = f\left(ta+(1-t)b\right) - \left(tf(a)+(1-t)f(b)\right)$$

ولنعرّف المجموعة

$$\mathcal{A} = \left\{ t \in [0,1] : g(t) > 0 \right\}$$

ولنفترض جدلاً أنّ $\mathcal{A} \neq \varnothing$.

- ليكن t_0 عنصراً من $\mathcal{A}$. عندئذ $t_0 \notin \left\{0,1\right\}$. لأنّ $g(0) = g(1) = 0$.
- ولأنّ $g(t_0) > 0$ والتابع g مستمرٌّ عند t_0 ، يوجد عددٌ η ينتمي إلى المجال $\left]0, \min(t_0, 1 - t_0)\right[$ يُحقّق

$$\forall t \in \left]t_0 - \eta, t_0 + \eta\right[, \quad g(t) > 0$$

إذن لقد أثبتنا أنّه

$$\forall u \in \mathcal{A}, \ \exists \eta_u > 0, \quad \left]u - \eta_u, u + \eta_u\right[\subset \mathcal{A}$$

- ليكن t_0 عنصراً من $\mathcal{A}$. ولنعرّف العددين

$$\alpha = \inf\left\{ s \in \left[0, t_0\right] : \left]s, t_0\right] \subset \mathcal{A} \right\}$$
$$\beta = \sup\left\{ s \in \left[t_0, 1\right] : \left[t_0, s\right[\subset \mathcal{A} \right\}$$

- إذا كان $\alpha \in \mathcal{A}$ استنتجنا استناداً إلى النقطة السابقة أنّه يوجد مجال $]\alpha - \eta_\alpha, \alpha + \eta_\alpha[$ محتوى في $\mathcal{A}$. ولمّا كان $\alpha < \alpha + \eta_\alpha$ استنتجنا استناداً إلى تعريف α أنّه يوجد في المجال $]\alpha, \alpha + \eta_\alpha[$ عددٌ s يُحقّق $]s, t_0] \subset \mathcal{A}$ ، ولمّا كان $]\alpha - \eta_\alpha, \alpha + \eta_\alpha[\subset \mathcal{A}$ أيضاً استنتجنا أنّ $]\alpha - \eta_\alpha, t_0] \subset \mathcal{A}$ ، وهذا يناقض تعريف α . إذن يجب أن يكون $\alpha \notin \mathcal{A}$. ونبرهن بأسلوب مماثلٍ أنّ $\beta \notin \mathcal{A}$ أيضاً. وعليه

$$g(\beta) \leq 0 \quad \text{و} \quad g(\alpha) \leq 0$$

- استناداً إلى تعريف α توجد متتالية $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تسعى إلى α وتُحقّق $\forall n \in \mathbb{N},]s_n, t_0] \subset \mathcal{A}$ فإذا استفدنا من استمرار g عند s_n استنتجنا أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, g(s_n) \geq 0$. ولمّا كان g مستمرّاً عند α استنتجنا أنّ $g(\alpha) \geq 0$. ونستنتج بأسلوب مماثل أنّ $g(\beta) \geq 0$. وبمقارنة النتيجتين السابقتين نرى أنّ $g(\alpha) = g(\beta) = 0$.

- ومن جهة أخرى نرى وضوحاً من تعريف α و β أنّ $\forall t \in]\alpha, \beta[, g(t) > 0$.

▫ لنتأمّل النقطتين $u = \alpha a + (1-\alpha)b$ و $v = \beta a + (1-\beta)b$. استناداً إلى الفرْض $\mathcal{H}$، يوجد λ ينتمي إلى المجال $]0,1[$ يُحقّق

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) \qquad (*)$$

ولكنّ المساواتين $g(\alpha) = 0$ و $g(\beta) = 0$ تُكافئان

$$f(u) = \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b) \quad \text{و} \quad f(v) = \beta f(a) + (1-\beta)f(b)$$

إذن

$$\lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) = \delta f(a) + (1-\delta)f(b)$$

حيث

$$\delta = \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta \in \left]\alpha,\beta\right[$$

وكذلك فإنّ

$$\lambda u + (1-\lambda)v = \delta a + (1-\delta)b$$

إذن، نستنتج من المتراجحة $(*)$ أنّ

$$f\big(\delta a + (1-\delta)b\big) \leq \delta f(a) + (1-\delta)f(b)$$

أي إنّ $g(\delta) \leq 0$. وهذا يناقض كون g موجباً تماماً على $]\alpha,\beta[$.

نستنتج من التناقض السابق أنّ المجموعة $\mathcal{A}$ يجب أن تكون خالية. أي

$$\forall t \in [0,1], \quad f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

فنكون بذلك قد أثبتنا أنّ كلّ تابع مستمرٍّ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ يُحقّق الشرط $\mathcal{H}$ يحقّق أيضاً المتراجحة

$$\forall t \in [0,1], \quad f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

فإذا طبّقنا هذه الخاصّة نفسها على $f_{|[u,v]}$ في حالة $a \leq u < v < b$ استنتجنا أنّ

$$\forall t \in [0,1], \quad f(tu + (1-t)v) \leq tf(u) + (1-t)f(v)$$

فالتابع f تابعٌ محدّبٌ، ويكتمل الإثبات. ■

التمرين 33. ليكن I و J مجالين غير تافهين من $\mathbb{R}$. نتأمّل تقابلاً $f : I \to J$ محدّباً ومتزايداً. ثمّ نعرّف تدريجياً متتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ باختيار u_0 و v_0 من I تحقّقان $u_0 \le v_0$، ثمّ وضع

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$
$$v_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{f(u_n) + f(v_n)}{2}\right)$$

أثبت أنّ المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتان.

الحل

- لمّا كان التابع f محدّباً استنتجنا أنّه مهما تكن n من $\mathbb{N}$ يكن

$$f(u_{n+1}) = f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) \le \frac{f(u_n) + f(v_n)}{2} = f(v_{n+1})$$

ولأنّ f^{-1} متزايدٌ استنتجنا أنّ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \le v_{n+1}$. فإذا تذكّرنا أنّ $u_0 \le v_0$ استنتجنا أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \le v_n$.

- نستنتج من المتراجحة السابقة أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \ge \frac{u_n + u_n}{2} = u_n$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.

- وكذلك نستنتج من تزايد التابعين f و f^{-1} والمتراجحة نفسها أنّه في حالة n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$v_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{f(u_n) + f(v_n)}{2}\right) \le f^{-1}\left(\frac{f(v_n) + f(v_n)}{2}\right) = f^{-1}\big(f(v_n)\big) = v_n$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة.

- نستنتج مما سبق أنّ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \le u_{n+1} \le v_{n+1} \le v_n$، فلا بُدَّ أن تكون المتتاليتان $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتين.

- لنضع $\lambda = \lim_{n\to\infty} u_n$ و $\Lambda = \lim_{n\to\infty} v_n$. عندئذ نستنتج من $2u_{n+1} = u_n + v_n$ بجعل n تسعى إلى اللانهاية أنّ $\lambda = \Lambda$. وهذا ما يبرهن على أنّ المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتان. ■

دليل مفردات الجزء الأوّل

يشير الرقم إلى الصفحة التي يظهر فيها المفهوم المشار إليه ظهوراً معنوياً

احتلَّ الدكتور عمران قوبا المركز الثاني في مسابقة انتقاء أساتذة التعليم العالي على مستوى الجمهورية الفرنسية "أغرغاسيون" في عام 1985، وحصل على شهادة الدكتوراه في الرياضيات البحتة في اختصاص التحليل التابعي من جامعة بيير وماري كوري في باريس عام 1990.

يدرّس الدكتور قوبا الرياضيات في المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا منذ عام 1990. وقد وضع في هذه السلسلة من الكتب العلميّة أغلب الموضوعات التي درّسها في المعهد العالي في مجالات الجبر العام، والجبر الخطّي، والتحليل، والمعادلات التفاضلية، والتحليل العقدي، والتحويلات التكامليَّة وغيرها، وقد أغنى السلسلة بالعديد من الأمثلة والتطبيقات والمسائل والتمرينات.

تمثّل هذه السلسلة أداة مهمّة لكلِّ الراغبين في دراسة الرياضيّات بصفتها علماً وفنّاً قائمَيْن بذاتهما، أو لأولئك الراغبين في استعمال الرياضيّات بصفتها أداة مهمّة ومفيدة في جميع العلوم الحديثة.

في هذا الجزء الأوّل من سلسلة التحليل الرياضي، يبدأ القارئ بدراسة خواص الأعداد الحقيقية، والمتتاليات والمتسلسلات العددية، ثم ينطلق في دراسة التوابع العددية من جهة استمرارها واشتقاقها.

ISBN 978-9933-9228-8-7
9 789933 922887

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا
Higher Institute for Applied Sciences and Technology
www.hiast.edu.sy