المعهد العالي
للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

الدكتور عمران قوبا

الجبـر

2

الجبر الخطّي

الفضاءات الشعاعية والتطبيقات الخطية
المصفوفات والمحددات
جمل المعادلات الخطية
اختزال التطبيقات الخطية
فضاءات الجداء السلمي

الجبر

الجزء الثاني

الجبر الخطي

الدكتور عمران قوبا

منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

2017

الجبر

الجزء الثاني، الجبر الخطي

الدكتور عمران قوبا

تصميم الغلاف: المؤلف

من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

الجمهورية العربية السورية، 2017.

Algebra

Volume 2, Linear Algebra

Omran Kouba

Publications of the

Higher Institute for Applied Sciences and Technology (HIAST)

Syrian Arab Republic, 2017.

ISBN 978-9933-9228-1-8

منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

- "الجبر، الجزء الأول، مبادئ الجبر المجرد"، للدكتور عمران قوبا، الطبعة الأولى 2009، الطبعة الثانية 2017.
- "التحليل، الجزء الأول"، للدكتور عمران قوبا، الطبعة الأولى 2009، الطبعة الثانية 2017.
- "كيمياء المحاليل المائية"، للدكتورة يمن الأتاسي، الطبعة الأولى 2009، الطبعة الثانية 2016.
- "الأنظمة الرادارية في مواجهة التشويش والخداع"، للدكتور علي طه، 2011.
- "ميكانيك النقطة المادية"، للدكتور مصطفى العليوي والدكتور هاني قوبا، الإصدار الأول 2011، الإصدار الثاني 2016.
- "الجبر، الجزء الثاني، الجبر الخطي"، للدكتور عمران قوبا، 2017.
- "التحليل، الجزء الثاني"، للدكتور عمران قوبا، 2017.
- "المرجع في الرسم الصناعي، الجزء الثالث"، للدكتور محمد بدر قويدر، 2017.
- "مدخل إلى كيمياء المياه: تلوث- معالجة- تحليل"، للدكتور نصر الحايك، 2017.
- "الترموديناميك"، للدكتور عقيل سلوم، 2017.
- "دليل الرسام الصناعي"، للدكتور مصطفى الجرف، 2017.

سيصدر لاحقاً:

- "التحليل، الجزء الثالث"، للدكتور عمران قوبا.
- "التحليل، الجزء الرابع"، للدكتور عمران قوبا.
- "التحليل، الجزء الخامس"، للدكتور عمران قوبا.

لمعلومات أوفى عن المنشورات وطلب نسخة ورقية أو تحميل
المتاح منها إلكترونياً، يمكن الاطلاع على موقع المعهد الإلكتروني:

www.hiast.edu.sy

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا مؤسسة حكومية للتعليم العالي أحدثت بموجب المرسوم التشريعي رقم /24/ لعام 1983، وذلك بهدف إعداد أطر علمية متميزة من مهندسين وباحثين للإسهام الفاعل في عملية التطوير العلمي والتنمية في الجمهورية العربية السورية.
يمنح المعهد العالي درجة الإجازة في الهندسة في الاتصالات والمعلوماتية والنظم الإلكترونية والميكاترونيكس وعلوم وهندسة المواد وهندسة الطيران. يقبل المعهد العالي لدراسة هذه الاختصاصات شريحة منتقاة من المتفوقين في الشهادة الثانوية من الفرع العلمي. يتيح المعهد العالي أيضاً برامج ماجستير أكاديمي في نظم الاتصالات وفي التحكم والروبوتيك وفي نظم المعطيات الكبيرة ونظم المعلومات ودعم القرار وفي علوم وهندسة المواد وعلوم وهندسة البصريات. ويمنح المعهد العالي درجة الدكتوراه في الاتصالات والمعلوماتية ونظم التحكم والفيزياء التطبيقية. تُحدث في المعهد العالي اختصاصات جديدة بحسب متطلبات سوق العمل وتوجهات البحث والتطوير المحلية والعالمية.

يمتاز المعهد بأطره الكفوءة ذات التأهيل العالي وبمختبراته المجهزة تجهيزاً عالياً وببنيته التحتية الفريدة في القطر. إلى جانب النشاط التعليمي، يمارس المعهد العالي عبر جهود أطره وفعالياته العلمية المختلفة نشاطاً حثيثاً في البحث والتطوير، إذ ينفذ مشاريع متنوعة لصالح الجهات العامة والخاصة في القطر، كما يتعاون مع جهات خارج القطر في بعض المشاريع البحثية والتطويرية. يسعى المعهد أيضاً، عبر دورات تدريبية نظرية وعملية متاحة للقطاعين العام والخاص وللأفراد، إلى إفادة أوسع فئة من المهتمين من إمكانيات فريقه العلمي ومختبراته.

استكمالاً لدور المعهد العالي الرائد في مجال التعليم ونشر العلم، يحرص المعهد العالي على نشر كتب علمية عالية المستوى من نتاج أطره العلمية، منها ما هو تدريسي يوافق المناهج في المعهد العالي ويفيد شريحة واسعة من الطلاب الجامعيين عموماً، ومنها ما هو علمي ثقافي. يخضع الكتاب قبل نشره إلى عملية تقويم علمي من مجموعة منتقاة بعناية من أصحاب الاختصاص، إضافةً إلى تدقيق لغوي حفاظاً على سوية عالية للمنشورات باللغة العربية.

يتيح المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا بعضاً من منشوراته على موقعه على الشابكة تحت رخصة المشاع الإبداعي لتعميم الفائدة على شريحة واسعة من القراء.

للتواصل مع المعهد العالي والاطلاع على شروط النشر وآخر المنشورات وتحميل المتاح منها:

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، دمشق، ص.ب 31983
هاتف +(963)(11)5123819
فاكس +(963)(11)5140760
بريد إلكتروني contact@hiast.edu.sy
موقع إلكتروني www.hiast.edu.sy

شكر

أتقدّم بالشكر العميق إلى جميع الزملاء الذين أغنوا بملاحظاتهم فحوى هذا الكتاب، وأسهموا في إعطائه شكله النهائي هذا.

وأخصُّ بالشكر المعلِّم الفاضل الأستاذ الدكتور موفق دعبول، والسادة الأساتذة الدكتور نبيه عودة والدكتور خالد حلاوة على قراءتهم المتمعّنة لهذا الكتاب وعلى الملاحظات القيّمة التي أبدوها عليه. وأخيراً، وليس آخراً، أتقدم بجزيل الشكر والامتنان إلى الأستاذ الدكتور مروان البواب الذي دقّق الكتاب لغوياً وأسهم بملاحظاته ومقترحاته في تحسين صياغة العديد من الفقرات.

محتوى الجزء الأوّل

مقدّمة

الفصل الأوّل

المجموعات والعلاقات وقوانين التشكيل

الفصل الثاني

حقل الأعداد العقديّة

الفصل الثالث

البنى الجبريّة

الفصل الرابع

كثيرات الحدود على حقل تبديلي

الفصل الخامس

الحقول

محتوى الجزء الثاني

مقدّمة

الفصل السادس
الفضاءات الشعاعيّة والتطبيقات الخطيّة

الفصل السابع
الفضاءات الشعاعية المنتهية البعد

الفصل الثامن
الثنويّة في الفضاءات الشعاعيّة

الفصل التاسع

المصفوفات

الفصل العاشر

المُحدِّدات وجمل المعادلات الخطّيّة

الفصل الحادي عشر

اختزال التطبيقات الخطّيّة

الفصل الثاني عشر

الفضاءات الشعاعيّة المزوَّدة بجداء سلّمي

مقدّمة

لم يتغيّر تعريف الرياضيّات من حيث نهجها الاستنتاجيّ منذ أيام قدماء الإغريق، مروراً بالرياضيّين العرب الكبار، وحتى أيّامنا هذه، إذ تقوم الرياضيات ببناء نظريات بدءاً من مفاهيم أساسية معتمدة على المحاكمة المنطقية فقط. لقد كانت تتباين درجة وضوح وجلاء هذا المسعى باختلاف الأشخاص والأزمنة إلّا أنّها لم تتغير في طبيعتها. أمّا الموضوع الذي تقوم حوله أو تبنى عليه المحاكمة الرياضية فهو بحدِّ ذاته كيفيّ، إذْ يكفي أن يتقبل هذا الموضوع المحاكمة المنطقية أسلوباً للمعالجة وأن يثير اهتمام الرياضيّ –أو من يعمل هذا الأخير لحسابه– حتى يولد فصلٌ جديدٌ في الرياضيات.

تُبرّر النقطة السابقة استعمال الرياضيّات المتزايد في العلوم الأخرى، نظراً إلى سعي هذه الأخيرة وراء الدقة، ووراء بناء نظريات على أسس مُحكمة. هذا ولقد أصبح تصور العديد من الاتجاهات العلميّة خارج بيئتها الرياضيّة الطبيعية أمراً صعباً جداً بل مستحيلاً في عصرنا الراهن.

لقد بنينا هذا الكتاب ليقدّم للطالب المعارف الأساسية في هذا العلم، وليطلعه على المفاهيم الجبرية اللازمة لدراسته اللاحقة، وذلك دون إسراف في التعمّق، ودون إجحاف بحق المادة المقدّمة. ومن ناحية أخرى، زوّدنا الكتاب بالعديد من التمارين التي نرى أنّ حلّ الطالب لها أمرٌ لا غنى عنه لضمان استيعابه للمادة، كما عرضنا مقترحات حلولٍ لهذه التمارين لعلّ الطالب يجد في ذلك فائدة.

لقد قسمنا هذا الكتاب إلى جزأين، وخصّصنا الجزء الثاني هذا إلى دراسة مبادئ الجبر الخطّي.

نشأ الجبر الخطّي من دراسة جمل المعادلات الخطّية، التي بدأها LEIBNITZ في عام ١٦٧٨ ثُم تابعها MACLAURIN فأعطى العلاقات التي تفيد في حل جمل المعادلات الخطيّة بمجهولين وبثلاثة مجاهيل عام ١٧٤٨. وأكمل CRAMER دراسة الحالة العامّة في عام ١٧٥٤.

ثُم جاءت، انطلاقاً من الدراسات السابقة، فكرة تعريف المُحدّد من المرتبة n وذلك بالتدريج على العدد n عن طريق نشر المحدّد وفق سطر أو عمود، لكلٍّ من VANDERMOND وLAPLACE.

ومن جهة أخرى، اعتمد العالم الرياضي الألماني الفذّ GAUSS في كتابه المهمّ "Recherches Arithmétiques" رمزاً في هيئة جدولٍ للدلالة على تحويل خطّي، فظهر مفهوم المصفوفة، ثُم عرّف GAUSS ضرب المصفوفات. وهذا ما سمح للعالم CAUCHY باكتشاف قاعدة جداء ضرب مُحدِّدَيْن التي نشرها في أطروحة عام ١٨١٥.

وبقي مفهوما المصفوفة والمحدِّد متلازمين تلازماً شديداً في أذهان علماء الرياضيات مدةً من الزمن. وفي عام ١٨٢٦ عرّف CAUCHY كثير الحدود المميِّز لمصفوفة، وذلك في دراسته للمحاور الأساسيّة لسطح من الدرجة الثانية. ثُم تطوّرت نظريّة المصفوفات في منتصف القرن التاسع عشر على يد كلٍّ من CAYLEY و SYLVESTER. وأصبحت المفاهيم الجديدة متعارفة ومألوفة أكثر فأكثر، وهذا ما أفسح المجال لظهور مفهوم الفضاء الشعاعي الذي بعده n ، والذي تحدّث عنه أوّل مرة كلٌّ من CAYLEY وGRASSMAN في الأعوام ١٨٤٣ـ١٨٤٥، وأخيراً صاغ PEANO عام ١٨٨٨ التعاريف النهائيّة، المبنيّة على موضوعات أوّلية، للجبر الخطّي.

بقيت وجهة النظر المصفوفيّة، المبنية على جمل الإحداثيات، مهيمنة على الجبر الخطّي حتى الثلاثينيات من القرن العشرين، ثُم أخذت النظرة الهندسيّة الحديثة، القائمة على الفضاءات الشعاعيّة والتطبيقات الخطيّة، تؤدّي دورها أكثر فأكثر بسبب عموميّتها، واستقلالها عن الجمل الإحداثيّة.

لنأتِ الآن إلى وصف فصول الجزء الثاني:

- يتضمّن الفصل السادس التعاريف الأساسيّة في الفضاءات الشعاعيّة والتطبيقات الخطيّة.
- ويدرس الفصل السابع مسألة البُعد في الفضاءات الشعاعيّة، وبوجه خاص الفضاءات الشعاعية ذات الأبعاد المنتهية.
- ويعالج الفصل الثامن الأشكال الخطيّة على فضاء شعاعيّ، والثنويّة في الفضاءات الشعاعيّة.
- ويتصدّى الفصل التاسع لدراسة المصفوفات، والعمليات عليها، وخواصها، ثُم علاقتها بالتطبيقات الخطيّة.
- ويعرض الفصل العاشر مفهوم المحدِّد، وطرائق حسابه، إضافة إلى أساليب حل جمل المعادلات الخطيّة.
- ويشتمل الفصل الحادي عشر على دراسة اختزال التطبيقات الخطيّة، أي إمكان تمثيلها بمصفوفات قطريّة أو مثلّثية.
- وأخيراً نجد في الفصل الثاني عشر الفضاءات الشعاعيّة المزوّدة بجداء سلّمي، وهي بنى غنيّة جداً، تتلازم فيها دراسة الجبر مع دراسة التحليل، فتعطي العديد من النظريات المهمّة. ونفترض عند دراسة هذا الفصل أنّ القارئ على دراية ببعض خواص الفضاءات الشعاعية المنظّمة.

هذا ويتبع كل فصل من فصول الكتاب مجموعة من التمرينات المتباينة في درجات صعوبتها، تهدف إلى مساعدة الطالب على اكتساب المهارات اللازمة، واستيعاب المفاهيم المدروسة.

ومن المفيد هنا الإشارة إلى أنّ دراسة كتاب رياضيات تختلف اختلافاً جوهرياً عن قراءة قصّة أو كتاب شعر، يستمتع بهما المرء جالساً على كرسي مريح، إذ لا بُد من قلم وورقة ومنضدة نجلس إليها، نعالج المادّة النظريّة ونُغالب التمرينات حلّاً ومعاناة.

لذلك ننصح القارئ ألاّ يطّلع على الحلول المُقترحة للتمارين إلاّ بعد أن يستنفد جميع محاولات حلّها، وعليه في جميع الأحوال إعادة صياغة الحلّ بلغته، ليضمن الاستيعاب الكامل للمفاهيم والأفكار المُعالجة.

في الختام، أشكر جزيل الشكر كل الزملاء والأصدقاء الذين ساهموا في جعل هذا الكتاب يرى النور. وأشكر كذلك الزملاء والقرّاء على أي انتقاد بنّاء أوملاحظة على هذا الكتاب.

تموز 2017 عمران قوبا

الفضاءات الشعاعيّة والتطبيقات الخطّيّة

1. عموميّات

1-1. تعريف. لتكن E مجموعة غير خالية، وليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديليّاً. نفترض أنّ المجموعة E مزودة بقانوني تشكيل أوّلهما داخلي $+ : E \times E \to E, (x,y) \mapsto x+y$ وثانيهما خارجيّ $\bullet : \mathbb{K} \times E \to E, (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$. نقول إنّ البنية $(E,+,\bullet)$ **فضاءٌ شعاعيّ** على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$، إذا وفقط إذا تحقّقت الشروط الآتية.

❶ البنية $(E,+)$ زمرة تبديليّة.

❷ يحقّق قانون التشكيل الخارجيّ $(\bullet)$ الخواص الآتية:

① أيّاً كان x من E، كان $1 \cdot x = x$.

② أيّاً كان x من E و (α, β) من $\mathbb{K}^2$، كان

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

③ أيّاً كانت (x,y) من E و α من $\mathbb{K}$، كان

$$\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$

④ أيّاً كانت x من E و (α, β) من $\mathbb{K}^2$، كان $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$.

نسمّي عناصر E **أشعّة**، ونسمّي عناصر $\mathbb{K}$ **مؤثّرات سلّميّة**.

2-1. أمثلة

➢ ليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديليّاً وليكن $1 \leq n$. تكوّن المجموعة $E = \mathbb{K}^n$ مزودةً بقانوني التشكيل الآتيين فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$.

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot (x_1, \ldots x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

➢ بوجه أعمّ، إذا كان E فضاءً شعاعيّاً على حقل $\mathbb{K}$، وكانت X مجموعة غير خالية، كوّنت مجموعة التوابع التي منطلقها X ومستقرّها E والتي نرمز إليها $\mathcal{F}(X,E)$ فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{K}$ بالنسبة إلى القانونين المعرّفين كما يأتي:

$$\forall x \in X, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$\forall x \in X, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

نسمّي أيَّ عنصر من $\mathcal{F}(I,E)$ ، **جماعةً** من عناصر E مجموعة أدلّتها I ، وعندئذ نرمز إلى هذا العنصر بالرمز $(x_i)_{i\in I}$ ، ونرمز إلى الفضاء $\mathcal{F}(I,E)$ بالرمز E^I .

- إذا كانت $E_1,\ldots,E_n$ فضاءات شعاعيّة على حقل $\mathbb{K}$ ، يجعل القانونان الآتيان الجداء الديكارتي $F = E_1\times\cdots\times E_n$ فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{K}$:

$$(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n) = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$$
$$\lambda\cdot(x_1,\ldots x_n) = (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$$

- تكوّن $\mathbb{K}[X]$ أي مجموعة كثيرات الحدود بمتحوّل واحد على حقل $\mathbb{K}$ ، فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{K}$ ، بالنسبة إلى قانوني جمع كثيرات الحدود وضربها بعدد من $\mathbb{K}$.

لنذكّر ببعض الخواص البسيطة التي نترك إثباتها تمريناً للقارئ:

1-3. مبرهنة. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$ ، عندئذ أيّاً كان x من E ، و α من $\mathbb{K}$ كان :

1. $0_E = \alpha\cdot 0_E$ و $0_{\mathbb{K}}\cdot x = 0_E$.
2. إذا كان $\alpha\cdot x = 0_E$ فإمّا أن يكون $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ أو $x = 0_E$.
3. وأخيراً : $(-\alpha)\cdot x = \alpha\cdot(-x) = -(\alpha x)$.

1-4. مبرهنة. ليكن $(E,+,\cdot)$ فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$ ، ولتكن F مجموعة جزئية من E . نقول إنّ F **فضاء شعاعي جزئي** من E ، إذا وفقط إذا كان $F\neq\varnothing$ ، وكانت F مغلقة بالنسبة إلى قانونيّ التشكيل المعرّفين على E . عندئذ تكون المجموعة F المزوّدةُ بمقصورَيْ قانوني التشكيل $(+)$ و $(\cdot)$ على $F\times F$ و $\mathbb{K}\times F$ على التوالي، فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$.

ويتحقّق القارئ بسهولة صحةَ المبرهنة الآتية:

1-5. مبرهنة. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$ ، ولتكن F مجموعة جزئية من E . عندئذ يكون F فضاءً شعاعيّاً جزئياً من E ، إذا وفقط إذا كان $F\neq\varnothing$ ، وتحقَّق الشرط:

$$\forall(x,y)\in F\times F,\quad \forall\lambda\in\mathbb{K},\quad \lambda\cdot x+y\in F$$

كلٌّ من $\{0_E\}$ و E فضاء شعاعيٌّ جزئيٌّ من E . نسمّيهما الفضاءين الجزئيين التافهين.

1-6. أمثلة.

- ليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديليّاً، وليكن n عدداً طبيعياً. عندئذ تكوِّن المجموعة

$$\mathbb{K}_n[X] = \left\{P \in \mathbb{K}[X] : \deg P \leq n\right\}$$

فضاء شعاعياً جزئياً من $\mathbb{K}[X]$.

- إذا كانت I مجموعة غير خالية، وكان $\mathbb{K}$ حقلاً تبديليّاً، كوَّنت المجموعة

$$\mathbb{K}^{(I)} = \left\{(x_i)_{i\in I} : \operatorname{card}\left(\left\{i \in I : x_i \neq 0\right\}\right) < +\infty\right\}$$

فضاءً شعاعياً جزئياً من $\mathbb{K}^I$. نسمّي أيَّ عنصر من $\mathbb{K}^{(I)}$ **جماعة شبه معدومة** من عناصر $\mathbb{K}$ مجموعةُ أدلّتها I . لاحظ أنّ $\mathbb{K}^{(I)} = \mathbb{K}^I$ إذا وفقط إذا كانت I مجموعة منتهية. ولنذكِّر أنّ فضاء كثيرات الحدود $\mathbb{K}[X]$ ما هو إلاّ $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.

- وبوجه أعمّ، إذا كانت I مجموعة غير خالية، وكان E فضاء شعاعيّاً على حقل $\mathbb{K}$ ، كوَّنت المجموعة

$$E^{(I)} = \left\{(x_i)_{i\in I} : \operatorname{card}(\{i \in I : x_i \neq 0_E\}) < +\infty\right\}$$

فضاءً شعاعياً جزئياً من $E^I = \mathcal{F}(I,E)$. نسمّي أيَّ عنصر من $E^{(I)}$ جماعة أشعّة شبه معدومة من عناصر E مجموعةُ أدلّتها I .

1-7. مبرهنة. ليكن E فضاء شعاعيّاً على حقل $\mathbb{K}$ ، ولتكن $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ جماعة من الفضاءات الشعاعيّة الجزئيّة من E . عندئذ يكون $F = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ فضاءً شعاعيّاً جزئياً من E .

الإثبات

الإثبات تحقّقٌ مباشر انطلاقاً من التعريف. ❐

1-8. **مبرهنة وتعريف**. ليكن E فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$، ولتكن $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ جماعة من الفضاءات الشعاعيّة الجزئيّة من E. نسمّي أصغر[1] فضاء شعاعيّ جزئي من E يحوي $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ **الفضاء الجزئي المولَّد** بالجماعة $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$، ونرمز إليه بالرمز $\sum_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$.
إنّ $\sum_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ هو تقاطع جميع الفضاءات الشعاعية الجزئية من E الحاوية $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$، ويُعطى أيضاً بالعلاقة:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \left\{ \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda : (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in E^{(\Lambda)}, \quad \forall\lambda\in\Lambda,\, x_\lambda \in F_\lambda \right\}$$

1-9. **ملاحظة**. إذا كانت $\Lambda = \mathbb{N}_n = \{1,\ldots,n\}$، وكانت $F_1, F_2, \ldots, F_n$ فضاءات شعاعيّة جزئية من E كتبنا $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$، أو $\sum_{k=1}^n F_k$ للدلالة على الفضاء الشعاعيّ المولّد بالجماعة $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$، ويكون:

$$\sum_{k=1}^n F_k = \left\{ x_1 + \cdots + x_n : \forall k \in \mathbb{N}_n, x_k \in F_k \right\}$$

2. التطبيقات الخطّية

2-1. **تعريف**. ليكن E و F فضاءين شعاعيّين على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$، نقول إنّ **التطبيق** $u : E \to F$ **تطبيقٌ خطّي** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

$$\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall(x,y)\in E\times E,\ u(\lambda\cdot x + y) = \lambda\cdot u(x) + u(y)$$

ونرمز بالرمز $\mathcal{L}(E,F)$ إلى مجموعة التطبيقات الخطّية التي منطلقها E ومستقرها F. وهي فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{F}(E,F)$؛ أي فضاء التوابع التي منطلقها E ومستقرها F. وإذا كان u تطبيقاً من $\mathcal{L}(E,F)$ رمزنا بالرمز $\ker u$ إلى **نواته**؛ أي إلى المجموعة $u^{-1}(\{0\})$، ورمزنا بالرمز $\operatorname{Im} u$ إلى **صورته**؛ أي $u(E)$.

---

[1] بالنسبة إلى علاقة الاحتواء.

إنّ كلّاً من $\ker u$ و $\operatorname{Im} u$ فضاء شعاعيّ جزئي، وهذا ناتج من المبرهنة الآتية :

2-2. **مبرهنة**. ليكن E و F فضاءين شعاعيّين على الحقل $\mathbb{K}$، وليكن u تطبيقاً خطّياً من $\mathcal{L}(E,F)$. وليكن E_1 و F_1 فضاءين شعاعيّين جزئيين من E و F على التوالي. عندئذ يكون $u(E_1)$ و $u^{-1}(F_1)$ فضاءَيْن شعاعيَّيْن جزئيين من F و E على التوالي.

الإثبات

ليكن y_1 و y_2 عنصرين من $u(E_1)$. عندئذ يوجد عنصران x_1 و x_2 من E_1، يُحقّقان $u(x_1) = y_1$ و $u(x_2) = y_2$، ومن ثَمّ أيّاً كانت λ من $\mathbb{K}$ كان

$$\lambda \cdot y_1 + y_2 = u(\underbrace{\lambda \cdot x_1 + x_2}_{\in E_1}) \in u(E_1)$$

وعليه يكون $u(E_1)$ فضاءً شعاعيّاً جزئياً من F .

وكذلك ليكن x_1 و x_2 عنصرين من $u^{-1}(F_1)$. عندئذ، أيّاً كانت λ من $\mathbb{K}$، كان

$$u(\lambda \cdot x_1 + x_2) = \lambda \cdot u(x_1) + u(x_2) \in F_1$$

ومن ثَمّ $\lambda \cdot x_1 + x_2 \in u^{-1}(F_1)$. إذن $u^{-1}(F_1)$ فضاء شعاعيّ جزئي من E . ❐

3-2. **مبرهنة**. ليكن E و F فضاءين شعاعيّين على الحقل $\mathbb{K}$، وليكن u تطبيقاً خطّياً من $\mathcal{L}(E,F)$. عندئذ يكون u متبايناً إذا وفقط إذا كان $\ker u = \{0_E\}$.

الإثبات

إنّ هذا التكافؤ واضح لأنّه، أيّاً كان (x,y) من $E \times E$، كان

$$u(x) = u(y) \Leftrightarrow u(x-y) = 0 \Leftrightarrow x - y \in \ker u$$

وهذا يثبت الخاصة المطلوبة. ❐

المبرهنة الآتية واضحة.

4-2. **مبرهنة**. لتكن E و F و G فضاءات شعاعيّة على $\mathbb{K}$، وليكن u من $\mathcal{L}(E,F)$، و v من $\mathcal{L}(F,G)$. عندئذ يكون $v \circ u$ تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E,G)$.

5-2. **ملاحظة**. لقد جرت العادة أن نرمز بالرمز $\mathcal{L}(E)$ إلى الفضاء $\mathcal{L}(E,E)$، وهو يكوّن جبراً على الحقل $\mathbb{K}$ بالنسبة إلى القوانين $(+,\circ,\cdot)$ وهو غير تبديليّ في الحالة العامّة.

2-6. **تعريف**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على الحقل التبديليّ $\mathbb{K}$، نرمز بالرمز $\mathcal{GL}(E)$ إلى مجموعة التقابلات الخطيّة من E إلى E، وهي زمرة بالنسبة إلى قانون تركيب التطبيقات $(\circ)$.
تُسمّى الزمرةُ $\left(\mathcal{GL}(E),\circ\right)$ **الزمرة الخطية** على الفضاء E.

2-7. **مثال**. إذا كان $\mathbb{K}$ حقلاً تبديليّاً، وكان a عنصراً من $\mathbb{K}$. رمزنا بالرمز H_a إلى التطبيق الخطّي $H_a : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, H_a(x) = ax$ من $\mathcal{L}(\mathbb{K})$. وعندئذ يكون

$$\mathcal{L}(\mathbb{K}) = \left\{H_a : a \in \mathbb{K}\right\}$$

ويعرّف التطبيق $H_a \mapsto a$ تشاكلاً تقابلياً زمريّاً بين $(\mathcal{GL}(\mathbb{K}),\circ)$ و $(\mathbb{K}^*,\cdot)$.

3. جماعات وجمل الأشعة

3-1. **تعريف**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$، ولتكن n من $\mathbb{N}^*$. نتأمّل جملة $(x_1,\ldots,x_n)$ من عناصر E، أي عنصراً من E^n، والتطبيق الخطي

$$\Phi : \mathbb{K}^n \to E, \quad (a_1,a_2,\ldots,a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

نسمّي كل عنصر من النمط $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ **عبارة خطّية** بالجملة $(x_1,\ldots,x_n)$. ونسمّي صورة التطبيق Φ، **الفضاء الشعاعيّ المولّد بالجملة** $(x_1,\ldots,x_n)$. ونكتب :

$$\mathrm{vect}\left((x_1,\ldots x_n)\right) = \mathrm{Im}\,\Phi = \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k x_k : (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{K}^n\right\}$$

☜ نقول إنّ الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ تولّد الفضاء E أو إنّها **جملة مولِّدة** في E، إذا وفقط إذا كان Φ غامراً، وهذا يكافئ قولنا إنه بالإمكان كتابة كل عنصر من E عبارةً خطيّةً بالجملة $(x_1,\ldots,x_n)$، أو إنّ $E = \mathrm{vect}\left((x_1,\ldots,x_n)\right)$.

☜ ونقول إنّ الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ **حرّة**، أو **مستقلة خطيّاً**، إذا وفقط إذا كان Φ متبايناً، أي $\ker\Phi = \{0\}$، وهذا يكافئ الشرط:

$$\forall(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{K}^n, \ \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = 0\right) \Rightarrow \left(a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0\right)$$

ونقول إنّ الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ **مرتبطة خطيّاً** إذا لم تكن حرّة.

☜ وأخيراً نقول إنّ الجملة $(x_1,\dots,x_n)$ **أساسٌ** للفضاء E، إذا وفقط إذا كان Φ تقابلاً، أي إذا وفقط إذا كانت الجملة $(x_1,\dots,x_n)$ حرّة ومولِّدة في آن معاً.

هذا ويمكننا تعميم هذا التعريف ليشمل جماعات الأشعّة كما يأتي:

2-3. تعريف. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$، ولتكن I مجموعة غير خالية، ونتأمّل جماعة $(x_i)_{i\in I}$ من عناصر E، أي عنصراً من E^I. ولنتأمّل التطبيق الخطي

$$\Psi : \mathbb{K}^{(I)} \to E, \quad (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i x_i$$

إذ نلاحظ أن للمجموع السابق معنى، لأن الجماعة $(a_i)_{i\in I}$ شبه معدومة.

كما في السابق، نسمّي صورة التطبيق Ψ، الفضاء الشعاعيّ المولّد بالجماعة $(x_i)_{i\in I}$، ويكون

$$\operatorname{vect}\left((x_i)_{i\in I}\right) = \left\{\sum_{j\in J} a_j x_j : \left(J \text{ مجموعة جزئية منتهية من } I\right) \wedge \left((a_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J\right)\right\}$$

ونسمي كل عنصر من هذه الصورة عبارة خطيّة بالجماعة $(x_i)_{i\in I}$.

☜ نقول إنّ الجماعة $(x_i)_{i\in I}$، تولّد الفضاء E، أو إنها **جماعة مولِّدة** في E إذا وفقط إذا كان Ψ غامراً، وهذا يكافئ قولنا إنه بالإمكان كتابة كل عنصر من E عبارةً خطيّةً بجماعة جزئية منتهية من الجماعة $(x_i)_{i\in I}$، أو إنّ $E = \operatorname{vect}\left((x_i)_{i\in I}\right)$.

☜ ونقول إنّ الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ جماعة **حرّة**، أو **مستقلة خطيّاً**، إذا وفقط إذا كان Ψ متبايناً، أي $\ker \Psi = \{0\}$، وهذا يكافئ كون كلِّ جماعة جزئية منتهية من الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ جماعةً حرةً.

ونقول إنّ الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ **مرتبطة خطيّاً** إذا لم تكن حرّة.

☜ وأخيراً نقول إنّ الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ **أساسٌ** للفضاء E، إذا وفقط إذا كان Ψ تقابلاً، أي إذا وفقط إذا كانت الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ حرّة ومولِّدة في آن معاً.

لنُدرج في المبرهنة الآتية بعض الخواص البسيطة.

3-3. مبرهنة. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$، ولتكن I مجموعة غير خالية. نتأمّل جماعة $(x_i)_{i\in I}$ من عناصر E.

① إذا كانت $(x_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة، كانت كلُّ جماعة $(x_i)_{i\in J}$ جزئية منها حرةً أيضاً.

② إذا كانت $(x_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة، كان $\forall i \in I,\ x_i \neq 0$، وكان التطبيق $i \mapsto x_i$ متبايناً.

③ إذا كانت $(x_i)_{i\in J}$ جماعة جزئية مرتبطة خطياً من الجماعة $(x_i)_{i\in I}$، كانت الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ نفسُها مرتبطة خطيّاً.

④ تكون الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ مرتبطة خطيّاً إذا وفقط إذا أمكن التعبير عن أحد الأشعّة x_{i_0} بعبارة خطيّة بالجماعة $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$.

الإثبات

نحتفظ برموز التعريف السابق.

① هذه النتيجة واضحة، لأنّ مقصور التطبيق المتباين Ψ على الفضاء الجزئي المولّد بالجماعة الجزئيّة $(x_i)_{i\in J}$، أي $\operatorname{vect}\big((x_i)_{i\in J}\big)$، يكون متبايناً أيضاً.

② الجملة المؤلفة من عنصر واحد هو 0 مرتبطة. وكذلك تكون كلُّ جملة من النمط (x,x). ونحصل على النتيجة المطلوبة بالاستفادة من ①.

③ تنتج هذه الخاصة من نفي الخاصة ①.

④ إذا كانت الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ مرتبطة خطيّاً، أمكننا أن نجد جماعة $(a_i)_{i\in I}$ شبه معدومة وغير معدومة تُحقّق $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$. ولمّا كانت $(a_i)_{i\in I}$ غير معدومة، وُجِدَ في I عنصرٌ i_0 يُحقّق $a_{i_0} \neq 0$، ومن ثمّ يكون $x_{i_0} = -\sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \frac{a_i}{a_{i_0}} x_i$.

وبالعكس، إذا كان $x_{i_0} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} b_i x_i$ حيث $(b_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ جماعة شبه معدومة من $\mathbb{K}$، وعرّفنا الجماعة شبه المعدومة وغير المعدومة $(a_i)_{i\in I}$ بوضع $a_{i_0} = 1$ و $a_i = -b_i$ حين يكون $i \in I\setminus\{i_0\}$، كان $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$ وكانت الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ مرتبطة خطيّاً. ❐

4-3. أمثلة.

- ليكن $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ فضاء التوابع الحقيقية المعرّفة على $\mathbb{R}$. ولنعرّف أيّاً كان α من $\mathbb{R}$ التابع $f_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto|x-\alpha|$. عندئذ تكون الجماعة $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ جماعةً حرّة.

  في الحقيقة، لو كانت هذه الجماعة مرتبطة لأمكن التعبير عن أحد العناصر، وليكن f_β مثلاً، بصفته تركيباً خطيّاً بالجماعة $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{\beta\}}$. وأمكننا، من ثَمّ، إيجاد $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ من $\mathbb{R}\setminus\{\beta\}$ و $a_1,\ldots,a_n$ من $\mathbb{R}$ لتتحقّق المساواة

$$f_\beta=\sum_{k=1}^{n}a_k f_{\alpha_k}$$

  ولـمّا كان $\beta\notin\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ كانت التوابع $(f_{\alpha_k})_{1\le k\le n}$ قابلة للاشتقاق عند β، ومن ثَمّ كان f_β قابلاً للاشتقاق عند β وهذا خُلفٌ واضح.

- ليكن $E=\mathbb{K}[X]$ فضاء كثيرات الحدود على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$، ولنتأمّل تطبيقاً متزايداً تماماً $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$، وجماعة $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من E تحقّق $\deg P_n=\varphi(n)$. عندئذ تكون الجماعة $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حرّةً. وفي الحالة الخاصّة التي يكون فيها $\varphi(n)=n$ أيّاً كان n من $\mathbb{N}$، تُكوّن الجماعة $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أساساً للفضاء E.

- ليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديليّاً، ولتكن n من $\mathbb{N}^*$. تكوّن الجملة $(e_k)_{1\le k\le n}$، و e_k هو العنصر $(0,\ldots,0,\underset{k}{1},0,\ldots,0)$ من $\mathbb{K}^n$، أساساً للفضاء $\mathbb{K}^n$ نسميّه **الأساس القانونيّ**.

- ليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديليّاً، ولتكن I مجموعة غير خالية. نعرّف في حالة i من I العنصر e_i بأنّه العنصر $e_i=(\delta_{i,j})_{j\in I}$ من $\mathbb{K}^{(I)}$، حيث $\delta_{i,j}$ هو رمز كرونيكر Kronecker الذي يساوي 1 عندما $i=j$ ويساوي 0 عندما $i\ne j$، عندئذ تكوّن الجماعة $(e_i)_{i\in I}$، أساساً للفضاء $\mathbb{K}^{(I)}$ نسميّه **الأساس القانونيّ**.

- وفقاً للتعريف السابق، تكوّن الجماعة $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ الأساس القانوني لفضاء كثيرات الحدود $\mathbb{K}[X]$، الذي يساوي $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.

3-5. **مبرهنة**. ليكن E و F فضاءين شعاعيّين على حقل تبديلي $\mathbb{K}$، وليكن u تطبيقاً خطّياً من $\mathcal{L}(E,F)$، ولتكن I مجموعة غير خالية، و $(x_i)_{i\in I}$ جماعة من عناصر E.

① إذا كانت $(u(x_i))_{i\in I}$ جماعة حرّة، كانت الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ حرةً أيضاً.

② إذا كان u متبايناً وكانت $(x_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة، كانت $(u(x_i))_{i\in I}$ جماعة حرّة.

③ إذا كانت $(x_i)_{i\in I}$ جماعة مولِّدة، كان $\operatorname{Im} u = u(E) = \operatorname{vect}\big((u(x_i))_{i\in I}\big)$.

الإثبات

الإثبات بسيطٌ انطلاقاً من التعريف ونتركه تمريناً للقارئ. ❒

3-6. **مبرهنة**. ليكن E و F فضاءين شعاعيّين على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن $(e_i)_{i\in I}$ أساساً للفضاء E، ولتكن $(y_i)_{i\in I}$ جماعة من F. عندئذ يوجد تطبيق خطّي وحيد u من $\mathcal{L}(E,F)$ يحقّق $\forall i \in I,\ \ u(e_i) = y_i$.

الإثبات

نثبت أوّلاً الوحدانيّة. ليكن u و v تطبيقين خطّيين من $\mathcal{L}(E,F)$ يحقّقان

$$\forall i \in I,\ \ u(e_i) = y_i \quad \text{و} \quad \forall i \in I,\ \ v(e_i) = y_i$$

عندئذ يكون $\forall i \in I,\ \ (u-v)(e_i) = 0$ ومن ثَمّ

$$\{e_i : i \in I\} \subset \ker(u-v)$$

ولمّا كان $\ker(u-v)$ فضاءً شعاعيّاً جزئياً من E كان

$$E = \operatorname{vect}((e_i)_{i\in I}) \subset \ker(u-v)$$

ومنه ينتج أنّ $\forall x \in E,\ \ (u-v)(x) = 0$، وهذا يكافئ قولنا $u = v$.

لإثبات الوجود، نتأمّل التطبيقين الخطّيين

$$\Psi : \mathbb{K}^{(I)} \to E : (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i e_i$$
$$\Theta : \mathbb{K}^{(I)} \to F : (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i y_i$$

إنّ Ψ تقابلٌ خطّي لأنّ $(e_i)_{i\in I}$ أساس للفضاء E، ومن ثَمّ يكون $u = \Theta \circ \Psi^{-1}$ تطبيقاً من $\mathcal{L}(E,F)$، يحقّق وضوحاً الشرط $\forall i \in I,\ \ u(e_i) = y_i$. ❒

4. المجموع المباشر والفضاءات المتتامّة

4-1. **تعريف**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن E_1 و E_2 فضاءَيْن شعاعيّين جزئيين من E. نقول إنّ الفضاء الشعاعي الجزئي $F = E_1 + E_2$ **مجموع مباشر** للفضاءين الجزئيين E_1 و E_2، ونكتب عندها $F = E_1 \oplus E_2$، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

وبوجه عام، إذا كانت $(E_i)_{i\in I}$ جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E، نقول إنّ الفضاء الشعاعي الجزئي $F = \sum_{i\in I} E_i$ مجموع مباشر للجماعة $(E_i)_{i\in I}$، ونكتب عندها $F = \bigoplus_{i\in I} E_i$، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط :

$$\forall i \in I,\ \ E_i \cap \Big(\sum_{j\in I\setminus\{i\}} E_j \Big) = \{0\}$$

☜ من المهم الإشارة هنا إلى أنّ الشرط السابق **لا** يكافئ قولنا $E_i \cap E_j = \{0\}$ وذلك أيّاً كان الدليلان المختلفان i و j من I^2.

4-2. **تعريف**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن E_1 و E_2 فضاءين شعاعيّين جزئيين من E ، نقول إنّ E_1 و E_2 **متتامّان** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

$$E = E_1 \oplus E_2$$

وبوجه عام، إذا كانت $(E_i)_{i\in I}$ جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E، نقول إنّ الجماعة $(E_i)_{i\in I}$ **متتامّة** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط: $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$.

4-3. **مبرهنة** : ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. ولتكن $(E_i)_{i\in I}$ جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E. عندئذ يكون الفضاء الجزئي $F = \sum_{i\in I} E_i$ مجموعاً مباشراً إذا وفقط إذا كانت جماعةً معدومةً كلُّ جماعةٍ شبهَ معدومة $(x_i)_{i\in I}$ من $E^{(I)}$ محقّقة للشرطين :

$$\forall i \in I,\quad x_i \in E_i \quad \text{و} \quad \sum_{i\in I} x_i = 0.$$

أي مهما تكن $(x_i)_{i\in I}$ من $E^{(I)}$، يكن

$$\Big(\sum_{i\in I} x_i = 0\Big) \wedge \Big(\forall i \in I,\ x_i \in E_i\Big) \Rightarrow \Big(\forall i \in I,\ x_i = 0\Big)$$

الإثبات

لنفترض أولاً أنّ $F = \bigoplus_{i\in I} E_i$. ولتكن $(x_i)_{i\in I}$ جماعة شبه معدومة تنتمي إلى الفضاء $E^{(I)}$ وتُحقّق الشرطين :

$$\forall i \in I, x_i \in E_i \quad \text{و} \quad \sum_{i\in I} x_i = 0$$

وليكن k دليلاً من I . عندئذ يكون لدينا

$$x_k = \sum_{i\in I\setminus\{k\}} (-x_i) \in E_k \bigcap \left(\sum_{i\in I\setminus\{k\}} E_i\right) = \{0\}$$

ومن ثَمّ $x_k = 0$. إذن لقد أثبتنا أنّ $\forall k \in I, x_k = 0$.

وبالعكس، ليكن k دليلاً من I، وليكن y عنصراً من $E_k \cap \left(\sum_{i\in I\setminus\{k\}} E_i\right)$. توجد عندئذ جماعة شبه معدومة $(y_i)_{i\in I\setminus\{k\}}$ من $E^{I\setminus\{k\}}$ تُحقّق

$$y = \sum_{i\in I\setminus\{k\}} y_i$$

نعرّف إذن الجماعة شبه المعدومة $(x_i)_{i\in I}$ من $E^{(I)}$ بالعلاقة :

$$x_i = \begin{cases} -y_i & : \quad i \in I\setminus\{k\} \\ y & : \quad i = k \end{cases}$$

فيكون $\forall i \in I, x_i \in E_i$ و $\sum_{i\in I} x_i = 0$. إذن ينتج من الفرْض أنّ $x_k = 0$ ، ومن ثَمّ $y = 0$. فنكون قد أثبتنا أنّ

$$E_k \cap \left(\sum_{i\in I\setminus\{k\}} E_i\right) = \{0\}$$

وذلك أيّاً كان k من I . ❐

4-4. نتيجة. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. ولتكن $(E_i)_{i\in I}$ جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E . نفترض أنّ الفضاء الجزئي $F = \sum_{i\in I} E_i$ مجموعٌ مباشرٌ.

لتكن $(x_i)_{i\in I}$ جماعة من عناصر $E\setminus\{0\}$ تحقّق الشرطَ $\forall i \in I, x_i \in E_i$. عندئذ تكون الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة.

الإثبات

لتكن $(a_i)_{i\in I}$ جماعة شبه معدومة من $\mathbb{K}^{(I)}$، تُحقّق $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$. فإذا عرّفنا، في حالة i من I، $y_i = a_i x_i$، حصلنا على جماعة $(y_i)_{i\in I}$ من $E^{(I)}$، تحقّق الشرطين

$$\sum_{i\in I} y_i = 0 \quad \text{و} \quad \forall i \in I,\, y_i \in E_i$$

ولمّا كان المجموع $F = \bigoplus_{i\in I} E_i$ مباشراً استنتجنا أنّ $\forall i \in I,\, y_i = a_i x_i = 0$، بمقتضى المبرهنة السابقة، ولكن $\forall i \in I,\, x_i \neq 0$، إذن $\forall i \in I,\, a_i = 0$. ❐

4-5. **مبرهنة**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. ولتكن $(E_k)_{1\le k\le n}$ جماعة منتهية من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E . عندئذ يكون المجموع

$$F = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$$

مجموعاً مباشراً، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط :

$$\forall k \in \{2,\ldots,n\}, \quad E_k \cap (E_1 + \cdots + E_{k-1}) = \{0\}$$

الإثبات

ليكن $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ عنصراً من $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ يُحقّق

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

إذا كانت المجموعة $\mathcal{J} = \left\{ j \in \mathbb{N}_n : x_j \neq 0 \right\}$ غير خالية، عرّفنا $k = \max \mathcal{J}$، وكان لدينا من ثَمّ :

$$0 \neq x_k = \sum_{i=1}^{k-1} (-x_i) \in E_k \cap (E_1 + \cdots + E_{k-1}) = \left\{ 0 \right\}$$

وهذا تناقض. إذن المجموعة $\mathcal{J}$ خالية أي $\forall j \in \mathbb{N}_n,\, x_j = 0$. وهذا يثبت المطلوب استناداً إلى المبرهنة 4-3. ❐

6-4. **مبرهنة وتعريف**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. ولتكن $(E_i)_{i\in I}$ جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E. تكون الجماعةُ $(E_i)_{i\in I}$ متتامّة، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط : أيّاً كان x من E **توجد** في $E^{(I)}$ جماعة شبه معدومة **وحيدة** $(x_i)_{i\in I}$ تُحقّق الشرطين

$$x = \sum_{i\in I} x_i \quad \text{و} \quad \forall i \in I,\, x_i \in E_i$$

وإذا كانت الجماعة $(E_i)_{i\in I}$ جماعة متتامّة، وكان i دليلاً من I، أسمينا التطبيق $p_i : E \to E$ الذي يقرن بالعنصرِ x من E العنصرَ x_i، **إسقاطاً للفضاء E على الفضاء الجزئي E_i توازياً مع الفضاء الجزئي** $\bigoplus_{j\in I\setminus\{i\}} E_j$ $=F_i$. وتُحقِّق جماعة التطبيقات $(p_i)_{i\in I}$ الخواص الآتية:

① أيّاً كان i من I، كان التطبيق p_i خطّياً.

② أيّاً كان الدليلان **المختلفان** i و j من I^2، كان $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i$.

③ أيّاً كان i من I، كان $p_i \circ p_i = p_i$.

④ أيّاً كان x من E كانت الجماعة $(p_i(x))_{i\in I}$ شبه معدومة وكان

$$x = \sum_{i\in I} p_i(x)$$

ونعبِّر عن الخاصّة الأخيرة بكتابة $I_E = \sum_{i\in I} p_i$.

الإثبات

لنفترض أولاً أنّ $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$، وليكن x عنصراً من E. عندئذ نظراً إلى أنّ

$$E = \sum_{i\in I} E_i$$

توجد في $E^{(I)}$ جماعة شبه معدومة $(x_i)_{i\in I}$ تُحقِّق

$$x = \sum_{i\in I} x_i \quad \text{و} \quad \forall i \in I,\, x_i \in E_i$$

وإذا كانت $(y_i)_{i\in I}$ جماعة شبه معدومة أخرى من $E^{(I)}$ تُحقّق

$$x = \sum_{i\in I} y_i \quad \text{و} \quad \forall i \in I,\, y_i \in E_i$$

كانت الجماعة $(z_i)_{i\in I}$ المعرّفة بالعلاقة $z_i = x_i - y_i$، جماعة شبه معدومة مُحقِّقة للشرطين:

$$\sum_{i\in I} z_i = 0 \quad \text{و} \quad \forall i \in I, z_i \in E_i$$

وكان من ثَمّ $\forall i \in I, z_i = 0$، بمقتضى المبرهنة 3-4، أي $\forall i \in I, x_i = y_i$.

ونترك إثبات الاقتضاء المعاكس، وهو أبسط، تمريناً للقارئ.

- ليكن k دليلاً من I، ولنثبت أنّ التطبيق p_k خطّي. نتأمّل عنصراً (x,y) من E^2. عندئذ يوجد في $E^{(I)}$ جماعتان شبه معدومتين $(x_i)_{i\in I}$ و $(y_i)_{i\in I}$ تحقّقان من جهة أولى

$$x = \sum_{i\in I} x_i \quad \text{و} \quad \forall i \in I, x_i \in E_i$$

ومن جهة ثانية

$$y = \sum_{i\in I} y_i \quad \text{و} \quad \forall i \in I, y_i \in E_i$$

عندئذ أيّاً كان λ من $\mathbb{K}$ كان

$$\forall i \in I,\ x_i + \lambda\cdot y_i \in E_i \quad \text{و} \quad x + \lambda\cdot y = \sum_{i\in I}(x_i + \lambda\cdot y_i)$$

ومن ثَمّ

$$p_k(x + \lambda\cdot y) = x_k + \lambda\cdot y_k = p_k(x) + \lambda\cdot p_k(y)$$

إذن التطبيق p_k تطبيق خطّي؛ أي $p_k \in \mathcal{L}(E)$. وهي الخاصّة ①.

- ليكن k دليلاً من I، وليكن x عنصراً من E_k. ولنعرّف الجماعة شبه المعدومة $(x_i)_{i\in I}$ من $E^{(I)}$ كما يأتي:

$$x_i = \begin{cases} 0 & : \quad i \in I\backslash\{k\} \\ x & : \quad i = k \end{cases}$$

عندئذ يكون $\forall i \in I, x_i \in E_i$، و $x = \sum_{i\in I} x_i$. ولأنّ هذه الكتابة وحيدة نستنتج أنّ $p_k(x) = x$ وأنّ $p_i(x) = 0$ في حالة $i \neq k$.

▪ ليكن k دليلاً من I، وليكن x عنصراً من E_k. عندئذ يكون $p_k(x) \in E_k$، ومن المناقشة السابقة يكون $p_k(p_k(x)) = p_k(x)$، و $p_i(p_k(x)) = 0$ في حالة $i \neq k$. وهذا يثبت الخاصتين ② و ③ معاً.

أمّا الخاصّة الأخيرة فهي واضحة من التعريف. ❐

4-7. حالة خاصّة. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن E_1 و E_2 فضاءَيْن شعاعيّين جزئيَّيْن من E. يكون الفضاءان E_1 و E_2 متتامّين، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط الآتي: أيّاً كان x من E **توجد** ثنائيّة **وحيدة** (x_1, x_2) من $E_1 \times E_2$ تُحقّق

$$x = x_1 + x_2$$

وإذا عرّفنا

$$p_1 : E \rightarrow E, \quad x \mapsto x_1$$

و

$$p_2 : E \rightarrow E, \quad x \mapsto x_2$$

كان التطبيقان p_1 و p_2 خطيّين، وكان

$$p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0 \quad \text{و} \quad p_1 \circ p_1 = p_1 \quad \text{و} \quad p_2 \circ p_2 = p_2$$

وأخيراً $I = p_1 + p_2$.

يسمّى p_1 الإسقاط الخطّي للفضاء E على E_1 توازياً مع E_2، وكذلك يسمّى p_2 الإسقاط الخطّي للفضاء E على E_2 توازياً مع E_1.

4-8. تعريف. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. نقول عن تطبيق خطيّ p من $\mathcal{L}(E)$ إنه إسقاط إذا وفقط إذا كان $p \circ p = p$، ونكتب أيضاً $p^2 = p$.

4-9. مبرهنة. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن p من $\mathcal{L}(E)$ إسقاطاً. عندئذ يوجد فضاءان شعاعيّان جزئيان E_1 و E_2 من E يُحقّقان $E = E_1 \oplus E_2$، ويكون p هو الإسقاط الخطّي للفضاء الشعاعي E على E_1 توازياً مع E_2.

الإثبات

▪ لنضع $E_1 = \operatorname{Im} p$ و $E_2 = \ker p$.

- إذا كان x عنصراً من $E_1 \cap E_2$، وُجِدَ عنصر y في E يُحقّق $x = p(y)$ وكان $p(x) = 0$. وعندئذ يكون

$$0 = p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$$

ومنه $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

- ومن ناحية أخرى، إذا كان x عنصراً من E كان $x = x_1 + x_2$ حيث

$$x_1 = p(x) \in E_1 \quad \text{و} \quad x_2 = x - p(x) \in E_2$$

لأنّ

$$p(x_2) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0$$

ومنه نستنتج أنّ

$$E = E_1 \oplus E_2$$

- وأخيراً لقد وجدنا فيما سبق أنّه أيّاً كان x من E، كان $p(x) = x_1$ هو الإسقاط الخطيّ للشعاع x على الفضاء الجزئي E_1 توازياً مع E_2. ❐

سننهي هذه الفقرة بذكر خاصّتين بسيطتين نترك إثباتهما المباشر تمريناً للقارئ.

10-4. مبرهنة. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. ولتكن $(E_i)_{i\in I}$ جماعة **متتامّة** من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E. نفترض أنّه، أيّاً كان i من I، يوجد أساس $(e_{i,j})_{j\in J_i}$ للفضاء الجزئي E_i. عندئذ تكوّن الجماعة التالية

$$(e_{i,j})_{(i,j)\in K} \quad \text{حيث} \quad K = \bigcup_{\ell\in I}\big(\{\ell\}\times J_\ell\big)$$

أساساً للفضاء E.

11-4. مبرهنة. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. ولتكن $(E_k)_{1\le k\le n}$ جماعة متتامّة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E. عندئذ يكون التطبيق

$$\Phi : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \to E, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k$$

تقابلاً خطيّاً.

5. فضاءُ خارجِ القسمة

5-1. مبرهنة وتعريف. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن H فضاءً شعاعيّاً جزئياً من E. تُعرِّف العلاقة الثنائية $\mathcal{R}_H$ المعرّفة كما يلي :

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad x \, \mathcal{R}_H \, y \Leftrightarrow x - y \in H$$

علاقة تكافؤ على E. نرمز بالرمز E/H إلى مجموعة صفوف التكافؤ بالقياس $\mathcal{R}_H$. وإذا كان $[x]$ و $[y]$ عنصرين من E/H، وكان λ عدداً من $\mathbb{K}$، كان كلٌّ من المجموعتين:

$$[x]+[y] = \left\{ x_1 + y_1 : (x_1, y_1) \in [x] \times [y] \right\}$$
$$\lambda \cdot [x] = \left\{ \lambda \cdot x_1 : x_1 \in [x] \right\}$$

عنصراً من E/H. هذا يتيح لنا تزويد المجموعة E/H بقانوني التشكيل $(+)$ و $(\cdot)$ اللذين يجعلان من $\left(E/H, +, \cdot\right)$ فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$، نسمّيه **فضاءَ خارجِ قسمةِ** E على الفضاء الجزئي H.

وفي هذه الحالة يكون التطبيقُ

$$Q_H : E \to E/H : x \mapsto [x]$$

تطبيقاً خطيّاً غامراً، نسميّه **الغمر القانوني**.

الإثبات

الإثبات تحقُّقٌ مباشر من التعاريف. نترك تفاصيله للقارئ. ❐

5-2. مبرهنة. ليكن E و F فضاءَين شعاعيّين على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E,F)$.

عندئذ يوجد تقابلٌ خطّي

$$\tilde{u} : E/\ker u \to \operatorname{Im} u$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ Q \downarrow & & \uparrow i \\ E/\ker u & \xrightarrow{\tilde{u}} & \operatorname{Im} u \end{array}$$

يحقّق المساواة $u = i \circ \tilde{u} \circ Q$، حيث $Q : E \to E/\ker u$ هو الغمر القانوني، و $i : \operatorname{Im} u \to F, x \mapsto x$.

الإثبات

ليكن $[x]$ عنصراً من $E/\ker u$. عندئذ يأخذ u قيمة واحدة على جميع عناصر $[x]$. أي :

$$\operatorname{card}\left(\left\{u(\alpha) : \alpha \in [x]\right\}\right) = 1$$

وذلك لأنه إذا كان (α, β) من $[x] \times [x]$ كان $\alpha - \beta \in \ker u$ ، ومن ثَمّ

$$u(\alpha - \beta) = 0$$

أي $u(\alpha) = u(\beta)$.

لنعرِّف إذن $\tilde{u}([x])$ بأنه العنصر الوحيد الموجود في المجموعة $\left\{u(\alpha) : \alpha \in [x]\right\}$ أي

$$\left\{u(\alpha) : \alpha \in [x]\right\} = \left\{\tilde{u}([x])\right\}$$

نلاحظ مباشرة أنّ $\tilde{u}$ تطبيق من $E/\ker u$ إلى $\operatorname{Im} u$. وإذا كان $[x]$ و $[y]$ عنصرين من $E/\ker u$ وكان λ من $\mathbb{K}$ ، كان لدينا $[x + \lambda \cdot y] = [x] + \lambda \cdot [y]$ ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\tilde{u}([x] + \lambda \cdot [y]) = \tilde{u}([x + \lambda \cdot y]) &= u(x + \lambda \cdot y) \\ = u(x) + \lambda \cdot u(y) &= \tilde{u}([x]) + \lambda \cdot \tilde{u}([y])\end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أنّ $\tilde{u}$ تطبيق خطّي من $\mathcal{L}(E/\ker u, \operatorname{Im} u)$.

ومن جهة أخرى، من الواضح أنّ $\tilde{u}$ تطبيق غامر لأنّ $\forall x \in E, \quad \tilde{u}([x]) = u(x)$. وهو أيضاً متباينٌ لأنّ

$$[x] \in \ker \tilde{u} \Rightarrow \tilde{u}([x]) = 0 \Rightarrow u(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker u \Rightarrow [x] = 0$$

نستنتج أنّ $\tilde{u}$ تقابل خطّي من $\mathcal{L}(E/\ker u, \operatorname{Im} u)$. وأخيراً تنتج العلاقة

$$u = i \circ \tilde{u} \circ Q$$

من المساواة الواضحة : $\forall x \in E, \tilde{u}([x]) = u(x)$. ❐

تمرينات

التمرين 1. ليكن $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تطبيقاً متبايناً. ولتكن $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ جماعة من فضاء $\mathbb{K}[X]$ كثيرات الحدود على الحقل $\mathbb{K}$. نفترض أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = \varphi(n)$. أثبت أنّ الجماعة $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حرّة.

الحل

لنتأمّل عبارة خطيّة معدومة $\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k P_k = 0$ حيث $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$. نعلم أنّ المجموعة

$$\mathcal{S} = \left\{k \in \mathbb{N} : \alpha_k \neq 0\right\}$$

مجموعة جزئيّة منتهية أو خالية من $\mathbb{N}$، فإذا افترضنا جدلاً أنّ $\mathcal{S}$ غير خالية، كانت المجموعة $\varphi(\mathcal{S})$ مجموعة جزئيّة منتهية وغير خالية من $\mathbb{N}$، فلها أكبر عنصر. أي يوجد في $\mathcal{S}$ عنصرٌ ℓ يحقّق

$$\varphi(\ell) = \max\left\{\varphi(k) : k \in S\right\}$$

والعنصرُ ℓ وحيدٌ لأنّ φ متباينٌ. وعلى هذا، نستنتج من المساواة

$$\alpha_\ell P_\ell = \sum_{k\in\mathcal{S}\setminus\{\ell\}} \alpha_k P_k$$

أنّ

$$\begin{aligned}\varphi(\ell) = \deg(\alpha_\ell P_\ell) &\leq \max_{k\in\mathcal{S}\setminus\{\ell\}} \deg(\alpha_k P_k)\\ &\leq \max_{k\in\mathcal{S}\setminus\{\ell\}} \varphi(k) < \varphi(\ell)\end{aligned}$$

وهذا التناقض الواضح دليلٌ على وجوب كون المجموعة $\mathcal{S}$ خالية. أي إنّ $\alpha_k = 0$ أيّاً كانت قيمة الدليل k من $\mathbb{N}$. فالجماعة $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ جماعة حرّة. ∎

التمرين 2. ليكن $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ فضاءَ التوابع من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$. نعرّف أيّاً كان α من $\mathbb{R}_+^*$ التابع f_α بالعلاقة $f_\alpha(x) = \cos \alpha x$. أثبت أن الجماعة $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}$ حرّة في E.

مساعدة : احسب

$$I(\alpha,\beta) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \cos\alpha t \cdot \cos\beta t \, \mathrm{d}t$$

الحل

لنبدأ أوّلاً بملاحظة أنّه في حالة $\alpha \neq \beta$ لدينا

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T \cos\alpha t\cdot\cos\beta t\,\mathrm{d}\,t &= \frac{1}{2T}\int_0^T \Big(\cos(\alpha+\beta)t+\cos(\alpha-\beta)t\Big)\,\mathrm{d}\,t\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)T}{(\alpha+\beta)T}+\frac{\sin(\alpha-\beta)T}{(\alpha-\beta)T}\right)\end{aligned}$$

ومن ثَمّ $I(\alpha,\beta)=0$ في حالة $\alpha\neq\beta$.

أمّا في حالة $\alpha=\beta$ فلدينا

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T \cos\alpha t\cdot\cos\alpha t\,\mathrm{d}\,t &= \frac{1}{2T}\int_0^T \big(1+\cos 2\alpha t\big)\,\mathrm{d}\,t\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sin 2\alpha T}{2\alpha T}\right)\end{aligned}$$

إذن $I(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}$ في حالة $\alpha=\beta$. وعليه نكون قد أثبتنا أنّ $I(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\delta_{\alpha,\beta}$ حيث $\delta_{\alpha,\beta}$ هو رمز كرونيكر، الذي يساوي الواحد في حالة تساوي الدليلين والصفر في غير هذه الحالة.

لنتأمّل عبارة خطيّة معدومة $\sum_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}\lambda_\alpha f_\alpha=0$ حيث $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}\in\mathbb{R}^{(\mathbb{R}_+^*)}$. عندها

$$\forall\beta\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \sum_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}\lambda_\alpha f_\alpha f_\beta=0$$

ومن ثَمّ

$$\forall\beta\in\mathbb{R}_+^*,\forall T\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \sum_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}\lambda_\alpha\int_0^T f_\alpha(t)f_\beta(t)\,\mathrm{d}\,t=0$$

وبالقسمة على T ثُمّ جعل T تسعى إلى $+\infty$ نجد

$$\forall\beta\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \sum_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}\lambda_\alpha I(\alpha,\beta)=0$$

ولمّا كان $I(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\delta_{\alpha,\beta}$ استنتجنا أنّ المجموع السابق يساوي $2\lambda_\beta$. إذن

$$\forall\beta\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \lambda_\beta=0$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 3. ليكن $E = \mathbb{K}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود على الحقل $\mathbb{K}$ التي لا تزيد درجتها على n . أثبت أنّنا نعرّف تطبيقاً خطيّاً φ من E إلى E بالعلاقة

$$\varphi(P) = X(1-X)P'(X) + nXP(X)$$

واستنتج أن الجملة $\left(X^k(1-X)^{n-k}\right)_{0\le k\le n}$ حرّة في E . في حالة عدد طبيعي p من $\{0,1,\ldots,n\}$ ، عبّر عن كثير الحدود X^p بصفته تركيباً خطيّاً في عناصر هذه الجملة، ماذا تستنتج ؟

الحل

- من الواضح أنّ φ هو مقصور تطبيق خطّي من $\mathcal{L}\left(\mathbb{K}[X]\right)$ على الفضاء الجزئي $\mathbb{K}_n[X]$. ونلاحظ أنّه في حالة $P = X^k$ و $0 \le k \le n$ يكون

$$\varphi(X^k) = kX^k + (n-k)X^{k+1}$$

إذن صورة كلِّ عنصرٍ من $\mathbb{K}_n[X]$ وفق φ تنتمي فعلاً إلى $\mathbb{K}_n[X]$. وعليه يعرّف φ تطبيقاً خطِّياً من $\mathbb{K}_n[X]$ إلى $\mathbb{K}_n[X]$.

- لنعرّف في حالة $0 \le k \le n$ كثير الحدود $Q_k = X^k(1-X)^{n-k}$ فنجد أنّ

$$\begin{aligned}\varphi(Q_k) &= \left(kX^k(1-X)^{n-k+1} - (n-k)X^{k+1}(1-X)^{n-k}\right)\\ &\quad + nX^{k+1}(1-X)^{n-k}\\ &= X^k(1-X)^{n-k}\left(k - kX - (n-k)X + nX\right)\\ &= kX^k(1-X)^{n-k} = kQ_k\end{aligned}$$

- لنتأمّل إذن المجموعة $\mathcal{N}$ المعرّفة كما يأتي:

$$\mathcal{N} = \left\{k \in \{0,1,\ldots,n\} : \text{جملة حرّة } (Q_0,Q_1,\ldots,Q_k)\right\}$$

من الواضح أنّ $\mathcal{N} \ne \varnothing$ لأنّ $0 \in \mathcal{N}$. نعرّف إذن $\ell = \max(\mathcal{N})$.

فإذا كان $\ell < n$ عنى ذلك أنّ الجملة $(Q_0,Q_1,\ldots,Q_\ell,Q_{\ell+1})$ مرتبطة خطياً، وأنّ الجملة $(Q_0,Q_1,\ldots,Q_\ell)$ حرّة. وعليه يمكن التعبير عن $Q_{\ell+1}$ بصفته عبارةً خطيّةً في كثيرات الحدود $(Q_0,Q_1,\ldots,Q_\ell)$ ، فتوجد أعداد $(\alpha_k)_{0\le k\le \ell}$ تُحقِّق

$$Q_{\ell+1} = \alpha_0 Q_0 + \alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_k Q_k + \cdots + \alpha_\ell Q_\ell$$

وبتطبيق φ على طرفي هذه المساواة نستنتج أيضاً أنّ

$$(\ell+1)Q_{\ell+1} = \alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_k k Q_k + \cdots + \alpha_\ell \ell Q_\ell$$

ومن ثَمّ، بضرب المساواة الأولى بالعدد $\ell+1$ وطرح الثانية منها، نستنتج أنّ

$$0=\alpha_0(\ell+1)Q_0+\alpha_1\ell Q_1+\cdots+\alpha_k(\ell+1-k)Q_k+\cdots+\alpha_\ell Q_\ell$$

ولمّا كانت الجملة $(Q_0,Q_1,\ldots,Q_\ell)$ حرّة، استنتجنا من المساواة السابقة أنّ

$$\forall k\in\{0,1,\ldots,\ell\},\quad \alpha_k(\ell+1-k)=0$$

وعليه يجب أن يكون $\alpha_k=0$ في حالة $0\le k\le\ell$، وهذا يقتضي أنّ $Q_{\ell+1}=0$، هذا يناقض كون $\deg Q_{\ell+1}=n$. نستنتج من هذا التناقض أنّه يجب أن يكون $\ell=n$، وهذا يعني أنّ الجملة $(Q_k)_{0\le k\le n}$ حرّة. وهي النتيجة المطلوبة.

- ليكن p من $\{0,1,\ldots,n\}$. بملاحظة أنّ

$$\begin{aligned}1=(X+1-X)^{n-p}&=\sum_{r=0}^{n-p}C_{n-p}^{r}X^r(1-X)^{n-p-r}\\&=\sum_{k=p}^{n}C_{n-p}^{k-p}X^{k-p}(1-X)^{n-k}\end{aligned}$$

نستنتج بعد الضرب بالمقدار X^p أنّ

$$X^p=\sum_{k=p}^{n}C_{n-p}^{k-p}X^k(1-X)^{n-k}=\sum_{k=p}^{n}C_{n-p}^{k-p}Q_k$$

وعلى هذا تكون الجملة $(Q_k)_{0\le k\le n}$ في آن معاً جملة حرّة وجملة مولِّدة للفضاء $\mathbb{K}_n[X]$ فهي إذن أساسٌ لهذا الفضاء. ■

التمرين 4. ليكن $E=\mathbb{K}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود على الحقل $\mathbb{K}$ التي لا تزيد درجتها على n . ولتكن $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ عناصرَ متباينةً مثنى مثنى من $\mathbb{K}$. نعرّف، أيّاً كان j من $\{0,1,\ldots,n\}$، كثيرَ الحدود ℓ_j بالعلاقة

$$\ell_j(X)=\prod_{0\le k\le n,k\ne j}\frac{X-\alpha_k}{\alpha_j-\alpha_k}$$

أثبت أن الجملة $(\ell_j)_{0\le j\le n}$ أساس للفضاء E . وأنّ كلَّ كثير حدود P من E يكتب بطريقة وحيدة بالصيغة: $P=\sum_{k=0}^{n}P(\alpha_k)\cdot\ell_k$.

الحل

لنلاحظ أنّ $\ell_j(\alpha_i) = \delta_{i,j}$ في حالة i و j من $\{0,1,\ldots,n\}$. فإذا كان $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \ell_j = 0$ استنتجنا بتعويض $X = \alpha_i$ في هذه العبارة أنّ $\lambda_i = 0$ وذلك أيّاً كان الدليل i من المجموعة $\{0,1,\ldots,n\}$، وهذا ما يثبتُ أنّ الجملة $(\ell_j)_{0\le j\le n}$ جملة حرّة.

ومن جهة أخرى، ليكن P من $\mathbb{K}_n[X]$. عندئذ نعرّف كثير الحدود

$$Q = P - \sum_{j=0}^{n} P(\alpha_j)\ell_j$$

فنلاحظ أنّ $\deg Q \le n$، وأنّ Q يقبل الأعداد α_0 و α_1 و $\cdots$ و α_n التي عددها $n+1$ جذوراً، فلا بُدّ أن يكون $Q = 0$، أي أن يكون $P = \sum_{j=0}^{n} P(\alpha_j)\ell_j$. ■

التمرين 5. لتكن $(e_k)_{0\le k\le n}$ جملة حرّة في فضاء شعاعي E على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. ولتكن $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ عناصرَ متباينةً مثنى مثنى من $\mathbb{K}$. أثبت أن الجملة $(f_k)_{0\le k\le n}$ المعرّفة بالعلاقات $f_k = \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i)^k e_i$ جملة حرّة أيضاً.

الحل

لنتأمّل عبارة خطيّة معدومة بعناصر الجملة $(f_k)_{0\le k\le n}$. مثلاً $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$ عندئذ

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (\alpha_i)^k \right) e_i = 0$$

فإذا تأملنا كثير الحدود $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ كان $\deg P \le n$ وكان

$$\sum_{i=0}^{n} P(\alpha_i) e_i = 0$$

ولأنّ الجملة $(e_k)_{0\le k\le n}$ جملةٌ حرّة استنتجنا أنّ $\forall i \in \{0,1,\ldots,n\},\ P(\alpha_i) = 0$، إذن يقبل كثير الحدود P الذي لا تزيد درجته عن n عدداً من الجذور يزيد تماماً عن n. فهو إذن معدوم، أي $P = 0$. وهذا يعني أنّ الأمثال $(\lambda_k)_{0\le k\le n}$ معدومة، والجملة $(f_k)_{0\le k\le n}$ حرّة. ■

التمرين 6. ليكن n من $\mathbb{N}^*$، وليكن P كثير حدود من الدرجة n في $\mathbb{R}[X]$، ولتكن $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ أعداداً حقيقيّة مختلفة مثنى مثنى. أثبت أن الجملة

$$\left(P(X+\alpha_k)\right)_{0\le k\le n}$$

جملة حرّة في $\mathbb{R}[X]$.

الحل

لنتأمّل عبارة خطيّة معدومة $\sum_{k=0}^{n}\lambda_k P(X+\alpha_k)=0$ بعناصر الجملة المعطاة. لمّا كان

$$P(X+\alpha_k)=\sum_{\ell=0}^{n}\frac{P^{(\ell)}(X)}{\ell\,!}\alpha_k^{\ell}$$

استنتجنا أنّ

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\sum_{\ell=0}^{n}\frac{P^{(\ell)}(X)}{\ell\,!}\alpha_k^{\ell}\alpha_k^{\ell}=\sum_{\ell=0}^{n}\frac{P^{(\ell)}(X)}{\ell\,!}\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\alpha_k^{\ell}\right)=0$$

لنعرّف إذن $b_\ell=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\alpha_k^{\ell}$ في حالة $0\le\ell\le n$، ولنثبتْ أنّ هذه الأعداد معدومة. لتكن

$$\mathcal{N}=\left\{\ell\in\{0,1,\ldots,n\}:b_\ell\ne 0\right\}$$

فإذا افترضنا أنّ $\mathcal{N}\ne\varnothing$ عرّفنا $p=\min\mathcal{N}$. ولكن، لمّا كان $\deg P=n$ استنتجنا أنّه في حالة $0\le\ell\le n$ لدينا $\deg P^{(\ell)}=n-\ell$. وينتج من المساواة ما يأتي

$$\sum_{\ell=p}^{n}\frac{P^{(\ell)}(X)}{\ell\,!}b_\ell=0$$

- فإذا كان $p=n$ كان $P^{(n)}(X)b_n=0$، وهذا يناقض تعريف p وكون $P^{(n)}$ ثابتاً غير معدوم.
- وإذا كان $p<n$ استنتجنا من المساواة

$$\frac{P^{(p)}(X)}{p\,!}b_p=-\sum_{\ell=p+1}^{n}\frac{P^{(\ell)}(X)}{\ell\,!}b_\ell$$

أنّ

$$n-p=\deg\left(b_pP^{(p)}\right)\le\max_{p+1\le\ell\le n}\deg\left(b_\ell P^{(\ell)}\right)\le n-p-1$$

وهذا أيضاً خُلفٌ واضح.

وعليه لا بُدّ أن تكون المجموعة $\mathcal{N}$ خالية؛ أي أن يكون

$$\forall \ell \in \{0,1,\ldots,n\},\quad b_\ell = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \alpha_k^\ell = 0$$

وهذا يُكافئ أنّه

$$\forall (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1},\quad \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell b_\ell = 0$$

أو

$$\forall (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1},\quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left(\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \alpha_k^\ell \right) = 0$$

وأخيراً

$$\forall Q \in \mathbb{K}_n[X],\quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k Q(\alpha_k) = 0$$

فإذا اخترنا، في حالة $0 \leq q \leq n$، كثيرَ الحدود Q مساوياً $\prod_{j=0, j\neq q}^{n} \frac{X-\alpha_j}{\alpha_q - \alpha_j}$ استنتجنا أنّ $\lambda_q = 0$. وهذا يثبت الاستقلال الخطّي للجملة $\left(P\left(X+\alpha_k\right)\right)_{0\leq k\leq n}$. ■

التمرين 7. ادرس في $C\left(]0,1[,\mathbb{R}\right)$، الارتباط الخطي للجملة $(f, f\circ f, f\circ f\circ f)$ في حالة $f(x) = \ln(1+x)$.

الحل

لنلاحظ أوّلاً أنّه في جوار الصفر لدينا

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$$

وكذلك

$$\begin{aligned} f^2(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2 + \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^3 + O(x^4) \\ &= x - x^2 + \frac{7x^3}{6} + O(x^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^3(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - x^2\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2 + \frac{7x^3}{6}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^3 + O(x^4) \\ &= x - \frac{3x^2}{2} + \frac{5x^3}{2} + O(x^4) \end{aligned}$$

وعليه إذا عرّفنا $g = af + bf \circ f + cf \circ f \circ f$ كان

$$g(x) = (a+b+c)x - \frac{a+2b+3c}{2}x^2 + \frac{2a+7b+15c}{6}x^3 + O(x^4)$$

فإذا كان $af + bf \circ f + cf \circ f \circ f = 0$ استنتجنا، بسبب وحدانيّة النشر المحدود، أنّ

$$\begin{aligned} a + \ b + \ \ c &= 0 \\ a + 2b + \ 3c &= 0 \\ 2a + 7b + 15c &= 0 \end{aligned}$$

وهذا يُكافئ، بعد طرح المعادلة الأولى من الثانية وطرح ضعفيها من الثالثة، أنّ

$$\begin{aligned} a + b + \ \ c &= 0 \\ b + \ 2c &= 0 \\ 5b + 13c &= 0 \end{aligned}$$

وهذا بدوره يُكافئ، بعد طرح خمسة أضعاف المعادلة الثانية من الثالثة، أنّ

$$\begin{aligned} a + b + \ c &= 0 \\ b + 2c &= 0 \\ 3c &= 0 \end{aligned}$$

إذن $0 = a = b = c$، والجملة المدروسة حرّة. ■

التمرين 8. ليكن E فضاء التوابع من الصف C^∞ على $\mathbb{R}$، والدوريّة ذات الدور 2π. وليكن T التطبيق الخطيّ من $\mathcal{L}(E)$ المعرّف بالعلاقة $T(f) = f''$. عيّن صورة ونواة التطبيق الخطّي T.

الحل

■ ليكن f عنصراً من $\ker T$. عندئذ نستنتج من كون $f'' = 0$ على $\mathbb{R}$ أنّه يوجد عددان حقيقيّان a و b يُحقّقان $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$. ولمّا كان التابع f يقبل العدد 2π دوراً وجب أن يكون $b = f(0) = f(2\pi) = 2\pi a + b$ ومن ثَمّ $a = 0$. إذن يجب أن يكون f ثابتاً. فإذا رمزنا بالرمز $\mathbb{1}$ إلى التابع الثابت $\mathbb{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$ استنتجنا أنّ $\ker T = \mathbb{R} \cdot \mathbb{1}$ لأنّ الاحتواء المُعاكس واضحٌ.

■ ليكن g عنصراً من $\operatorname{Im} T$ ، عندئذ يوجد f من E يُحقِّق $g = f''$ ، وعندئذ يكون

$$\int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}\,t = \left[f'(t) \right]_0^{2\pi} = f'(2\pi) - f'(0) = 0$$

لأنّ f يقبل العدد 2π دوراً. وبالعكس، ليكن g عنصراً من E يُحقّق $\int_0^{2\pi} g = 0$. عندئذ نعرّف التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بالعلاقة

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (x-t) g(t)\,\mathrm{d}\,t + \frac{x}{2\pi} \int_0^{2\pi} t g(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= x \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_0^x t g(t)\,\mathrm{d}\,t + \frac{x}{2\pi} \int_0^{2\pi} t g(t)\,\mathrm{d}\,t \end{aligned}$$

فنلاحظ مباشرة أنّ f يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، وأنّ

$$f'(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}\,t + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t g(t)\,\mathrm{d}\,t$$

ومن ثَمّ يقبل f الاشتقاق مرّة ثانية على $\mathbb{R}$ ، ويكون

$$f''(x) = g(x)$$

وعليه، نستنتج من كون g ينتمي إلى الصف C^∞ ، أنّ f ينتمي أيضاً إلى الصف C^∞ على $\mathbb{R}$. ومن جهة أخرى نلاحظ أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x+2\pi) - f'(x) = \int_x^{x+2\pi} g(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$$

إذ استفدنا من كون التابع g يقبل العدد 2π دوراً، ومن الفرْض $\int_0^{2\pi} g = 0$. وعليه يكون

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+2\pi) - f(x) = f(2\pi) - f(0) = 2\pi \int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$$

والتابع f يقبل العدد 2π دوراً، إذن $f \in E$ ويُحقّق $T(f) = f'' = g$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\operatorname{Im} T = \left\{ g \in E : \int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}\,t = 0 \right\}$$ ■

التمرين 9. ليكن E و F فضاءَين شعاعيّين على حقل $\mathbb{K}$. وليكن u تطبيقاً خطّياً من E إلى F . نتأمّل فضاءَين شعاعيَّين جزئيَّين E_1 و E_2 من E ، وفضاءَين شعاعيَّين جزئيَّين F_1 و F_2 من F . ماذا تقول عن $u(E_1 + E_2)$ ، وعن $u(E_1 \cap E_2)$ ، وعن $u^{-1}(F_1 + F_2)$ وعن $u^{-1}(F_1 \cap F_2)$ ؟

الحل

- من الواضح أنّ

$$\begin{aligned} u(E_1 + E_2) &= \left\{ u(x_1 + x_2) : x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \right\} \\ &= \left\{ u(x_1) + u(x_2) : x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \right\} \\ &= u(E_1) + u(E_2) \end{aligned}$$

- ومن خواص الصورة العكسيّة نعلم أنّ $u^{-1}(F_1 \cap F_2) = u^{-1}(F_1) \cap u^{-1}(F_2)$.
- أمّا خواص الصورة المباشرة، فتفيدنا في أنّ $u(E_1 \cap E_2) \subset u(E_1) \cap u(E_2)$. ولكن ليس هناك مساواة بوجه عام. لنتأمّل على سبيل المثال التطبيق الخطّي:

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, 0)$$

والفضاءَيْن الجزئيَّين $E_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$ و $E_2 = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$. عندئذ

$$E_1 \cap E_2 = \{0\} \quad \text{و} \quad u(E_1) = u(E_2) = E_1 ،$$

وهذا يثبت أنّ $u(E_1 \cap E_2) \subsetneq u(E_1) \cap u(E_2)$ في هذه الحالة.

- وأخيراً من الواضح أنّ

$$u^{-1}(F_1) \subset u^{-1}(F_1 + F_2) \quad \text{و} \quad u^{-1}(F_2) \subset u^{-1}(F_1 + F_2)$$

إذن

$$u^{-1}(F_1) + u^{-1}(F_2) \subset u^{-1}(F_1 + F_2)$$

ولكن ليس هناك مساواة بوجه عام. لنتأمّل على سبيل المثال التطبيق الخطّي :

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, 0)$$

والفضاءَيْن الجزئيَّين $F_1 = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ و $F_2 = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ من $\mathbb{R}^2$. عندئذ نلاحظ أنّ

$$u^{-1}(F_1) = u^{-1}(F_2) = \left\{(0, 0)\right\} \quad \text{و} \quad F_1 + F_2 = \mathbb{R}^2$$

وهذا يثبت أنّ $u^{-1}(F_1) + u^{-1}(F_2) \subsetneq u^{-1}(F_1 + F_2)$ في هذه الحالة. ■

التمرين 10. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل $\mathbb{K}$. وليكن f و g تطبيقين خطيّين من E.
أثبت أنّ $f\big(\ker(g\circ f)\big) = \ker g \cap \operatorname{Im} f$.

الحل

لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} y \in f\big(\ker(g\circ f)\big) &\Leftrightarrow \exists x \in E : \big(g(f(x)) = 0\big) \wedge \big(y = f(x)\big) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E : \big(g(y) = 0\big) \wedge \big(y = f(x)\big) \\ &\Leftrightarrow \big(g(y) = 0\big) \wedge \big(\exists x \in E : y = f(x)\big) \\ &\Leftrightarrow \big(y \in \ker g\big) \wedge \big(y \in \operatorname{Im} f\big) \\ &\Leftrightarrow y \in \ker g \cap \operatorname{Im} f \end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ صحة المساواة $f\big(\ker(g\circ f)\big) = \ker g \cap \operatorname{Im} f$ المطلوبة. ■

التمرين 11. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{R}$. وليكن u تطبيقاً خطّيّاً من E . يُحقّق الشرط $u^3 = I_E$.

1. أثبت أنّ $E = \ker(u - I_E) \oplus \operatorname{Im}(u - I_E)$.
2. أثبت الخاصتين الآتيتين.

$$\begin{aligned} \ker(u - I_E) &= \operatorname{Im}(u^2 + u + I_E) \\ \operatorname{Im}(u - I_E) &= \ker(u^2 + u + I_E) \end{aligned}$$

الحل

1. في الحقيقة، ليكن x عنصراً من $\ker(u - I_E) \cap \operatorname{Im}(u - I_E)$ عندئذ يوجد، من جهة أولى، عنصرٌ z يُحقّق $x = (u - I_E)(z)$ ويكون، من جهة ثانية، $(u - I_E)(x) = 0$.
وعليه

$$\begin{aligned} 3x &= u^2(x) + u(x) + x = (u^2 + u + I_E)(x) \\ &= (u^2 + u + I_E)(u - I_E)(z) \\ &= (u^3 - I_E)(z) = 0 \end{aligned}$$

إذن $3x = 0$ أي $x = 0$. وعليه

$$\ker(u - I_E) \cap \operatorname{Im}(u - I_E) = \{0\} .$$

ومن جهة أخرى، نستفيد من المساواة $3 = X^2 + X + 1 - (X-1)(X+2)$ ، فنعرّف في حالة شعاع x من E الشعاعين:

$$x_2 = \frac{1}{3}\Big(u^2(x) + u(x) + x\Big) \quad \text{و} \quad x_1 = -\frac{1}{3}\Big(u(x) + 2x\Big)$$

فيكون لدينا وضوحاً $x_2 \in \ker(u - I_E)$ لأنّ $u^3 = I_E$ ، وكذلك يكون

$$\begin{aligned} x_2 + (u - I_E)(x_1) &= \frac{1}{3}\Big(u^2(x) + u(x) + x - (u - I_E)(u(x) + 2x)\Big) \\ &= \frac{1}{3}\Big(u^2(x) + u(x) + x - u^2(x) - u(x) + 2x\Big) = x \end{aligned}$$

وعليه ينتمي x إلى المجموع $\ker(u - I_E) + \operatorname{Im}(u - I_E)$. وبذا يتمّ إثبات 1.

2. سنثبتُ صحّة الاحتواءات المختلفة.

- إذا كان x عنصراً من $\ker(u - I_E)$ كان $u(x) = x$ ومن ثَمّ كان
$$3x = u^2(x) + u(x) + x = (u^2 + u + I_E)(x) \in \operatorname{Im}(u^2 + u + I_E)$$
وعليه $\ker(u - I_E) \subset \operatorname{Im}(u^2 + u + I_E)$.

- وإذا كان x عنصراً من $\operatorname{Im}(u^2 + u + I_E)$ وجدنا z في E يُحقّق
$$x = (u^2 + u + I_E)(z)$$
وعندئذ يكون
$$\begin{aligned} (u - I_E)(x) &= (u - I_E) \circ (u^2 + u + I_E)(z) \\ &= (u^3 - I_E)(z) = 0 \end{aligned}$$
أي يكون x عنصراً من $\ker(u - I_E)$. فنكون قد أثبتنا أنّ صحة المساواة
$$\ker(u - I_E) = \operatorname{Im}(u^2 + u + I_E) \,.$$

- وإذا كان x عنصراً من $\ker(u^2 + u + I_E)$ كان $u^2(x) + u(x) + x = 0$ ، ومن ثَمّ $u^2(x) + u(x) - 2x = -3x$ أي $-3x = (u - I_E)(u(x) + 2x)$ وعليه ينتمي إلى $-3x \in \operatorname{Im}(u - I_E)$ أو $x \in \operatorname{Im}(u - I_E)$. إذن
$$\ker(u^2 + u + I_E) \subset \operatorname{Im}(u - I_E)$$

- وبالعكس، إذا كان x عنصراً من $\operatorname{Im}(u-I_E)$ وجدنا z في E يُحقّق

$$x=(u-I_E)(z)$$

وعندئذ يكون

$$\begin{aligned}(u^2+u+I_E)(x)&=(u^2+u+I_E)\circ(u-I_E)(z)\\&=(u^3-I_E)(z)=0\end{aligned}$$

أي $x\in\ker(u^2+u+I_E)$. فنكون قد أنجزنا إثبات المساواة :

$$\operatorname{Im}(u-I_E)=\ker(u^2+u+I_E)$$

وبذا يتم إثبات المطلوب. ■

ملاحظة : تبقى نتائج التمرين السابق صحيحة في أي حقلٍ عدده المميِّز لا يساوي 3 .

التمرين 12. نتأمّل $\mathbb{C}$ فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{R}$.

1. أعطِ أساساً للفضاء الشعاعي $\mathbb{C}$ على الحقل $\mathbb{R}$.
2. نعرّف في حالة a و b من $\mathbb{C}$ التطبيق :

$$f_{a,b}:\mathbb{C}\to\mathbb{C},f_{a,b}(z)=az+b\overline{z}$$

أثبت أنّ $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})=\left\{f_{a,b}:(a,b)\in\mathbb{C}^2\right\}$.

3. أعطِ الشرط اللازم والكافي على a و b من $\mathbb{C}$ ليكون التطبيق $f_{a,b}$ متبايناً.

الحل

1. الجملة $(1,\mathrm{i})$ أساسٌ للفضاء $\mathbb{C}$ على الحقل $\mathbb{R}$.

2. من الواضح أنّ التطبيقات $f_{a,b}$ هي تطبيقات $\mathbb{R}-$خطيّة على الفضاء الشعاعي $\mathbb{C}$.

وبالعكس، ليكن f عنصراً من $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. عندئذ نستنتج من الخاصة الخطيّة أنّ

$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(\underbrace{x+y\,\mathrm{i}}_{z})&=xf(1)+yf(\mathrm{i})\\&=\frac{z+\overline{z}}{2}f(1)+\frac{z-\overline{z}}{2\,\mathrm{i}}f(\mathrm{i})\\&=\frac{f(1)-\mathrm{i}\,f(\mathrm{i})}{2}z+\frac{f(1)+\mathrm{i}\,f(\mathrm{i})}{2}\overline{z}\end{aligned}$$

فإذا عرّفنا

$$a = \frac{f(1) - \mathrm{i}\, f(\mathrm{i})}{2} \quad \text{و} \quad b = \frac{f(1) + \mathrm{i}\, f(\mathrm{i})}{2}$$

كان $f = f_{a,b}$. وهذا يثبتُ أنّ

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \left\{ f_{a,b} : (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

3. ليكن z عنصراً من $\ker f_{a,b}$. عندئذ يكون لدينا $az + b\overline{z} = 0$ ، وكذلك $\overline{a}\,\overline{z} + \overline{b}z = 0$. فإذا ضربنا المعادلة الأولى بالمقدار $\overline{a}$ والثانية بالمقدار b ثمّ طرحنا المعادلتين الناتجتين طرفاً من طرف وجدنا

$$(|a|^2 - |b|^2)z = 0$$

- فإذا كان $|a| \neq |b|$ استنتجنا مما سبق أنّ $z = 0$ ، والتطبيق الخطّي $f_{a,b}$ متباينٌ.
- أمّا إذا كان $|a| = |b|$ فإمّا أن تكون هذه الطويلة المشتركة مساوية الصفر، وعندئذ يكون $f_{a,b}$ نفسه مساوياً الصفر وهو في هذه الحالة غير متباينٍ، أو أن يكون $|a| = |b| \neq 0$ وعندئذ يوجد عددٌ حقيقي θ يُحقّق $a = e^{\mathrm{i}\theta}b$. وعندئذ لا يكون التطبيق $f_{a,b}$ ليس متبايناً في هذه الحالة أيضاً لأن $f_{a,b}(0) = 0 = f_{a,b}(\mathrm{i}\,e^{-\mathrm{i}\theta/2})$.

وهكذا نكون قد أثبتنا أن الشرط اللازم والكافي ليكون التطبيق الخطّي $f_{a,b}$ من $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ متبايناً هو أن يكون $|a| \neq |b|$. ∎

التمرين 13. ليكن E فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$ عدده المميّز يساوي 0 . ولنذكّر أنّ تطبيقاً خطياً p من E إلى E يكون إسقاطاً إذا وفقط إذا كان $p \circ p = p$.

1. ليكن p إسقاطاً من $\mathcal{L}(E)$. أثبت أنه يوجد فضاءان شعاعيّان جزئيّان متتامّان E_1 و E_2 من E ، يجعلان من p إسقاطاً للفضاء E على E_1 توازياً مع E_2 .
2. ليكن p إسقاطاً من $\mathcal{L}(E)$. وليكن λ عدداً من $\mathbb{K} \setminus \{0,1\}$. أثبت أنّ التطبيق الخطّي $p - \lambda I_E$ تشاكلٌ تقابلي خطّي.
3. ليكن p و q إسقاطين من $\mathcal{L}(E)$. أثبت أن $p + q$ يكون إسقاطاً من $\mathcal{L}(E)$ إذا وفقط إذا كان $p \circ q = q \circ p = 0$. عيّن في هذه الحالة صورة ونواة $p + q$.

4. ليكن p و q إسقاطين من $\mathcal{L}(E)$ يُحقّقان $p \circ q = 0$. أثبت أن التطبيق الخطي $r = p + q - q \circ p$ إسقاط من $\mathcal{L}(E)$ ، وعيّن صورته ونواته.

5. نقول إنّ تطبيقاً خطيّاً $u : E \to E$ يحافظ على الفضاء الشعاعي الجزئي E_1 من E إذا وفقط إذا كان $u(E_1) \subset E_1$. ليكن p إسقاطاً من $\mathcal{L}(E)$ ، وليكن u تطبيقاً خطياً من E إلى E . أثبت أن التطبيقين u و p يتبادلان إذا وفقط إذا حافَظَ u على كلٍّ من $\ker p$ و $\operatorname{Im} p$.

6. ليكن $u : E \to E$ تطبيقاً خطياً يحقق $u^m = I_E$ حيث $m \in \mathbb{N}^*$. ونفترض أنّ u يحافظ على الفضاء الجزئي E_1 من E . ليكن p إسقاطاً للفضاء E على E_1 . أثبت أن التطبيق الخطيّ المعرّف بالعلاقة

$$q = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k \circ p \circ u^{m-k}$$

هو أيضاً إسقاط للفضاء E على E_1 ، وأن u يحافظ على الفضاء الجزئي $\ker q$.

الحل

1. يكفي أن نعرّف $E_1 = \operatorname{Im} p$ و $E_2 = \ker p$.

- فإذا كان x عنصراً من $E_1 \cap E_2$ كان لدينا من جهة أولى $p(x) = 0$ ووجدنا من جهة ثانية عنصراً z يُحقّق $x = p(z)$. ولكن في هذه الحالة يكون

$$0 = p(x) = p^2(z) = p(z) = x$$

أي إنّ $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. فالمجموع $E_1 + E_2$ مجموع مباشرٌ.

- وإذا كان x عنصراً من E عرّفنا $x_1 = p(x)$ و $x_2 = x - x_1 = x - p(x)$. عندئذ يكون $x_1 \in E_1$ ، ويكون

$$p(x_2) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$$

إذن $x_2 \in E_2$. وأخيراً نرى مباشرة أنّ $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2$. وهذا ما يثبتُ أنّ $E = E_1 \oplus E_2$ وأنّ الإسقاط الخطّي على E_1 توازياً مع E_2 هو التطبيق الخطّي p نفسه.

2. ليكن p إسقاطاً من $\mathcal{L}(E)$. وليكن λ عدداً من $\mathbb{K}\backslash\{0,1\}$. عندئذ نلاحظ أنّ

$$(p - \lambda I_E)(p - \mu I_E) = p^2 - (\lambda + \mu)p + \lambda\mu I_E = \lambda\mu I_E + (1 - \lambda - \mu)p$$

فإذا اخترنا $\mu = 1 - \lambda$ وجدنا أنّ

$$(p - \lambda I_E)(p - (1-\lambda)I_E) = \lambda(1-\lambda)I_E$$

ولمّا كان $\lambda(1-\lambda) \neq 0$ استنتجنا أنّ $p - \lambda I_E$ تقابلٌ خطّي، وأنّ تقابله العكسي هو

$$(p - \lambda I_E)^{-1} = \frac{1}{\lambda(1-\lambda)}p - \frac{1}{\lambda}I_E$$

3. ليكن p و q إسقاطين من $\mathcal{L}(E)$.

- نلاحظ أوّلاً أنّ $p+q$ إسقاط من $\mathcal{L}(E)$ إذا وفقط إذا كان

$$(p+q)\circ(p+q) = p+q$$

وهذا يُكافئ $p\circ q + q\circ p = 0$ لأنّ $p^2 = p$ و $q^2 = q$.

- فإذا كان $p\circ q + q\circ p = 0$ استنتجنا بتركيب p مع طرفي $p\circ q = -q\circ p$ أنّ

$$p^2\circ q = -p\circ q\circ p$$

وبالاستفادة مجدّداً من $p\circ q = -q\circ p$، ومن الخاصّتين $p^2 = p$ و $q^2 = q$، نجد

$$p\circ q = -p\circ q\circ p = -(-q\circ p)\circ p = q\circ p^2 = q\circ p$$

ولأنّ $p\circ q + q\circ p = 0$، والعدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ لا يساوي 2، استنتجنا من المساواتين $p\circ q + q\circ p = 0$ و $p\circ q = q\circ p$ أنّ $p\circ q = q\circ p = 0$.

- وبالعكس، إذا كان $p\circ q = q\circ p = 0$ كان $p\circ q + q\circ p = 0$، وهذا يُكافئ، كما وجدنا سابقاً، أنّ $p+q$ إسقاط من $\mathcal{L}(E)$.

- لنفترض إذن أنّ $p\circ q = q\circ p = 0$. من الواضح أنّ

$$\ker p \cap \ker q \subset \ker(p+q)$$

وبالعكس، إذا كان x عنصراً من $\ker(p+q)$ كان $p(x) = -q(x)$، وعندئذ

$$p(x) = p^2(x) = p(-q(x)) = -p\circ q(x) = 0$$
$$q(x) = q^2(x) = q(-p(x)) = -q\circ p(x) = 0$$

ومن ثَمّ $x \in \ker p \cap \ker q$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q.$$

وكذلك من الواضح أنّ $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$. وبالعكس، إذا كان y عنصراً من الفضاء الجزئي $\mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$ ، أمكن كتابته بالشكل $y = p(a) + q(b)$ حيث a و b من E ، وعندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned}(p+q)(y) &= p^2(a) + p \circ q(b) + q \circ p(a) + q^2(b) \\ &= p(a) + q(b) = y\end{aligned}$$

وهذا يثبت أنّ $y \in \mathrm{Im}(p+q)$. فنكون قد أثبتنا أنّ $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$.

4. ليكن p و q إسقاطين من $\mathcal{L}(E)$ يُحقّقان $p \circ q = 0$ ، ولنعرّف

$$r = p + q - q \circ p$$

عندئذ

$$\begin{aligned}r \circ p &= p^2 + q \circ p - q \circ p^2 = p \\ r \circ q &= \cancel{p \circ q} + q^2 - q \circ \cancel{p \circ q} = q \\ r \circ q \circ p &= q \circ p\end{aligned}$$

ومن ثمّ

$$\begin{aligned}r \circ r &= r \circ p + r \circ q - r \circ q \circ p \\ &= p + q - q \circ p = r\end{aligned}$$

- من الواضح أنّ $\ker r \subset \ker p \cap \ker q$. وبالعكس، إذا كان x عنصراً من $\ker r$ كان

$$p(x) + q(x) = q \circ p(x) \qquad (*)$$

وعندئذ نجد بتطبيق p على الطرفين أنّ

$$p^2(x) + \cancel{p \circ} q(x) = \cancel{p \circ} q \circ p(x) = 0$$

ومن ثمّ $p(x) = 0$ ، وبالعودة إلى $(*)$ نستنتج أيضاً أنّ $q(x) = 0$. إذن ينتمي العنصر x إلى $\ker p \cap \ker q$. وهكذا نستنتج أنّ

$$\ker r = \ker p \cap \ker q$$

- من الواضح أنّ $\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ لأنّ $r = p + q \circ (I_E - p)$. وبالعكس، إذا كان y عنصراً من $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ أمكن كتابة y بالشكل $y = p(a) + q(b)$ وعندئذ يكون

$$\begin{aligned} r(y) &= \big(p + q \circ (I_E - p)\big)\big(p(a) + q(b)\big) \\ &= p(a) + \cancel{p \circ} q(b) + q \circ \cancel{(I_E - p) \circ p}(a) + q^2(b) - q \circ \cancel{p \circ} q(b) \\ &= p(a) + q(b) = y \end{aligned}$$

وهذا يثبت أنّ $y \in \operatorname{Im} r$. فنكون قد أثبتنا أنّ $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

5. ليكن p إسقاطاً من $\mathcal{L}(E)$، وليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. نعرّف

$$E_1 = \operatorname{Im} p \quad \text{و} \quad E_2 = \ker p$$

عندئذ، بالاستفادة من كون $E = E_1 \oplus E_2$ يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned} p \circ u = u \circ p &\Leftrightarrow \forall x \in E, \quad p \circ u(x) = u \circ p(x) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x_1 \in E_1, & p(u(x_1)) = u(x_1) \\ \forall x_2 \in E_2, & p(u(x_2)) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x_1 \in E_1, & u(x_1) \in \operatorname{Im} p \\ \forall x_2 \in E_2, & u(x_2) \in \ker p \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \big(u(E_1) \subset E_1\big) \wedge \big(u(E_2) \subset E_2\big) \end{aligned}$$

وهذا يثبت التكافؤ المطلوب.

6. ليكن $u : E \to E$ تطبيقاً خطياً يحقّق $u^m = I_E$ حيث $m \in \mathbb{N}^*$. ونفترض أنّ u يحافظ على الفضاء الجزئي E_1 من E. نهدف إلى إيجاد فضاء جزئي E_2 يتمّم الفضاء E_1 ويُحافظ عليه u.

لتحقيق ذلك نتأمّل إسقاطاً ما p للفضاء E على E_1. ونعرّف التطبيق الخطيّ q بالعلاقة

$$q = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k \circ p \circ u^{m-k}$$

وعندئذ نلاحظ أنّه إذا كان x عنصراً من E كان $p(x) \in E_1$ استناداً إلى تعريف p، وكان أيضاً $u^k \circ p \circ u^{m-k}(x) \in u(E_1) \subset E_1$ في حالة $1 \leq k < m$، وعلى هذا نستنتج مباشرة أنّ $q(x)$ ينتمي إلى E_1، ومن ثَمّ $\forall x \in E, q(x) \in E_1$، وهذا يُكافئ $p \circ q = q$.

ومن جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned} u\circ q &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^{k+1}\circ p\circ u^{m-k} = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=0}^{m-1} u^{k+1}\circ p\circ u^{m-k-1}\right)\circ u \\ &= \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} u^{k}\circ p\circ u^{m-k}\right)\circ u = q\circ u \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} q^2 &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^{k}\circ p\circ u^{m-k}\circ q \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^{k}\circ p\circ q\circ u^{m-k} \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^{k}\circ q\circ u^{m-k} \\ &= \frac{1}{m} q\circ\left(\sum_{k=0}^{m-1} u^{k}\circ u^{m-k}\right) \\ &= \frac{1}{m} q\circ(mI_E) = q \end{aligned}$$

إذن q هو إسقاط خطّي يتبادل مع u . والتطبيق u يُحافظ على كلٍّ من $\operatorname{Im} q$ و $\ker q$. ولقد وجدنا أيضاً أنّ $\operatorname{Im} q \subset E_1$.

وأخيراً، إذا كان $x\in E_1$ كان $u^k(x)$ عنصراً من E_1 أيّاً كانت k من $\{0,1,\ldots,m-1\}$ ، وعندئذ يكون $p\circ u^{m-k}(x) = u^{m-k}(x)$ أيّاً كانت k من $\{0,1,\ldots,m-1\}$ ، وهذا يقتضي أن يكون

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^{k}\circ p\circ u^{m-k}(x) \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^{k}\circ u^{m-k}(x) = x \end{aligned}$$

إذن $E_1\subset \operatorname{Im} q$ ، وهذا يثبت أنّ $\operatorname{Im} q = E_1$. وعليه يكون q أيضاً إسقاطاً للفضاء E على E_1 ، كما إنّ التطبيق u يحافظ على الفضاء الجزئي $E_2 = \ker q$. وبذا يتمّ الإثبات. ■

التمرين 14. ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$، و ليكن $f : E \to E$ تطبيقاً خطّياً.

1. أثبت أن $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \ker f^2 = \ker f$.
2. أثبت أن : $E = \ker f + \operatorname{Im} f \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.
3. نفترض أن بُعد E منتهٍ[2]. أثبت تكافؤ الشروط الأربعة السابقة.

الحل

1. $(\Rightarrow)$ لنفترض أنّ $\ker f^2 = \ker f$، ولنتأمّل عنصراً x من $\ker f \cap \operatorname{Im} f$ عندئذ يكون لدينا، من جهة أولى $f(x) = 0$ ويوجد عنصرٌ z في E يُحقّق $x = f(z)$، ولكن نستنتج من ذلك أنّ $f^2(z) = f(x) = 0$ إذن z ينتمي إلى $\ker f^2$، واستناداً إلى الفرْض، هو ينتمي إلى $\ker f$. وعليه يكون $x = f(z) = 0$. ونكون بذلك قد أثبتنا أنّ $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

$(\Leftarrow)$ وبالعكس، لنفترض أنّ $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$. إنّ الاحتواء $\ker f \subset \ker f^2$ صحيحٌ وضوحاً. ليكن x عنصراً من $\ker f^2$. عندئذ يكون $f(x) \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$ وهذا يقتضي، استناداً إلى الفرْض، أنّ $f(x) = 0$ أي إنّ x ينتمي إلى $\ker f$.

2. $(\Rightarrow)$ لنفترض أنّ $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$، ولنتأمّل عنصراً x من E عندئذ نستنتج من انتماء $f(x)$ إلى $\operatorname{Im} f^2$ أنّه يوجد z في E يُحقّق $f^2(z) = f(x)$. فإذا وضعنا $x_1 = f(z)$ و $x_2 = x - f(z)$ كان x_1 عنصراً من $\operatorname{Im} f$، وكان x_2 عنصراً من $\ker f$، وأخيراً كان $x = x_1 + x_2$. إذن أثبتنا أنّ $E = \ker f + \operatorname{Im} f$.

$(\Leftarrow)$ وبالعكس، لنفترض أنّ $E = \ker f + \operatorname{Im} f$. إنّ الاحتواء $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ صحيحٌ وضوحاً. ليكن إذن x عنصراً من $\operatorname{Im} f$. عندئذ يوجد z في E يُحقّق $x = f(z)$. استناداً إلى الفرْض، نجد في E عنصرين z_1 و z_2 يُحقّقان $z = z_2 + f(z_1)$ حيث $z_2 \in \ker f$. وعندها يكون $x = f^2(z_1)$، أي يكون x عنصراً من $\operatorname{Im} f^2$. فنكون قد أثبتنا أنّ $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.

[2] يتطلّب هذا السؤال بعض الدراية ببحث الفضاءات الشعاعيّة المنتهية البُعد.

3. لنفترض أنّ بُعد الفضاء E منته. لدينا بوجه عام $\ker f \subset \ker f^2$ و $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ إذن

$$\begin{aligned} \ker f = \ker f^2 \;&\Leftrightarrow\; \dim \ker f = \dim \ker f^2 \\ \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \;&\Leftrightarrow\; \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f^2 \end{aligned}$$

وعندئذ تفيدنا المساواتان

$$\begin{aligned} \dim \ker f &= \dim E - \dim \operatorname{Im} f \\ \dim \ker f^2 &= \dim E - \dim \operatorname{Im} f^2 \end{aligned}$$

و

في إثبات صحّة التكافؤ

$$\dim \ker f = \dim \ker f \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f^2$$

فنكون بذلك قد أثبتنا أنّه عندما يكون بُعد الفضاء E منتهياً يكون

$$\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$$

وهذا يُثبت تكافؤ الخواص الأربع المدروسة في هذه الحالة. ■

ملاحظة. يبيّن التطبيق الخطّي $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto X^2P'$ أنّ شرط البُعد المنتهي على E ضروري لتكافؤ الخواص الأربع السابقة. فهنا لدينا

$$\operatorname{Im} f = \left\{P : X^2 | P\right\} \quad \text{و} \quad \ker f = \left\{P : \deg P \leq 0\right\}$$

فالمجموع $\ker f + \operatorname{Im} f$ مباشر دون أن يكون هذان الفضاءان متتامّين.

التمرين 15. ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$ عدده المميِّز لا يساوي 2. ليكن F فضاءً شعاعياً جزئياً من E ولا يساوي E. وليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$ يُحقّق الشرط:

$$\forall x \in E \backslash F, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, \quad u(x) = \lambda_x \cdot x$$

أثبت أنه يوجد عدد λ في $\mathbb{K}$ يُحقّق $u = \lambda I_E$.

الحل

ليكن x و y عنصرين من $E \backslash F$. ولنناقش حالتين.

- إذا كانت الجملة (x, y) مرتبطة خطياً، وجدنا عددين α و β غير معدومين معاً يُحقّقان

$$\alpha x + \beta y = 0$$

ولكن، لمّا كان $x \neq 0$ و $y \neq 0$ استنتجنا أنّ $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$. ومن ثَمّ يوجد عددٌ غير معدوم γ يُحقّق $x = \gamma y$. ونستنتج من المساواة $u(x) = \gamma u(y)$ أنّ

$$\lambda_x x = \gamma \lambda_y y = \lambda_y x$$

ومن ثَمّ $\lambda_y = \lambda_x$ لأنّ $x \neq 0$.

- لنفترض إذن أنّ (x, y) جملة حرّة. عندئذ يوجد t في $\mathbb{K}^*$ يُحقّق $x + ty \notin F$ ، وعندئذ نستنتج من المساواة $u(x + ty) = u(x) + u(ty)$ أنّ

$$(\lambda_{x+ty} - \lambda_x)x + t(\lambda_{x+ty} - \lambda_y)y = 0$$

ولأنّ الجملة (x, y) جملة حرّة، نستنتج أنّ $\lambda_y = \lambda_{x+ty} = \lambda_x$.

إذن ليكن a عنصراً ما من $E \backslash F$ ، ولنضع $\lambda = \lambda_a$ ، فنكون قد أثبتنا فيما سبق أنّ

$$\forall x \in E \backslash F, \quad \lambda_x = \lambda$$

أو

$$\forall x \in E \backslash F, \quad u(x) = \lambda x$$

لنتأمّل عنصراً z من F . عندئذ ينتمي العنصران a و $a + z$ إلى $E \backslash F$ ، ومن ثَمّ

$$u(z) = u(a + z) - u(a) = \lambda(a + z) - \lambda a = \lambda z$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall x \in E, \quad u(x) = \lambda x$$

أو $u = \lambda I_E$. ■

ملاحظة : لقد أثبتنا بوجه خاصّ أنّه إذا حقّق تطبيقٌ خطّي u من $\mathcal{L}(E)$ الخاصّة

$$\forall x \in E, \ \ u(x) \in \mathbb{K}x$$

وُجِدَ λ في $\mathbb{K}$ يُحقّق $u = \lambda I_E$.

التمرين 16. ليكن $E = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ فضاء التوابع الحقيقيّة المستمرّة على $\mathbb{R}$. نعرّف على E التطبيق $\varphi : E \to E$ بالعلاقة $\varphi(f) = g$ حيث $g(x) = \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$. أثبت أنّ φ خطّي. وبيّن: أيكون φ متبايناً أو غامراً ؟

الحل

- إنّ التيقُّن من كون التطبيق φ تطبيقاً خطّياً أمرٌ بسيط نتركه للقارئ.
- ليكن f عنصراً من $\ker\varphi$ عندئذ يكون لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$$

- وباشتقاق طرفي هذه المساواة نستنتج أنّ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad xf(x) = 0$ ، ومن ثَمّ يكون

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = 0$$

- وبالاستفادة من استمرار f نستنتج أنّ $f = 0$ ، أي إنّ $\ker\varphi = \{0\}$ والتطبيق φ متباينٌ.
- إنّ التطبيق φ غير غامر لأنّ $\operatorname{Im}\varphi \subset C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ، حيث $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ هو فضاء التوابع التي تنتمي إلى الصف C^1 على $\mathbb{R}$. ■

التمرين 17. ليكن $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ فضاء التوابع الحقيقيّة التي تقبل الاشتقاق عدداً لانهائيّاً من المرات على $\mathbb{R}$. نعرّف على E التطبيق $\varphi : E \to E$ كما يأتي :

$$\varphi(f) = g \quad \text{حيث} \quad g(x) = f'(x) - 2xf(x)$$

أثبت أنّ φ خطّي. وعيِّن $\ker\varphi^n$ في حالة n من $\mathbb{N}^*$.

الحل

نلاحظ أنّه بالإمكان صياغة عبارة $g = \varphi(f)$ كما يلي :

$$\varphi(f)(x) = f'(x) - 2xf(x) = e^{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\Big(e^{-x^2}f(x)\Big)$$

فإذا عرّفنا التطبيقين الخطّيين T و D بالصيغتين الآتيتين:

$$T : E \to E, f \mapsto T(f) \quad : T(f)(x) = e^{x^2}f(x)$$
$$D : E \to E, f \mapsto f'$$

كان $\varphi = T \circ D \circ T^{-1}$ ، وهذا يُثبتُ من جهة أولى أنّ $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ ، ومن جهة ثانية أنّ

$$\varphi^n = T \circ D^n \circ T^{-1}$$

وعليه $f \in \ker\varphi^n$ إذا وفقط إذا كان $f \in \ker D^n$ ؛ أي إذا كان f تابعاً كثير الحدود من الدرجة $n-1$ على الأكثر. ■

التمرين 18. نتأمّل في $\mathbb{R}^3$ الشعاعين $u = (1,2,3)$ و $v = (3,2,1)$. جِدْ الشرط اللازم والكافي على x و y و z حتّى ينتمي الشعاع (x,y,z) إلى $\mathrm{vect}(u,v)$.

الحل

لنضع بالتعريف $w = (x,y,z)$. عندئذ

$$\begin{aligned} w \in \mathrm{vect}(u,v) &\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad w = \alpha u + \beta v \\ &\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad w = \big(\alpha + 3\beta, 2\alpha + 2\beta, 3\alpha + \beta\big) \end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned} x &= \alpha + 3\beta \\ y &= 2\alpha + 2\beta \\ z &= 3\alpha + \beta \end{aligned}$$

يُكافئ

$$\begin{aligned} x &= \alpha + 3\beta \\ y - 2x &= -4\beta \\ z - 3x &= -8\beta \end{aligned}$$

وهذا بدوره يُكافئ

$$\begin{aligned} \frac{3y-2x}{4} &= \alpha \\ \frac{2x-y}{4} &= \beta \\ z - 2y + x &= 0 \end{aligned}$$

فإذا وُجِد (α,β) يُحقِّق الشرط $w = \alpha u + \beta v$ وجب أن يكون $x + z = 2y$.

وبالعكس، إذا تحقّق هذا الشرط عرّفنا $\alpha = \frac{3y-2x}{4}$ و $\beta = \frac{2x-y}{4}$ فصبح $w = \alpha u + \beta v$.

وعليه

$$(x,y,z) \in \mathrm{vect}(u,v) \Leftrightarrow x + z = 2y$$

وهي النتيجة المرجوّة. ∎

التمرين 19. ليكن $E=\mathbb{R}[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة. نعرّف

$$F=\left\{P\in E:\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}\,t=\int_0^1 tP(t)\,\mathrm{d}\,t=0\right\}$$

أثبت أنّ F فضاء شعاعي جزئي من E وعيِّن فضاءً جزئيّاً G من E يُحقّق $E=F\oplus G$.

الحل

- نترك إثبات كون F فضاءً جزئيّاً للقارئ نظراً إلى سهولته.
- ليكن $G=\mathbb{R}_1[X]$؛ أي فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة من الدرجة الأولى على الأكثر. ولنثبت أنّ

$$E=F\oplus G$$

- ليكن P كثير حدود من $F\cap G$، عندئذ يُكتب P بالشكل $aX+b$، وهو يُحقّق

$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}\,t=\int_0^1 tP(t)\,\mathrm{d}\,t=0$$

أي $\frac{a}{2}+b=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=0$ وهذا يُكافئ

$$\begin{cases} a+2b=0\\ 2a+3b=0\end{cases}$$

وبالحلّ المشترك نجد أنّ $a=b=0$، أي $P=0$. فنكون قد أثبتنا أنّ $F\cap G=\{0\}$.

- لنتأمّل كثير حدود P من E. ولنبحث عن عددين حقيقيين a و b يجعلان كثير الحدود $P(X)-aX-b$ عنصراً من F. فإذا افترضنا وجود هذين العددين كان

$$\int_0^1 (P(t)-at-b)\,\mathrm{d}\,t=\int_0^1 t(P(t)-at-b)\,\mathrm{d}\,t=0$$

وهذا يُكافئ الجملة

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\int_0^1 tP(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{و} \quad \frac{a}{2}+b=\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}\,t$$

التي تُكافئ بدورها

$$b=2\int_0^1 (2-3t)P(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{و} \quad a=6\int_0^1 (2t-1)P(t)\,\mathrm{d}\,t$$

وهذا يثبت وحدانيّة الحلّ في حال وجوده.

وبالعكس، إذا كان P عنصراً من E وعرّفنا كثيري الحدود :

$$\begin{aligned}R(X) &= \left(6\int_0^1 (2t-1)P(t)\,\mathrm{d}\,t\right)X + 2\int_0^1 (2-3t)P(t)\,\mathrm{d}\,t\\ Q(X) &= P(X) - R(X)\end{aligned}$$

كان $P = Q + R$ حيث $Q \in F$ و $R \in G$. وهذا ما يثبتُ أنّ $E = F \oplus G$. ■

التمرين 20. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقلٍ $\mathbb{K}$، ولتكن $(e_i)_{i\in I}$ جماعةً من عناصر $E\backslash\{0\}$. نفترض أنّه يوجد تطبيق خطّي u من $\mathcal{L}(E)$ وجماعة $(\lambda_i)_{i\in I}$ من عناصر $\mathbb{K}$ تُحقِّق $\forall i \in I,\ u(e_i) = \lambda_i e_i$ ، وأنّ التطبيق $i \mapsto \lambda_i$ متباينٌ. أثبت أنّ الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة.

الحل

لنتأمّل جماعة شبه معدومة $(\alpha_i)_{i\in I}$ من $\mathbb{K}^{(I)}$ ، ولنفترض أنّ $\sum_{i\in I}\alpha_i e_i = 0$. عندئذ بتطبيق u عدداً k من المرّات على طرفي هذه المساواة نستنتج أنّه

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \sum_{i\in I}\alpha_i\lambda_i^k e_i = 0$$

فإذا كان $P(X) = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$ كثير حدود ما من $\mathbb{K}[X]$ استنتجنا مما سبق أنّ

$$\sum_{i\in I}\alpha_i P(\lambda_i)e_i = \sum_{i\in I}\alpha_i\left(\sum_{k\geq 0} a_k\lambda_i^k\right)e_i = \sum_{k\geq 0} a_k\left(\sum_{i\in I}\alpha_i\lambda_i^k e_i\right) = 0$$

أي

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\quad \sum_{i\in I}\alpha_i P(\lambda_i)e_i = 0 \qquad (*)$$

فإذا افترضنا أنّ الجماعة $(\alpha_i)_{i\in I}$ غير معدومة كانت المجموعة $J = \left\{i \in I : \alpha_i \neq 0\right\}$ مجموعة منتهية وغير خالية. وفي هذه الحالة نختار k من J ونعرّف كثير الحدود

$$P(X) = \prod_{j\in J\backslash\{k\}} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}$$

مع الاصطلاح $\prod_{i\in\varnothing} z_i = 1$.

عندئذ نستنتج من $(*)$ أنّ $\alpha_k e_k = 0$ ، ولأنّ $e_k \neq 0$ ، وجب أن يكون $\alpha_k = 0$ وهذا يناقض انتماء k إلى J . إذن لا بُدّ أن تكون الجماعة $(\alpha_i)_{i\in I}$ معدومة، وهذا يثبت أنّ الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة. $\blacksquare$

الفضاءات الشعاعيّة المنتهية البُعد

1. عموميّات

1-1. **مبرهنة**. ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. ولتكن $(e_i)_{i\in I}$ جماعة من عناصر E.
إنّ الخواص الآتية متكافئة :

① الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ أساس للفضاء الشعاعي E.

② الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ جماعة مولّدة أصغرية. أي إنّ الجماعة $(e_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ لا تولّد E أيّاً كان j من I.

③ الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة أعظمية. أي تكون مرتبطةً خطياً كلُّ جماعة تُمدِّد تماماً الجماعة السابقة.

الإثبات

①⇐③ إذا لم يكن ذلك صحيحاً أمكن توسيع مجموعة الأدلّة إلى $J = I\cup\{j\}$، حيث $I \not\ni j$، وأمكن إيجاد عنصرٍ e_j في E على أن تكون الجماعة الجديدة $(e_i)_{i\in J}$ حرّةً. ولكنّ الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ أساس للفضاء E إذن توجد جماعة شبه معدومة $(\alpha_i)_{i\in I}$ من $\mathbb{K}^{(I)}$ تُحقّق $e_j = \sum_{i\in I}\alpha_i e_i$ وهذا يناقض كون الجماعة $(e_i)_{i\in J}$ حرّة.

③⇐② ليكن x عنصراً من E، وليكن j عنصراً لا ينتمي إلى I. نضع $J = I\cup\{j\}$ ونعرّف $e_j = x$. لمّا كانت الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ حرةً أعظميّة كانت الجماعة $(e_i)_{i\in J}$ مرتبطة. إذن توجد جماعة شبه معدومة $(\alpha_i)_{i\in J}$ من $\mathbb{K}^{(I)}$ تحقّق $\sum_{i\in J}\alpha_i e_i = 0$ و $(\alpha_i)_{i\in I} \neq 0$. ولأنّ افتراض $\alpha_j = 0$ يناقض كون الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ حرة، وجب أن يكون $\alpha_j \neq 0$ وبالإمكان القسمة على α_j. وعندئذ يكون

$$x = e_j = -\sum_{i\in I}\frac{\alpha_i}{\alpha_j}e_i$$

وتكون، من ثَمّ، الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ جماعةً مولّدة، وهي أصغرية لأنّها حرّة.

② ⇐ ① إذا لم تكن الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ حرةً وُجِدَ i_0 في I يُحقّق أنّ العنصر e_{i_0} تركيبٌ خطي في عناصر الجملة $(e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$. ومن ثَمّ تكون الجماعة $(e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ مولّدة، وهذا يناقض كون الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ جماعة مولّدة أصغرية. ❐

2-1. مبرهنة. ليكن E فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. ولتكن $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ جملة من E. نضع $F = \mathrm{vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. عندئذ تكون كلُّ جملة $(f_1, f_2, \ldots, f_{n+1})$ من F مرتبطةً خطيّاً.

الإثبات

سنثبت هذه المبرهنة بالتدريج على العدد n.

- إذا كان $n = 1$ كان $F = \{\lambda e_1 : \lambda \in \mathbb{K}\}$. فإذا كان f_1 و f_2 من F وُجِدَ عددان λ_1 و λ_2 من $\mathbb{K}$ يُحقّقان $f_1 = \lambda_1 e_1$ و $f_2 = \lambda_2 e_1$. وعندئذ $\lambda_2 f_1 - \lambda_1 f_2 = 0$، والجملة (f_1, f_2) مرتبطة خطياً. (لاحظ أنّ حالة $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ حالة تافهة).
- لنفترض صحة الخاصة عند قيمة $n-1$. ولنفترض أنّ $(f_1, f_2, \ldots, f_{n+1})$ جملة من $F = \mathrm{vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. عندئذ توجد جملة $(\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le n+1\\1\le j\le n}}$ من $\mathbb{K}$ تُحقّق :

$$\begin{array}{ccccccccc}
f_1 & = & \alpha_{11}\ e_1 & + & \alpha_{12}\ e_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}\ e_n \\
f_2 & = & \alpha_{21}\ e_1 & + & \alpha_{22}\ e_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2n}\ e_n \\
\vdots & \vdots & & & & & & & \vdots \\
f_{n+1} & = & \alpha_{n+1,1} e_1 & + & \alpha_{n+1,2} e_2 & + & \cdots & + & \alpha_{n+1,n} e_n
\end{array}$$

فإذا كان $\alpha_{1n} = \alpha_{2n} = \cdots = \alpha_{n+1,n} = 0$ كانت الجملةُ $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ جملةً من عناصر $\mathrm{vect}(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$، وبمقتضى فرْض التدريج تكون هذه الجملة مرتبطة خطيّاً.

لنفترض إذن أنّ $\alpha_{k,n} \neq 0$، ولنضع، في حالة j من $\mathbb{N}_{n+1}\setminus\{k\}$، التعريف الآتي:

$$\tilde{f}_j = f_j - \frac{\alpha_{j,n}}{\alpha_{k,n}} f_k \in \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$$

عندئذ تكون $(\tilde{f}_j)_{j\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus\{k\}}$ جملة من $\mathrm{vect}(e_1,\ldots,e_{n-1})$ فهي إذن مرتبطة خطياً بمقتضى فرْض التدريج. ومن ثَمّ توجد جملة غير معدومة $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus\{k\}}$ من $\mathbb{K}$ تُحقّق $\sum_{j\neq k}\lambda_j\tilde{f}_j = 0$ ومنه

$$\sum_{j\neq k}\lambda_j f_j - \left(\sum_{j\neq k}\frac{\lambda_j\alpha_{j,n}}{\alpha_{n,k}}\right)f_k = 0$$

وهذا يثبت أنّ الجملة $(f_1,f_2,\ldots,f_{n+1})$ جملة مرتبطة خطياً. ❐

1-3. نتيجة. ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. إذا كانت $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ جملة مولّدة للفضاء E كانت كلُّ جماعة $(f_j)_{j\in J}$ تُحقّق الشرط $\mathrm{card}(J) > n$ مرتبطةً خطيّاً.

2. بُعد فضاء شعاعي

2-1. تعريف. ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. نقول إنّ E **منتهي البعد** إذا وفقط إذا وُجدتْ فيه جماعة $(e_i)_{i\in I}$ مولّدة ومنتهية $(\mathrm{card}(I) < +\infty)$.

2-2. مبرهنة. ليكن E فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. ولتكن $(e_i)_{i\in I}$ جماعة من عناصر E. نفترض أنّ الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ جماعة مولِّدة وأنه توجد مجموعة جزئية غير خالية J من I تكون عندها الجماعة $(e_i)_{i\in J}$ حرةً. عندئذ توجد مجموعة جزئية K من I تحوي J أي $(I\supset K\supset J)$، وتكون، في حالتها، الجماعة $(e_i)_{i\in K}$ أساساً للفضاء E.

الإثبات

سنقدّم البرهان فقط في حالة كون الفضاء الشعاعي E منتهي البعد. إذ تتطلّب الحالة العامة تقنيات إضافية مثل (توطئة زورن Zorn) وهي خارج إطار هذا الكتاب.

لمّا كان E فضاءً منتهي البُعد وُجِدَ عددٌ طبيعي n يجعل كلَّ جملةٍ $(f_j)_{j\in L}$ تُحقِّق الشرطَ $\mathrm{card}(L) > n$ مرتبطةً خطياً، وذلك استناداً إلى النتيجة 1-3. لنعرِّف إذن

$$\mathcal{A} = \left\{H\subset I : (J\subset H)\wedge\left(\text{جماعة حرّة } (e_i)_{i\in H}\right)\right\}$$

من الواضح أنّ $J\in\mathcal{A}$ وأنّه بمقتضى الملاحظة السابقة :

$$\forall\, H\in\mathcal{A},\ \mathrm{card}(H)\le n$$

إذن توجد K تنتمي إلى $\mathcal{A}$، وتُحقّق

$$\operatorname{card}(K) = \max\left\{\operatorname{card}(H) : H \in \mathcal{A}\right\}$$

- من جهة أولى، لمّا كان $K \in \mathcal{A}$ كانت الجملة $(e_i)_{i\in K}$ حرّة وحقّقت $J \subset K \subset I$.
- ومن جهة ثانية، إذا لم تكن الجملة $(e_i)_{i\in K}$ مولّدةً، وُجِدَ في $I\backslash K$ عنصر j يُحقّق $e_j \notin \operatorname{vect}\left((e_i)_{i\in K}\right)$، ولكنّ هذا يقتضي أن تكون الجملة $(e_i)_{i\in K\cup\{j\}}$ جملة حرّة في E وأن تكون المجموعة $K \cup \{j\}$ عنصراً من $\mathcal{A}$، وهذا يناقض تعريف K. إذن الجملة $(e_i)_{i\in K}$ جملة مولّدة وهي من ثَمّ تُكوّن أساساً للفضاء E. ❐

2-3. نتيجة. ليكن E فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. لنفترض أنّ $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_r)$ جملة حرّة من E و $\mathcal{G} = (g_1,\ldots,g_m)$ جملة مولّدة للفضاء E. عندئذ يمكننا أن نتمّم $\mathcal{E}$ إلى أساس $(e_1,\ldots,e_r,e_{r+1},\ldots,e_n)$ للفضاء E، وذلك بعناصر $e_{r+1},\ldots,e_n$ مأخوذة من المجموعة $\{g_k : k \leq m\}$.

2-4. مبرهنة وتعريف. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$، نفترض أنّ $E \neq \{0\}$. عندئذ يوجد عددٌ طبيعيٌ وحيدٌ n، بحيث يحقّقُ كلُّ أساس $(e_i)_{i\in I}$ للفضاء E الشرطَ $\operatorname{card}(I) = n$.

نسمّي العددَ n **بُعدَ الفضاء الشعاعي** E على الحقل $\mathbb{K}$، ونرمز إليه عادة بالرمز $\dim_{\mathbb{K}} E$، أو ببساطة $\dim E$، إذا لم يكن هنالك مجال للالتباس.

الإثبات

لنتأمّل أساسين $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ و $\mathcal{F} = (f_1,\ldots,f_m)$ للفضاء E. لمّا كانت $\mathcal{E}$ جملة مولّدة، ولأنّ الجملة $\mathcal{F}$ جملة حرّة، كان $n \geq m$ وذلك بمقتضى النتيجة 1-3. وبأسلوب مماثل، الجملةُ $\mathcal{F}$ جملة مولّدة، والجملة $\mathcal{E}$ جملة حرّة إذن $m \geq n$، ومن ثَمّ $m = n$. ❐

2-5. ملاحظة. نصطلح أنّ $\dim\{0\} = 0$، وأنّه إذا لم يكن الفضاء الشعاعي E منتهي البعد على $\mathbb{K}$ فإنّ $\dim_{\mathbb{K}} E = +\infty$.

2-6. **نتيجة**. ليكن E فضاء شعاعياً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن F فضاءً شعاعياً جزئياً من E . عندئذ يكون F فضاءً شعاعياً منتهي البُعد يُحقّق

$$\dim F \leq \dim E$$

الإثبات

إذا كان $F = \{0\}$ تمّ الإثبات. نفترض إذن أنّ $F \neq \{0\}$ ونعرّف $\mathcal{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية q من $\mathbb{N}^*$ التي توجد، في حالة كل منها، جملة $(x_1,\ldots,x_q)$ حرّة في F .
لمّا كانت كلُّ جملةٍ حرّةٍ في F حرّةً في E كان $\varnothing \neq \mathcal{N} \subset \mathbb{N}_{\dim E}$ ، لأنّ $F \neq \{0\}$.
ليكن $p = \max \mathcal{N} \leq \dim E$ عندئذ توجد جملة $(x_1,\ldots,x_p)$ حرّة في F ، وهي جملة حرّة أعظمية في F ، فهي أساسٌ للفضاء F . ومنه $p = \dim F$ ويكتمل الإثبات. ❐

2-7. **مبرهنة**. إذا كان E و F فضاءين شعاعيين على حقل $\mathbb{K}$ ، وكان بُعداهما منتهيين كان $E \times F$ فضاءً شعاعياً منتهي البُعد على الحقل $\mathbb{K}$ ، وتحقّقت المساواة الآتية.

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F$$

الإثبات

إنّ هذه النتيجة صحيحة لأنه إذا تأملنا أساساً $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ للفضاء E ، وتأملنا كذلك أساساً $\mathcal{F} = (f_1,\ldots,f_m)$ للفضاء F . كانت الجملة

$$\big((e_1,0),(e_2,0),\ldots,(e_n,0),(0,f_1),(0,f_2),\ldots,(0,f_m)\big)$$

أساساً للفضاء $E \times F$. ❐

2-8. **تعميم**. لتكن $E_1, E_2,\ldots,E_n$ فضاءات شعاعية منتهية البعد على حقلٍ $\mathbb{K}$. عندئذ يكون $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ فضاءً شعاعياً منتهي البعد أيضاً، ويكون

$$\dim(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$$

الإثبات

الإثبات مباشرٌ بالتدريج اعتماداً على الخاصّة السابقة. ❐

2-9. مبرهنة. ليكن E و F فضاءين شعاعيين على حقل $\mathbb{K}$. نفترض أنّ بُعد كلٍّ من E و F منتهياً. عندئذ تكون الخاصّتان الآتيتان متكافئتين :

❶ يوجد تقابلٌ خطي u بين E و F، (ونكتب عندئذ $E \cong F$).

❷ $\dim E = \dim F$.

الإثبات

❶ ⇐ ❷ ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً للفضاء E. ولنعرّف $f_i = u(e_i)$ أيّاً كان i من $\mathbb{N}_n$. إنّ الجملة $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ أساس للفضاء F. وذلك للسببين الآتيين:

- الجملة $\mathcal{E}$ جملة حرّة، والتطبيق u متباينٌ إذن $\mathcal{F}$ جملة حرّة.
- الجملة $\mathcal{E}$ جملة مولّدة والتطبيق u غامرٌ إذن $\mathcal{F}$ جملة مولّدة.

ومن ثَمّ $\dim F = n = \dim E$.

❷ ⇐ ❶ ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً للفضاء E، وليكن $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$، أساساً للفضاء F. إنّ التطبيق الخطي $u : E \to F$ المعرّف كما يأتي

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad u(e_i) = f_i$$

هو التقابل الخطّي المطلوب. ❐

2-10. نتيجة. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$. عندئذ يكون E مُشاكِلاً تقابلياً للفضاء $\mathbb{K}^{\dim E}$. أي $E \cong \mathbb{K}^{\dim E}$.

تطبيق.

ليكن $\mathbb{F}$ حقلاً منتهياً، إذن $\operatorname{card}(\mathbb{F}) = p^n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و p عددٌ أولي.

في الحقيقة، ليكن p العددَ المميّز للحقل $\mathbb{F}$. نعلم أنّ p عددٌ أوليٌّ لأنّ $\mathbb{F}$ حلقة تامّة. ومن ثَمّ يكون $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ حقلاً جزئياً من $\mathbb{F}$، ويمكن اعتبار $\mathbb{F}$ فضاءً شعاعياً على $\mathbb{K}$. ولـمّا كان $\mathbb{F}$ حقلاً منتهياً كان بُعدُ الفضاء الشعاعي $\mathbb{F}$ على الحقل $\mathbb{K}$ منتهياً. لنضع $n = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{F}$. عندئذ يكون $\mathbb{F} \cong \mathbb{K}^n$ بمقتضى النتيجة السابقة ومنه

$$\operatorname{card}(\mathbb{F}) = p^n$$

2-11. **نتيجة**. ليكن E فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. نفترض أنّ $E_1, E_2, \dots, E_n$ فضاءات شعاعيّة جزئيّة من E أبعادها منتهية، ونفترض أنّ المجموع $\sum_{i=1}^{n} E_i$ مباشر. عندئذ يكون الفضاء $E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$ منتهي البعد، ويكون

$$\dim \bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$$

الإثبات

في الحقيقة، نعلم أنّ التطبيق

$$\varphi : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \to \bigoplus_{i=1}^{n} E_i, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$$

تقابلٌ خطي. ❐

2-12. **مبرهنة**. ليكن E فضاء شعاعياً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن F فضاءً شعاعياً جزئياً من E. عندئذ يوجد فضاء شعاعي جزئي G من E يُحقّق $E = F \oplus G$.

الإثبات

ليكن $(e_1, \dots, e_r)$ أساساً للفضاء F. يمكننا بناءً على المبرهنة 2-3. أن نجد عناصر $e_{r+1}, \dots, e_n$ في E تجعل الجملة $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ أساساً للفضاء E. نعرّف إذن

$$G = \mathrm{vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$$

ونتحقّق بسهولة أنّ $E = F \oplus G$. ❐

ملاحظة. إنّ الخاصة السابقة صحيحة إذا لم يكن $\dim E < +\infty$.

2-13. **مبرهنة**. ليكن E فضاء شعاعياً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$، وليكن F فضاءً شعاعياً جزئياً من E. عندئذ يكون بُعد E/F منتهياً، ويكون

$$\dim E/F = \dim E - \dim F$$

الإثبات

لنتأمّل استناداً إلى المبرهنة 2-12. فضاءً شعاعياً جزئياً G من E يحقّق $E = F \oplus G$، ولنتأمّل التطبيق $\Phi : G \to E/F,\ x \mapsto [x]$ وهو مقصور الغمر القانوني على الفضاء الجزئي G. إنّ Φ تشاكل تقابلي خطي.

في الحقيقة، إنّ Φ خطيٌّ لأنّه مقصور تطبيق خطي على فضاء شعاعي جزئي من منطلقه. وهو متباينٌ لأنّ

$$\begin{aligned} x \in \ker \Phi &\Leftrightarrow (x \in G) \wedge ([x] = 0) \\ &\Leftrightarrow (x \in G) \wedge (x \in F) \\ &\Leftrightarrow x \in G \cap F = \{0\} \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

وأخيراً إذا كان x عنصراً من E كان $x = x_F + x_G$ حيث $x_F \in F$ و $x_G \in G$، ومن ثَمّ $\Phi(x_G) = [x_G] = [x]$، وهذا يثبت أنّ Φ غامر. ينتج من ذلك أنّ

$$\dim E/F = \dim G = \dim E - \dim F$$

وهو المطلوب إثباته. ❐

2-14. **تعريف**. إذا كان E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$، وكان F فضاءً شعاعياً جزئياً من E. نقول إنّ **تمام بُعد** F منتهٍ ونكتب $\operatorname{codim}_E F < +\infty$ إذا وفقط إذا كان بُعد الفضاء E/F منتهياً. ويكون بالتعريف $\operatorname{codim}_E F = \dim E/F$. لقد أثبتنا في المبرهنة السابقة ما يأتي:

$$\dim E < +\infty \Rightarrow \operatorname{codim}_E F = \dim E - \dim F$$

2-15. **مبرهنة**. ليكن E و F فضاءَين شعاعييّن منتهيي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن u تطبيقاً خطياً من E إلى F، أي $u \in \mathcal{L}(E,F)$. عندئذ يكون بُعد $\operatorname{Im} u$ منتهياً ويكون

$$\dim E = \dim(\ker u) + \dim(\operatorname{Im} u)$$

الإثبات

لقد أثبتنا في بحث الفضاءات الشعاعيّة والتطبيقات الخطيّة أنّ

$$E/\ker u \cong \operatorname{Im} u$$

ومن ثَمّ يكون

$$\dim \operatorname{Im} u = \dim E/\ker u = \dim E - \dim \ker u$$ ❐

2-16.مبرهنة : ليكن E و F فضاءين شعاعيين بعداهما منتهيان على حقل $\mathbb{K}$. عندئذ يكون بُعد الفضاء $\mathcal{L}(E,F)$ منتهياً، ويكون $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \cdot \dim F$.

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$ أساساً للفضاء E. لمّا كان التطبيق الخطي يتعيّن بأسلوب وحيد انطلاقاً من صورة أساس للمنطلق، كان التطبيق

$$\Phi : \mathcal{L}(E,F) \to F^n,\ \ u \mapsto (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$$

تقابلاً خطياً، ومن ثمّ

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim F^n = \sum_{i=1}^{n} \dim F = \dim E \cdot \dim F$$ ❐

3. رتبة جماعة أشعة ورتبة تطبيق خطي

3-1. تعريف. لتكن $(x_i)_{i\in I}$ جماعة من فضاء شعاعي E. إذا كان بُعد $\mathrm{vect}((x_i)_{i\in I})$ منتهياً قلنا إنّ **رتبة الجماعة** $(x_i)_{i\in I}$ منتهية وكتبنا

$$\mathrm{rg}((x_i)_{i\in I}) = \dim \mathrm{vect}((x_i)_{i\in I})$$

3-2. مبرهنة. ليكن u تطبيقاً خطياً بين فضاءَيْن شعاعيَّين E و F. ولتكن $(x_i)_{i\in I}$ جماعة من E رتبتها منتهية. عندئذ تكون رتبة الجماعة $(u(x_i))_{i\in I}$ منتهية أيضاً ويكون

$$\mathrm{rg}((u(x_i))_{i\in I}) \leq \mathrm{rg}((x_i)_{i\in I})$$

الإثبات

ليكن $G = \mathrm{vect}((x_i)_{i\in I})$، ولنضع $r = \dim G = \mathrm{rg}((x_i)_{i\in I})$. نتأمّل التطبيق الخطّي v مقصور u على G؛ أي $v = u_{|G} \in \mathcal{L}(G,F)$. إنّ

$$\mathrm{Im}\, v = \mathrm{vect}((u(x_i))_{i\in I})$$

ومن ثمّ

$$r = \dim G = \dim \ker v + \dim \mathrm{Im}\, v \geq \dim \mathrm{Im}\, v = \mathrm{rg}(u(x_i))_{i\in I})$$

وهي النتيجة المرجوة. ❐

3-3. تعريف. ليكن u تطبيقاً خطياً بين فضاءين شعاعيين E و F . إذا كان بُعد $\operatorname{Im} u$ منتهياً قلنا إنّ **رتبة التطبيق الخطي** u منتهية وكتبنا $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u$.

نلاحظ، من جهة أولى، أنّه في حالة $\dim E < +\infty$ لدينا

$$\dim E = \dim \ker u + \operatorname{rg} u$$

وأنه، من جهة ثانية، إذا كان $\dim F < +\infty$ كان $\operatorname{rg} u \leq \dim F$. إذن

$$\forall u \in \mathcal{L}(E,F), \quad \operatorname{rg} u \leq \min(\dim E, \dim F)$$

ونلاحظ أيضاً أنّه إذا كان بُعد كلّ من E و F منتهياً كان لدينا التكافؤان المهمّان الآتيان:

- ❄ u متباين $\Leftrightarrow \operatorname{rg} u = \dim E$.
- ❄ u غامر $\Leftrightarrow \operatorname{rg} u = \dim F$.

4-3. مبرهنة. ليكن E و F فضاءَين شعاعيَّين بُعداهما منتهيان ويُحقِّقان $\dim E = \dim F$. وليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E,F)$. عندئذ تكون الخواص الآتية متُكافئة.

❶ u غامر.

❷ u متباين.

❸ u تقابل.

❹ $n = \operatorname{rg} u$.

❺ u قَلوبٌ من اليسار. (أي يوجد v من $\mathcal{L}(F,E)$ يُحقّق $v \circ u = I_E$) .

❻ u قَلوب من اليمين. (أي يوجد v من $\mathcal{L}(E,F)$ يُحقّق $u \circ v = I_F$) .

الإثبات

الإثبات سهل ومتروك للقارئ. ❐

5-3. مبرهنة. لتكن E و F و G ثلاثة فضاءات شعاعية ذات أبعاد منتهية على حقل $\mathbb{K}$. نفترض أنّ $u \in \mathcal{L}(E,F)$ و $v \in \mathcal{L}(F,G)$. عندئذ

① $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$.

② إذا كان u غامراً كان $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$.

③ إذا كان v متبايناً كان $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.

الإثبات

① لدينا من جهة أولى $\operatorname{Im}(v \circ u) = v(\operatorname{Im}(u))$ ومن ثَمّ $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \operatorname{rg} u$. ومن جهة ثانية $\operatorname{Im}(u) \subset F$ إذن $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ ومن ثَمّ $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \operatorname{rg} v$.

② إذا كان u غامراً كان $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$.

③ إذا كان v متبايناً كان

$$\operatorname{rg}(v \circ u) = \dim v(\operatorname{Im}(u)) = \dim \operatorname{Im}(u) = \operatorname{rg} u$$

وبذا يكتمل إثبات المبرهنة. ❐

3-6. ملاحظة عملية

لتعيين رتبة جملة أشعة $(a_1, \ldots, a_p)$ من فضاء شعاعي E بُعده منتهٍ يساوي n، نكتب أولاً كلّ شعاع منها عبارةً خطيّةً بعناصر أساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ للفضاء E . ثُمّ نلاحظ أنّ الفضاء $\operatorname{vect}(a_1, \ldots, a_p)$ لا يتغيّر إذا ضُرِبَ أحد الأشعة a_i بثابت مختلف عن 0، أو إذا أُضيف إلى أحد الأشعة a_i تركيب خطي في بقية الأشعة $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_p$. لذلك نسعى للحصول على جملة $(b_1, \ldots, b_p)$ من أشعة تولّد الفضاء نفسه $\operatorname{vect}(a_1, \ldots, a_p)$ وتحوي مركّباتها على الأساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ العديد من الأصفار. في الحقيقة، نسعى لأن يكون تمثيل الأشعة $b_1, \ldots, b_p$ على الأساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ من النمط التالي :

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_p \\
\hline
e_1 & \times & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
e_2 & \times & \times & 0 & & \vdots \\
\vdots & \times & & \times & \ddots & \vdots \\
 & \vdots & & & \ddots & 0 \\
\vdots & \times & & & & \times \\
 & \vdots & & & & \vdots \\
e_n & \times & \times & \cdots & \cdots & \times
\end{array}$$

سنوضّح هذا الأسلوب في المثال الآتي، إذ نحسب رتبة الجملة (a_1, a_2, a_3, a_4) من $\mathbb{R}^5$ التي تُعطى مركّباتها على الأساس القانونيّ كما يأتي :

$$a_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \\ 13 \\ 12 \end{bmatrix} \text{ و } a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ و } a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

نبيّن فيما يلي العمليات التي يمكن إجراؤها على هذه الأشعّة للحصول على الشكل السابق:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 13 \\ 9 & 7 & 1 & 12 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 11 & 3 \\ 3 & 5 & 16 & -6 \\ 5 & 15 & 27 & 3 \\ 1 & 11 & 12 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

حيث $b_1 = a_3$ و $b_2 = a_1 + 2a_3$ و $b_3 = a_2 + 5a_3$ و $b_4 = a_4 - 2a_3$. ثمّ

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 11 & 3 \\ 3 & 5 & 16 & -6 \\ 5 & 15 & 27 & 3 \\ 1 & 11 & 12 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & c_3 & b_2 & b_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 17 & 5 & -6 \\ 5 & 9 & 15 & 3 \\ 1 & -9 & 11 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

حيث $c_3 = b_3 - b_2 - b_4 = -a_1 + a_2 + 5a_3 - a_4$. ثمّ

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & c_3 & b_2 & b_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 17 & 5 & -6 \\ 5 & 9 & 15 & 3 \\ 1 & -9 & 11 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & c_3 & c_2 & c_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 17 & -114 & -57 \\ 5 & 9 & -48 & -24 \\ 1 & -9 & 74 & 37 \end{bmatrix} \end{array}$$

وقد عرّفنا

$$\begin{aligned} c_2 &= b_2 - 7c_3 = 8a_1 - 7a_2 - 33a_3 + 7a_4 \\ c_4 &= b_4 - 3c_3 = 3a_1 - 3a_2 - 17a_3 + 4a_4 \end{aligned}$$

ثُمّ

$$\begin{array}{cccc} b_1 & c_3 & c_2 & c_4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} b_1 & c_3 & c_4 & d_2 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 17 & -114 & -57 \\ 5 & 9 & -48 & -24 \\ 1 & -9 & 74 & 37 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 17 & -57 & 0 \\ 5 & 9 & -24 & 0 \\ 1 & -9 & 37 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث $d_2 = c_2 - 2c_4 = 0$، ولكن d_2 تساوي من جهة ثانية $2a_1 - a_2 + a_3 - a_4$. نستنتج أنّ $\mathrm{rg}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3$ وأنه توجد علاقة ارتباط خطّي بين الأشعة a_1 و a_2 و a_3 و a_4 هي

$$d_2 = 2a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 0 .$$

تمرينات

التمرين 1. نتأمّل في $\mathbb{R}^3$ الأشعّة

$$u = (1,1,-1) \quad \text{و} \quad v = (-1,1,1) \quad \text{و} \quad w = (1,-1,1)$$

أثبت أنّ (u,v,w) أساسٌ للفضاء $\mathbb{R}^3$، وأعطِ مركِّبات الشعاع $(2,1,3)$ على هذا الأساس.

الحل

يكفي أن نثبتَ أنّ كلَّ شعاع (x,y,z) يُكتب بأسلوب وحيد عبارة خطّية بالأشعّة u و v و w.

ولكنّ المساواة $(x,y,z) = \alpha u + \beta v + \gamma w$ حيث (α,β,γ) من $\mathbb{R}^3$ تُكافئ

$$\begin{aligned} x &= \alpha - \beta + \gamma \\ y &= \alpha + \beta - \gamma \\ z &= -\alpha + \beta + \gamma \end{aligned}$$

وهذا يُكافئ

$$\begin{aligned} x &= \alpha - \beta + \gamma \\ y + x &= 2\alpha \\ z + x &= 2\gamma \end{aligned}$$

وهذا بدوره يُكافئ

$$\alpha = \frac{x+y}{2}, \quad \beta = \frac{y+z}{2}, \quad \gamma = \frac{z+x}{2}$$

ولمّا كانت هذه الصيغة تعرّف بأسلوبٍ وحيد الثلاثيّة (α,β,γ)، استنتجنا أنّ (u,v,w) أساسٌ للفضاء $\mathbb{R}^3$ وأنّ

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) = \frac{x+y}{2} u + \frac{y+z}{2} v + \frac{z+x}{2} w$$

وبوجه خاص يكون لدينا

$$(2,1,3) = \frac{3}{2} u + 2v + \frac{5}{2} w$$

وهي النتيجة المطلوبة. ∎

التمرين 2. عيِّن رتبة جملة الأشعّة $\mathcal{F}$ من الفضاء الشعاعي E في كلٍّ من الحالات الآتية :

① الجملة $\mathcal{F} = \big((1,0,1,0),(1,1,0,0),(-1,-1,1,0),(0,0,2,0)\big)$ في $\mathbb{R}^4$.

② الجملة $\mathcal{F} = \big(X^2+X+1, X^2+3X+1, 2X, X^3+3\big)$ في $\mathbb{C}[X]$.

③ الجملة $\mathcal{F} = \big(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4\big)$ في $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R})$ المعطاة بالعلاقات

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x,y,z,t) &= x+z\\
\varphi_2(x,y,z,t) &= -x+2y\\
\varphi_3(x,y,z,t) &= x+y-z+t\\
\varphi_4(x,y,z,t) &= y+t
\end{aligned}$$

الحل

① لنلاحظ أنّ $\mathcal{F} = (a_1,a_2,a_3,a_4)$ حيث

$$\begin{aligned}
a_1 &= (1,0,1,0), & a_2 &= (1,1,0,0)\\
a_3 &= (-1,-1,1,0), & a_4 &= (0,0,2,0)
\end{aligned}$$

ليكن $V = \operatorname{vect}(\mathcal{F})$. عندئذ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
e_1 &= a_1 - \tfrac{1}{2}a_4 &&= (1,0,0,0) \in V\\
e_2 &= a_2 - e_1 &&= (0,1,0,0) \in V\\
e_3 &= \tfrac{1}{2}a_4 &&= (0,0,1,0) \in V
\end{aligned}$$

وأخيراً نُلاحظ أنّ $a_4 = 2a_2 + 2a_3$. إذن

$$\operatorname{vect}(e_1,e_2,e_3) \subset V \subset \operatorname{vect}(a_1,a_2,a_3)$$

ولأنّ الجملة (e_1,e_2,e_3) مستقلّة خطيّاً وضوحاً، استنتجنا أنّ $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \dim V = 3$.

② لنلاحظ أنّ $\mathcal{F} = (a_1,a_2,a_3,a_4)$ حيث

$$\begin{aligned}
a_1 &= X^2+X+1, & a_2 &= X^2+3X+1\\
a_3 &= 2X, & a_4 &= X^3+3
\end{aligned}$$

وليكن $V = \operatorname{vect}(\mathcal{F})$. عندئذ نلاحظ أنّ $a_2 = a_1 + a_3$ ، إذن

$$V = \operatorname{vect}(a_1,a_3,a_4)$$

ولكنّ الأشعّة (a_1,a_3,a_4) مستقلّة خطيّاً بسبب اختلاف درجاتها مثنى مثنى. إذن

$$\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \dim V = 3$$

③ لنتأمّل الأساس $\mathcal{E}=(e_1^*,e_2^*,e_3^*,e_4^*)$ للفضاء $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R})$ المعرّف كما يأتي :

$$e_1^*(x,y,z,t)=x \qquad e_2^*(x,y,z,t)=y$$
$$e_3^*(x,y,z,t)=z \qquad e_4^*(x,y,z,t)=t$$

عندئذ تُعطى مركّبات $\mathcal{F}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$ على الأساس $\mathcal{E}=(e_1^*,e_2^*,e_3^*,e_4^*)$ كما يأتي:

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

ولكن، بإجراء تحويلات بسيطة على هذه الأشعّة، نجد

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[C_3\leftarrow C_3-C_1]{C_2\leftarrow C_2+C_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{C_4\rightleftarrows C_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_4\leftarrow C_4-2C_2]{C_3\leftarrow C_3-C_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow{C_3\leftarrow \frac{-1}{2}C_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_4\leftarrow C_4-C_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

وقد رمزنا بالرمز C_k للدلالة على العمود ذي الدليل k. وهذا يثبتُ أنّ الجملة $\mathcal{F}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$ مستقلّة خطيّاً، أي إنّ $\operatorname{rg}(\mathcal{F})=\dim V=4$. ■

التمرين 3. ليكن F و G فضاءَين شعاعيّين جزئيّين من $\mathbb{R}^5$، بُعد كلٍّ منهما يساوي 3. أثبت أنّ $F\cap G\neq\{0\}$.

الحل

في الحقيقة، لدينا $F+G\subset\mathbb{R}^5$، إذن $\dim(F+G)\le 5$، ولكن إذا كان $F\cap G=\{0\}$ كان

$$F+G=F\oplus G$$

ومن ثَمّ $\dim(F+G)=\dim F+\dim G=6$ وهذا خُلفٌ واضحٌ. ■

التمرين 4. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$ بُعده يساوي 3. وليكن u تطبيقاً خطيّاً يُحقِّق $u^2\ne 0$ و $u^3=0$. جِدْ التطبيقات الخطّيّة f من $\mathcal{L}(E)$ التي تُحقّق $f\circ u=u\circ f$.

الحل

لمّا كان $u^2\ne 0$ استنتجنا أنّه يوجد عنصرٌ a في E يُحقّق $u^2(a)\ne 0$. وعندئذ نتأمّل الجملة $\mathcal{E}$ من E المعرّفة كما يأتي $\mathcal{E}=(a,u(a),u^2(a))$.

- في الحقيقة، إنّ الجملة $\mathcal{E}$ حرّة، لأنّه إذا افترضنا أنّ

$$\lambda a+\mu u(a)+\nu u^2(a)=0$$

استنتجنا، بتطبيق u ثُمّ u^2 على طرفي هذه المساواة، أنّ

$$\lambda u(a)+\mu u^2(a)=0 \quad \text{و} \quad \lambda u^2(a)=0$$

ولأنّ $u^2(a)\ne 0$، نستنتج على التوالي أنّ $\lambda=0$ ثُمّ $\mu=0$ ثُمّ $\nu=0$.

- ولكن $\dim E=3$، إذن تكوّن الجملة $\mathcal{E}=(a,u(a),u^2(a))$ أساساً للفضاء E.

- ليكن f تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E)$ يُحقِّق $f\circ u=u\circ f$. لمّا كان $f(a)$ عنصراً من E وجدنا أعداداً λ_0 و λ_1 و λ_2 تُحقّق

$$f(a)=\lambda_0 a+\lambda_1 u(a)+\lambda_2 u^2(a)$$

وعندئذ يكون لدينا

$$f(u(a))=u(f(a))=\lambda_0 u(a)+\lambda_1 u^2(a)$$

و

$$f(u^2(a))=u(f(u(a)))=\lambda_0 u^2(a)$$

هذا يثبت أنّ التطبيق الخطّي $g = f - \lambda_0 I_E - \lambda_1 u - \lambda_2 u^2$ ينعدم عند عناصر الأساس $\mathcal{E}$ فهو إذن يساوي 0، أي

$$f \in \operatorname{vect}(I_E, u, u^2)$$

وبالعكس، من الواضح أنّ كلَّ عنصرٍ من $\operatorname{vect}(I_E, u, u^2)$ يتبادل مع u وهذا ما يثبتُ أنّ

$$\operatorname{vect}(I_E, u, u^2) = \left\{f \in \mathcal{L}(E) : f \circ u = u \circ f\right\}$$

وهي النتيجة المطلوبة.

التمرين 5. ليكن $E = \mathbb{R}^4$. ولنتأمّل في E الأشعة :

$$\begin{aligned} a &= (1,2,3,4), & b &= (1,1,1,3), \quad c = (2,1,1,1) \\ d &= (-1,0,-1,2), & e &= (2,3,0,1) \end{aligned}$$

وليكن الفضاءين الجزئيين :

$$V = \operatorname{vect}(d, e) \quad \text{و} \quad U = \operatorname{vect}(a, b, c)$$

احسب بُعد كلٍّ من U و V و $U \cap V$ و $U + V$.

الحل

- نلاحظ أوّلاً أنّ كلاًّ من الجملتين (a, b, c) و (d, e) جملةٌ حرّة. وهذا يثبتُ أنّ

$$\dim V = 2 \quad \text{و} \quad \dim U = 3$$

- ومن جهة أخرى ينتمي الشعاع (x, y, z, t) إلى U إذا وفقط إذا وُجِدت أعداد α و β و γ تُحقّق المساواة $(x, y, z, t) = \alpha a + \beta b + \gamma c$، وهذه المساواة تُكافئ

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta + 2\gamma \\ y &= 2\alpha + \beta + \gamma \\ z &= 3\alpha + \beta + \gamma \\ t &= 4\alpha + 3\beta + \gamma \end{aligned}$$

أو

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + \beta + 2\gamma \\ y - 2x &= -\beta - 3\gamma \\ z - 3x &= -2\beta - 5\gamma \\ t - 4x &= -\beta - 7\gamma \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \alpha + \beta + 2\gamma \\ y - 2x &= -\beta - 3\gamma \\ z - 3x - 2(y - 2x) &= \gamma \\ t - 4x - (y - 2x) &= -4\gamma \end{aligned}\right.$$

وأخيراً

$$\begin{aligned} x &= 2\gamma + \beta + \alpha \\ -y + 2x &= 3\gamma + \beta \\ z - 2y + x &= \gamma \\ t + 4z - 9y + 2x &= 0 \end{aligned}$$

وعليه

$$(x, y, z, t) \in U \Leftrightarrow 2x - 9y + 4z + t = 0$$

- لمّا كان $U \cap V \subset V$ استنتجنا أنّ $\dim U \cap V \leq 2$.
  - فإذا كان $\dim U \cap V = 0$ كان $U \cap V = \{0\}$، ونتج من ذلك أنّ المجموع $U + V$ مباشرٌ، ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} \dim(U + V) &= \dim U \oplus V \\ &= \dim U + \dim V = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

  وهذا يناقض كون الفضاء $U + V$ محتوى في $\mathbb{R}^4$ الذي بُعده 4.

  - وإذا كان $\dim U \cap V = 2 = \dim V$ كان $U \cap V = V$ أو $V \subset U$. ولكن نتيقّن بسهولة أنّ $d \not\in U$، وهذا تناقضٌ أيضاً. إذن يجب أن يكون $\dim U \cap V = 1$.
- لمّا كان $\dim U \cap V < \dim V$ استنتجنا أنّ $V \not\subset U$، ومن ثَمّ $U \subsetneq U + V$ إذن لا بُدّ أن يكون

$$3 = \dim U < \dim U + V \leq \dim \mathbb{R}^4 = 4$$

ومنه $\dim U + V = 4$. ■

التمرين 6. ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$، بُعده n. وليكن f تطبيقاً من $\mathcal{L}(E)$، و x عنصراً من $E\backslash\{0\}$. نفترض أن الجملة $\mathcal{E} = (f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x))$ أساس للفضاء E. أثبت أن f تقابلٌ، وأنه يوجد $(a_1, \ldots, a_n)$ في $\mathbb{K}^n$ يُحقّق

$$f^n + a_n f^{n-1} + \cdots + a_1 I_E = 0$$

الحل

لمّا كانت صورة هذه الجملة وفق التطبيق الخطّي f حرّة، استنتجنا أنها نفسها حرّة. فهي أساسٌ للفضاء E لأنّ بُعده يساوي n. ولمّا كان الشعاع $f^n(x)$ عنصراً من E أمكن تحليله على الأساس $\mathcal{E}$، أي توجد أعداد $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ في $\mathbb{K}$ تُحقّق

$$f^n(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} f^k(x)$$

ونستنتج من ذلك، بتطبيق f^j على طرفَي العلاقة السابقة، أنّ

$$\forall j \in \{0,1,\ldots,n-1\}, \quad f^n(f^j(x)) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} f^k(f^j(x))$$

وهذا يبرهن أنّ التطبيق الخطّي $g = f + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} f^k$ ينعدم عند عناصر الأساس $\mathcal{E}$. وفهو إذن معدوم أي إنّ $f + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} f^k = 0$، وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 7. ليكن E و F فضاءَين شعاعيين على حقل $\mathbb{K}$. وليكن V فضاءً شعاعياً جزئياً من E وكذلك ليكن W فضاءً شعاعياً جزئياً من F. نعرّف $\mathcal{L}_{V,W}(E,F)$ بأنّها المجموعة :

$$\mathcal{L}_{V,W}(E,F) = \left\{ u \in \mathcal{L}(E,F) : V \subset \ker u, \quad \operatorname{Im} u \subset W \right\}$$

أثبت أنَّ $\mathcal{L}_{V,W}(E,F)$ فضاءٌ شعاعيّ جزئي من $\mathcal{L}(E,F)$ يُشاكِل تقابلياً الفضاء $\mathcal{L}(E/V,W)$. ماذا يمكن أن نقول عن بُعد $\mathcal{L}_{V,W}(E,F)$، إذا كان كل من $\dim W$ و $\operatorname{codim} V$ منتهياً ؟

الحل

- من الواضح أنّ $\mathcal{L}_{V,W}(E,F)$ فضاءٌ جزئي من $\mathcal{L}(E,F)$.
- ليكن $i : W \to F, x \mapsto x$ التباين القانوني، و $Q : E \to E/V, x \mapsto [x]$ الغمر القانوني. ثُمّ لنعرّف التطبيق الخطّي:

$$\varphi : \mathcal{L}(E/V,W) \to \mathcal{L}_{V,W}(E,F), u \mapsto i \circ u \circ Q$$

- إنّ التطبيق φ متباينٌ.

في الحقيقة، إذا كان u عنصراً من $\ker\varphi$ كان $i \circ u \circ Q = 0$، ولأنّ Q غامرٌ و i متباينٌ استنتجنا أنّ $u = 0$. أي $\ker\varphi = \{0\}$.

- وكذلك فإنّ التطبيق φ غامرٌ.

في الحقيقة، ليكن v عنصراً من $\mathcal{L}_{V,W}(E,F)$، وليكن A صفَّ تكافؤ ما من E/V. عندئذ تتكون المجموعة $v(A)$ من عنصرٍ واحدٍ ينتمي إلى W. لإثبات ذلك، نتأمّل عنصراً a من A فيكون $A = [a]$، عندئذ ينتمي $v(a)$ إلى $v(A)$. وإذا كان y عنصراً ما من $v(A)$ وُجِدَ x في A يُحقّق $y = v(x)$. ولكن

$$y - v(a) = v(x-a) = 0$$

لأنّ انتماء كلٍّ من a و x إلى صفِّ التكافؤ A نفسه يعني أنّ

$$x - a \in V \subset \ker v$$

إذن $v(A) = \{v(a)\}$ حيث a هو عنصرٌ ما من A. لنعرّف إذن في حالة A من E/V العنصر $u(A)$ من W بالعلاقة $v(A) = \{u(A)\}$، عندئذ نتيقّن بتحقّق مباشر أنّ u تطبيق خطّي من E/V إلى W يُحقّق $\varphi(u) = v$.

بذلك نكون قد أثبتنا أنّ φ تشاكل تقابلي خطّي من $\mathcal{L}_{V,W}(E,F)$ إلى $\mathcal{L}(E/V,W)$. فإذا كان بُعد W وتمام بُعد V منتهيين، كان

$$\dim \mathcal{L}(E/V,W) = \dim E/V \cdot \dim W = \operatorname{codim}_E V \cdot \dim W$$

ومن ثَمّ

$$\dim \mathcal{L}_{V,W}(E,F) = \operatorname{codim}_E V \cdot \dim W$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 8. ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. وليكن E_1 و E_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من E. نفترض أن بُعد $E_1 + E_2$ منتهٍ. أثبت أنّ

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2$$

ثُمّ أثبت أنّ :

$$\left(\dim E_1 + \dim E_2 > \dim E\right) \Rightarrow \left(E_1 \cap E_2 \neq \{0\}\right)$$

الحل

لنتأمّل التطبيق الخطّي $\varphi : E_1 \times E_2 \to E, (x_1, x_2) \mapsto x_1 - x_2$. عندئذ نلاحظ من جهة أولى أنّ $\mathrm{Im}\,\varphi = E_1 + E_2$ ، ونلاحظ من جهة ثانية أنّ

$$\ker \varphi = \{(x, x) : x \in E_1 \cap E_2\} \cong E_1 \cap E_2$$

إذن نستنتج من كون

$$\dim E_1 \times E_2 = \dim \mathrm{Im}\,\varphi + \dim \ker \varphi$$

أنّ

$$\dim E_1 + \dim E_2 = \dim(E_1 + E_2) + \dim E_1 \cap E_2$$

وهي المساواة المطلوبة. أمّا الاستنتاج الأخير فهو واضح استناداً إلى المساواة السابقة. ■

التمرين 9. لتكن E و F و G ثلاثة فضاءات شعاعية منتهية الأبعاد على حقل $\mathbb{K}$.

① نفترض أنّ $f \in \mathcal{L}(E, F)$ و $g \in \mathcal{L}(F, G)$. أثبت أن

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim F \leq \mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\big(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\big)$$

② نفترض أنّ $f \in \mathcal{L}(E, F)$ و $g \in \mathcal{L}(E, F)$. أثبت أن

$$\big|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)\big| \leq \mathrm{rg}(g + f) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$$

الحل

① نفترض أنّ $f \in \mathcal{L}(E, F)$ و $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

- نلاحظ أوّلاً أنّ $\mathrm{Im}\, f \subset F$ ، يقتضي أنّ $\mathrm{Im}\, g \circ f \subset \mathrm{Im}\, g$ ومن ثَمّ

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(g)$$

- وإذا تأمّلنا التطبيق الخطي

$$\tilde{g} : \mathrm{Im}\, f \to G, x \mapsto g(x)$$

كان $\mathrm{Im}\, \tilde{g} = \mathrm{Im}\, g \circ f$ ولأنّ

$$\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \ker \tilde{g} + \dim \mathrm{Im}\, \tilde{g}$$

استنتجنا أنّ $\dim \mathrm{Im}\, \tilde{g} \leq \dim \mathrm{Im}\, f$ أي $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$ ، ومنه المتراجحة:

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\big(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\big)$$

- في الحقيقة، لدينا

$$\operatorname{rg}(f) = \dim\ker\tilde{g} + \operatorname{rg}(g\circ f)$$

ولكن $\ker\tilde{g} = \operatorname{Im} f \cap \ker g$ ومن ثَمّ

$$\dim\ker\tilde{g} \leq \dim\ker g = \dim F - \operatorname{rg}(g)$$

إذن

$$\operatorname{rg}(f) \leq \dim F - \operatorname{rg}(g) + \operatorname{rg}(g\circ f)$$

فنكون بذلك قد أثبتنا صحّة المتراجحة

$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim F \leq \operatorname{rg}(g\circ f) \leq \min\big(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g)\big)$$

② نفترض أنّ $f \in \mathcal{L}(E,F)$ و $g \in \mathcal{L}(E,F)$.

- نستنتج من الاحتواء $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ أنّ

$$\operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

- كما نستنتج من كون $f = f+g-g$ و $g = f+g-f$ أنّ

$$\operatorname{rg}(f) \leq \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg}(g) \quad \text{و} \quad \operatorname{rg}(g) \leq \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg}(f)$$

ومن ثَمّ نكون قد أثبتنا أنّ

$$\big|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)\big| \leq \operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

وبذا يتمّ إثبات المطلوب. ■

التمرين 10. ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$، بُعده n. وليكن E_1 و E_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من E يحقّقان $\dim E_1 = \dim E_2 = n-p$. أثبت أنه يوجد فضاء شعاعي جزئي F يحقّق $E = F \oplus E_1 = F \oplus E_2$.

الحل

- لنذكّر بالخاصّة المعروفة الآتية : ليكن H و G فضاءَين جزئيّين من E. عندئذ يكون $F \cup G$ فضاءً جزئيّاً من E إذا وفقط إذا كان $F \subset G$ أو $G \subset F$. في الحقيقة، إنّ كفاية هذا الشرط واضحة، لنثبت إذن لزومه. نفترض أنّ $F \cup G$ فضاء جزئي من E، وأنّ $F \not\subset G$، فيوجد عنصرٌ b ينتمي إلى F ولا ينتمي إلى G. ليكن x عنصراً ما من G. لمّا كان

$F\cup G$ فضاءً جزئيّاً كان $x+b$ عنصراً من $F\cup G$. فإمّا أن يكون $x+b\in G$ ومن ثَمّ $b=x+b-x\in G$ وهذا خُلفٌ، أو أن يكون $x+b\in F$ ومن ثَمّ $x=x+b-b\in F$ ، فنكون قد أثبتنا أنّ $G\subset F$ ، وتمّ إثبات الخاصة المشار إليها.

- ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$ ، بُعده n . نتأمّل في حالة p من $\{0,1,\ldots,n\}$ الخاصّة $\mathbb{P}_p$ الآتية:

أيّاً كان الفضاءان الجزئيّان E_1 و E_2 من E اللذان يُحقّقان $$\dim E_1=\dim E_2=n-p$$ فيوجد فضاءٌ جزئيٌ F من E يُحقّق $$E=F\oplus E_1=F\oplus E_2$$

سنثبتُ صحّة $\mathbb{P}_p$ بالتدريج على العدد p .

- في الحقيقة، $\mathbb{P}_0$ صحيحة وضوحاً. إذ نأخذ $F=\{0\}$ لأنّ $E_1=E_2=E$ في هذه الحالة.
- ليكن k عدداً طبيعيّاً يُحقّق $1\le k\le n$ ، ولنفترض صحّة $\mathbb{P}_{k-1}$. ولنتأمّل فضاءَيْن جزئيَّيْن E_1 و E_2 من E يُحقّقان $\dim E_1=\dim E_2=n-k$.

  إذا كان $E_1\subset E_2$ أو $E_2\subset E_1$ كان $E_1=E_2$ ، لأنّ $\dim E_1=\dim E_2$ ، وفي هذه الحالة يكفي أن نختار F فضاءً يتمّم E_1 ليتحقق
  $$E=F\oplus E_1=F\oplus E_2 .$$
  أمّا إذا كان $E_2\not\subset E_1$ و $E_1\not\subset E_2$ ، فعندئذ لا تكوّن المجموعة $E_1\cup E_2$ فضاءً جزئيّاً من E ، ومن ثَمّ يكون $E_1\cup E_2\subsetneq E$ ، نختار إذن عنصراً a من $E\backslash(E_1\cup E_2)$ ، ونعرّف
  $$E_2'=E_2\oplus\mathbb{K}a \quad و \quad E_1'=E_1\oplus\mathbb{K}a$$
  فيكون $\dim E_1'=\dim E_2'=n-k+1=n-(k-1)$. ويوجد، بناءً على فرْض التدريج، فضاء جزئي F' يُحقّق $E=F'\oplus E_1'=F'\oplus E_2'$. وعندئذ نعرّف $F=F'\oplus\mathbb{K}a$. فيكون $E=F\oplus E_1=F\oplus E_2$ ، وبذا نكون قد أثبتنا صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_k$.

وهكذا يكتمل إثبات النتيجة المطلوبة بالتدريج. ■

التمرين 11. لتكن n من $\mathbb{N}^*$، وليكن $E = \mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد درجة كل منها على n. وليكن u من $\mathcal{L}(E)$ التطبيق الخطّي المعرّف بالعلاقة :

$$u(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$$

① تحقّق أنّ u خطّي، وعيّن $\ker u$ و $\operatorname{Im} u$ و $\operatorname{rg} u$.

② ليكن Q من $\operatorname{Im} u$ أثبت أنه يوجد في E كثير حدود وحيد P يُحقّق الشروط :

$$u(P) = Q \quad \text{و} \quad P(0) = P'(0) = 0$$

الحل

① ليكن P عنصراً من $\ker u$، ولنعرّف

$$Q(X) = P(X) - P(0) - \big(P(1) - P(0)\big)X$$

فيكون $Q(0) = Q(1) = 0$، كما نلاحظ أنّ $u(Q) = 0$ لأنّ $u(P) = 0$. وعليه

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad Q(k+1) - Q(k) = Q(k) - Q(k-1)$$

وهذا يتيح لنا أن نثبت بالتدريج أنّ $\forall k \in \mathbb{N}, \quad Q(k+1) - Q(k) = 0$. فالمتتالية $\big(Q(k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ متتالية ثابتة، ولمّا كان $Q(0) = 0$ استنتجنا أنّ $\forall k \in \mathbb{N}, Q(k) = 0$. ولا يمكن لكثير الحدود Q أن يقبل عدداً لانهائياً من الجذور ما لم يكن صفرياً. إذن $Q = 0$ أو $P = P(0) - \big(P(1) - P(0)\big)X$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $\ker u \subset \mathbb{R}_1[X]$. أمّا الاحتواء المُعاكس فهو صحيح وضوحاً. إذن

$$\ker u = \mathbb{R}_1[X]$$

ومن جهة أخرى، نلاحظ أنّه في حالة $k \geq 2$ لدينا

$$\begin{aligned} u(X^k) &= (X+1)^k + (X-1)^k - 2X^k \\ &= \sum_{\ell=0}^{k-2} \big(1 + (-1)^{k-\ell}\big) C_k^\ell X^\ell \end{aligned}$$

ومن ثَمّ $\deg u(X^k) \leq k-2$ في حالة k من $\mathbb{N}$. إذن $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$، ولكن

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im} u = \operatorname{rg} u &= \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \ker u \\ &= n + 1 - 2 = n - 1 = \dim \mathbb{R}_{n-2}[X] \end{aligned}$$

إذن $\operatorname{rg} u = n - 1$ و $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

② ليكن $G = X^2\mathbb{R}_{n-2}[X]$. إنّ G فضاء شعاعي جزئي من E بُعده $n-1$. ولنتأمّل

$$\varphi : G \to \mathbb{R}_{n-2}[X], P \mapsto u(P)$$

لمّا كان من الواضح أنّ $\ker \varphi = G \cap \ker u = \{0\}$ ، استنتجنا أنّ φ متباينٌ، وهو من ثَمّ تقابل لأنّ $\dim G = \dim \mathbb{R}_{n-2}[X]$ ، وعليه نرى أنّه مهما يكن Q من $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ فيوجد كثير حدود وحيد P يُحقّق $u(P) = Q$ بالإضافة إلى الشرطين $P(0) = P'(0) = 0$ ، (أي $P \in G$)، وهكذا يكتمل الحل. ■

التمرين 12. ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. نفترض أنّ $n = \dim E$. وليكن u عنصراً من $\mathcal{L}(E)$. أثبت أنّ

$$\ker u = \operatorname{Im} u \Leftrightarrow (u^2 = 0) \wedge (n = 2 \operatorname{rg} u)$$

الحل

① لنفترض أنّ $\ker u = \operatorname{Im} u$. عندئذ من الواضح أنّ $u^2 = 0$ ، كما نستنتج من العلاقة

$$n = \dim E = \dim \ker u + \dim \operatorname{Im} u$$

أنّ $n = 2 \operatorname{rg} u$.

② وبالعكس، لنفترض أنّ $u^2 = 0$ وأنّ $n = 2 \operatorname{rg} u$. عندئذ نستنتج من $u^2 = 0$ أنّ

$$\forall x \in E, \quad u(x) \in \ker u$$

أي إنّ $\operatorname{Im} u \subset \ker u$. ولكن $\dim \operatorname{Im} u + \dim \ker u = \dim E = n$ إذن

$$\operatorname{rg} u + \dim \ker u = 2 \operatorname{rg} u$$

ومن ثَمّ

$$\dim \ker u = \dim \operatorname{Im} u$$

إذن يجب أن يكون $\operatorname{Im} u = \ker u$. ■

التمرين 13. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن u و v عنصرين من $\mathcal{L}(E)$. نفترض أنّ

$$E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \ker u + \ker v$$

أثبت أنّ

$$E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v = \ker u \oplus \ker v$$

الحل

لنضع $n = \dim E$، ولنستفد من الخواص الآتية:

$$n = \operatorname{rg} u + \dim \ker u$$
$$n = \operatorname{rg} v + \dim \ker v$$
$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

عندئذ نستنتج من الفرْض $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \ker u + \ker v$ أنّ

$$n = \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v)$$
$$n = n - \operatorname{rg} u + n - \operatorname{rg} v - \dim(\ker u \cap \ker v)$$

وبجمع هاتين المساواتين نجد

$$\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) + \dim(\ker u \cap \ker v) = 0$$

إذن

$$\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0\} \quad \text{و} \quad \ker u \cap \ker v = \{0\}$$

وهذا يثبتُ المطلوب. ■

التمرين 14. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن العنصران u و v من $\mathcal{L}(E)$. نفترض أنّ $u \circ u - u \circ v + 2u - I_E = 0$، أثبت أنّ u و v يتبادلان أي $u \circ v = v \circ u$.

الحل

في الحقيقة، نستنتج من المساواة $u \circ u - u \circ v + 2u - I_E = 0$ أنّ

$$u \circ v = u^2 + 2u - I_E$$

وكذلك أنّ

$$u \circ (u - v + 2I_E) = I_E$$

إذن u قلوبٌ ومقلوبه هو التطبيق $u - v + 2I_E$ وعليه يكون

$$(u - v + 2I_E) \circ u = I_E$$

ومن ثَمّ $u^2 - v \circ u + 2u = I_E$ أو $v \circ u = u^2 + 2u - I_E = u \circ v$. فالتطبيقان الخطيّان u و v يتبادلان. ■

التمرين 15. ليكن E و F فضاءَين شعاعيين على حقل $\mathbb{K}$. نفترض أن $\dim E = n$.
ليكن u عنصراً من $\mathcal{L}(E,F)$. أثبت أنّه

① أيّاً كان الفضاء الشعاعي الجزئي G من E لدينا

$$\dim u(G) = \dim G - \dim G \cap \ker u$$

② أيّاً كان الفضاء الشعاعي الجزئي H من F لدينا

$$\dim u^{-1}(H) = n + \dim H \cap u(E) - \operatorname{rg} u$$

الحل

① في الحقيقة، نتأمّل التطبيق $\tilde{u} : G \to F, x \mapsto u(x)$. فنلاحظ من جهة أولى أنّ $\operatorname{Im} \tilde{u} = u(G)$ وأنّه من جهة ثانية $\ker \tilde{u} = G \cap \ker u$. فإذا استفدنا من المساواة $\dim G = \operatorname{rg} \tilde{u} + \dim \ker \tilde{u}$ استنتجنا أنّ

$$\dim u(G) = \dim G - \dim G \cap \ker u .$$

② هنا أيضاً نتأمّل التطبيق $\tilde{u} : u^{-1}(H) \to F, x \mapsto u(x)$. فنلاحظ أنّ $\operatorname{Im} \tilde{u} = H \cap u(E)$ وأنّه من جهة ثانية $\ker \tilde{u} = \ker u$. فإذا استفدنا من المساواة $\dim u^{-1}(H) = \operatorname{rg} \tilde{u} + \dim \ker \tilde{u}$ استنتجنا أنّ

$$\dim u^{-1}(H) = \dim H \cap u(E) + n - \operatorname{rg} u . \qquad \blacksquare$$

التمرين 16. ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. ولنتأمّل المجموعة

$$\mathbb{S} = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \right\}$$

① أثبت أنّ $\mathbb{S}$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ بُعده يساوي 2.

② نفترض أنّ المعادلة $X^2 - aX - b = 0$ تقبل جذرين مختلفين λ_1 و λ_2. أثبت أنّ الجملة $\left((\lambda_1^n)_{n\geq 0}, (\lambda_2^n)_{n\geq 0} \right)$ تكوّن أساساً للفضاء $\mathbb{S}$.

③ نفترض أنّ المعادلة $X^2 - aX - b = 0$ تقبل جذراً مضاعفاً λ. أثبت أنّه في هذه الحالة تكوّن الجملة $\left((n\,\lambda^n)_{n\geq 0}, (\lambda^n)_{n\geq 0} \right)$ أساساً للفضاء $\mathbb{S}$.

④ لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية **فيبوناتشي** Fibonacci المعرّفة تدريجياً كما يأتي:

$$\forall n \geq 0, \ \ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \ \text{ و } \ x_1 = 1, \ \ x_0 = 1$$

احسب x_n بدلالة n.

الحل

① نترك أمر التيقُّن من كون $\mathbb{S}$ فضاءً جزئيّاً من $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ للقارئ. لنتأمّل في $\mathbb{S}$ المتتاليتين $\mathfrak{A} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $\mathfrak{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفتين كما يأتي:

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+2} = aA_{n+1} + bA_n$$
$$B_0 = 0, \quad B_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+2} = aB_{n+1} + bB_n$$

من الواضح أنّ الجملة $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ حرّة لأنّ $\lambda = \left(\lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B}\right)_0$ و $\mu = \left(\lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B}\right)_1$. فإذا كانت العبارة الخطية $\lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B}$ معدومة كان $\lambda = \mu = 0$.

ومن جهة أخرى، إذا كانت $\mathfrak{U} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathbb{S}$، أثبتنا بالتدريج على العدد n أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 A_n + u_1 B_n$$

ومن ثَمّ $\mathfrak{U} = u_0\mathfrak{A} + u_1\mathfrak{B}$.

إذن تكوّن الجملة $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ أساساً للفضاء $\mathbb{S}$، و $\dim \mathbb{S} = 2$.

② لنبحث متى تنتمي المتتالية الهندسيّة $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ إلى $\mathbb{S}$؟ في الحقيقة، تتحقّق العلاقة التدريجيّة إذا وفقط إذا كان $\lambda^2 = a\lambda + b$، أي إذا وفقط إذا كان $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$. إذن تنتمي المتتاليتان $(\lambda_1^n)_{n\geq 0}$ و $(\lambda_2^n)_{n\geq 0}$ إلى $\mathbb{S}$. أمّا الجملة $\left((\lambda_1^n)_{n\geq 0}, (\lambda_2^n)_{n\geq 0}\right)$ فهي جملة مستقلّة خطيّاً، لأنّه إذا كانت العبارة الخطيّة $\alpha(\lambda_1^n)_{n\geq 0} + \beta(\lambda_2^n)_{n\geq 0}$ معدومة، استنتجنا، بملاحظة الدليلين $n = 0$ و $n = 1$ فقط، أنّ

$$\alpha + \beta = 0 \quad \text{و} \quad \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 0$$

وهذا يقتضي $\alpha = \beta = 0$ لأنّ $\lambda_1 \neq \lambda_2$. وعلى هذا تكوّن الجملة $((\lambda_1^n)_{n\geq 0}, (\lambda_2^n)_{n\geq 0})$ أساساً للفضاء $\mathbb{S}$ الذي بُعده يساوي 2.

③ نفترض في هذه الفقرة أنّ λ جذرٌ مضاعف للمعادلة $X^2 - aX - b = 0$. عندئذ نعلم استناداً إلى السؤال السابق أنّ المتتالية $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ تنتمي إلى $\mathbb{S}$، وكذلك إذا عرّفنا $v_n = n\lambda^n$ عندئذ يكون

$$\begin{aligned} v_{n+2} - av_{n+1} - bv_n &= \lambda^n((n+2)\lambda^2 - a(n+1)\lambda - nb) \\ &= \lambda^n(n(\lambda^2 - a\lambda - b) + \lambda(2\lambda - a)) = 0 \end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ المتتالية $(n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ تنتمي أيضاً إلى $\mathbb{S}$. ونتيقَّن بسهولة أنّ الجملة $((\lambda_1^n)_{n\geq 0}, (\lambda_2^n)_{n\geq 0})$ جملة حرّة، فهي إذن أساسٌ للفضاء $\mathbb{S}$ في هذه الحالة.

④ نلاحظ في هذا المثال أنّ $a = b = 1$، وللمعادلة $X^2 - X - 1 = 0$ جذران مختلفان هما

$$\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{و} \quad \frac{-1}{\omega} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

إذن

$$\mathbb{S} = \left\{ \left(\alpha\omega^n + \beta(-1/\omega)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} : (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

نعيِّن الثابتين α و β ليتحقَّق الشرطان

$$\begin{aligned} \alpha\omega^0 + \beta(-1/\omega)^0 &= x_0 = 1 \\ \alpha\omega^1 + \beta(-1/\omega)^1 &= x_1 = 1 \end{aligned}$$

فنجد أنّ

$$\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{5}} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{1}{\omega\sqrt{5}}$$

وعليه

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\omega^{n+1} - \left(\frac{-1}{\omega}\right)^{n+1} \right)$$

أو

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \frac{1}{2^{n+1}\cdot\sqrt{5}} \left(\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1} \right)$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 17. ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيَي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن f و g تطبيقين خطيين من $\mathcal{L}(E,F)$ و $\mathcal{L}(F,E)$ على التوالي. نفترض أنّ

$$g \circ f \circ g = g \quad \text{و} \quad f \circ g \circ f = f$$

① أثبت أن $E = \operatorname{Im} g \oplus \ker f$.

② قارن بين $\operatorname{rg} f$ و $\operatorname{rg} g$.

الحل

① ليكن y عنصراً من $\operatorname{Im} g \cap \ker f$ عندئذ $f(y) = 0$، ويوجد عنصرٌ x في F يُحقّق $y = g(x)$. ولكن

$$y = g(x) = g \circ f \circ g(x) = g \circ f(y) = g(0) = 0$$

إذن لقد أثبتنا أنّ $\operatorname{Im} g \cap \ker f = 0$.

ومن جهة أخرى، إذا كان x عنصراً من E عرّفنا

$$x_1 = g \circ f(x) \quad \text{و} \quad x_2 = x - g \circ f(x)$$

عندئذ من الواضح أنّ $x_1 \in \operatorname{Im} g$، و إنّ $f(x_2) = f(x) - f \circ g \circ f(x) = 0$ إذن $x_2 \in \ker f$. وأخيراً، $x = x_1 + x_2$. إذن $E \subset \operatorname{Im} g + \ker f$. وعليه نكون قد أثبتنا أنّ

$$E = \operatorname{Im} g \oplus \ker f$$

② نستنتج من المساواة السابقة أنّ

$$\dim E = \operatorname{rg} g + \dim \ker f$$

ونعلم من جهة أخرى أنّ $\dim E = \operatorname{rg} f + \dim \ker f$، إذن $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$. ■

التمرين 18. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن التطبيق الخطّي u من $\mathcal{L}(E)$. نصطلح أنّ $u^0 = I_E$، ونعرّف في حالة k من $\mathbb{N}^*$ التطبيق الخطّي u^k بالعلاقة $u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k}$. كما نعرّف

$$N_k = \ker u^k \quad \text{و} \quad I_k = \operatorname{Im} u^k \quad \text{و} \quad \delta_k = \dim N_k$$

① أثبت أنّه، في حالة k من $\mathbb{N}$، يتحقّق الاحتواءان $I_{k+1} \subset I_k$ و $N_k \subset N_{k+1}$.

② أثبت أنّه يوجد r في $\mathbb{N}$ يُحقّق $\delta_{r+1} = \delta_r$. نعرّف إذن

$$p = \min\{k \in \mathbb{N} : \delta_{k+1} = \delta_k\}$$

③ أثبت أنّه، أيّاً كان $k \geq p$، فلدينا $I_k = I_p$ و $N_k = N_p$.

④ أثبت أنّ $p \leq \dim E$.

⑤ وأخيراً أثبت أنّ $E = N_p \oplus I_p$.

الحل

① ليكن y عنصراً من I_{k+1}، عندئذ نجد x من E يُحقّق $y = u^{k+1}(x)$ ويكون من ثَمّ

$$y = u^k(u(x)) \in I_k$$

وعليه $I_{k+1} \subset I_k$. ونبرهن بأسلوب مماثل أنّ $N_k \subset N_{k+1}$.

② لنضع $n = \dim E$. ولنتأمّل التابع

$$\delta : \mathbb{N} \to \{0,1,\ldots,n\}, k \mapsto \delta_k = \dim N_k$$

استناداً إلى الخاصّة $N_k \subset N_{k+1}$ أيّاً كانت k، نستنتج أنّ التابع δ تابعٌ متزايدٌ، وهو لا يمكن أن يكون متزايداً تماماً، وإلاّ كانت المجموعة $\{0,1,\ldots,n\}$ غير منتهية، فلا بُدّ أن نجد عدداً r يُحقّق $\delta_r = \delta_{r+1}$. وعليه نعرّف

$$p = \min\left\{r \in \mathbb{N} : \delta_r = \delta_{r+1}\right\}$$

③ نعلم إذن أنّ $N_p \subset N_{p+1}$ و $\dim N_p = \dim N_{p+1}$ إذن $N_p = N_{p+1}$. ليكن k عدداً طبيعيّاً يُحقّق $k \geq p$. عندئذ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} x \in N_{k+1} &\Rightarrow u^{k+1}(x) = 0 \\ &\Rightarrow u^{p+1}(u^{k-p}(x)) = 0 \\ &\Rightarrow u^{k-p}(x) \in \ker u^{p+1} = N_{p+1} \\ &\Rightarrow u^{k-p}(x) \in N_p \\ &\Rightarrow u^p(u^{k-p}(x)) = 0 \\ &\Rightarrow x \in N_k \end{aligned}$$

ومن ثَمّ $N_{k+1} = N_k$. إذن نستنتج بالتدريج على العدد k أنّ $\forall k \geq p, N_k = N_p$.

ومن جهة أخرى، لدينا، في حالة $k \geq p$، ما يلي :

$$\begin{aligned} \dim I_k &= \mathrm{rg}(u^k) = n - \dim N_k \\ &= n - \dim N_p = \mathrm{rg}(u^p) = \dim I_p \end{aligned}$$

ولمّا كان $\forall k \geq p, I_k \subset I_p$، استنتجنا أنّ $\forall k \geq p, I_k = I_p$.

④ لمّا كان $E \supset N_p$ استنتجنا أنّ $\delta_p = \dim N_p \leq n$. ولكن

$$\delta_p = \sum_{k=1}^{p}(\delta_k - \delta_{k-1}) \geq \sum_{k=1}^{p} 1 = p$$

إذن $p \leq n = \dim E$.

⑤ في حالة $p = 0$ يكون $N_p = \{0\}$ و $I_p = E$ ، والخاصّة المشار إليها محقّقة.
لننظر في حالة $p > 0$. ليكن y عنصراً من $N_p \cap I_p$. عندئذ يكون $u^p(y) = 0$ ويوجد عنصرٌ x من E يُحقّق $y = u^p(x)$. وعندئذ يكون $u^{2p}(x) = u^p(y) = 0$ ، إذن $x \in N_{2p}$ ، ولكن $N_{2p} = N_p$ إذن $x \in N_p$ ومن ثَمّ $y = u^p(x) = 0$. نكون بذلك قد أثبتنا أنّ $N_p \cap I_p = \{0\}$.

نستنتج من ذلك أنّ

$$\dim(N_p \oplus I_p) = \dim \ker u^p + \mathrm{rg}(u^p) = \dim E$$

ومن ثَمّ $E = N_p \oplus I_p$. وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 19. لتكن E و F و G ثلاثة فضاءات شعاعيّة منتهية البُعد على حقلٍ $\mathbb{K}$. وليكن u و v تطبيقين خطيّين من $\mathcal{L}(E,F)$ و $\mathcal{L}(F,G)$ على التوالي.

① نفترض أنّ $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(v \circ u)$.

❶ أثبت أنّ $\mathrm{Im}\, v = \mathrm{Im}\, v \circ u$ وأنّ $\ker u = \ker v \circ u$.

❷ أثبت أنّ $\mathrm{Im}\, u \cap \ker v = \{0\}$.

❸ استنتج أنّ $F = \mathrm{Im}\, u \oplus \ker v$

② بالعكس، نفترض أنّ $F = \mathrm{Im}\, u \oplus \ker v$.

❶ أثبت أنّ $\mathrm{Im}\, v = \mathrm{Im}\, v \circ u$.

❷ استنتج أنّ $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(v \circ u)$.

الحل

① نفترض أنّ $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v = \operatorname{rg}(v \circ u)$.

❶ في الحقيقة، $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ ولمّا كان لهذين الفضاءين البُعد نفسه استنتجنا أنّهما متساويان أي $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$.

ومن جهة أخرى من الواضح أنّ $\ker u \subset \ker v \circ u$. ولكن

$$\begin{aligned}\dim \ker u &= \dim E - \operatorname{rg} u \\ &= \dim E - \operatorname{rg}(v \circ u) = \dim \ker v \circ u\end{aligned}$$

إذن، لا بُدّ أن يكون $\ker u = \ker v \circ u$.

❷ ليكن y عنصراً من $\operatorname{Im} u \cap \ker v$. عندئذ لدينا من جهة أولى $v(y) = 0$ ويوجد عنصرٌ x من E يُحقِّق $y = u(x)$. نستنتج إذن أنّ x ينتمي إلى $\ker v \circ u$ ومن ثَمّ إلى $\ker u$. ولكنّ هذا يقتضي أنّ $y = u(x) = 0$. بذا نكون قد أثبتنا أنّ $\operatorname{Im} u \cap \ker v = \{0\}$.

❸ نستنتج مما سبق أنّ $\operatorname{Im} u \oplus \ker v \subset F$، ولكن

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Im} u \oplus \ker v &= \operatorname{rg}(u) + \dim \ker v \\ &= \operatorname{rg}(v) + \dim \ker v = \dim F\end{aligned}$$

إذن يجب أن يكون $\operatorname{Im} u \oplus \ker v = F$.

② بالعكس، نفترض أنّ $F = \operatorname{Im} u \oplus \ker v$.

❶ لدينا بوجه عام $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$. وبالعكس، ليكن y عنصراً من $\operatorname{Im} v$. عندئذ يوجد x في F يُحقِّق $y = v(x)$. ولكن لمّا كان $F = \operatorname{Im} u \oplus \ker v$ أمكننا كتابة $x = u(z) + t$ حيث z من E و t من $\ker v$. وعليه يكون

$$y = v(x) = v\big(u(z) + t\big) = v \circ u(z)$$

إذن ينتمي العنصر y إلى $\operatorname{Im} v \circ u$ وهذا ما يثبتُ أنّ $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$.

❷ إذن $\operatorname{rg} v = \operatorname{rg}(v \circ u)$. ومن $F = \operatorname{Im} u \oplus \ker v$ نستنتج أنّ

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v$$

ويكتمل الحل. ■

التمرين 20. لتكن F و G و H ثلاثة فضاءات شعاعيّة جزئيّة من فضاء شعاعي E. ولنفترض أنّ $F \subset G$ و $F + H = G + H$ و $F \cap H = G \cap H$.

أثبت أنّ $F = G$.

الحل

ليكن x عنصراً من G، عندئذ نستنتج من كون $G \subset F + H$ أنّه يوجد x_F في F، ويوجد x_H في H يُحقّقان $x = x_F + x_H$.

ولكن لمّا كان $F \subset G$ كان $x_H = x - x_F \in G$، إذن $x_H \in G \cap H$. ولكن نعلم من جهة أخرى أنّ $F \cap H = G \cap H$، إذن $x_H \in F \cap H \subset F$. وعليه يكون $x = x_F + x_H \in F$. فنكون بذلك قد أثبتنا أنّ $G \subset F$، ومن ثَمّ $F = G$. ■

التمرين 21. نذكّر أنّ $\mathbb{R}[X]$ هو فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة، وأنّ $\mathbb{R}_m[X]$ هو فضاء كثيرات الحدود التي درجاتها أصغر أو تساوي m.

① ليكن P كثير حدود حقيقياً يُحقّق $P(X) = P(X+1)$. أثبت أنّ P ثابت.

② ليكن $P(X)$ كثير حدود حقيقياً غير معدوم. أثبت أنّ

$$\deg(P(X+1) - P(X)) < \deg P(X)$$

③ نعرّف التطبيق الخطّي $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{n-1}[X]$ بالعلاقة :

$$\Phi(P) = \big(P(0), P(X+1) - P(X)\big)$$

عيّن $\ker \Phi$. ماذا تستنتج بشأن التطبيق الخطّي Φ؟

④ استنتج مما سبق أنّه مهما تكن n من $\mathbb{N}^*$، يوجد كثيرُ حدود وحيدٌ $Q_n(X)$ من $\mathbb{R}_n[X]$ يُحقّق: $Q_n(0) = 0$ و $Q_n(X+1) - Q_n(X) = X^{n-1}$. عيّن $\deg Q_n$ بدلالة n. واحسب بوجه خاصّ $Q_1(X)$.

⑤ نعرّف في حالة n من $\mathbb{N}^*$، كثير الحدود P_{n+1} بالعلاقة :

$$P_{n+1}(x) = n\left(\int_0^x Q_n(t)\,\mathrm{d}\,t - x\int_0^1 Q_n(t)\,\mathrm{d}\,t\right)$$

احسب $\Phi(P_{n+1})$ واستنتج عبارة P_{n+1} بدلالة Q_{n+1}.

⑥ أثبت أنّ : $\forall(m,n) \in \mathbb{N}^{*2},\quad \sum_{k=1}^{m} k^{n-1} = Q_n(m+1)$.

⑦ استفد مما سبق لحساب Q_2 و Q_3 و Q_4 واستنتج عبارة $\sum_{k=1}^{m} k^3$ بدلالة m.

الحل

① ليكن P كثير حدود حقيقي، ولنفترض أنّ P يحقّق $P(X) = P(X+1)$. نعرّف $Q(X) = P(X) - P(0)$، ونلاحظ أنّ $Q(k+1) = Q(k)$ أيّاً كانت k من $\mathbb{N}$، ولمّا كان $Q(0) = 0$ استنتجنا أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Q(k) = 0$$

ولكن لا يمكن لكثير حدود غير الصفري أن يقبل عدداً لانهائيّاً من الجذور. إذن $Q = 0$. أي

$$P(X) = P(0) \in \mathbb{R}$$

② ليكن $P(X)$ كثير حدود حقيقياً غير صفري، وليكن $a_d X^d$ الحدّ المسيطر في $P(X)$. عندئذ يكون $a_d X^d$ أيضاً الحدَّ المسيطر في $P(X+1)$. وهذا يثبتُ أنّ

$$\deg\big(P(X+1) - P(X)\big) < \deg P(X)$$

③ نعرّف التطبيق الخطّي $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{n-1}[X]$ بالعلاقة

$$\Phi(P) = \big(P(0), P(X+1) - P(X)\big)$$

- إذا كان $P \in \ker\Phi$ كان $P(0) = 0$ وكان $P(X+1) = P(X)$، وبناءً على ما أثبتناه في الطلب الأوّل، نستنتج أنّ $P(X) = P(0) = 0$. وعليه $\ker\Phi = \{0\}$. فالتطبيق Φ متباين.
- في الحقيقة، لمّا كان $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1 = \dim\big(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{n-1}[X]\big)$ استنتجنا أنّ التطبيق Φ تقابلٌ خطّي.

④ في الحقيقة، الشروط الموضوعة على Q_n تُكافئ $\Phi(Q_n) = (0, X^{n-1})$. ولمّا كان Φ تقابلاً استنتجنا أنّ هناك كثير حدود وحيداً Q_n يُحقّق المطلوب هو $\Phi^{-1}((0, X^{n-1}))$. ولمّا كان Q_n عنصراً من $\mathbb{R}_n[X]$ استنتجنا أنّ $\deg Q_n \le n$. ولكن إذا كان $\deg Q_n < n$ كان

$$\deg\big(Q_n(X+1) - Q_n(X)\big) < n - 1$$

وما تحقّقت المساواة $Q_n(X+1) - Q_n(X) = X^{n-1}$. فلا بُدَّ أن يكون $\deg Q_n = n$. من الواضح أنّ $Q_1(X) = X$، لأنّ $\Phi(X) = (0,1)$.

⑤ نعرّف في حالة n من $\mathbb{N}^*$، كثير الحدود P_{n+1} بالعلاقة:

$$P_{n+1}(x) = n\left(\int_0^x Q_n(t)\,\mathrm{d}\,t - x\int_0^1 Q_n(t)\,\mathrm{d}\,t\right)$$

- نلاحظ أوّلاً أنّ $P_{n+1}(0) = 0$.
- ومن جهة أخرى، نلاحظ أنّ P_{n+1} قابلٌ للاشتقاق وأنّه

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad P'_{n+1}(x) = nQ_n(x) - n\int_0^1 Q_n(t)\,\mathrm{d}\,t$$

إذن

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(x+1) - P'_{n+1}(x) &= n\big(Q_n(x+1) - Q_n(x)\big) \\ &= nx^{n-1} = (x^n)' \end{aligned}$$

وبملاحظة أنّ $P_{n+1}(1) = P_{n+1}(0) = 0$، نستنتج أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad P_{n+1}(x+1) - P_{n+1}(x) = x^n$$

أي إنّ $\Phi(P_{n+1}) = (0, X^n)$ وهذا يثبتُ أنّ $Q_{n+1} = P_{n+1}$.

⑥ نعلم أنّه في حالة $1 \le k \le m$ لدينا

$$k^{n-1} = Q_n(k+1) - Q_n(k)$$

فإذا جمعنا هذه المساوَيات طرفاً إلى طرف، وتذكّرنا أنّ $Q_n(0) = 0$، استنتجنا أنّ

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2},\quad \sum_{k=1}^{m} k^{n-1} = Q_n(m+1)$$

⑦ انطلاقاً من $Q_1(X) = X$، وبالاستفادة من العلاقة التدريجيّة

$$Q_{n+1}(x) = n\left(\int_0^x Q_n(t)\,\mathrm{d}\,t - x\int_0^1 Q_n(t)\,\mathrm{d}\,t\right)$$

نجد مباشرة أنّ

$$Q_2(x) = \int_0^x t\,\mathrm{d}\,t - x\int_0^1 t\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}(x^2 - x)$$

ومن ثَمّ $Q_2(X) = \dfrac{1}{2}X(X-1)$. ونجد أيضاً

$$Q_3(x) = \int_0^x (t^2 - t)\,\mathrm{d}\,t - x\int_0^1 (t^2 - t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$

ومن ثَمّ

$$Q_3(X)=\frac{1}{6}\left(2X^3-3X^2+X\right)=\frac{1}{6}X\left(X-1\right)\left(2X-1\right)$$

ونجد أيضاً

$$\begin{aligned}Q_4(x)&=\frac{1}{2}\int_0^x(2t^3-3t^2+t)\,\mathrm{d}\,t-x\int_0^1(2t^3-3t^2+t)\,\mathrm{d}\,t\\&=\frac{1}{4}(x^4-2x^3+x^2)\end{aligned}$$

ومن ثَمّ $Q_4\left(X\right)=\frac{1}{4}X^2(X-1)^2$. وبوجه خاص نجد

$$\forall m\in\mathbb{N}^*,\quad\sum_{k=1}^{m}k^3=Q_4(m+1)=\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 22. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منتهي البُعد على $\mathbb{R}$ ، وبُعده $n\geq 1$. نفترض أيضاً أنّه يوجد في $\mathcal{L}(E)$ تطبيق خطّي u يُحقّق الشرط $u\circ u+I_E=0$ ، و I_E هو التطبيق المطابق.

① ليكن x من E شعاعاً مختلفاً عن 0 . أثبت أنّ الجملة $(x,u(x))$ جملة حرّة. نرمز بالرمز F_x إلى $\mathrm{vect}(x,u\left(x\right))$. احسب بُعد F_x ، وبيِّن أنّ $u(F_x)=F_x$.

② ليكن F فضاءً جزئياً من E يحقّق : $F\neq E$ و $u(F)\subset F$. وليكن x عنصراً من $E\backslash F$. أثبت أنّ $F\cap F_x=\left\{0\right\}$.

③ لتكن $\mathcal{G}$ مجموعة الفضاءات الجزئيّة G من E التي تُحقّق $G\cap u(G)=\left\{0\right\}$. أثبت أنّ $\mathcal{G}\neq\varnothing$ ، وأنّه يوجد في $\mathcal{G}$ فضاء شعاعي جزئي G_0 يُحقّق

$$\dim G_0=\max\left\{\dim G : G\in\mathcal{G}\right\}$$

④ نعرّف $F=G_0\oplus u(G_0)$. ونريد أن نثبت بنقض الفرض أنّ $F=E$. لنفترض إذن أنّ $F\neq E$.

❶ أثبت أنّ $u(F)\subset F$.

❷ خُذْ عنصراً x من $E\backslash F$ ، وأثبت أنّ $G_0\oplus\mathbb{R}x$ عنصرٌ من $\mathcal{G}$. ماذا تستنتج؟

⑤ استنتج من الدراسة السابقة وجود فضاء شعاعيّ جزئي H من E يُحقِّق العلاقة $E = H \oplus u(H)$. وبيّن أنّ بُعد E ، أي العدد n ، هو عدد زوجيّ، وأنّه يوجد أساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_{2m})$ للفضاء E يُحقّق

$$\forall k \in \mathbb{N}_{2m}, \quad u(e_k) = \begin{cases} e_{k+m} & : \quad 1 \leq k \leq m, \\ -e_{k-m} & : \quad m+1 \leq k \leq 2m \end{cases}$$

⑥ بالعكس، نفترض أنّ $\dim E = 2m$. أثبت أنّه يوجد في $\mathcal{L}(E)$ تطبيق خطّي u ، يُحقِّق العلاقة $u \circ u + I_E = 0$.

الحل

① ليكن x شعاعاً من E مختلفاً عن 0 . ولنتأمّل العبارة الخطيّة المعدومة :

$$ax + bu(x) = 0$$

عندئذ نستنتج بتطبق u على طرفي العبارة السابقة، وبعد الاستفادة من كون $u^2 = -I_E$ ما يأتي:

$$au(x) - bx = 0$$

وعليه يكون

$$(a^2 + b^2)x = a(ax + bu(x)) - b(au(x) - bx) = 0$$

ولمّا كان $x \neq 0$ كان $a^2 + b^2 = 0$ أي $a = b = 0$. فالجملة $(x, u(x))$ جملة حرّة.
لمّا كانت الجملة $(x, u(x))$ جملة حرّة، استنتجنا أنّ بُعد الفضاء $F_x = \text{vect}(x, u(x))$ يساوي 2 . وكذلك فإنّ من الواضح أنّ $u(F_x) \subset F_x$ ، بل تتحقّق المساواة $u(F_x) = F_x$ ، لأنّ كون u تقابلاً خطيّاً يقتضي أنّ $\dim u(F_x) = \dim F_x$.

② ليكن F فضاءً جزئياً من E يحقّق $F \neq E$ و $u(F) \subset F$ ، وليكن x عنصراً من $E \backslash F$. لنتأمّل عنصراً y من $F \cap F_x$. عندئذ نجد عددين حقيقيّين a و b يُحقِقان $y = ax + bu(x)$. لمّا كان $u(F) \subset F$ استنتجنا أنّ $u(y) = au(x) - bx \in F$ وعليه

$$(a^2 + b^2)x = ay - bu(y) \in F$$

فإذا كان $a^2 + b^2 \neq 0$ استنتجنا أنّ $x \in F$ وهذا خُلفٌ. إذن لا بُدّ أن يكون $a^2 + b^2 = 0$ أي أن يكون $y = 0$. وعليه $F \cap F_x = \{0\}$.

③ لتكن $\mathcal{G}$ مجموعة الفضاءات الجزئيّة G من E التي تُحقّق $G \cap u(G) = \{0\}$. في الحقيقة، إنّ $\mathcal{G} \neq \varnothing$، إذ يكفي أن نلاحظ أنّ الفضاء الجزئي $G = \{0\}$ ينتمي إلى $\mathcal{G}$. إذن تكوّن المجموعة

$$\mathcal{N} = \left\{\deg G : G \in \mathcal{G}\right\}$$

مجموعةً جزئيّة غير خالية محتواة في $\{0,1,\ldots,n\}$، فهي إذن تحوي أكبر عنصرٍ. وعليه يوجد في $\mathcal{G}$ فضاء جزئي G_0 يُحقّق $\dim G_0 = \max(\mathcal{N})$.

④ نعرّف $F = G_0 \oplus u(G_0)$. ونفترض جدلاً أنّ $F \neq E$.

❶ إذا كان z عنصراً من F أمكن إيجاد عنصرين x و y من الفضاء الجزئي G_0 يُحقّقان $z = y + u(x)$، وعندئذ يكون

$$u(z) = -x + u(y) \in G_0 + u(G_0) = F$$

فنكون قد أثبتنا أنّ $u(F) \subset F$.

❷ لنتأمّل إذن عنصراً x من $E \backslash F$، عندئذ نستنتج من كون $F \subset G_0$ أنّ $x \notin G_0$، وعليه يكون $G_0 \cap \mathbb{R}x = \left\{0\right\}$، وهذا ما يتيح لنا أن نعرّف $G = G_0 \oplus \mathbb{R}x$.

لنتأمّل عنصراً y ينتمي إلى $G \cap u(G)$. عندئذ يُكتب y بالشكل $g + \lambda x$ حيث $g \in G_0$، كما نجد g' في G_0 و λ' في $\mathbb{R}$ يُحقّقان $y = u(g') + \lambda' u(x)$. وعليه يكون

$$y = u(g') + \lambda' u(x) = g + \lambda x$$

ومنه نستنتج أنّ

$$-g + u(g') = \lambda x - \lambda' u(x)$$

ولكن $\lambda x - \lambda' u(x) \in F_x$ و $-g + u(g') \in G_0 \oplus u(G_0) = F$، فإذا استفدنا من نتيجة السؤال ② التي تقتضي أنّ $F \cap F_x = \{0\}$، استنتجنا أنّ

$$g = u(g') \text{ و } \lambda x - \lambda' u(x) = 0$$

واعتماداً على الاستقلال الخطّي للجملة $(x, u(x))$ نستنتج أنّ $\lambda = \lambda' = 0$. على هذا يكون y عنصراً من $G_0 \cap u(G_0) = \{0\}$، وهذا يقتضي أنّ $y = 0$. وعليه نكون قد أثبتنا أنّ $G \in \mathcal{G}$، وفي هذا تناقضٌ لأنّ

$$\dim G = 1 + \dim G_0 > \dim G_0 \geq \dim G$$

نتج التناقض السابق من الافتراض $E \neq F$ ، وعليه لا بُدَّ أن يكون $E = F$ أي

$$E = G_0 \oplus u(G_0)$$

⑤ أثبتنا إذن أنّ الفضاء $H = G_0$ يُحقّق $E = H \oplus u(H)$. ولكنّ التطبيق u تقابلٌ خطّي إذن $\dim u(H) = \dim H$ ، وعليه فإنّ

$$\dim E = \dim H + \dim u(H) = 2 \dim H$$

وعليه إذا كان $m = \dim H$ كان $n = \dim E = 2m$.

لنتأمّل أساساً $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ للفضاء الجزئي H ، عندئذ نستنتج من كون u تقابلاً خطيّاً من H إلى $u(H)$ أنّ $\big(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_m)\big)$ أساس للفضاء $u(H)$ ، وعليه إذا عرّفنا

$$\forall k \in \mathbb{N}_m, \quad e_{m+k} = u(e_k)$$

كان $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{2m})$ أساساً للفضاء $E = H \oplus u(H)$. وبالاستفادة من كون $u^2 = -I_E$ نستنتج مباشرة أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}_{2m}, \quad u(e_k) = \begin{cases} e_{k+m} & : \quad 1 \leq k \leq m, \\ -e_{k-m} & : \quad m+1 \leq k \leq 2m \end{cases}$$

⑥ وبالعكس، لنفترض أنّ $\dim E = 2m$. ولنتأمّل أساساً

$$\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{2m})$$

لهذا الفضاء. عندئذ نعرّف التطبيق الخطّي u من $\mathcal{L}(E)$ بوضع $u(e_k) = e_{m+k}$ و $u(e_{k+m}) = -e_k$ في حالة $k \in \mathbb{N}_m$. عندئذ نتيقَّن مباشرة أنّ التطبيق الخطّي u المعرّف بهذا الأسلوب يُحقّق العلاقة

$$u \circ u + I_E = 0$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

ملاحظة : في الحقيقة، لقد أثبتنا في التمرين السابق الخاصة التالية :

> ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$. عندئذ الشرط اللازم والكافي كي يوجد في $\mathcal{L}(E)$ تطبيق خطّي u يُحقّق $u^2 = -I_E$ ، هو أن يكون بُعد الفضاء E زوجيّاً.

الثنويّة في الفضاءات الشعاعيّة

1. ثنوي فضاء شعاعي

1-1. **تعريف**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل $\mathbb{K}$، نفترضه مختلفاً عن $\{0\}$. نسمّي كلَّ تطبيق خطي من E إلى $\mathbb{K}$ **شكلاً خطياً** على E. ونرمز بالرمز E^* إلى الفضاء الشعاعي $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$؛ أي فضاء الأشكال الخطية على E. ونسمّي E^* **الفضاء الشعاعي الثنويّ** للفضاء E. وأخيراً أيّاً كان f من E^*، و x من E نرمز بالرمز $\langle f,x\rangle$ إلى المقدار $f(x)$.

2-1. **تعريف**.

① أيّاً كان x من E نعرّف

$$x^{\perp}=\left\{y\in E^*:\left\langle y,x\right\rangle=0\right\}$$

إنّ $x^{\perp}$ فضاء شعاعي جزئي من E^* نسمّيه **الفضاء العمودي** على x في E^*.

② وبوجه عام أيّاً كانت المجموعة الجزئيّة غير الخالية A من E، نعرّف:

$$A^{\perp}=\left\{y\in E^*:\forall a\in A,\quad\left\langle y,a\right\rangle=0\right\}=\bigcap_{a\in A}a^{\perp}$$

إنّ $A^{\perp}$ فضاء شعاعي جزئي من E^* نسمّيه الفضاء العمودي على A في E^*.

③ بأسلوب مماثل، أيّاً كان y من E^*، نعرّف

$$y^{\circ}=\left\{x\in E:\left\langle y,x\right\rangle=0\right\}=\ker y$$

نسمّي y° الفضاء الشعاعيّ الجزئي العمودي على y في E.

④ وكذلك، أيّاً كانت المجموعة الجزئيّة غير الخالية B من E^*، نعرّف

$$B^{\circ}=\left\{x\in E:\forall y\in B,\quad\left\langle y,x\right\rangle=0\right\}=\bigcap_{y\in B}\ker y$$

ونسمّي B° الفضاء الشعاعيّ الجزئي العمودي على B في E.

⑤ وأخيراً إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من E، و B مجموعة جزئية غير خالية من E^* فإننا نقول إنّ A و B متعامدتان إذا وفقط إذا كان $B \subset A^\perp$. وهذا يكافئ كوْن $A \subset B^\circ$ أو $\forall a \in A, \forall b \in B, \quad \langle b, a \rangle = 0$.

1-3. ملاحظات

- من الواضح أنّ $E^\perp = \{0\}$.
- وكذلك يكون $(E^*)^\circ = \{0\}$، إلا أنّ إثبات هذه الخاصّة في الحالة التي يكون فيها $\dim E = +\infty$ يتطلب موضوعة الاختيار، وسنرى لاحقاً إثباتاً لهذه الخاصة في حالة $\dim E < +\infty$.

1-4. مبرهنة. ليكن E فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$، على حقل $\mathbb{K}$. عندئذ

1. أيّاً كان الجزءان غير الخاليين A و B من E، كان $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
2. أيّاً كان الجزء غير الخالي A من E، كان $A^\perp = (\mathrm{vect}(A))^\perp$ و $A \subset (A^\perp)^\circ$.
3. أيّاً كان الجزءان غير الخاليين A و B من E^*، كان $A \subset B \Rightarrow B^\circ \subset A^\circ$.
4. أيّاً كان الجزء غير الخالي A من E^*، كان $A^\circ = (\mathrm{vect}(A))^\circ$ و $A \subset (A^\circ)^\perp$.

الإثبات

إثبات هذه الخواص بسيط ومتروك تمريناً للقارئ. ❐

1-5. مبرهنة. ليكن E فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$، على حقل $\mathbb{K}$. وليكن H فضاءً شعاعياً جزئياً من E. هناك تكافؤ بين الخواص الآتية :

① تمام بُعد H يساوي 1؛ أي $\mathrm{codim}_E\, H = 1$.

② الفضاء الجزئي H هو نواة شكل خطي غير معدوم.

③ يوجد مستقيم شعاعي D (أي فضاء جزئي بعده 1) يُحقّق $H \oplus D = E$.

الإثبات

① ⇐ ② لمّا كان $\dim E/H = \dim \mathbb{K} = 1$ ، يوجد تشاكل خطي تقابلي :

$$\theta : E/H \to \mathbb{K}$$

ليكن $Q : E \to E/H$ الغمر القانوني. عندئذ يكون التطبيق $f = \theta \circ Q$ شكلاً خطياً يحقّق $H = \ker f$ ، وبالطبع $f \neq 0$ لأنّ $E \neq H$.

② ⇐ ③ لنفترض أنّ $H = \ker f$ ، و f شكل خطّي من $E^* \backslash \{0\}$. إنّ f غامرٌ لأنّه غير صفري، إذن يوجد عنصرٌ b في E يُحقّق $\langle f, b \rangle = 1$. لنضع $D = \mathbb{K}b$.

- إذا كان x عنصراً من $D \cap H$ كان $x = \lambda b$ حيث $\lambda \in \mathbb{K}$ ، وكان $\langle f, x \rangle = 0$ ، ومن ثَمّ $0 = \lambda \langle f, b \rangle = \lambda$. ينتج من ذلك أنّ $x = 0$ ومنه $D \cap H = \{0\}$.
- من جهة أخرى، أيّاً كان x من E كان

$$x = \underbrace{\langle f, x \rangle \cdot b}_{\in D} + \underbrace{x - \langle f, x \rangle \cdot b}_{\in H}$$

إذن $E = H \oplus D$.

③ ⇐ ① ليكن P الإسقاط على D توازياً مع H . إنّ $H = \ker P$ و $D = \operatorname{Im} P$ ، ومن ثَمّ هناك تقابلٌ خطيّ بين $E/H = E/\ker P$ و $\operatorname{Im} P$. إذن

$$\operatorname{codim}_E H = \dim E/H = \dim D = 1$$

وبذا يكتمل الإثبات. ❐

1-6. **تعريف**. ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. نسمّي **مستقيماً** في E كل فضاء شعاعي جزئي D بعده 1 في E . ونسمّي **مستوياً** في E كل فضاء شعاعي جزئي P بعده 2 في E . وأخيراً نُسميّ **مستوياً فوقياً** في E كل فضاءٍ شعاعيٍّ جزئيٍّ H تمام بعده في E يساوي 1.

1-7. **مبرهنة**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً، مختلفاً عن $\{0\}$، على حقل $\mathbb{K}$. وليكن H مستوياً فوقياً في E . عندئذ يكون $H^{\perp}$ مستقيماً شعاعياً في E^* .

الإثبات

لنفترض أنّ $H = \ker y$ حيث y عنصرٌ من $E^*\backslash\{0\}$. لأنّ الشكل الخطيّ y غامر، يوجد a في E يُحقّق $\langle y,a\rangle = 1$.

- من جهة أولى، من الواضح أنّ $y \in H^\perp$ ومن ثَمّ $\mathbb{K}y \subset H^\perp$.
- ومن جهة ثانية، ليكن z عنصراً من $H^\perp$ ، عندئذ لمّا كان

$$\forall x \in E,\quad x = \underbrace{\langle y,x\rangle a}_{\in\mathbb{K}\cdot a} + \underbrace{x - \langle y,x\rangle a}_{\in H}$$

كان

$$\forall x \in E, \langle z,x\rangle = \langle y,x\rangle z(a)$$

أو $z = \langle z,a\rangle \cdot y$. إذن $z \in \mathbb{K}y$ ، وهذا ما يثبتُ صحّةَ المساواة $H^\perp = \mathbb{K}\cdot y$. ❐

1-8. **تعريف**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً، مختلفاً عن $\{0\}$، على حقل $\mathbb{K}$. وليكن y شكلاً خطيّاً من $E^*\backslash\{0\}$ وليكن $H = \ker y$. عندئذ نسمّي المعادلة $\langle y,x\rangle = 0$ معادلة المستوي الفوقيّ H . ذلك لأنّ $x \in H \Leftrightarrow \langle y,x\rangle = 0$.

2. منقول تطبيق خطّي

2-1. **تعريف**. ليكن E و F فضاءَيْن شعاعيّين على حقل $\mathbb{K}$ ، وليكن u تطبيقاً خطيّاً من E إلى F ؛ أي $u \in \mathcal{L}(E,F)$. نعرّف التطبيق الخطيّ ${}^t u$ من $\mathcal{L}(F^*,E^*)$ كما يلي:

$${}^t u : F^* \to E^*, y \mapsto {}^t u(y) = y \circ u$$

ونسمّي ${}^t u$ **منقول** التطبيق u . لاحظ أنّ :

$$\forall x \in E, \forall y \in F^*,\quad \left\langle {}^t u(y), x\right\rangle_{E^*,E} = \left\langle y, u(x)\right\rangle_{F^*,F}$$

2-2. **مبرهنة**. لتكن E و F و G ثلاثة فضاءات شعاعيّة على حقل $\mathbb{K}$.

1. إن التطبيق $\Phi : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(F^*,E^*), u \mapsto {}^t u$ ، تطبيق خطّيٌّ ومتباين.
2. أيّاً كان u من $\mathcal{L}(E,F)$ و v من $\mathcal{L}(F,G)$ ، كان ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.
3. ليكن I_E (على التوالي I_{E^*}) التطبيق المطابق على E (على E^*)، عندئذ ${}^t I_E = I_{E^*}$.
4. إذا كان u من $\mathcal{L}(E,F)$ تقابلاً كان ${}^t u$ تقابلاً أيضاً وكان $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$.
5. إذا كان u من $\mathcal{L}(E,F)$ كان $\ker({}^t u) = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$. ومن ثَمّ إذا كان u غامراً كان ${}^t u$ متبايناً.

الإثبات

1. ليكن u و v من $\mathcal{L}(E,F)$ و λ من $\mathbb{K}$. عندئذ، أيّاً كان (x,y) من $E \times F^*$ ، كان

$$\begin{aligned}
\left\langle \Phi(u+\lambda v)(y), x \right\rangle_{E^*,E} &= \left\langle {}^t(u+\lambda v)(y), x \right\rangle_{E^*,E} \\
&= \left\langle y, (u+\lambda v)(x) \right\rangle_{F^*,F} \\
&= \left\langle y, u(x)+\lambda v(x) \right\rangle_{F^*,F} \\
&= \left\langle y, u(x) \right\rangle_{F^*,F} + \lambda \left\langle y, v(x) \right\rangle_{F^*,F} \\
&= \left\langle {}^t u(y), x \right\rangle_{E^*,E} + \lambda \left\langle {}^t v(y), x \right\rangle_{E^*,E} \\
&= \left\langle {}^t u(y) + \lambda\, {}^t v(y), x \right\rangle_{E^*,E} \\
&= \left\langle ({}^t u + \lambda\, {}^t v)(y), x \right\rangle_{E^*,E} \\
&= \left\langle (\Phi(u) + \lambda \Phi(v))(y), x \right\rangle_{E^*,E}
\end{aligned}$$

فالتطبيق Φ خطيّ.

ومن جهة أخرى، التطبيق Φ متباين لأنّه لدينا سلسلة الاقتصاءات الآتية:

$$\begin{aligned}
u \in \ker \Phi \quad &\Rightarrow \quad \forall (x,y) \in E \times F^*,\ \left\langle y, u(x) \right\rangle_{F^*,F} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \forall x \in E,\ \ u(x) \in (F^*)^{\circ} = \left\{0\right\} \\
&\Rightarrow \quad \forall x \in E,\ \ u(x) = 0 \\
&\Rightarrow \quad u = 0
\end{aligned}$$

وهذا ما يثبت الخاصّة 1.

2. ليكن u من $\mathcal{L}(E,F)$ و v من $\mathcal{L}(F,G)$. عندئذ، أيّاً كان (x,y) من $E\times G^*$ ، كان لدينا سلسلة المساويات الآتية:

$$\begin{aligned}\left\langle {}^t(v\circ u)(y),x\right\rangle_{E^*,E} &= \left\langle y,v\circ u(x)\right\rangle_{G^*,G}\\ &= \left\langle y,v(u(x))\right\rangle_{G^*,G}\\ &= \left\langle {}^tv(y),u(x)\right\rangle_{F^*,F}\\ &= \left\langle {}^tu({}^tv(y)),x\right\rangle_{E^*,E}\\ &= \left\langle {}^tu\circ{}^tv(y),x\right\rangle_{E^*,E}\end{aligned}$$

ومن ثمّ ${}^t(v\circ u)={}^tu\circ{}^tv$.

3. واضح من التعريف.

4. تنتج هذه الخاصة من أخذ المنقول في طرفي المساواتين :

$$u^{-1}\circ u=I_E \quad \text{و} \quad u\circ u^{-1}=I_F$$

فنجد اعتماداً على ما سبق أنّ

$${}^t(u^{-1})\circ{}^tu={}^tI_F=I_{F^*}$$

و

$${}^tu\circ{}^t(u^{-1})={}^tI_E=I_{E^*}$$

فالتطبيق ${}^tu$ تقابلٌ و $({}^tu)^{-1}={}^t(u^{-1})$.

5. تنجم هذه الخاصّة من التكافؤات الآتية:

$$\begin{aligned}f\in\ker({}^tu) &\Leftrightarrow f\circ u=0\\ &\Leftrightarrow \forall x\in E,\left\langle f,u(x)\right\rangle=0\\ &\Leftrightarrow \forall y\in \operatorname{Im}u,\left\langle f,y\right\rangle=0\\ &\Leftrightarrow f\in(\operatorname{Im}u)^{\perp}\end{aligned}$$

ومن ثَمّ إذا كان u غامراً كان ${}^tu$ متبايناً. ❒

3. الثّنوية في الفضاءات الشعاعيّة المنتهية البُعد

ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البُعد على حقل تبديلي $\mathbb{K}$، ومختلفاً عن $\{0\}$. عندئذ يكون الفضاء الثنوي E^* منتهي البعد ويكون $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E,\mathbb{K}) = \dim E$.

1-3. تعريف. ليكن E فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$، منتهي البُعد على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ أساساً للفضاء E. لنعرّف الجملة $\mathcal{E}^* = (e_1^*,\ldots,e_n^*)$ من E^* بالعلاقات :

$$e_j^*(e_i) = \left\langle e_j^*, e_i \right\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : \quad i = j \\ 0 & : \quad i \neq j \end{cases}$$

عندئذ تكوِّن الجملة $\mathcal{E}^*$ أساساً للفضاء E^* نسمّيه **الأساس الثنوي** للأساس $\mathcal{E}$. وتتحقّق العلاقات التالية:

$$\forall f \in E^*, \quad f = \sum_{i=1}^{n} \left\langle f, e_i \right\rangle e_i^*$$

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i^*, x \right\rangle e_i$$

التي تُبرّر تسمية الأساس $\mathcal{E}^*$ بالأساس الثنويّ.

2-3. مبرهنة. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البُعد على حقل تبديلي $\mathbb{K}$، ومختلفاً عن $\{0\}$. وليكن x من $E\backslash\{0\}$. عندئذ يوجد شكل خطيّ f في E^* يُحقِّق $f(x) = 1$.

الإثبات

لنضع $x = e_1$، ولنتمّم (e_1) إلى أساس $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ للفضاء E. ثُمّ لنتأمّل الأساس الثنوي $\mathcal{E}^* = (e_1^*,\ldots,e_n^*)$ لهذا الأساس. عندئذ يحقّق الشكل الخطي $f = e_1^*$ المطلوب. ينتج من هذه المبرهنة أنّ $(E^*)^\circ = \{0\}$. □

3-3. مبرهنة. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$، ومختلفاً عن $\{0\}$. وليكن $\mathcal{F} = (f_1,\ldots,f_n)$ أساساً للفضاء E^*. عندئذ يوجد أساسٌ $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ للفضاء E يكون $\mathcal{F}$ أساسَه الثّنوي.

الإثبات

لنتأمّل التطبيق الخطّي

$$\Phi : E \to \mathbb{K}^n,\ x \mapsto \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\big)$$

من الواضح أنّ $x \in \ker \Phi$ إذا وفقط إذا كان $x \in \bigcap_{k=1}^{n} \ker f_k$ ولكن

$$\bigcap_{k=1}^{n} \ker f_k = \big(\mathrm{vect}(\mathcal{F})\big)^\circ = (E^*)^\circ = \{0\}$$

إذن $\ker \Phi = \{0\}$ والتطبيق الخطّي Φ متباينٌ. ولكن $\dim E = \dim \mathbb{K}^n$ إذن Φ تقابلٌ خطّي. إذا كان $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ الأساس القانوني في $\mathbb{K}^n$ وعرّفنا $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ بالعلاقة $e_k = \Phi^{-1}(\varepsilon_k)$ تيقّنّا مباشرة أنّ الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{E}$ هو الأساس $\mathcal{F}$. وبذا يكتمل الإثبات. ❐

3-4. **مبرهنة** : ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$، ومختلفاً عن $\{0\}$.

1. أيّاً كان الفضاء الشعاعيّ الجزئيّ F من E فلدينا :

$$F = (F^\perp)^\circ \quad \text{و} \quad \dim F + \dim F^\perp = \dim E$$

2. أيّاً كان الفضاء الشعاعيّ الجزئيّ G من E^* فلدينا :

$$G = (G^\circ)^\perp \quad \text{و} \quad \dim G + \dim G^\circ = \dim E$$

الإثبات

1. ليكن $(e_1, \ldots, e_p)$ أساساً للفضاء الجزئي F، ولنتمّمه إلى أساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ لكامل الفضاء E، وليكن $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{E}$. عندئذ، أيّاً كان f من E^*، كان

$$\begin{aligned} f \in F^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N}_p,\ \big\langle f, e_i \big\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f = \sum_{i=p+1}^{n} \big\langle f, e_i \big\rangle \cdot e_i^* \\ &\Leftrightarrow \quad f \in \mathrm{vect}(e_{p+1}^*, .., e_n^*) \end{aligned}$$

إذن

$$.\dim F^{\perp} = n - \dim F \quad \text{و} \quad F^{\perp} = \text{vect}(e^*_{p+1},..,e^*_n)$$

2. ليكن $\mathcal{F} = (f_1,..,f_n)$ أساساً للفضاء E^* حُصِل عليه بإتمام الأساس $(f_1,\ldots,f_p)$ للفضاء الجزئي G إلى أساس لكامل الفضاء E^*. وليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ الأساس في E الذي أساسه الثنوي هو $\mathcal{F}$. عندئذ أيّاً كان x من E فلدينا

$$\begin{aligned} x \in G^{\circ} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N}_p, \ \left\langle f_i, x \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \sum_{i=p+1}^{n} \left\langle f_i, x \right\rangle \cdot e_i \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \text{vect}(e_{p+1},..,e_n) \end{aligned}$$

ومن ثَمّ يكون

$$.\dim G^{\circ} = n - \dim G \quad \text{و} \quad G^{\circ} = \text{vect}(e_{p+1},..,e_n)$$

من ناحية أخرى، من الواضح أنّ $F \subset (F^{\perp})^{\circ}$، ولكن

$$\begin{aligned} \dim(F^{\perp})^{\circ} &= n - \dim F^{\perp} \\ &= n - (n - \dim F) = \dim F \end{aligned}$$

ومنه المساواة $F = (F^{\perp})^{\circ}$.

ونترك للقارئ أن يثبت بأسلوب مماثل أنّ $G = (G^{\circ})^{\perp}$. ❐

5-3. مبرهنة. ليكن E و F فضاءين شعاعيين، غير تافهين، ومنتهيي البعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن u من $\mathcal{L}(E,F)$، عندئذ يكون $\text{rg}(u) = \text{rg}({}^t u)$.

الإثبات

في الحقيقة، لقد وجدنا أنّ $\ker {}^t u = (\text{Im}\, u)^{\perp}$، إذن:

$$\begin{aligned} \text{rg}({}^t u) &= \dim F^* - \dim \ker {}^t u \\ &= \dim F^* - \dim(\text{Im}\, u)^{\perp} \\ &= \dim F^* - (\dim F^* - \dim \text{Im}\, u) \\ &= \dim \text{Im}\, u = \text{rg}(u) \end{aligned}$$

وهذا هو المطلوب إثباته. ❐

3-6. **مبرهنة**. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$. ولتكن $(f_1,\ldots,f_r)$ جملة من الأشكال الخطيّة على E . عندئذ تكون الخاصتان التاليتان متكافئتين :

❶ $$\exists(\lambda_1,..,\lambda_r)\in\mathbb{K}^r,\ f=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k f_k$$

❷ $$\forall x\in\bigcap_{k=1}^{r}\ker f_k,\quad f(x)=0$$

الإثبات

في الحقيقة، لدينا

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{i=1}^{r}\ker f_i\right)^{\perp} &= \left(\left\{f_1,..,f_r\right\}^{\circ}\right)^{\perp}\\ &= \left((\mathrm{vect}(f_1,..,f_r))^{\circ}\right)^{\perp} = \mathrm{vect}(f_1,..,f_r)\end{aligned}$$

وهذا يُعبِّر عن التكافؤ المطلوب. ❐

تمرينات

التمرين 1. نتأمّل في $(\mathbb{R}^3)^*$ الأشكال الخطيّة f_1 و f_2 و f_3 التالية :

$$f_1(x,y,z) = x+y-z$$
$$f_2(x,y,z) = x-y+z$$
$$f_3(x,y,z) = x+y+z$$

أثبت أنّ الجملة $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ أساس للفضاء $(\mathbb{R}^3)^*$، وجِدْ أساساً للفضاء $\mathbb{R}^3$ يكون $\mathcal{F}$ أساسه الثنوي.

الحل

ليكن (a,b,c) من $\mathbb{R}^3$، ولنبحث إذا كان هناك $X = (x,y,z)$ من $\mathbb{R}^3$ يُحقِّق

$$\big(f_1(X), f_2(X), f_3(X)\big) = (a,b,c)$$

في الحقيقة، يكافئ الشرطُ السابقُ قولَنا

$$x+y-z = a$$
$$x-y+z = b$$
$$x+y+z = c$$

ومن ثَمّ

$$x = \frac{a+b}{2},\ y = \frac{c-b}{2},\ z = \frac{c-a}{2}$$

فنكون بذلك قد أثبتنا أنّ التطبيق الخطّي

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto \big(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)\big)$$

تقابلٌ. ليكن إذن (e_1,e_2,e_3) الأساس القانوني في $\mathbb{R}^3$ ولنعرّف $\varepsilon_k = \Phi^{-1}(e_k)$. فنجد

$$\varepsilon_1 = \left(\tfrac{1}{2}, 0, -\tfrac{1}{2}\right), \quad \varepsilon_2 = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0\right), \quad \varepsilon_3 = \left(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

ونتيقَّن مباشرة أنّ $f_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}$ في حالة i و j من $\mathbb{N}_3$. وهذا ما يثبتُ أنّ الجملة $\mathcal{F}$ أساس للفضاء $(\mathbb{R}^3)^*$ وأنّها الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. ■

التمرين 2. نتأمّل في $(\mathbb{R}^3)^*$ الأشكال الخطيّة f_1 و f_2 و f_3 التالية :

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= x + 2y + 3z \\ f_2(x,y,z) &= 2x + 3y + 4z \\ f_3(x,y,z) &= 3x + 4y + 6z \end{aligned}$$

أثبت أنّ الجملة $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ أساس للفضاء $(\mathbb{R}^3)^*$، وجِدْ أساساً للفضاء $\mathbb{R}^3$ يكون $\mathcal{F}$ أساسه الثنوي.

الحل

ليكن (a,b,c) من $\mathbb{R}^3$، ولنبحث إذا كان هناك $X = (x,y,z)$ من $\mathbb{R}^3$ يُحقِّق

$$\big(f_1(X), f_2(X), f_3(X)\big) = (a,b,c)$$

في الحقيقة، يكافئ الشرطُ السابقُ قولَنا

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= a \\ 2x + 3y + 4z &= b \\ 3x + 4y + 6z &= c \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$x = c - 2a,\ y = 3b - 2c,\ z = c + a - 2b$$

فنكون بذلك قد أثبتنا أنّ التطبيق الخطّي

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto \big(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)\big)$$

تقابلٌ. ليكن إذن (e_1, e_2, e_3) الأساس القانوني في $\mathbb{R}^3$ ولنعرّف $\varepsilon_k = \Phi^{-1}(e_k)$. فنجد

$$\varepsilon_1 = \big(-2, 0, 1\big), \quad \varepsilon_2 = \big(0, 3, -2\big), \quad \varepsilon_3 = \big(1, -2, 1\big)$$

ونتيقَّن مباشرة أنّ $f_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}$ في حالة i و j من $\mathbb{N}_3$، وهذا ما يثبتُ أنّ الجملة $\mathcal{F}$ أساس للفضاء $(\mathbb{R}^3)^*$ وأنّها الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. ■

التمرين 3. ليكن E و F فضاءَين شعاعيّين على الحقل $\mathbb{K}$، وليكن u من $\mathcal{L}(E,F)$ تطبيقاً خطياً غامراً. أثبت أنّ التطبيق الخطي ${}^t u$ متباين.

الحل

في الحقيقة، لدينا التكافؤ

$$\begin{aligned} f \in \ker {}^t u &\Leftrightarrow {}^t u(f) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, \quad \left\langle {}^t u(f), x \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, \quad \left\langle f, u(x) \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow f \in (\operatorname{Im} u)^\perp \end{aligned}$$

إذن لدينا بوجه عام $\ker {}^t u = (\operatorname{Im} u)^\perp$. فإذا كان u غامراً كان

$$\ker {}^t u = (\operatorname{Im} u)^\perp = F^\perp = \{0\}$$

ومن ثَمّ كان ${}^t u$ متبايناً. ■

التمرين 4. ليكن E و F فضاءين شعاعيّين منتهيي البعد على الحقل $\mathbb{K}$، وليكن التطبيق u من $\mathcal{L}(E,F)$ أثبت أنّ :

$$\ker {}^t u = (\operatorname{Im} u)^\perp \quad \text{و} \quad \operatorname{Im} {}^t u = (\ker u)^\perp$$

الحل

- لقد أثبتنا صحة المساواة $\ker {}^t u = (\operatorname{Im} u)^\perp$ دون شرط البُعد المنتهي في التمرين السابق.
- ومن جهة أخرى لدينا التكافؤ التالي

$$\begin{aligned} x \in (\operatorname{Im} {}^t u)^\circ &\Leftrightarrow \forall f \in \operatorname{Im} {}^t u, \left\langle f, x \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall g \in F^*, \left\langle {}^t u(g), x \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall g \in F^*, \left\langle g, u(x) \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow u(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker u \end{aligned}$$

إذن $\ker u = (\operatorname{Im} {}^t u)^\circ$ ، فإذا استفدنا من كوْن بُعدا الفضاءَيْن E و F منتهيين، استنتجنا أنّ

$$(\ker u)^\perp = \left((\operatorname{Im} {}^t u)^\circ \right)^\perp = \operatorname{Im} {}^t u$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 5. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منتهي البعد على الحقل $\mathbb{K}$، وليكن V_1 و V_2 فضاءين شعاعيّين جزئيّين من E، وليكن W_1 و W_2 فضاءين شعاعيّين جزئيّين من E^*. قارن بين الفضاءين المعطيين في كل من الحالات الآتية:

① $(V_1+V_2)^\perp$ و $V_1^\perp \cap V_2^\perp$.

② $(V_1\cap V_2)^\perp$ و $V_1^\perp + V_2^\perp$.

③ $(W_1+W_2)^\circ$ و $W_1^\circ \cap W_2^\circ$.

④ $(W_1\cap W_2)^\circ$ و $W_1^\circ + W_2^\circ$.

الحل

① لنلاحظ أوّلاً أنّ

$$V_1^\perp \bigcap V_2^\perp = \big(\operatorname{vect}(V_1\cup V_2)\big)^\perp = (V_1+V_2)^\perp$$

وهذه النتيجة لا تشترط أن يكون بُعدُ الفضاء E منتهياً.

② ونجد بأسلوب مماثل لما سبق أنّ

$$W_1^\circ \cap W_2^\circ = \big(\operatorname{vect}(W_1\cup W_2)\big)^\circ = \big(W_1+W_2\big)^\circ$$

وهذه النتيجة لا تشترط أن يكون بُعدُ الفضاء E منتهياً.

③ من الواضح أنّ كلَّ شكل خطّي من $V_1^\perp + V_2^\perp$ ينعدم على $V_1\cap V_2$ فهو إذن عنصر من الفضاء $(V_1\cap V_2)^\perp$. ومن ثَمّ $V_1^\perp+V_2^\perp \subset (V_1\cap V_2)^\perp$. ولكن لمّا كان E منتهي البُعد كان

$$\begin{aligned}
\dim(V_1^\perp+V_2^\perp) &= \dim V_1^\perp + \dim V_2^\perp - \dim(V_1^\perp\cap V_2^\perp)\\
&= 2\dim E - \dim V_1 - \dim V_2 - \dim(V_1+V_2)^\perp\\
&= \dim E + \dim(V_1+V_2) - \dim V_1 - \dim V_2\\
&= \dim E - \dim(V_1\cap V_2)\\
&= \dim(V_1\cap V_2)^\perp
\end{aligned}$$

إذن $V_1^\perp+V_2^\perp = (V_1\cap V_2)^\perp$.

④ وأخيراً من الواضح أنّ الأشكال الخطيّة في $W_1 \cap W_2$ تنعدم عند عناصر $W_1^\circ + W_2^\circ$، ومن ثَمّ $W_1^\circ + W_2^\circ \subset (W_1 \cap W_2)^\circ$. ولكن لمّا كان E منتهي البُعد كان

$$\begin{aligned}\dim(W_1^\circ + W_2^\circ) &= \dim W_1^\circ + \dim W_2^\circ - \dim W_1^\circ \cap W_2^\circ \\ &= 2\dim E - \dim W_1 - \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2)^\circ \\ &= \dim E + \dim(W_1 + W_2) - \dim W_1 - \dim W_2 \\ &= \dim E - \dim W_1 \cap W_2 \\ &= \dim(W_1 \cap W_2)^\circ\end{aligned}$$

إذن $W_1^\circ + W_2^\circ = (W_1 \cap W_2)^\circ$.

وبذا يكتمل الحل. ■

التمرين 6. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$، وليكن f و g من E^* . نفترض أنّه، أيّاً كان x من E كان $f(x)\,g(x) = 0$. أثبت أنّ $f = 0$ أو $g = 0$.

الحل

يُقرأ الفرْض بالقول إنّ $E \subset \ker f \cup \ker g$، ومن ثَمّ $E = \ker f \cup \ker g$. ونستنتج من ذلك أمرين :

- **أوّلاً.** إنّ $\ker f \cup \ker g$ فضاءٌ شعاعي جزئي، وهذا يقتضي أنّ
$$\ker f \subset \ker g \quad \text{أو} \quad \ker g \subset \ker f .$$
- **ثانياً.** استناداً إلى ما سبق، وإلى كون $E = \ker f \cup \ker g$ نجد
$$E = \ker g \quad \text{أو} \quad E = \ker f$$
وهذا يعني أنّ
$$g = 0 \quad \text{أو} \quad f = 0 .$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 7. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$، أثبت صحّة القضيتين التاليتين :

$\mathcal{P}_k$: لتكن $(\ell_1,\ldots,\ell_k)$ جملة حرّة من عناصر E^*، فتوجد جملة $(x_1,\ldots,x_k)$ من عناصر E تُحقّق $\ell_i(x_j)=\delta_{ij}$ أيّاً كان (i,j) من $\mathbb{N}_k^2$.

$\mathcal{Q}_k$: لتكن $(\ell_1,\ldots,\ell_k)$ جملة حرّة من عناصر E^*. وليكن ℓ شكلاً خطياً من E^* يُحقّق $\bigcap_{i=1}^{k}\ker\ell_i\subset\ker\ell$. عندئذ توجد في $\mathbb{K}$ أعداد $(\lambda_i)_{1\le i\le k}$ تُحقّق $\ell=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\ell_i$.

واستنتج أنّه أيّاً كانت الجملة $(\ell_1,\ldots,\ell_k)$ من عناصر E^*، هناك تكافؤ بين الخاصتين

$$\bigcap_{i=1}^{k}\ker\ell_i\subset\ker\ell \quad \text{و} \quad \ell\in\operatorname{vect}(\ell_1,\ldots,\ell_k)$$

الحل

- الخاصّة $\mathcal{P}_1$ صحيحة. لأنّه إذا كان ℓ_1 شكلاً خطيّاً غير معدوم على E، كان ℓ_1 غامراً، أي وُجِدَ عنصرٌ x_1 من E يُحقّق $\ell_1(x_1)=1$. ومنه $\mathcal{P}_1$.
- $\mathcal{P}_k\Rightarrow\mathcal{Q}_k$. في الحقيقة، لنفترض أنّ $(\ell_1,\ldots,\ell_k)$ جملة حرّة من E^*، وليكن ℓ عنصراً من E^*، يُحقّق $\bigcap_{i=1}^{k}\ker\ell_i\subset\ker\ell$. توجد استناداً إلى $\mathcal{P}_k$ جملة $(x_1,\ldots,x_k)$ تُحقّق الشرط $\ell_i(x_j)=\delta_{ij}$. ليكن x عنصراً من E، ولنعرّف $y=x-\sum_{i=1}^{k}\ell_i(x)x_i$.

عندئذ نتيقّن مباشرة أنّ y ينتمي إلى التقاطع $\bigcap_{i=1}^{k}\ker\ell_i$ فهو إذن عنصر من $\ker\ell$.

وعليه

$$0=\ell\left(x-\sum_{i=1}^{k}\ell_i(x)x_i\right)=\ell(x)-\sum_{i=1}^{k}\ell_i(x)\ell(x_i)$$

وهذا يثبتُ أنّ $\ell=\sum_{i=1}^{k}\ell(x_i)\ell_i$. فالقضيّة $\mathcal{Q}_k$ صحيحة.

- $\mathcal{Q}_k\Rightarrow\mathcal{P}_{k+1}$. في الحقيقة، لنفترض أنّ $(\ell_1,\ldots,\ell_{k+1})$ جملة حرّة من E^*. عندئذ مهما تكن j من $\mathbb{N}_{k+1}$ فإنّ الشكل الخطّي ℓ_j لا ينتمي إلى $\operatorname{vect}\left((\ell_i)_{i\in\mathbb{N}_{k+1}\setminus\{j\}}\right)$،

واستناداً إلى الفرْض $\mathcal{Q}_k$ فإنّ $\ker \ell_j \not\subset \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}_{k+1}\setminus\{j\}} \ker \ell_i\right)$، وعليه يوجد في E عنصرٌ $\tilde{x}_j$ يُحقّق

$$\tilde{x}_j \notin \ker \ell_j \quad \text{و} \quad \tilde{x}_j \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}_{k+1}\setminus\{j\}} \ker \ell_i$$

فإذا عرّفنا $x_j = \frac{1}{\ell_j(\tilde{x}_j)}\tilde{x}_j$، حقّقت الجملة $(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})$ الخاصّة

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_{k+1}^2, \quad \ell_j(x_i) = \delta_{ij}$$

وهذا يثبتُ صحّة $\mathcal{P}_{k+1}$. إذن، لقد أثبتنا أنّ الخواصّ $(\mathcal{P}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ و $(\mathcal{Q}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ صحيحة.

من جهة أخرى، إنّ الاقتضاء $\ell \in \operatorname{vect}\left(\ell_1, \ldots, \ell_k\right) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} \ker \ell_i \subset \ker \ell$ واضحٌ.

وبالعكس، إذا كانت جميع الأشكال الخطيّة ℓ_i معدومة كان الاقتضاء المُعاكس صحيحاً وضوحاً. لنفترض إذن أنّ واحداً على الأقل من الأشكال الخطيّة في الجملة $(\ell_1, \ldots, \ell_k)$ غير صفري. ولتكن A أكبر مجموعة جزئيّة من $\mathbb{N}_k$ تكون عندها الجماعة $\left(\ell_i\right)_{i\in A}$ حرّة. عندئذ

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{k} \ker \ell_i &= \left(\left\{\ell_1, \ldots, \ell_k\right\}\right)^\circ = \left(\operatorname{vect}\left(\ell_1, \ldots, \ell_k\right)\right)^\circ \\ &= \left(\operatorname{vect}\left(\left(\ell_i\right)_{i\in A}\right)\right)^\circ = \bigcap_{i\in A} \ker \ell_i\end{aligned}$$

فإذا استفدنا من الخاصّة $\mathcal{Q}_k$ تم الإثبات، لأنّه عندئذ نستنتج من $\bigcap_{i=1}^{k} \ker \ell_i \subset \ker \ell$ أنّ

$$\ell \in \operatorname{vect}\left(\left(\ell_i\right)_{i\in A}\right) = \operatorname{vect}\left(\left(\ell_i\right)_{i\in\mathbb{N}_k}\right)$$ ∎

التمرين 8. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منتهي البعد على الحقل $\mathbb{K}$، ولتكن $(\ell_1, \ldots, \ell_k)$ جملة حرّة من عناصر E^* . أثبت أنّ $\dim \bigcap_{i=1}^{k} \ker \ell_i = \dim E - k$.

تطبيق. نتأمّل جملة $(\ell_1, \ldots, \ell_k)$ من عناصر $(\mathbb{R}^n)^*$، ونفترض وجود شعاع غير معدوم x في $\mathbb{R}^n$ يُحقّق $\forall k \in \mathbb{N}_n, \ \ell_k(x) = 0$. أثبت الارتباط الخطّي للجملة $(\ell_1, \ldots, \ell_k)$.

الحل

في الحقيقة، لدينا

$$\bigcap_{i=1}^{k} \ker \ell_i = \left(\{\ell_1,\ldots,\ell_k\}\right)^{\circ} = \left(\mathrm{vect}(\ell_1,\ldots,\ell_k)\right)^{\circ}$$

إذن

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} \ker \ell_i\right) = \dim E - \dim \mathrm{vect}(\ell_1,\ldots,\ell_k) = \dim E - k$$

تطبيق. نستنتج من وجود شعاع غير معدوم x يُحقّق أنّ $\forall k \in \mathbb{N}_n,\ \ell_k(x) = 0$ أنّ

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{n} \ker \ell_i\right) \geq 1$$

ولكن لو كانت الجملة $(\ell_1,\ldots,\ell_n)$ حرّة لكان $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{n} \ker \ell_i\right) = n - n = 0$ استناداً إلى ما سبق. وعليه لا بُدَّ أن تكون الجملة $(\ell_1,\ldots,\ell_n)$ مرتبطة. ■

التمرين 9. ليكن $E = \mathbb{R}_2[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة التي لا تزيد درجتها عن 2، ولتكن φ_1 و φ_2 و φ_3 العناصر من E^* المعرّفة كما يلي :

$$\varphi_1(P) = P(1),\ \varphi_2(P) = P'(1),\ \varphi_3(P) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}\,t$$

أثبت أنّ $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ أساس للفضاء الثنوي E^*، وعيّن أساساً للفضاء E يكون $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ أساسه الثنوي.

الحل

لنتأمّل التطبيق الخطّي

$$\Phi : E \to \mathbb{R}^3, P \mapsto (\varphi_1(P),\varphi_2(P),\varphi_3(P))$$

ولنثبت أنّه غامرٌ، فيكون عندئذ تقابلاً لأنّ $\dim E = 3$.

ليكن (a,b,c) من $\mathbb{R}^3$ عندئذ يُحقّق كثير الحدود

$$P = \alpha + \beta(X-1) + \gamma(X-1)^2$$

يتحقّق الشرط $\Phi(P)=(a,b,c)$ إذا وفقط إذا كان

$$\left(\alpha,\beta,\alpha-\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{3}\right)=(a,b,c)$$

أي إذا وفقط إذا كان

$$\alpha=a,\quad \beta=b,\quad \gamma=3c+\frac{3}{2}b-3a$$

ومنه، فإنّ كثير الحدود

$$\begin{aligned}P&=a+b\big(X-1\big)+\left(3c+\frac{3}{2}b-3a\right)\big(X-1\big)^2\\&=3c+\frac{1}{2}b-2a+X\big(6a-2b-6c\big)+\left(3c+\frac{3}{2}b-3a\right)X^2\end{aligned}$$

هو كثير الحدود الوحيد الذي يُحقّق $\Phi(P)=(a,b,c)$. إذن Φ تقابلٌ خطّي.

فإذا كان $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ الأساس القانوني في $\mathbb{R}^3$ وعرّفنا الأساس $\mathcal{E}=(e_1,e_2,e_3)$ كما يأتي :

$$\begin{aligned}\varphi_1&=\Phi^{-1}(\varepsilon_1)&&=-2+6X-3X^2\\\varphi_2&=\Phi^{-1}(\varepsilon_2)&&=\frac{1}{2}-2X+\frac{3}{2}X^2\\\varphi_3&=\Phi^{-1}(\varepsilon_3)&&=3-6X+3X^2\end{aligned}$$

كان $\mathcal{F}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{E}$. ■

التمرين 10. ليكن $E=\mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة التي لا تزيد درجتها عن n، نفترض أنّ $n\geq 2$. نتأمّل شكلاً خطيّاً φ من E^* يُحقّق

$$\forall P\in\mathbb{R}_{n-2}[X],\quad \varphi((X-a)^2P)=0$$

حيث a عددٌ حقيقي. أثبت أنّه يوجد عددان λ و μ يُحقّقان

$$\forall P\in E,\quad \varphi(P)=\lambda P(a)+\mu P'(a)$$

الحل

في الحقيقة، ليكن P من E . استناداً إلى منشور تايلور لدينا

$$P = P(a) + P'(a)(X-a) + (X-a)^2 Q$$

حيث $Q = \sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-2}$. ومن ثَمّ يكون

$$\varphi(P) = P(a)\varphi(1) + P'(a)\varphi(X-a)$$

يكفي إذن أن نضع $(\lambda,\mu) = (\varphi(1), \varphi(X-a))$ ليتم الإثبات. ■

التمرين 11. ليكن $E = \mathbb{R}_3[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة، التي لا تزيد درجتها عن 3، ولتكن φ_1 و φ_2 و φ_3 و φ_4 العناصر من E^* المعرّفة كما يلي :

$$\begin{aligned} \varphi_1(P) &= P(0), & \varphi_2(P) &= P(1) \\ \varphi_3(P) &= P'(0), & \varphi_4(P) &= P'(1) \end{aligned}$$

1. أثبت أنّ $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ أساس للفضاء E^*، وحدّد أساساً للفضاء E يكون الأساسُ $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ أساسَه الثنوي.
2. عبّر عن الشّكل الخطّي ψ من E^*، المعرّف بالعلاقة $\psi(P) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$ بدلالة الأساس السّابق.

الحل

1. لنتأمّل التطبيق الخطّي

$$\Phi : E \to \mathbb{R}^4, P \mapsto \big(\varphi_1(P), \varphi_2(P), \varphi_3(P), \varphi_4(P)\big)$$

وليكن $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ الأساس القانوني في $\mathbb{R}^4$.

- الشرط $\Phi(P_1) = \varepsilon_1$ يقتضي أنّ العددَ 1 جذرٌ مضاعف لكثير الحدود P، إذن يُكتب P_1، في حال وجوده، بالشكل $(X-1)^2(aX+b)$ فإذا اشترطنا أيضاً $P_1(0) = 1$ و $P_1'(0) = 0$ استنتجنا أنّ $b = 1$ و $a = 2$. إذن $P_1 = (X-1)^2(2X+1)$ هو كثير الحدود الوحيد في E الذي يُحقّق $\Phi(P_1) = \varepsilon_1$.
- وإذا عرّفنا $P_2 = P_1(1-X) = X^2(3-2X)$ تحقّقنا مباشرة أنّ $\Phi(P_2) = \varepsilon_2$.

- أمّا الشرط $\Phi(P_3) = \varepsilon_3$ فيقتضي أنّ العددَ 1 جذرٌ مضاعف لكثير الحدود P، وأنّ 0 جذرٌ بسيط له، إذن يُكتب P_3، في حال وجوده، بالشكل $a(X-1)^2X$. فإذا اشترطنا أيضاً أن يكون $P_3'(0) = 1$ استنتجنا أنّ $a = 1$. إذن $P_3 = (X-1)^2X$ هو كثير الحدود الوحيد في E الذي يُحقّق $\Phi(P_3) = \varepsilon_3$.
- وإذا عرّفنا $P_4 = -P_3(1-X) = X^2(X-1)$ تحقّقنا مباشرة أنّ $\Phi(P_4) = \varepsilon_4$.

وعلى هذا، نرى أنّ الجملة $\mathcal{P} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ تُحقّق $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$ في حالة i و j من $\mathbb{N}_4$. إذن الجملة $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ أساس للفضاء E^* وهي الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{P} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$.

2. نعلم أنّ $\psi = \sum_{k=1}^{4} \psi(P_k)\varphi_k$ إذن نجد بحساب بسيط

$$\psi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{1}{12}(\varphi_3 - \varphi_4)$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 12. ليكن $E = \mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة التي لا تزيد درجتها على n. في حالة عدد حقيقيّ a نضع: $\varphi_a : E \to \mathbb{R}, P \mapsto P(a)$.

1. تحقّق أنّه أيّاً كان العدد الحقيقيّ a، كان φ_a عنصراً من E^*.
2. لتكن $x_0, x_1, \ldots, x_n$ أعداداً حقيقيّةً مختلفةً مثنى مثنى. أثبت أنّ الجملة الآتية $(\varphi_{x_0}, \varphi_{x_1}, \ldots, \varphi_{x_n})$ هي أساس للفضاء E^* وجِدْ أساسه الثّنويّ.
3. أثبت أنّه توجد متتالية منتهية وحيدة $(\lambda_i)_{0 \le i \le n}$ من الأعداد الحقيقيّة تُحقّق:

$$\forall P \in E, \quad \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

الحل

1. إثبات أنّ التطبيق φ_a شكلٌ خطّي على E أمرٌ بسيط نترك تفاصيله للقارئ.

2. لنعرّف في حالة k من $\{0,1,\ldots,n\}$ كثير الحدود ℓ_k بالعلاقة

$$\ell_k(X)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\left(\frac{X-x_j}{x_k-x_j}\right)$$

عندئذ نتيقَّن مباشرة أنّ $\varphi_{x_i}(\ell_j)=\delta_{ij}$ في حالة i و j من $\{0,1,\ldots,n\}$. وهذا يثبتُ أنّ الجملة $(\varphi_{x_0},\varphi_{x_1},\ldots,\varphi_{x_n})$ أساسٌ للفضاء E^*، وأنها في الحقيقة الأساس الثنوي للأساس $(\ell_0,\ell_1,\ldots,\ell_n)$.

3. لمّا كانت $(\varphi_{x_0},\varphi_{x_1},\ldots,\varphi_{x_n})$ أساساً للفضاء E^*، أمكن التعبير عن الشكل الخطّي

$$\psi : E\to\mathbb{R},\quad P\mapsto\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}\,t$$

بطريقة وحيدة بعبارة خطيّة في عناصر الأساس $(\varphi_{x_0},\varphi_{x_1},\ldots,\varphi_{x_n})$؛ أي توجد متتالية منتهية وحيدة $(\lambda_i)_{0\le i\le n}$ من الأعداد الحقيقيّة تُحقّق $\psi=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\varphi_{x_i}$، وهذا يُكافئ

$$\forall P\in E,\quad \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}\,x=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i P(x_i)$$

في الحقيقة $\lambda_k=\psi(\ell_k)$. وبذا يتمّ الإثبات. ■

التمرين 13. ليكن $E=\mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة التي لا تزيد درجتها على n.

1. ليكن $e_k=(X-a)^k$، جِدْ الأساس الثّنويّ $(e_k^*)_{0\le k\le n}$ للأساس $(e_k)_{0\le k\le n}$.
وعبّر عن الشكل الخطّي $\varphi : P\mapsto\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$ بدلالة عناصر هذا الأساس.
2. ليكن التطبيق الخطّي Δ المعرّف بالعلاقة $\Delta(P)=P(X+1)-P(X)$، وليكن الشكل الخطّي φ_k المعرّف بالعلاقة $\varphi_k(P)=\Delta^k(P)(0)$. أثبت أنّ $(\varphi_k)_{0\le k\le n}$ أساس للفضاء E^*، وعين الأساس $(e_k)_{0\le k\le n}$ في E الذي أساسه الثنويّ $(\varphi_k)_{0\le k\le n}$.

الحل

1. في الحقيقة، مهما كان P من E، أمكننا أن نكتب استناداً إلى منشور تايلور

$$P=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}e_k$$

وهذا يبرهن على أنّ

$$\forall P\in E,\quad e_k^*(P)=\frac{P^{(k)}(a)}{k!}$$

وهذا يعرّف الأساس الثنوي $(e_k^*)_{0\le k\le n}$ للأساس $(e_k)_{0\le k\le n}$.

أمّا الشكل الخطي $\varphi : P\mapsto \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$ فيمكن التعبير عنه بدلالة هذا الأساس كما يلي :

$$\varphi=\sum_{k=0}^{n}\varphi(e_k)e_k^*=\sum_{k=0}^{n}\frac{(1-a)^{k+1}-(-a)^{k+1}}{k+1}e_k^*$$

2. لنضع تعريفاً $e_0=1$ وكذلك

$$\forall k\in\mathbb{N}_n,\quad e_k=\frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$

عندئذ نلاحظ أنّ $\Delta(e_0)=0$ و $\Delta(e_1)=e_0$ وأنّه في حالة $2\le k\le n$ لدينا

$$\begin{aligned}\Delta(e_k)&=\frac{(X+1)(X)\cdots(X-k+2)}{k!}-\frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}\\&=\frac{X(X-1)\cdots(X-k+2)}{(k-1)!}=e_{k-1}\end{aligned}$$

وعلى هذا نستنتج أنّ

$$\Delta^p(e_k)=\begin{cases}e_{k-p} & : & k>p\\ 1 & : & k=p\\ 0 & : & k<p\end{cases}$$

ومن ثَمّ

$$\Delta^p(e_k)(0)=\begin{cases}1 & : & k=p\\ 0 & : & k\ne p\end{cases}$$

وهذا يثبتُ أنّ $\varphi_p(e_k)=\delta_{pk}$. إذن $(\varphi_k)_{0\le k\le n}$ هو الأساس الثنوي للأساس $(e_k)_{0\le k\le n}$. ■

التمرين 14. لتكن متتالية كثيرات الحدود $(P_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة كما يلي:

$$P_0(X)=1,\ P_1(X)=X,\ \forall n\geq 2,\quad P_n(X)=\frac{1}{n!}X(X-n)^{n-1}$$

1. تحقّق أنّه أيّاً كان $1\leq n$ كان $P_n'(X)=P_{n-1}(X-1)$. واستنتج أنّ :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \forall n\geq k,\quad P_n^{(k)}(X)=P_{n-k}(X-k)$$

2. لتكن k من $\mathbb{N}$، نعرّف على $\mathbb{R}[X]$ الشكل الخطّي φ_k بالعلاقة :

$$\varphi_k(P)=P^{(k)}(k)$$

أوجد $\varphi_k(P_n)$.

3. نفترض الآن أنّ m عدد طبيعيّ موجب تماماً. ونرمز بالرمز $E=\mathbb{R}_m[X]$ إلى فضاء كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة التي لا تزيد درجتها على m . أثبت أنّ الجملة $(P_0,P_1,\ldots,P_m)$ أساس للفضاء E . وعين أساسه الثّنويّ.

4. أثبت أنّ : $\displaystyle Q(X)=\sum_{k=0}^{m}Q^{(k)}(k)P_k(X)\quad \forall Q\in E,$.

5. استنتج أنّ : $\displaystyle P_m(X+a)=\sum_{k=0}^{m}P_{m-k}(a)P_k(X)\quad \forall a\in\mathbb{R},$.

الحل

1. نلاحظ مباشرة أنّ

$$P_2'(X)=X-1=P_1(X-1)\quad \text{و}\quad P_1'(X)=1=P_0(X-1)$$

ليكن $3\leq n$ عندئذ

$$\begin{aligned}P_n'(X)&=\frac{1}{n!}\Big((X-n)^{n-1}+(n-1)X(X-n)^{n-2}\Big)\\&=\frac{1}{n!}(X-n)^{n-2}(nX-n)\\&=\frac{1}{(n-1)!}\big(X-1-(n-1)\big)^{n-2}(X-1)\\&=P_{n-1}(X-1)\end{aligned}$$

وهكذا نثبتُ بالتدريج على العدد k أنّ

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \forall n\geq k,\quad P_n^{(k)}(X)=P_{n-k}(X-k)$$

2. لتكن k من $\mathbb{N}$، نعرّف على $\mathbb{R}[X]$ الشكل الخطّي φ_k بالعلاقة $\varphi_k(P) = P^{(k)}(k)$. عندئذ يكون لدينا، بالاستفادة من نتيجة السؤال السابق ومن كون $\deg P_n = n$، ما يأتي : $\varphi_k(P_n) = \delta_{nk}$ و δ_{nk} هو رمز كرونيكر.

3. نفترض الآن أنّ m عدد طبيعيّ موجب تماماً. ونرمز بالرمز $E = \mathbb{R}_m[X]$ إلى فضاء كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة التي لا تزيد درجتها على m. عندئذ نتأمّل الجملتين $\mathcal{P} = (P_0, P_1, \ldots, P_m)$ في E و $\mathcal{F} = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ في E^*. نستنتج من السؤال السابق أنّ

$$\forall (i,j) \in \{0,1,\ldots,m\}^2, \quad \varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$$

وهذا يبرهن أنّ $\mathcal{P}$ أساسٌ للفضاء E وأنّ $\mathcal{F}$ هو أساسه الثنوي.

4. من المعروف أنّ

$$\forall Q \in E, \quad Q(X) = \sum_{k=0}^{m} \langle \varphi_k, Q \rangle P_k(X) = \sum_{k=0}^{m} Q^{(k)}(k) P_k(X)$$

5. ليكن a عدداً من $\mathbb{R}$. فإذا طبّقنا المساواة السابقة في حالة $Q(X) = P_m(X+a)$، واستفدنا من نتيجة السؤال الأوّل، وجدنا

$$\begin{aligned}
P_m(X+a) &= \sum_{k=0}^{m} {P_m}^{(k)}(a+k) P_k(X) \\
&= \sum_{k=0}^{m} P_{m-k}(a+k-k) P_k(X) \\
&= \sum_{k=0}^{m} P_{m-k}(a) P_k(X)
\end{aligned}$$

ونحصل من ثَمّ على النتيجة الآتية

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad P_m(X+Y) = \sum_{k=0}^{m} P_{m-k}(Y) P_k(X)$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 15. ليكن $E=\mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة التي لا تزيد درجتها على n.
ونتأمّل كثير حدود Q من E درجته n، وأعداداً $x_0,x_1,\ldots,x_n$ مختلفة مثنى مثنى.

1. أثبت أنّ الجملة $\left(Q,Q',Q'',\ldots,Q^{(n)}\right)$ جملة حرّة.
2. ليكن f شكلاً خطيّاً على E. أثبت أنّه توجد $(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ في $\mathbb{R}^{n+1}$ تُحقّق

$$\forall P\in E,\quad f(P)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k P^{(k)}(0)$$

3. ليكن f شكلاً خطيّاً على E. نفترض أنّ

$$\forall k\in\{0,1,\ldots,n\},\quad f(Q(X+x_k))=0$$

أثبت أنّ $f=0$. واستنتج أنّ الجملة $(Q(X+x_k))_{0\le k\le n}$ أساس للفضاء E.

الحل

1. في الحقيقة، لمّا كان $\deg Q^{(k)}=n-k$ استنتجنا أنّ الجملة $(Q,Q',Q'',\ldots,Q^{(n)})$ جملةٌ حرّة. لأنّ درجات كثيرات الحدود التي تكوّنها مختلفة مثنى مثنى.

2. ليكن f شكلاً خطيّاً على E. ولنعرّف $\alpha_k=\dfrac{1}{k!}f(X^k)$. ثُمّ لنتأمّل كثير حدود P من E عندئذ يمكننا أن نكتب، استناداً إلى منشور تايلور، أنّ

$$P=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(0)\frac{1}{k!}X^k$$

وبتطبيق الشكل الخطّي f على طرفي هذه المساواة نجد

$$f(P)=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(0)\frac{1}{k!}f(X^k)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k P^{(k)}(0)$$

3. ليكن f شكلاً خطيّاً على E. ولنفترض أنّ

$$\forall k\in\{0,1,\ldots,n\},\quad f(Q(X+x_k))=0 \tag{$\mathcal{H}$}$$

نعلم استناداً إلى ما سبق أنّه توجد أعداد $(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ تُحقّق

$$\forall P\in E,\quad f(P)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i P^{(i)}(0)$$

واستناداً إلى الفرْض $(\mathcal{H})$ يكون لدينا

$$\forall k \in \{0,1,\dots,n\}, \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Q^{(i)}(x_k) = 0$$

ولكنّ درجة كثير الحدود $S = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Q^{(i)}$ لا تتجاوز n، وهو ينعدم عند $n+1$ نقطة مختلفة استناداً إلى ما سبق، فلا بُدّ أن يكون $S = 0$. وإذا استفدنا من الاستقلال الخطّي للجملة $(Q, Q', Q'', \dots, Q^{(n)})$ استنتجنا أنّ $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$، وهذا يقتضي أنّ $f = 0$.

نكون بذلك قد أثبتنا أنّ

$$\left(\operatorname{vect}\left((Q(X + x_k))_{0 \le k \le n}\right)\right)^{\circ} = \{0\}$$

إذن

$$\operatorname{vect}\left((Q(X + x_k))_{0 \le k \le n}\right) = E$$

فالجملة $(Q(X + x_k))_{0 \le k \le n}$ مولِّدة وعدد حدودها المختلفة يساوي $n+1$، أي يساوي $\dim E$. وهذا ما يثبت أنّها أساس للفضاء E. ■

التمرين 16. لتكن $\mathcal{R}$ مجموعة المصفوفات $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ التي تحقّق :

$$\exists s \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = s, \quad \forall j \in \mathbb{N}_n, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = s$$

نرمز بالرمز $\delta(M)$ إلى s.

1. أثبت أنّ $\mathcal{R}$ فضاء شعاعيّ جزئيّ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ وأنّ δ شكل خطّيّ على $\mathcal{R}$.
2. أثبت أنّ جداء ضرب عنصرين من $\mathcal{R}$ هو عنصر من $\mathcal{R}$.
3. لتكن المصفوفة $J = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ التي تُحقّق $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, a_{ij} = 1$.
أثبت أنّ : $(A \in \mathcal{R}) \Leftrightarrow (\exists s : AJ = JA = sJ)$.
4. أثبت أنّه إذا كانت المصفوفة A من $\mathcal{R}$ قَلوبةً فإنّ $A^{-1} \in \mathcal{R}$.
5. أثبت أنّ $\mathcal{R} = \ker \delta \oplus \mathbb{R}J$، وأوجد $\dim \mathcal{R}$.

6. لتكن $\tilde{\mathcal{R}}$ مجموعة المصفوفات $M=(a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ التي تُحقّق :

$$\exists s\in\mathbb{R},\quad \forall i\in\mathbb{N}_n,\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}=s,\quad \forall j\in\mathbb{N}_n,\quad \sum_{i=1}^{n}a_{ij}=s,$$
$$\sum_{k=1}^{n}a_{kk}=\sum_{k=1}^{n}a_{k,n+1-k}=s$$

أثبت أنّ $\tilde{\mathcal{R}}$ فضاء شعاعيّ جزئيّ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ واحسب بُعده.

الحل

1. لنعرّف على الفضاء $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ الأشكال الخطيّة $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}_n}$ و $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}_n}$ كما يلي :

$$\rho_k:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R},\quad M=(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}\mapsto\rho_k(M)=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}$$
$$\lambda_k:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R},\quad M=(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}\mapsto\lambda_k(M)=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}$$

عندئذ نجد مباشرة أنّ

$$\mathcal{R}=\left(\bigcap_{k=1}^{n-1}\ker(\rho_k-\rho_n)\right)\bigcap\left(\bigcap_{k=1}^{n}\ker(\lambda_k-\rho_n)\right)$$

إذن $\mathcal{R}$ هو فضاءٌ شعاعي جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. كما نلاحظ أنّ δ ينطبق على مقصور أيٍّ من الأشكال الخطيّة السابقة على $\mathcal{R}$، فمثلاً $\delta=\rho_n\big|_{\mathcal{R}}$، وهذا يثبت أنّ δ شكلٌ خطّي على $\mathcal{R}$.

2. لنتأمّل مصفوفتين $A=(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ و $B=(b_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ولنفترض أنّ المصفوفة $C=(c_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ تساوي AB. عندئذ، أيّاً كان k من $\mathbb{N}_n$ كان

$$\begin{aligned}\rho_k(C)&=\sum_{j=1}^{n}c_{kj}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}a_{k\ell}b_{\ell j}\\&=\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{k\ell}b_{\ell j}=\sum_{\ell=1}^{n}a_{k\ell}\left(\sum_{j=1}^{n}b_{\ell j}\right)=\sum_{\ell=1}^{n}a_{k\ell}\rho_\ell(B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_k(C) &= \sum_{i=1}^{n} c_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}\\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k} = \sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell k}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i\ell}\right) = \sum_{\ell=1}^{n}\lambda_\ell(A)b_{\ell k}\end{aligned}$$

فإذا افترضنا أنّ A و B تنتميان إلى $\mathcal{R}$ استنتجنا مما سبق أنّه أيّاً كان k من $\mathbb{N}_n$ كان

$$\rho_k(C) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\rho_\ell(B) = \sum_{\ell=1}^{n}\big(a_{k\ell}\delta(B)\big) = \delta(A)\delta(B)$$

$$\lambda_k(C) = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell(A)b_{\ell k} = \sum_{\ell=1}^{n}\big(\delta(A)b_{\ell k}\big) = \delta(A)\delta(B)$$

وعليه، تنتمي المصفوفة C إلى $\mathcal{R}$، ويكون $\delta(C) = \delta(A)\delta(B)$.

3. لتكن المصفوفة $J = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ التي تُحقّق $\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\ a_{ij} = 1$. ولتكن المصفوفة $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. عندئذ

$$AJ = \begin{bmatrix} \rho_1(A) & \rho_1(A) & \cdots & \rho_1(A)\\ \rho_2(A) & \rho_2(A) & \cdots & \rho_2(A)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \rho_n(A) & \rho_n(A) & \cdots & \rho_n(A)\end{bmatrix},\quad JA = \begin{bmatrix} \lambda_1(A) & \lambda_2(A) & \cdots & \lambda_n(A)\\ \lambda_1(A) & \lambda_2(A) & \cdots & \lambda_n(A)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1(A) & \lambda_2(A) & \cdots & \lambda_n(A)\end{bmatrix}$$

وعليه، نستنتج أنّ $\big(AJ = JA\big) \Leftrightarrow \big(A\in\mathcal{R}\big)$، وفي حالة $A\in\mathcal{R}$ يكون

$$AJ = JA = \delta(A)J$$

4. لتكن المصفوفة A من $\mathcal{R}$، ولنفترض أنها قَلوبةٌ. عندئذ يكون لدينا

$$\big(A\in\mathcal{R}\big) \Rightarrow \big(AJ = JA\big) \Rightarrow \big(JA^{-1} = A^{-1}J\big) \Rightarrow A^{-1}\in\mathcal{R}.$$

أي تنتمي A^{-1} إلى $\mathcal{R}$، ويكون $\delta(A^{-1}) = \dfrac{1}{\delta(A)}$ في هذه الحالة.

5. لنلاحظ أنّ $\delta(J) = n \neq 0$ إذن $\ker\delta \cap \mathbb{R}J = \{0\}$.

ثُمّ إنّ كلّ مصفوفة M من $\mathcal{R}$ تُكتب بأسلوب وحيد بالشكل

$$M = \left(M - \frac{\delta(M)}{n}J\right) + \frac{\delta(M)}{n}J$$

حيث $\left(M - \frac{\delta(M)}{n}J\right) \in \ker\delta$. إذن لا بُدّ أن يكون

$$\mathcal{R} = \ker\delta \oplus \mathbb{R}J$$

ليكن $F = \operatorname{vect}\left(\rho_1,\ldots,\rho_{n-1},\rho_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$، بملاحظة أنّ $\sum_{k=1}^{n}\rho_k = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k$ نستنتج

$$F = \operatorname{vect}\left(\rho_1,\ldots,\rho_{n-1},\cancel{\rho_n},\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$$

ومن جهة أخرى، ليكن $(E_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ الأساس القانوني في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، ولنعرّف $\varepsilon_n' = E_{nn}$ و $\varepsilon_k = E_{k1} - E_{n,1}$ و $\varepsilon_k' = E_{1k} - E_{1n} + E_{nn}$ في حالة k من $\mathbb{N}_{n-1}$:

$$\varepsilon_k = \begin{array}{r} \\ \\ \\ k\rightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & \vdots \\ 1 & 0 & & \text{\huge 0} & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_k' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & k & & & & \\ & & & \downarrow & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & \text{\huge 0} & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

عندئذ نتيقّن بسهولة أنّه في حالة j من $\mathbb{N}_{n-1}$ لدينا

$$\forall i \in \mathbb{N}_n,\ \rho_j(\varepsilon_i') = 0 \quad \text{و} \quad \forall i \in \mathbb{N}_{n-1},\ \rho_j(\varepsilon_i) = \delta_{ij}$$

وفي حالة j من $\mathbb{N}_n$ لدينا

$$\forall i \in \mathbb{N}_n,\ \lambda_j(\varepsilon_i') = \delta_{ij} \quad \text{و} \quad \forall i \in \mathbb{N}_{n-1},\ \lambda_j(\varepsilon_i) = 0$$

وهذا يُثبتُ أنّ الجملة $\left(\rho_1,\ldots,\rho_{n-1},\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$ حرّة، لأنّه إذا كان

$$f = \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\rho_i + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i'\lambda_i$$

كان

$$\forall k \in \mathbb{N}_n,\ \alpha_k' = f(\varepsilon_k') \quad \text{و} \quad \forall k \in \mathbb{N}_{n-1},\ \alpha_k = f(\varepsilon_k)$$

وعليه، فإنّ $f = 0$ يقتضي أنّ

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = \alpha_1' = \cdots = \alpha_n' = 0.$$

إذن لا بُدّ أن تكوّن الجملة $\left(\rho_1,\ldots,\rho_{n-1},\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$ أساساً للفضاء F، ومنه $\dim F = 2n-1$.

ولكن

$$\begin{aligned}\ker\delta &= \left(\bigcap_{k=1}^{n}\ker(\rho_k)\right)\bigcap\left(\bigcap_{k=1}^{n}\ker(\lambda_k)\right)\\ &= \left(\left\{\rho_1,\ldots,\rho_{n-1},\rho_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right\}\right)^{\circ}\\ &= \left(\operatorname{vect}\left(\rho_1,\ldots,\rho_{n-1},\rho_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)\right)^{\circ}\\ &= F^{\circ}\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}\dim\ker\delta &= \dim\mathcal{M}_n(\mathbb{R})-\dim F\\ &= n^2-2n+1=(n-1)^2\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ

$$\dim\mathcal{R}=(n-1)^2+1=n^2-2n+2$$

6. لتكن $\tilde{\mathcal{R}}$ مجموعة المصفوفات $M=(a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ التي تُحقّق :

$$\begin{gathered}\exists s\in\mathbb{R},\quad \forall i\in\mathbb{N}_n,\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}=s,\quad \forall j\in\mathbb{N}_n,\quad \sum_{i=1}^{n}a_{ij}=s,\\ \sum_{k=1}^{n}a_{kk}=\sum_{k=1}^{n}a_{k,n+1-k}=s\end{gathered}$$

في حالة $n=1$ يكون $\tilde{\mathcal{R}}=\mathcal{R}=\mathbb{R}J$، لذلك سنفترض أنّ $n>1$. عندئذ نتيقّن مباشرة أنّ $\tilde{\mathcal{R}}$ فضاءٌ شعاعي جزئي من $\mathcal{R}$، وإذا عرّفنا على $\mathcal{R}_0=\ker\delta$ الشكلين الخطيّين

$$\tau:\mathcal{R}_0\to\mathbb{R},\quad M=(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}\mapsto\tau(M)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

$$\mu:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R},\quad M=(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}\mapsto\mu(M)=\sum_{i=1}^{n}a_{in+1-i}$$

أثبتنا بأسلوبٍ مماثلٍ لما سبق أنّ

$$\tilde{\mathcal{R}}=\left(\ker\tau\cap\ker\mu\right)\oplus\mathbb{R}J$$

وهنا نلاحظ أنّه في حالة $n=2$ لدينا $\dim \mathcal{R}_0 = 1$، ولكن $\tau = -\mu$، إذن $\ker \tau = \ker \mu$. ولكن $\tau \neq 0$ فيجب أن يكون $\ker \tau = \ker \mu = \{0\}$، ومن ثمّ $\tilde{\mathcal{R}} = \mathbb{R}J$، في هذه الحالة أيضاً.

لندرس إذن حالة $n > 2$. ولنعرّف المصفوفتين

$$B = L - \frac{1}{n}J \quad \text{و} \quad A = I - \frac{1}{n}J$$

حيث $L = (\delta_{i,n+1-j})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$. نلاحظ مباشرة أنّهما تنتميان إلى $\mathcal{R}_0 = \ker \delta$، كما نلاحظ ما يأتي :

- إذا كان n عدداً زوجيّاً كان

$$\tau(B) = -1 \quad \text{و} \quad \tau(A) = n-1$$

و

$$\mu(B) = n-1 \quad \text{و} \quad \mu(A) = -1$$

وهذا يثبت أنّ الجملة (τ, μ) حرّة في هذه الحالة.

- وإذا كان n عدداً فردياً كان

$$\tau(B) = 0 \quad \text{و} \quad \tau(A) = n-1$$

و

$$\mu(B) = n-1 \quad \text{و} \quad \mu(A) = 0$$

وهذا يبرهن الاستقلال الخطّي للجملة (τ, μ) في هذه الحالة أيضاً. ومن ثمّ يكون

$$\begin{aligned}\dim\big(\ker\tau \cap \ker\mu\big) &= \dim\big(\operatorname{vect}(\tau,\mu)\big)^\circ \\ &= \dim \delta - \dim \operatorname{vect}(\tau,\mu) \\ &= (n-1)^2 - 2\end{aligned}$$

وعليه نستنتج أنّ

$$\dim \tilde{\mathcal{R}} = \begin{cases} 1 & : \quad n \leq 2 \\ n(n-2) & : \quad n > 2 \end{cases}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 17. ليكن E و F فضاءَيْن منتهيي البعد على حقل $\mathbb{K}$. نذكّر بأن E^* يمثّل الفضاء الثنوي للفضاء E ، وبأنّ $\mathcal{L}(E,F)$ هو فضاء التطبيقات الخطّية من E إلى F .

نعرّف، في حالة a من F و f من E^* ، التطبيق $f \otimes a$ من $\mathcal{L}(E,F)$ على النحو الآتي

$$f \otimes a : E \to F : x \mapsto \langle f, x \rangle a$$

1. في حالة a من F ، و f من E^* ، ما رتبة التطبيق الخطّي $f \otimes a$ ؟
2. أثبت أنّه إذا كان u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E,F)$ رتبته تساوي 1، فيوجد a من F و f من E^* يُحقّق $u = f \otimes a$.
3. إذا كانت $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ أساساً للفضاء F ، و $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ أساساً للفضاء E^* . فأثبت أنّ الجملة $(u_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_m}$ حيث $u_{ij} = f_i \otimes a_j$ هي أساس للفضاء $\mathcal{L}(E,F)$.
4. استنتج مما سبق أنّ كلّ تطبيق خطّي u من $\mathcal{L}(E,F)$ ، يُساوي مجموع p تطبيقاً خطيّاً على الأكثر رتبة كلٍّ منها 1، وقد عرّفنا $p = \min(\dim E, \dim F)$.
5. أثبت، على وجه الدقّة، أنّه إذا كان u من $\mathcal{L}(E,F)$ تطبيقاً خطيّاً رتبته r ، فتوجد تطبيقات خطيّة u_1 و u_2 و … و u_r من $\mathcal{L}(E,F)$ ، تُحقّق

$$\forall k \in \mathbb{N}_r,\ \operatorname{rg} u_k = 1 \quad \text{و} \quad u = \sum_{k=1}^{r} u_k$$

الحل

1. في حالة a من F ، و f من E^* ، نلاحظ أنّه إذا كان $a = 0$ أو $f = 0$ كان $f \otimes a = 0$ ، أمّا إذا كان $a \neq 0$ و $f \neq 0$ فعندئذ يكون $\operatorname{Im}(f \otimes a) = \mathbb{K}a$ ، وعليه $\operatorname{rg}(f \otimes a) = 1$ في هذه الحالة.

2. ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E,F)$ رتبته 1، فيوجد a من $F\backslash\{0\}$ يُحقّق $\operatorname{Im} u = \mathbb{K}a$. لنتأمّل عنصراً e_1 من E يُحقّق $u(e_1) = a$ ، عندئذ من الواضح أنّ $\ker u \cap \mathbb{K}e_1 = \{0\}$ ، ولمّا كان

$$\dim \ker u = \dim E - \operatorname{rg} u = n - 1$$

استنتجنا أنّ $E = \ker u \oplus \mathbb{K}e_1$. لنتأمّل إذن أساساً $(e_2,\ldots,e_n)$ للفضاء $\ker u$ ، فتكون الجملة $\mathcal{E}$ التالية: $(e_1,\ldots,e_n)$ أساساً للفضاء E ، ثُمّ لنتأمّل الأساس الثنوي $(e_1^*,\ldots,e_n^*)$ للأساس $\mathcal{E}$. عندئذ نجد

$$\forall x \in E,\, u(x) = u\left(\sum_{k=1}^{n}\left\langle e_k^*, x\right\rangle e_k\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left\langle e_k^*, x\right\rangle u(e_k) = \left\langle e_1^*, x\right\rangle u(e_1) = \left\langle e_1^*, x\right\rangle a$$

أي إنّ $u = e_1^* \otimes a$. وهي النتيجة المطلوبة.

3. ليكن $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ أساساً للفضاء F ، و $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ أساساً للفضاء E^* . ولنثبت أنّ الجملة $(u_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_m}$ حيث $u_{ij} = f_i \otimes a_j$ هي أساس للفضاء $\mathcal{L}(E,F)$. من الواضح أنّ عدد حدود هذه الجملة يساوي nm أي يساوي $\dim \mathcal{L}(E,F)$ ، لذلك يكفي أن نثبت أنها حرّة. لنتأمل إذن عبارة خطيّة معدومة بعناصر هذه الجملة، ولتكن

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}u_{ij} = 0$$

نستنتج إذن أنّ

$$\forall x \in E, \quad \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ij}f_i(x)\right)a_j = 0$$

ولأنّ الجملة $\mathcal{A}$ حرّة، نستنتج من ذلك أنّ

$$\forall j \in \mathbb{N}_m, \forall x \in E, \quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_{ij}f_i(x) = 0$$

أو

$$\forall j \in \mathbb{N}_m, \quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_{ij}f_i = 0$$

ولكنّ الجملة $\mathcal{F}$ جملة حرّة أيضاً في E^* ، إذن

$$\forall j \in \mathbb{N}_m, \quad \lambda_{1j} = \lambda_{2j} = \cdots = \lambda_{nj} = 0$$

والجملة $(u_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_m}$ حرّة.

4. لنحتفظ برموز السؤال السابق. وليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E,F)$ ، عندئذ توجد جملة من عناصر $\mathbb{K}$ ولتكن $(\lambda_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_m}$ تُحقّق

$$u=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}(f_i\otimes a_j)$$

ولكن يمكن كتابة هذه العبارة بالشكلين المتكافئين التاليين :

$$u=\sum_{i=1}^{n}f_i\otimes\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}a_j\right)}_{b_i}=\sum_{j=1}^{m}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ij}f_i\right)}_{g_j}\otimes a_j$$

أو

$$u=\sum_{i=1}^{n}f_i\otimes b_i=\sum_{j=1}^{m}g_j\otimes a_j$$

إذن u يُساوي مجموع p تطبيقاً خطيّاً على الأكثر رتبة كلٍّ منها 1، حيث $p=\min(n,m)$.

5. ليكن u من $\mathcal{L}(E,F)$ تطبيقاً خطيّاً رتبته r فيكون $\dim\ker u=n-r$ ، نختار $(e_{r+1},\ldots,e_n)$ أساساً للفضاء $\ker u$ ، ونتمّمه إلى أساس

$$\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_r,e_{r+1},\ldots,e_n)$$

للفضاء E . ثُمّ لنعرّف جملة العناصر $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_r}$ بالعلاقات $a_k=u(e_k)$. وليكن

$$\mathcal{E}^*=(e_1^*,\ldots,e_r^*,e_{r+1}^*,\ldots e_n^*)$$

الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{E}$. عندئذ

$$\forall x\in E,\quad x=\sum_{k=1}^{n}\left\langle e_k^*,x\right\rangle e_k$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\forall x\in E,\qquad u(x)&=\sum_{k=1}^{n}\left\langle e_k^*,x\right\rangle u(e_k)\\&=\sum_{k=1}^{r}\left\langle e_k^*,x\right\rangle u(e_k)=\left(\sum_{k=1}^{r}e_k^*\otimes a_k\right)(x)\end{aligned}$$

أو

$$\forall x \in E, \quad u = \sum_{k=1}^{r} e_k^* \otimes a_k$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

المصفوفات

1. مفهوم المصفوفة

نذكّر بالرمز $\mathbb{N}_n$ الذي يرمز إلى مجموعة الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً وأصغر أو تساوي العدد n من $\mathbb{N}$. وسنرمز في بقيّة هذه الفقرة بالرمز $\mathbb{A}$ إلى حلقة تبديليّة ما.

1-1. تعريف. نسمّي **مصفوفةً** من عناصر الحلقة $\mathbb{A}$ ذات n سطراً و p عموداً، كلَّ تطبيق منطلقه المجموعة $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$ ويأخذ قيمه في الحلقة $\mathbb{A}$. ونرمز بالرمز $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})$ إلى مجموعة المصفوفات ذات n سطراً و p عموداً من عناصر الحلقة $\mathcal{E}'$.

لقد جرت العادة أن نمثّل مصفوفة M من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})$ بالشكل :

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$$

2-1. تعريف.

- نسمّي **مصفوفة جزئية** من مصفوفة $M = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})$ كلّ مصفوفة $(a_{\lambda(i)\mu(j)})_{(i,j)\in\mathbb{N}_r\times\mathbb{N}_s}$ حيث $\lambda : \mathbb{N}_r \to \mathbb{N}_n$ و $\mu : \mathbb{N}_s \to \mathbb{N}_p$ هما تابعان متزايدان تماماً. وفي هذه الحالة نرمز إلى هذه المصفوفة بالرمز $M_{I,J}$ حيث $I = \operatorname{Im}\lambda$ و $J = \operatorname{Im}\mu$.
- نسمّي **مصفوفةَ سطرٍ** كلَّ مصفوفة من $\mathcal{M}_{1\times p}(\mathbb{A})$، و**مصفوفةَ عمود** كلَّ مصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{A})$.
- نسمّي **مصفوفة مربّعة** من المرتبة n كلَّ مصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{A})$، ونرمز إلى مجموعة المصفوفات المربّعة من المرتبة n بالرمز $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$.
- نسمّي **مصفوفة مثلثيّة عليا** كل مصفوفة مربّعة $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$، تحقّق

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

- نسمّي **مصفوفة مثلثيّة سفلى** كل مصفوفة مربّعة $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$، تحقّق
$$i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$$
- وأخيراً نسمّي **مصفوفة قطريّة** كل مصفوفة مربّعة $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$، تحقّق
$$i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$$
- ونسمي المصفوفة $I_n = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$ المعرّفة بالصيغة $a_{ij} = \delta_{ij}$، حيث δ_{ij} هو رمز كرونيكر، **المصفوفة الواحديّة** في $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$.

2. العمليّات على المصفوفات

سنفترض في هذه الفقرة أيضاً أنّ $\mathbb{A}$ حلقة تبديليّة. ليكن (n, p) من $\mathbb{N}^{*2}$ يمكننا تزويد $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})$ بقانوني تشكيل، أولهما داخليّ $(+)$ معرّف كما يأتي:

❶ أيّاً كانت $M = (a_{ij})$ و $N = (b_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})$ كان
$$M + N = (a_{ij} + b_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$$

وثانيهما خارجي $(\cdot)$، مجموعة مؤثراته $\mathbb{A}$، ومعرّف كما يأتي:

❷ أيّاً كانت $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})$ و λ من $\mathbb{A}$ كان
$$\lambda \cdot M = (\lambda a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$$

ونتحقّق بسهولة أنّ $(\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A}), +)$ زمرة تبديليّة وأنّه في حالة عناصر λ و μ من $\mathbb{A}$، ومصفوفات M و N من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})$ تتحقق الخواص الآتية.

$$1_A \cdot M = M \qquad ①$$
$$\lambda \cdot (M + N) = \lambda \cdot M + \lambda \cdot N \qquad ②$$
$$(\lambda + \mu) \cdot M = \lambda \cdot M + \mu \cdot M \qquad ③$$
$$\lambda \cdot (\mu \cdot M) = (\lambda\mu) \cdot M \qquad ④$$

فإذا كانت الحلقةُ $\mathbb{A}$ حقلاً $\mathbb{K}$ كانت البنية $(\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A}), +, \cdot)$ فضاءً شعاعياً على $\mathbb{K}$.

❸ ومن جهة أخرى، أيّاً كانت (n,p,q) من $\mathbb{N}^{*3}$، نعرّف قانون ضرب المصفوفات كما يأتي:

$$\times : \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})\times\mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{A})\to\mathcal{M}_{n\times q}(\mathbb{A}),\ (M,N)\mapsto L=M\times N$$

فإذا كانت $M=(a_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})$ و $N=(b_{ij})$ من $\mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{A})$ عرّفنا المصفوفة $L=(c_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n\times q}(\mathbb{A})$ بالعلاقات :

$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_q,\quad c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

هذا وننصح، بترتيب المصفوفات كما في الشكل الآتي ليسهل إجراء عملية الضرب هذه:

$$
\begin{array}{cccc}
 & & N & \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1p}\\ \vdots & & & & \vdots\\ \vdots & & \boxed{b_{2j}} & & \vdots\\ a_{p1} & \cdots & \boxed{b_{pj}} & \cdots & b_{pq}\end{bmatrix} & \\
M & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1p}\\ \vdots & & & \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{ip}}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np}\end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} & \cdots & & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \vdots & & \boxed{c_{ij}} & & \vdots\\ & & \vdots & & \\ & \cdots & & \cdots & \end{bmatrix} & L
\end{array}
$$

تبيّن المبرهنة الآتية خاصّة مهمّة من خواص ضرب المصفوفات.

1-2. مبرهنة. لتكن الأعداد (n,p,q,r) من $\mathbb{N}^{*4}$، ولتكن M من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})$ و N من $\mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{A})$ و L من $\mathcal{M}_{q\times r}(\mathbb{A})$. عندئذ يكون

$$(M\times N)\times L=M\times(N\times L)$$

الإثبات

لنفترض أنّ $M=(a_{ij})$ و $N=(b_{ij})$ و $L=(c_{ij})$. عندئذ يكون

$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_q,\ [M\times N]_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

وكذلك يكون

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_r,\ \ [(M\times N)\times L]_{ij}=\sum_{m=1}^{q}[M\times N]_{im}c_{mj}$$

ومن ثَم

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_r,\ \ [(M\times N)\times L]_{ij}=\sum_{m=1}^{q}(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{km})c_{mj}$$

وأخيراً

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_r,\ \ [(M\times N)\times L]_{ij}=\sum_{m=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{km}c_{mj}$$

ومن جهة أخرى،

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_p\times\mathbb{N}_r,\ \ [N\times L]_{ij}=\sum_{m=1}^{q}b_{im}c_{mj}$$

إذن

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_r,\ \ [M\times(N\times L)]_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}[N\times L]_{kj}$$

ومن ثَم

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_r,\ \ [M\times(N\times L)]_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}(\sum_{m=1}^{q}b_{km}c_{mj})$$

وأخيراً

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_r,\ \ [M\times(N\times L)]_{ij}=\sum_{m=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{km}c_{mj}$$

ومنه نستنتج أنّ $(M\times N)\times L=M\times(N\times L)$. ❐

2-2. ملاحظات

- إنّ قانون ضرب المصفوفات قانون تشكيل داخلي على مجموعة المصفوفات المربّعة من المرتبة n أي $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$. وتصبح بذلك البنية $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{A}),+,\times\right)$ حلقةً، حياديُّ الضرب فيها هو المصفوفة الواحديّة I_n .

وتكون الحلقة $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$ غير تبديليّة أيّاً كانت $n \geq 2$، كما يبيّن المثال الآتي :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وتُصبح البنية $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{A}),\cdot,+,\times\right)$ جبراً غير تبديلي على الحلقة $\mathbb{A}$.

- نقول إنّ مصفوفة M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$ قَلوبةٌ إذا وفقط إذا كانت عنصراً قلوباً في الحلقة $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{A}),+,\times\right)$، ونرمز بالرمز $\mathcal{GL}_n(\mathbb{A})$ إلى زمرة العناصر القَلوبة في الحلقة $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{A}),+,\times\right)$.
- عند ضرب مصفوفتين M و N نكتب الجداء عادة MN عوضاً عن $M \times N$.

سنفترض في بقيّة هذا البحث أنّ الحلقة $\mathbb{A}$ حقل تبديليّ نرمز إليه بالرمز $\mathbb{K}$.

3-2. مبرهنة: إنّ $\left(\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}),+,\cdot\right)$ فضاء شعاعي منتهي البعد على $\mathbb{K}$، بُعده يساوي np .

الإثبات

إنّ إثبات كون الفضاء $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ فضاءً شعاعياً على $\mathbb{K}$ سهلٌ ومتروك للقارئ. نعرّف، أيّاً كان (i,j) من $\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p$، المصفوفة $E_{ij} = \left(\lambda_{kq}^{(i,j)}\right)_{(k,q)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ بالعلاقة $\lambda_{kq}^{(i,j)} = \delta_{ik}\delta_{jq}$، حيث $\delta_{\alpha\beta}$ هو رمز كرونيكر الذي يُحقّق $\delta_{\alpha\alpha} = 1$ و $\delta_{\alpha\beta} = 0$ إذا كان $\alpha \neq \beta$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & j & & \end{matrix} \\ E_{ij} : i\rightarrow & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

نُلاحظ بسهولة أنّ الجملة $\mathcal{E} = \left(E_{ij}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$ أساس للفضاء $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$، نسمّيه الأساس القانوني، ومن ثَمّ نرى أنّ $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}) = np$ لأنّ np هو عدد عناصر المجموعة $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$. ❐

2-4. **مبرهنة**. تكوّن مجموعة المصفوفات المثلّثيّة العليا $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$، وكذلك مجموعة المصفوفات المثلّثيّة السفلى $\mathcal{T}_n^L(\mathbb{K})$، جبرَين جزئيّين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. أي إنّ كلّاً منهما مغلق بالنسبة إلى العمليات الثلاث ويحتوي على المصفوفة الواحديّة I_n.

الإثبات

يكفي أن نتحقق أنّ جداء ضرب مصفوفتين من $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$ ينتمي إلى $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$، لأن التوثُّق من كون $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$ فضاءً شعاعيّاً جزئياً من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ سهل جدّاً ومتروك للقارئ.

لتكن M و N من $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$. ولنفترض أنّ $M = (a_{ij})$ و $N = (b_{ij})$. عندئذ يكون

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,$$
$$i > j \Rightarrow [M\times N]_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{ik}}_{0\hookleftarrow} b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{0\hookleftarrow} = 0$$

ونترك القارئ يثبتُ بأسلوب مماثل حالة $\mathcal{T}_n^L(\mathbb{K})$. ❐

2-5. **مبرهنة**. تكوّن مجموعة المصفوفات القطريّة $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$، جبراً جزئيّاً تبديليّاً من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

الإثبات

الإثبات تحقُّق مباشر متروك للقارئ. ❐

3. مصفوفة تطبيق خطّي

3-1.تعريف : ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E}=(e_1,e_2,\ldots,e_p)$ أساساً للفضاء E و $\mathcal{F}=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ أساساً للفضاء F . وأخيراً ليكن u تطبيقاً خطيّاً من E إلى F . يُكتب الشّعاع $u(e_j)$ بطريقة وحيدة عبارةً خطيّةً بعناصر الأساس $\mathcal{F}$ كما يأتي:

$$u(e_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}f_i$$

وذلك أيّاً كان j من $\mathbb{N}_p$. نسمّي المصفوفة $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ **مصفوفة التطبيق الخطيّ** u في الأساسين $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ ، ونرمز إليها $\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F})$ ، كما يبيّن الشكل التوضيحيّ التالي :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} u(e_1) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_p)\end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \end{array} = \mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F})$$

وأخيراً نلاحظ أنّه إذا كان $\mathcal{F}^*=(f_1^*,f_2^*,\ldots,f_n^*)$ الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{F}$ ، كان

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p,\ a_{ij}=\left\langle f_i^*,u(e_j)\right\rangle$$

تنتج المبرهنة التالية مباشرة من التعريف والملاحظة السابقة.

3-2. مبرهنة : ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E}=(e_1,e_2,\ldots,e_p)$ أساساً للفضاء E و $\mathcal{F}=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ أساساً للفضاء F . عندئذ يكون التطبيق

$$\Phi:\mathcal{L}(E,F)\to\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}),u\mapsto\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F})$$

تقابلاً خطيّاً.

3-3. **مبرهنة**. ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$، وليكن $\dim E = p$ و $\dim F = n$. ثُمّ ليكن u تطبيقاً خطيّاً من E إلى F، رتبته r.
عندئذ يوجد أساس $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ للفضاء E، ويوجد أيضاً أساس $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ للفضاء F، يُحقّقان:

$$\operatorname{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix} & 0_{r\times p-r} \\ \hline 0_{n-r\times r} & 0_{n-r\times p-r} \end{array}\right] = J_{n,p,r}$$

الإثبات

لمّا كان $\operatorname{rg} u = r$ كان بُعد $\ker u$ مساوياً $p - r$. ليكن إذن $(e_{r+1}, \ldots, e_p)$ أساساً للفضاء الجزئي $\ker u$، ولنتمّمه إلى أساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ للفضاء E. ثُمّ لنعرّف الفضاء الجزئي $G = \operatorname{vect}(e_1, \ldots, e_r)$، فيكون $E = G \oplus \ker u$.
إنّ مقصور u على G، أي $u_{|G}$، تطبيق خطّي متباين لأنّ

$$\ker u_{|G} = \ker u \cap G = \{0\}$$

ومن ثَمّ إذا عرّفنا $f_i = u(e_i)$ في حالة i من $\mathbb{N}_r$، كانت الجملة $(f_1, \ldots, f_r)$ جملة حرّة في F، لنتمّمها إذن إلى أساس $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ للفضاء F. عندئذ نتحقق بسهولة أنّ لمصفوفة u في الأساسين $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ الشكل الموصوف في نص المبرهنة أي

$$\operatorname{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = J_{n,p,r}$$ ❒

4-3. **مبرهنة**. لتكن E و F و G ثلاثة فضاءات شعاعية منتهية البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$.
وليكن التطبيق u من $\mathcal{L}(E, F)$، و v من $\mathcal{L}(F, G)$. عندئذ، أيّاً كان الأساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ للفضاء E، والأساس $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ للفضاء F، وأخيراً الأساس $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_m)$ للفضاء G، كان :

$$\operatorname{mat}(v \circ u, \mathcal{E}, \mathcal{G}) = \operatorname{mat}(v, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \times \operatorname{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$

الإثبات

لنضع $\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F})=(a_{ij})$ و $\mathrm{mat}(v,\mathcal{F},\mathcal{G})=(b_{ij})$. فيكون

$$\begin{aligned}\forall j\in\mathbb{N}_p,\quad u(e_j) &= \sum_{i=1}^{n}a_{ij}f_i\\ \forall i\in\mathbb{N}_n,\quad v(f_i) &= \sum_{k=1}^{m}b_{ki}g_k\end{aligned}$$

ينتج من ذلك أنّه، أيّاً كان j من $\mathbb{N}_p$، كان

$$v\circ u(e_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}v(f_i)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(\sum_{k=1}^{m}b_{ki}g_k)=\sum_{k=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ij})g_k=\sum_{k=1}^{m}c_{kj}g_k$$

حيث $c_{kj}=\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ij}$. إذن

$$\mathrm{mat}(v\circ u,\mathcal{E},\mathcal{G})=(c_{ij})$$

وهذا يكافئ المساواة المطلوبة:

$$\mathrm{mat}(v\circ u,\mathcal{E},\mathcal{G})=\mathrm{mat}(v,\mathcal{F},\mathcal{G})\times\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F})\qquad\square$$

3-5. **ملاحظة**. ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E}=(e_1,e_2,\ldots,e_p)$ أساساً للفضاء E، و $\mathcal{F}=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ أساساً للفضاء F . نتأمّل تطبيقاً خطّياً u من $\mathcal{L}(E,F)$، ونضع أخيراً $M=\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F})=(a_{ij})$. لمّا كان $\mathcal{E}$ أساساً للفضاء E كان التطبيق

$$\Phi_{\mathcal{E}}:\mathcal{M}_{p\times1}(\mathbb{K})\to E,\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{bmatrix}\mapsto\Phi_{\mathcal{E}}(X)=\sum_{j=1}^{p}x_je_j$$

تقابلاً خطيّاً. وكذلك ، لأنّ $\mathcal{F}$ أساس للفضاء F، كان التطبيق الآتي تقابلاً خطياً.

$$\Phi_{\mathcal{F}}:\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K})\to F,\quad Y=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}\mapsto\Phi_{\mathcal{F}}(Y)=\sum_{i=1}^{n}y_if_i$$

ليكن x عنصراً من E، وليكن $y = u(x)$. يُعطى شعاعُ مركّبات x على الأساس $\mathcal{E}$ بالعلاقة $X = \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}(x)$، وكذلك يعطى شعاع مركّبات y على الأساس $\mathcal{F}$ بالعلاقة $Y = \Phi_{\mathcal{F}}^{-1}(y)$. ويتحقّق القارئ بسهولة أنّ الشعاعين X و Y يرتبطان بالعلاقة $Y = M \times X$. فإذا عرّفنا التطبيق الخطّي

$$U_M : \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}), \quad X \mapsto U_M(X) = M \times X$$

صار لدينا $U_M = \Phi_{\mathcal{F}}^{-1} \circ u \circ \Phi_{\mathcal{E}}$. ويمكن تلخيص ذلك بالقول إنّ المخطّط الآتي تبديلي

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K}) \arrow[r, "U_M"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{E}}"'] & \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{F}}"] \\ E \arrow[r, "u"'] & F \end{tikzcd}$$

3-6. تعريف. لتكن المصفوفة $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. نسمي **منقول** المصفوفة M المصفوفة ${}^tM = (b_{ij})$ من $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ المعرّفة كما يأتي

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_p \times \mathbb{N}_n, \quad b_{ij} = a_{ji}$$

نقول إنّ المصفوفة المربّعة M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **متناظرة** إذا وفقط إذا كان $M = {}^tM$. ونقول إنها **تخالفية** إذا وفقط إذا كانت تحقّق $M = -{}^tM$. لقد جرت العادة أن نرمز بالرمز $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ إلى مجموعة المصفوفات المربعة المتناظرة من المرتبة n، وبالرمز $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ إلى مجموعة المصفوفات المربعة التخالفية من المرتبة n. تلخّص المبرهنة الآتية بعض الخواص البسيطة.

3-7. مبرهنة

① إنّ التطبيق $\Theta : \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K}), M \mapsto {}^tM$ تقابلٌ خطّي.

② أيّاً كان A من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ و B من $\mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$ كان ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$.

③ أيّاً كانت المصفوفة القَلوبة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، كانت ${}^tA$ قَلوبة و ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

④ إنّ كلّاً من $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ و $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، وإذا كان العدد المميّز للحقل $\mathbb{K}$ لا يساوي 2، كان $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ وكان

$$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{و} \quad \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

الإثبات

① إنّ إثبات الخاصة ① مباشر وبسيط نتركه للقارئ.

② لنفترض أنّ $A = (a_{ij})$ وأنّ $B = (b_{ij})$. عندئذ يكون

$$[{}^t(A \times B)]_{ij} = [A \times B]_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} [{}^tB]_{ik} [{}^tA]_{kj} = [{}^tB \times {}^tA]_{ij}$$

وذلك أيّاً كان (i, j) من $\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$. وهذا ما يثبت الخاصّة ② .

③ لتكن A مصفوفة قَلوبة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، عندئذ نجد $B = A^{-1}$ في $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ تُحقّق

$$A \times B = B \times A = I_n$$

وبالاستفادة من ② نجد

$${}^tB \times {}^tA = {}^tA \times {}^tB = {}^tI_n = I_n$$

ومن ثَمّ تكون ${}^tA$ قَلوبة، ويكون ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

④ واضح من التعريف أنّ كلّاً من $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ و $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. وإذا كان $(E_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ الأساس القانوني للفضاء $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، كوّنت الجملة $(S_{ij})_{(i,j)\in T_n}$ حيث $T_n = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}_n^2 : i \leq j\right\}$ و

$$\forall (i, j) \in T_n, \quad S_{ij} = \begin{cases} E_{ii} & : \; i = j \\ E_{ij} + E_{ji} & : \; i \neq j \end{cases}$$

أساساً للفضاء الجزئي $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. إذن

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{card}\left(T_n\right) = \frac{n(n+1)}{2}$$

لنلاحظ، انطلاقاً من التعريف، أنه إذا كان العدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ يساوي 2 تحقَّقت المساواة $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

لذلك سنفترض فيما يأتي أنّ العدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ لا يساوي 2. وعندها تكوِّن الجملة $(E_{ij}-E_{ji})_{1\le i<j\le n}$ أساساً للفضاء الجزئي $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$، ومن ثَمّ

$$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{card}\Big(\big\{(i,j)\in \mathbb{N}_n^2 : i<j\big\}\Big) = \frac{n(n-1)}{2}$$

وأخيراً، أيّاً كانت المصفوفة M من $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})\cap\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ كان $-M = {}^tM = M$، ومن ثَمّ $M=0$ لأنّ العدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ لا يساوي 2. إذن، من جهة أولى، لدينا

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{K})\cap\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{0\}$$

ومن جهة ثانية لدينا

$$\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\quad M = \underbrace{\frac{1}{2}(M+{}^tM)}_{\in\mathcal{S}_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M-{}^tM)}_{\in\mathcal{A}_n(\mathbb{K})}$$

وهذا ما يثبتُ أنّ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})\oplus\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. ❐

8-3. مبرهنة. ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$. ليكن $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_p)$ أساساً للفضاء E أساسه الثنوي هو $\mathcal{E}^*=(e_1^*,\ldots,e_p^*)$، وليكن $\mathcal{F}=(f_1,\ldots,f_n)$ أساساً للفضاء F أساسه الثنوي $\mathcal{F}^*=(f_1^*,\ldots,f_n^*)$. نتأمّل تطبيقاً خطيّاً u من $\mathcal{L}(E,F)$، عندئذ يكون

$${}^t\big(\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F})\big) = \operatorname{mat}({}^tu,\mathcal{F}^*,\mathcal{E}^*)$$

الإثبات

لنضع $\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F}) = (a_{ij})$ و $\operatorname{mat}({}^tu,\mathcal{F}^*,\mathcal{E}^*) = (b_{ij})$. عندئذ يكون

$$b_{ij} = \big\langle {}^tu(f_j^*), e_i\big\rangle_{E^*,E} = \big\langle f_j^*, u(e_i)\big\rangle_{F^*,F} = a_{ji}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ❐

4. رتبة مصفوفة

1-4. تعريف. لتكن المصفوفة $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. نسمّي أعمدة M الجملة $(C_1(M),\ldots,C_p(M))$ من عناصر الفضاء $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ المعرّفة كما يلي

$$\forall j \in \mathbb{N}_p, \quad C_j(M) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

وكذلك نسمّي أسطر M جملة العناصر $(R_1(M),\ldots,R_n(M))$ من عناصر الفضاء $\mathcal{M}_{1\times p}(\mathbb{K})$ المعرّفة كما يلي

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad R_i(M) = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

2-4. تعريف. لتكن المصفوفة M من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. نسمّي **رتبة المصفوفة** M رتبة أعمدتها في الفضاء $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. ونرمز إلى هذه الرتبة بالرمز $\operatorname{rg} M$. أي

$$\operatorname{rg} M = \dim \operatorname{vect}\big((C_1(M),\ldots,C_p(M)\big)$$

3-4. مبرهنة. ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E} = (e_1, e_2,\ldots, e_p)$ أساساً للفضاء E ، و $\mathcal{F} = (f_1, f_2,\ldots, f_n)$ أساساً للفضاء F . عندئذ أيّاً كان u من $\mathcal{L}(E,F)$ ، كان

$$\operatorname{rg} \operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F}) = \operatorname{rg} u$$

الإثبات

من جهة أولى، لدينا

$$\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u = \operatorname{rg}\big(u(e_1),\ldots,u(e_1)\big)$$

ومن جهة ثانية، لمّا كان $\mathcal{F}$ أساساً للفضاء F، كان التطبيق

$$\Phi_{\mathcal{F}} : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \to F, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \mapsto \Phi_{\mathcal{F}}(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$$

تقابلاً خطيّاً يُحقِّق

$$\forall j \in \mathbb{N}_p, \quad \Phi_{\mathcal{F}}(C_j(M)) = u(e_j)$$

إذن

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} u &= \operatorname{rg}\big(\Phi_{\mathcal{F}}(C_1(M)),\ldots,\Phi_{\mathcal{F}}(C_p(M))\big) \\ &= \operatorname{rg}\big(C_1(M),\ldots,C_p(M)\big) = \operatorname{rg} M \end{aligned}$$

وهذا يثبت المطلوب. ❐

4-4. **ملاحظة** : لتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. وليكن التطبيق الخطيّ

$$U_M : \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}), \quad X \mapsto M \times X$$

عندئذ يكون $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} U_M$، لأن أعمدة المصفوفة M هي صورة الأساس القانوني في الفضاء $\mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K})$ وفق التّطبيق الخطّي U_M.

تفيدنا هذه الملاحظة في استنتاج المبرهنة الآتية من المبرهنة الموافقة في حالة التطبيقات الخطيّة.

5-4. **مبرهنة**. لتكن M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. إنّ الخواص الآتية متكافئة.

① المصفوفة M قَلوبة.

② $\operatorname{rg} M = n$.

③ توجد R في $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ تُحقّق $M \times R = I_n$.

④ توجد L في $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ تُحقّق $L \times M = I_n$.

6-4. **مبرهنة**. لتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. عندئذ يكون

$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} {}^t M$$

الإثبات

ليكن $\mathcal{E}_\ell$ الأساس القانوني في $\mathcal{M}_{\ell\times 1}(\mathbb{K})$. ولنرمز بالرمز $\mathcal{E}_\ell^*$ إلى أساسه الثنوي. ولنتأمّل التطبيق الخطّي

$$U_M : \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}), \quad X \mapsto M\times X$$

عندئذ يكون لدينا استناداً إلى المبرهنة 8-3.

$$^tM = \operatorname{mat}(^tU_M, \mathcal{E}_n^*, \mathcal{E}_p^*) \text{ و } M = \operatorname{mat}(U_M, \mathcal{E}_p, \mathcal{E}_n)$$

ولكن، نعلم بالاستفادة مما درسناه في بحث الثنويّة، أنّ $\operatorname{rg} U_M = \operatorname{rg} {}^tU_M$، ومن ثمّ نستنتج أنّ

$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} {}^tM$$

وهي النتيجة المرجوّة. ❐

نتيجة. لتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. إنّ رتبة M هي رتبة أسطرها في الفضاء $\mathcal{M}_{1\times p}(\mathbb{K})$. ومن ثَمّ يكون $\operatorname{rg} M \le \min(n,p)$.

وإذا استفدنا من خواص رتبة تطبيق خطّي حصلنا على النتيجة الآتية.

8-4.نتيجة : لتكن A من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$، و B من $\mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$. عندئذ

$$\operatorname{rg}(A\times B) \le \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$$

- فإذا كانت A قلوبة كان $\operatorname{rg}(A\times B) = \operatorname{rg} B$.
- وإذا كانت B قلوبة كان $\operatorname{rg}(A\times B) = \operatorname{rg} A$.

5. تغيير الأساس

1-5.مبرهنة. ليكن E فضاء شعاعيّاً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ أساساً للفضاء E . وأخيراً لتكن $P = (p_{ij})$ مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. حتى تكون جملة الأشعّة $\mathcal{A} = (a_1,\ldots,a_n)$، حيث $a_j = \sum_{i=1}^n p_{ij}e_i$، أساساً للفضاء E يلزم ويكفي أن تكون المصفوفةُ P قَلوبةً.

الإثبات

ليكن u التطبيق الخطّي من $\mathcal{L}(E)$ المعرّف بالشرط $\forall j \in \mathbb{N}_n,\ u(e_j) = a_j$. عندئذ يكون $P = \operatorname{mat}\big(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}\big)$. ومن ثَمّ تكون لدينا التكافؤات الآتية.

$$(P \text{ قَلوبة}) \Leftrightarrow (n = \operatorname{rg} P) \Leftrightarrow (n = \operatorname{rg} u) \Leftrightarrow (E \text{ تولِّد } \mathcal{A}) \Leftrightarrow (E \text{ أساس في } \mathcal{A})$$

وهذا يثبت المطلوب. ❐

5-2. **تعريف**. ليكن E فضاء شعاعيّاً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً للفضاء E، وليكن $\mathcal{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ أساساً آخر للفضاء E . نسمّي **مصفوفة الانتقال** من $\mathcal{E}$ إلى $\mathcal{E}'$، مصفوفة التطبيق المطابق I_E، من الفضاء E مزوّداً بالأساس $\mathcal{E}'$ إلى الفضاء نفسه مزوّداً بالأساس $\mathcal{E}$، أي $(E, \mathcal{E}') \xrightarrow{I_E} (E, \mathcal{E})$. ونرمز إلى هذه المصفوفة بالرمز $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$، فيكون $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \operatorname{mat}(I_E, \mathcal{E}', \mathcal{E})$.

5-3. **مبرهنة**. ليكن E فضاء شعاعيّاً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً للفضاء E، وليكن $\mathcal{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ أساساً آخر للفضاء E . عندئذ أيّاً كان x من E كان

$$X = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \times X'$$

وقد كتبنا $X = {}^t[\xi_1, \ldots, \xi_n] \in \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K})$ دلالة على شعاع مركّبات x في الأساس $\mathcal{E}$، أي $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ ، و $X' = {}^t[\xi'_1, \ldots, \xi'_n] \in \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K})$ دلالة على شعاع مركّبات العنصر x أيضاً في الأساس $\mathcal{E}'$، أي $x = \sum_{i=1}^{n} \xi'_i e'_i$.

الإثبات

لتكن $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = (p_{ij})$ ، عندئذ يكون

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$$

ومن ثَمّ

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} \xi'_j (\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \xi'_j) e_i$$

ولأنّه لدينا أيضاً $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ ، ينتج أنّ

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \xi_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \xi'_j$$

وهذا يُكافئ المساواة $X = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \times X'$ المطلوبة. ❐

5-4. **ملاحظة**. لمّا كان $\mathcal{E}$ و $\mathcal{E}'$ أساسين للفضاء E كان التطبيقان الخطيان الآتيان تقابلين.

$$\Phi_{\mathcal{E}} : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \to E, \quad {}^t[\xi_1,\ldots,\xi_n] \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$
$$\Phi_{\mathcal{E}'} : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \to E, \quad {}^t[\xi'_1,\ldots,\xi'_n] \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi'_i e'_i$$

ويمكننا التعبير عن المبرهنة السابقة بكتابة :

$$\forall x \in E, \quad \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}(x) = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \times \Phi_{\mathcal{E}'}^{-1}(x)$$

5-5. **مبرهنة**. ليكن E فضاء شعاعيّاً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. ولتكن $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ ثلاثة أساسات للفضاء E . عندئذ يكون $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}} = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \times P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}$.

الإثبات

إذا تأمّلنا المخطّط التبديلي الآتي

$$\begin{tikzcd} (E,\mathcal{E}) \arrow[r, "I_E"] & (E,\mathcal{F}) \\ (E,\mathcal{G}) \arrow[u, "I_E"] \arrow[ur, "I_E"'] & \end{tikzcd}$$

أمكننا أن نكتب $\mathrm{mat}(I_E,\mathcal{G},\mathcal{E}) = \mathrm{mat}(I_E,\mathcal{F},\mathcal{E}) \times \mathrm{mat}(I_E,\mathcal{G},\mathcal{F})$. وهذه هي المساواة المطلوبة. ❐

5-6. **مبرهنة**. ليكن E و F فضاءين شعاعيّين منتهيي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E}$ و $\mathcal{E}'$ أساسين للفضاء E، و $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}'$ أساسين للفضاء F. وأخيراً ليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E,F)$. عندئذ يكون

$$\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F}) = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'} \times \operatorname{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{F}') \times (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}$$

الإثبات

كما في المبرهنة السابقة، يكفي أن ننظر في المخطّط التبديلي الآتي

$$\begin{tikzcd} (E,\mathcal{E}) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "I_E^{-1}"'] & (F,\mathcal{F}) \\ (E,\mathcal{E}') \arrow[r, "u"] & (F,\mathcal{F}') \arrow[u, "I_F"'] \end{tikzcd}$$

فنجد المطلوب. ❐

5-7. **مبرهنة وتعريف**. نقول عن مصفوفتين A و B من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ إنّهما **متكافئتان** إذا وفقط إذا وُجِدَتْ مصفوفتان قَلوبتان P من $\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ و Q من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ تُحقّقان $B = QAP$، ونكتب في هذه الحالة $A \approx B$. وتكون العلاقة الثنائيّة الآتية

$$A \approx B \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K}), \exists Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \quad B = QAP$$

المعرّفة على عناصر $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$، علاقة تكافؤ على هذه المجموعة.

5-8. **مبرهنة**. لتكن A و B مصفوفتين من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$، عندئذ

$$A \approx B \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$$

الإثبات

إن الاقتضاء $(\Rightarrow)$ واضح استناداً إلى النتيجة 4-8.

وبالعكس، لتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ تُحقّق $\operatorname{rg} A = r$. وليكن U_A التطبيق الخطيّ القانوني الموافق للمصفوفة A أي

$$U_A : \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}), \quad X \mapsto A \times X$$

فإذا كان $\mathcal{E}_p$ و $\mathcal{E}_n$ الأساسين القانونيين في $\mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K})$ و $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ على التوالي، كان

$$A = \operatorname{mat}(U_A, \mathcal{E}_p, \mathcal{E}_n)$$

ولكن بمقتضى المبرهنة 3-3. يوجد أساسان $\mathcal{E}'_p$ و $\mathcal{E}'_n$ في $\mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K})$ و $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ على التوالي، يُحقّقان

$$J_{n,p,r} = \operatorname{mat}(U_A, \mathcal{E}'_p, \mathcal{E}'_n)$$

ومن ثَمّ، بالاستفادة من المبرهنة 5-6.، يكون

$$A = P_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}'_n} J_{n,p,r} (P_{\mathcal{E}_p}^{\mathcal{E}'_p})^{-1}$$

وهذا يُثبت أنّ $A \approx J_{n,p,r}$.

فإذا كان $\operatorname{rg} A = r = \operatorname{rg} B$ كان $A \approx J_{n,p,r} \approx B$. وهذا يُبرهن صحة الاقتضاء الثاني أي $(\Leftarrow)$. ❐

5-9. **مبرهنة وتعريف**. نقول عن مصفوفتين مربّعتين A و B من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ إنهما **متشابهتان** إذا وفقط إذا وُجِدَتْ مصفوفة قَلوبة P من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ تُحقّق $B = PAP^{-1}$ ، ونكتب في هذه الحالة $A \cong B$. وتكون العلاقة الثنائيّة المعرّفة بالعلاقة :

$$A \cong B \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \quad B = PAP^{-1}$$

علاقة تكافؤ على المجموعة $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5-10. **مبرهنة**. لتكن A و B مصفوفتين مربّعتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ولنفترض أنهما متشابهتان. عندئذ تتحقّق الخواص الآتية.

① إنّ المصفوفتين ${}^tA$ و ${}^tB$ متشابهتان.

② إنّ المصفوفتين A^m و B^m متشابهتان، وذلك أيّاً كانت m من $\mathbb{N}^*$.

③ وإذا كانت A قَلوبة كانت B قَلوبة وكانت المصفوفتان A^{-1} و B^{-1} متشابهتين.

الإثبات

إنّ إثبات هذه المبرهنة بسيط انطلاقاً من التعريف ونتركه تمريناً للقارئ. ❐

6. أثر مصفوفة وأثر تطبيق خطّي

1-6. تعريف. لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربّعة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. نسمّي العنصر $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ من $\mathbb{K}$ **أثر المصفوفة** A، ونرمز إليه بالرمز $\operatorname{tr} A$.

تلخّص المبرهنة الآتية خواص أثر مصفوفة.

2-6. مبرهنة

① إنّ التطبيق $\operatorname{tr}: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, A \mapsto \operatorname{tr} A$ شكلٌ خطيّ على $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

② أيّاً كانت A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، كان $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}({}^tA)$.

③ إنّ أثر المصفوفة الواحديّة يساوي n، أي $\operatorname{tr} I_n = n$.

④ أيّاً كانت A من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ و B من $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$، كان

$$\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$$

الإثبات

إنّ الخواصّ الثلاث الأولى واضحة من التعريف. لنثبت فقط الخاصة الرابعة.

لنضع $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ فيكون

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad [AB]_{ii} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{ji}$$

و

$$\forall j \in \mathbb{N}_p, \quad [BA]_{jj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} AB &= \sum_{i=1}^{n} [AB]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{ji}\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ji}\Big) = \sum_{j=1}^{p} [BA]_{jj} = \operatorname{tr} BA\end{aligned}$$

وهذا يُثبت المطلوب. ❐

تبيّن الخاصة التالية أنّ أثر المصفوفة هو الشكل الخطيّ الوحيد من $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$ الذي يُحقّق الشرطين ③ و ④ من المبرهنة السابقة.

3-6. **مبرهنة**. لنفترض أن العدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ يساوي 0. وليكن

$$\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

شكلاً خطيّاً على $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ يحقِّق الشرطين

$$\Phi(I_n) = n,$$

و

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad \Phi(AB) = \Phi(BA)$$

عندئذ يكون $\Phi = \mathrm{tr}$.

الإثبات

ليكن $(E_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ الأساس القانوني للفضاء $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. نترك القارئ يتحقق صحةَ الخاصّة الآتية :

$$\forall (i, j, k, \ell) \in \mathbb{N}_n^4, \quad E_{ij}E_{\ell k} = \delta_{\ell j}E_{ik}$$

حيث $\delta_{\alpha\beta}$ هو رمز كرونيكر. ومن ثَمّ، أيّاً كان الدليلان **المختلفان** i و j من $\mathbb{N}_n$، كان

$$E_{ij} = E_{i1}E_{1j} - E_{1j}E_{i1}$$

لذا يكون

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, i \neq j \Rightarrow \Phi(E_{ij}) = 0$$

ومن جهة أخرى، أيّاً كان الدليل j من $\mathbb{N}_n$، **المختلف** عن 1، كان

$$E_{jj} = E_{j1}E_{1j} - E_{1j}E_{1j}$$

إذن يكون

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad \Phi(E_{jj}) = \Phi(E_{11})$$

فإذا عرّفنا $\lambda = \Phi(E_{11})$ ووضعنا $\Psi = \Phi - \lambda \cdot \mathrm{tr}$، كان لدينا استناداً إلى ما سبق

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad \Psi(E_{ij}) = 0$$

نستنتج من ذلك أنّ $\Psi = 0$ أو أنّ $\Phi = \lambda \cdot \mathrm{tr}$.

ولمّا كان $\Phi(I_n) = n$ أمكننا حساب λ لنجد $\lambda = 1$. وهنا نستفيد من كوْن العدد المميّز للحقل $\mathbb{K}$ يساوي 0. في الحقيقة يكفي ألاّ يقسمَ العددُ المميِّزُ للحقلِ $\mathbb{K}$ العددَ n. وبذلك يكتمل الإثبات. ❐

4-6. **مبرهنة**. لتكن A و B مصفوفتين مربّعتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ولنفترض أنهما متشابهتان. عندئذ يكون $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.

الإثبات

توجد بمقتضى الفرْض مصفوفة قَلوبة P من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ تُحقّق $A = P\,B\,P^{-1}$. لذا

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(P\,B\,P^{-1}) = \operatorname{tr}(P^{-1}\,P\,B) = \operatorname{tr}(I_n B) = \operatorname{tr} B \qquad \square$$

5-6. **مبرهنة وتعريف**. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن التطبيق الخطيّ u من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ لا يتعلّق المقدار $\operatorname{tr}(\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E}))$ بالأساس المُختار $\mathcal{E}$ للفضاء E. لذلك نسمّيه **أثر التطبيق الخطي** u ونرمز إليه بالرمز $\operatorname{tr} u$.

الإثبات

ليكن $\mathcal{E}'$ أساساً آخر للفضاء E، ولنضع $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$. فيكون، بمقتضى المبرهنة 5-6،

$$\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E}) = P\operatorname{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}')\,P^{-1}$$

ينتج من ذلك أنّ $\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E}) \cong \operatorname{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}')$، ومن ثَمّ يكون

$$\operatorname{tr}\left(\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})\right) \cong \operatorname{tr}\left(\operatorname{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}')\right)$$

وهو المطلوب إثباته. $\square$

نستنتج من التعريف السابق ومن خواص أثر المصفوفة النتيجة الآتية.

6-6. **مبرهنة** : ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$.

① إنّ التطبيق $\operatorname{tr} : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K},\quad u \mapsto \operatorname{tr} u$ شكلٌ خطيّ على $\mathcal{L}(E)$.

② أيّاً كان u من $\mathcal{L}(E)$، لدينا $\operatorname{tr} u = \operatorname{tr} {}^t u$.

③ إنّ أثر التطبيق المطابق يساوي $\dim E$، أي $\operatorname{tr} I_E = \dim E$.

④ أيّاً كان u و v من $\mathcal{L}(E)$، لدينا $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.

⑤ إذا كان p إسقاطاً[1] للفضاء E، كان $\operatorname{rg} p = \operatorname{tr} p$.

[1] أي $p \in \mathcal{L}(E)$ ويحقّق $p \circ p = p$.

تمرينات

التمرين 1. لتكن $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ مصفوفة ثوابتها في حلقة تبديلية A . أثبت أن

$$M^2-(a+d)M+(ad-bc)I_2=0$$

الحل

في الحقيقة، لدينا

$$\begin{aligned}\big(M-(a+d)I_2\big)M&=\begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{bmatrix}=-(ad-bc)I_2\end{aligned}$$

وهي النتيجة المطلوبة. وبوجه خاص

$$\forall M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{K}),\ M^2\in\operatorname{vect}(I,M)$$

■

التمرين 2. لنتأمّل المجموعة $\mathcal{D}$ المكوّنة من المصفوفات $A=(a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ التي تُحقِّق الشرطين

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2, a_{ij}\geq 0 \quad \text{و} \quad \forall i\in\mathbb{N}_n,\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=1$$

① أثبت أنّ المجموعة $\mathcal{D}$ مغلقة بالنسبة إلى عملية ضرب المصفوفات.

② عيِّن المصفوفات A من $\mathcal{D}\cap\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ التي تُحقِّق $A^{-1}\in\mathcal{D}$.

الحل

لنرمز بالرمز $\mathbb{1}$ إلى الشعاع من $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ الذي تساوي جميع مركّباته الواحد. عندئذ تنتمي المصفوفة $A=(a_{ij})$ إلى $\mathcal{D}$ إذا وفقط إذا كان $\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2, a_{ij}\geq 0$ و $A\mathbb{1}=\mathbb{1}$.

① فإذا كانت A و B مصفوفتين من $\mathcal{D}$ كان من الواضح أنّ أمثال AB موجبة، وكان

$$(AB)\mathbb{1}=A(B\mathbb{1})=A\mathbb{1}=\mathbb{1}$$

إذن $AB\in\mathcal{D}$.

② لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة قلوبة من $\mathcal{D}$ ولنفترض أنّ مقلوبها $B=A^{-1}=(b_{ij})$ ينتمي إلى $\mathcal{D}$. نستنتج من المساواة $AB=I_n$ أنّه في حالة $t\neq s$ يكون $\sum_{k=1}^{n} a_{sk}b_{kt}=0$ ولكنّ جميع حدود هذا المجموع موجبة، إذن لقد أثبتنا أنّ

$$(*)\quad \forall(s,t)\in\mathbb{N}_n^2,\quad (s\neq t)\Rightarrow(a_{s1}b_{1t}=a_{s2}b_{2t}=\cdots=a_{sn}b_{nt}=0)$$

ليكن j عنصراً من $\mathbb{N}_n$. بالطبع لا يمكن أن تكون الجملة $(a_{ij})_{i\in\mathbb{N}_n}$ معدومة، وإلاّ ما كانت A قلوبة. إذن المجموعة $C_j=\{i\in\mathbb{N}_n : a_{ij}\neq 0\}$ غير خالية. لنفترض أنّ s و t عنصران من C_j. عندئذ بالاستفادة من الخاصّة $(*)$ نرى أنّ

$$\begin{aligned} a_{tj}\neq 0 &\Rightarrow \forall k\in\mathbb{N}_n\backslash\{t\},\quad b_{jk}=0\\ a_{sj}\neq 0 &\Rightarrow \forall k\in\mathbb{N}_n\backslash\{s\},\quad b_{jk}=0\end{aligned}$$

فإذا كان $s\neq t$ كان $b_{jk}=0$ أيّاً كان k من $(\mathbb{N}_n\backslash\{t\})\cup(\mathbb{N}_n\backslash\{s\})=\mathbb{N}_n$ وهذا يناقض كون المصفوفة B قَلوبَة. إذن يجب أن يكون $s=t$، وبذلك نكون قد أثبتنا أنّ $\operatorname{card}(C_j)=1$. لنرمز إذن $\sigma(j)$ إلى العنصر الوحيد في C_j، ولنضع $a_{\sigma(j)j}=\lambda_j$ فيكون

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\quad a_{ij}=\lambda_j\delta_{i\sigma(j)}$$

وقد استعملنا الرمز $\delta_{\alpha\beta}$ دلالةً على رمز كرونكر المعروف.

إذا كان $j_1\neq j_2$ وافترضنا أنّ $\sigma(j_1)=\sigma(j_2)$ كان العمودان $C_{j_1}(A)$ و $C_{j_2}(A)$ مرتبطين خطيّاً، وهذا يناقض كون المصفوفة A قَلوبةً. إذن يجب أن يكون التطبيق $\sigma:\mathbb{N}_n\to\mathbb{N}_n$ متبايناً، فهو إذن تبديل على المجموعة $\mathbb{N}_n$.

لقد أثبتنا أنّه إذا كانت A مصفوفة قلوبة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ وكانت أمثال كلٍّ من A و A^{-1} موجبة، وُجدت أعداد $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ من $(\mathbb{R}_+^*)^n$ ووُجِد تبديل σ في $\mathcal{S}_n$ تُحقّق $A=(\lambda_j\delta_{i\sigma(j)})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$. والعكس صحيح وضوحاً إذ إنّ مقلوب المصفوفة $A=(\lambda_j\delta_{i\sigma(j)})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ هو $\left(\lambda_i^{-1}\delta_{i\sigma^{-1}(j)}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$.

فإذا اشترطنا أن تكون A مصفوفة قلوبة من $\mathcal{D}$ وأن تنتمي A^{-1} أيضاً إلى $\mathcal{D}$، استنتجنا أنّ للمصفوفة A الصيغة $A=(\lambda_j\delta_{i\sigma(j)})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$، واستنتجنا من كون $A\mathbb{1}=\mathbb{1}$ أنّ $\forall j\in\mathbb{N}_n,\ \lambda_j=1$. إذن يوجد تبديل σ في $\mathcal{S}_n$ يحقّق $A=(\delta_{i\sigma(j)})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$.

وبالعكس، تكون كلُّ مصفوفة من هذا الشكل قلوبة وتنتمي هي ومقلوبها إلى $\mathcal{D}$. ■

التمرين 3. نقول إنّ المصفوفة $A=(a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **متناظرة مركزيّاً** إذا وفقط إذا حقّقت الشرط : $\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\quad a_{ij}=a_{n+1-i,n+1-j}$.

① لتكن $P=\left(\delta_{i,n+1-j}\right)$ المصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، التي جميع ثوابتها أصفار ما عدا تلك التي تقع على القطر الثانوي فتساوي الواحد. أثبت أنّ A متناظرة مركزيّاً إذا وفقط إذا كان $PA=AP$.

② أثبت أنّ جداء ضرب مصفوفتين متناظرتين مركزيّاً هو مصفوفة متناظرة مركزيّاً.

③ أثبت أنّ مقلوب مصفوفة قَلوبة متناظرة مركزيّاً هو مصفوفة متناظرة مركزيّاً.

الحل

① لتكن المصفوفة $A=(a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. عندئذ نجد بحساب مباشر أنّ

$$\begin{aligned}[AP]_{ij}&=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\delta_{n+1-k,j}=a_{i,n+1-j}\\ [AP]_{ij}&=\sum_{k=1}^{n}\delta_{n+1-i,k}a_{kj}=a_{n+1-i,j}\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}AP=PA&\Leftrightarrow\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\quad [PA]_{n+1-i,j}=[AP]_{n+1-i,j}\\ &\Leftrightarrow\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\quad a_{ij}=a_{n+1-i,n+1-j}\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ التكافؤ المطلوب.

② لتكن A و B مصفوفتين متناظرتين مركزيّاً من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. عندئذ

$$(AB)P=A(BP)=A(PB)=(AP)B=(PA)B=P(AB)$$

وهذا يثبتُ أنّ AB مصفوفة متناظرة مركزيّاً أيضاً.

③ لتكن A مصفوفةً قلوبةً متناظرة مركزيّاً من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. عندئذ بضرب طرفي المساواة $AP = PA$ بالمقدار A^{-1} من الطرفين نجد $A^{-1}(AP)A^{-1} = A^{-1}(PA)A^{-1}$ أو $A^{-1}P = PA^{-1}$. فالمصفوفة A^{-1} متناظرة مركزيّاً أيضاً. ■

ملاحظة. يمكن أن نثبت أنّ مجموعة المصفوفات المتناظرة مركزيّاً في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ، تكوّن فضاءً جزئيّاً من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ بُعده $\left\lfloor \frac{n^2+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$.

التمرين 4. ليكن α و β عددين حقيقيين مختلفين، ولتكن M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة تحقّق

$$M^2 - (\alpha+\beta)M + \alpha\beta I_n = 0, \quad M \neq \alpha I_n, \quad M \neq \beta I_n$$

1. أثبت أن بُعد الفضاء الشعاعي الجزئي $V(M) = \mathrm{vect}(M, I_n)$ يساوي 2 .

2. أثبت أنه لا توجد في $V(M)$ إلاّ مصفوفتان مختلفتان A و B تحققان الشروط
$A^2 = A ,\ A \notin \{0, I_n\}$ و $B^2 = B ,\ B \notin \{0, I_n\}$.
ثم أثبت أن $AB = BA = 0$ وأن (A, B) أساس للفضاء $V(M)$.

3. أثبت أنّ $V(M)$ جبر جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ، وأنّه إذا كانت C من $V(M)$ مصفوفة قلوبة كان C^{-1} عنصراً من $V(M)$.

الحل

1. لنثبت أنّ الجملة (M, I_n) جملة حرّة. في الحقيقة، لنفترض أنّ $\lambda M + \mu I_n = 0$.

- إذا كانت $\lambda \neq 0$ ، عرّفنا $\kappa = -\frac{\mu}{\lambda}$. وعندئذ يكون $M = \kappa I_n$ وبالتعويض في العلاقة
$$M^2 - (\alpha+\beta)M + \alpha\beta I_n = 0$$
نستنتج أنّ κ جذرٌ لكثير الحدود $X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta = (X-\alpha)(X-\beta)$ ، أي إنّ $M = \alpha I_n$ أو $M = \beta I_n$ وهذا يُخالف الفرْض.
- إذن يجب أن يكون $\lambda = 0$ ، وعندئذ نستنتج من المساواة $\lambda M + \mu I_n = 0$ أنّ $\mu = 0$ أيضاً.

بذلك نكون قد أثبتنا أنّ الجملة (M, I_n) أساسٌ للفضاء $V(M)$ وأنّ $\dim V(M) = 2$.

2. لتكن C مصفوفة من $V(M)$ عندئذ يوجد عددان λ و μ يُحقِّقان $C = \lambda M + \mu I_n$.
وعندئذ يكون

$$\begin{aligned}
C^2 - C &= (C - I_n)C = \big(\lambda M + (\mu - 1)I_n\big)\big(\lambda M + \mu I_n\big)\\
&= \lambda^2 M^2 + \big(\mu\lambda + (\mu-1)\lambda\big)M + \mu(\mu-1)I_n\\
&= \lambda^2\big((\alpha+\beta)M - \alpha\beta I_n\big) + \lambda(2\mu-1)M + \mu(\mu-1)I_n\\
&= \lambda\big(\lambda(\alpha+\beta) + 2\mu - 1\big)M + \big(\mu(\mu-1) - \lambda^2\alpha\beta\big)I_n
\end{aligned}$$

وعليه، لأنّ الجملة (M, I_n) جملة حرّة، نستنتج أنّ

$$C^2 = C \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(\lambda(\alpha+\beta) + 2\mu - 1) = 0\\ \mu(\mu-1) - \lambda^2\alpha\beta = 0\end{cases}$$

فإذا كان $\lambda = 0$ استنتجنا من المعادلة الثانية أنّ $\mu \in \{0,1\}$، ومن ثَمّ أنّ $C \in \{0, I_n\}$.
وعليه

$$\begin{aligned}
(C^2 = C) \wedge (C \notin \{0, I_n\}) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu - 1 = -\lambda(\alpha+\beta)\\ (2\mu-1)^2 = 4\lambda^2\alpha\beta + 1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \dfrac{1 - \lambda(\alpha+\beta)}{2}\\ \lambda^2(\alpha-\beta)^2 = 1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow (\lambda,\mu) \in \left\{\left(\frac{1}{\alpha-\beta}, \frac{-\beta}{\alpha-\beta}\right), \left(\frac{1}{\beta-\alpha}, \frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)\right\}\\
&\Leftrightarrow C \in \left\{\frac{1}{\alpha-\beta}(M - \beta I_n), \frac{1}{\beta-\alpha}(M - \alpha I_n)\right\}
\end{aligned}$$

نعرّف إذن $A = \dfrac{1}{\beta-\alpha}(M - \alpha I_n)$ و $B = \dfrac{1}{\alpha-\beta}(M - \beta I_n)$ فيكون

$$\big\{C \in V(M) : C^2 = C\big\} = \big\{0, I_n, A, B\big\}$$

ونلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
AB = BA &= -\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}(M - \alpha I_n)(M - \beta I_n)\\
&= -\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\Big(M^2 - (\alpha+\beta)M + \alpha\beta I_n\Big) = 0
\end{aligned}$$

وكذلك فإنّ الجملة (A,B) جملة حرّة، لأنّه إذا كان $aA+bB=0$ استنتجنا، بضرب طرفي هذه المساواة بالمصفوفة A أنّ $aA=0$، ومن ثمّ $a=0$ لأنّ $A\neq 0$. وهذا بدوره يقتضي أنّ $b=0$. ولمّا كان بُعد الفضاء $V(M)$ يساوي 2 استنتجنا أنّ (A,B) أساس للفضاء $V(M)$.

3. يكفي لإثبات أنّ $V(M)$ جبرٌ جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ أن نلاحظ أنّ $I_n\in M$ وأنّ جداء ضرب عنصرين من $V(M)$ ينتمي إلى $V(M)$، وهذا في الحقيقة أمرٌ بسيط إذا لاحظنا مثلاً أنّ

$$\big(aA+bB\big)\big(a'A+b'B\big)=aa'A+bb'B$$

وأخيراً لتكن $C=aA+bB$ مصفوفة ما من $V(M)$. ولنفترض أنّ C مصفوفة قلوبة. عندئذ يجب أن يكون $a\neq 0$ و $b\neq 0$، لأنّ كلاً من A و B غير قَلوبة. فإذا عرّفنا $C'=\frac{1}{a}A+\frac{1}{b}B$ كان لدينا وضوحاً

$$CC'=C'C=A+B=I_n$$

إذن $C^{-1}=C'\in V(M)$. وبذا يتمّ إثبات المطلوب. ■

التمرين 5. لتكن A و B المصفوفتين من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ المعرّفتين كما يلي:

$$A=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

ولتكن المجموعة

$$\mathcal{H}=\left\{xA+yB\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}):(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1. احسب $(A+B)^n$ أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$.
2. أثبت أن عناصر $\mathcal{H}$ ليست قلوبة في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. أثبت أن البنية $(\mathcal{H},+,\times)$، إذ يمثّل $+$ و $\times$ جمع وضرب المصفوفات في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$، حقلٌ. عيّن حيادي الضرب وأثبت أن هذا الحقل يشاكل تقابلياً حقل الأعداد العقدية $\mathbb{C}$.

الحل

1. لنضع $K = A + B$ ولنلاحظ أنّ

$$K = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

نجد بحساب بسيط أنّ $K^2 = -3K$ ، وهذا يتيح لنا أن نثبت بالتدريج على العدد n أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K^n = (-3)^{n-1}K$$

2. لنعرّف الشعاع $e = {}^t[1, 1, 1]$. عندئذ نلاحظ أنّ $Ae = 0$ و $Be = 0$. إذن

$$\forall M \in \mathcal{H}, \quad Me = 0$$

وهذا بالطبع يُثبتُ أنّ $\mathcal{H} \cap \mathcal{GL}(\mathbb{R}^3) = \varnothing$.

3. نجري في هذا السؤال بعض الحسابات على المصفوفات، ومن المناسب أن نعرّف المصفوفة P الآتية:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

فيكون $A = P - I$ و $B = P^2 - I$. وأخيراً نعرّف

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= -\frac{1}{3}(A + B) &&= \frac{1}{3}(2I - P - P^2) \\ \mathbb{J} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(A - B) &&= \frac{1}{\sqrt{3}}(P - P^2) \end{aligned}$$

من الواضح أنّ $\mathcal{H} = \mathrm{vect}(\mathbb{1}, \mathbb{J})$. كذلك نلاحظ مباشرة استناداً إلى الطلب الأوّل أنّ $\mathbb{1}^2 = \mathbb{1}$ ، وأنّ

$$\mathbb{1}\mathbb{J} = \mathbb{J}\mathbb{1} = \frac{1}{3\sqrt{3}}(2I - P - P^2)(P - P^2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(P - P^2) = \mathbb{J}$$

و

$$\mathbb{J}^2 = \frac{1}{3}(P - P^2)^2 = \frac{1}{3}(P^2 + P - 2I) = -\mathbb{1}$$

لنتأمّل إذن التقابل الخطّي Φ بين الفضاءَين الشعاعيين $\mathbb{C}$ و $\mathcal{H}$ على الحقل $\mathbb{R}$ المعطى كما يأتي :

$$\Phi : \mathbb{C} \to \mathcal{H}, \quad \Phi(x + y\,\mathrm{i}) = x \cdot \mathbb{1} + y \cdot \mathbb{J}$$

كما نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\Phi(x+y\,\mathrm{i})\Phi(x'+y'\,\mathrm{i}) &= (x\mathbb{1}+y\mathbb{J})\times(x'\mathbb{1}+y'\mathbb{J})\\ &= (xx'-yy')\mathbb{1}+(xy'-yx')\mathbb{J}\\ &= \Phi\big((x+y\,\mathrm{i})(x'+y'\,\mathrm{i})\big)\end{aligned}$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أنّ $\mathcal{H}$ مغلق بالنسبة إلى ضرب المصفوفات، وأنّ التطبيق Φ هو، في آن معاً، تقابلٌ وتشاكلٌ بين الحقل $\big(\mathbb{C},+,\times\big)$ والبنية $\big(\mathcal{H},+,\times\big)$ فهي إذن حقلٌ يشاكل تقابليّاً حقل الأعداد العقديّة. وحيادي الضرب في $\big(\mathcal{H},+,\times\big)$ هو $\mathbb{1}$. ■

التمرين 6. ليكن الفضاء الشعاعي $E=\mathcal{M}_{p\times1}(\mathbb{R})$ حيث $p\geq 2$. وليكن u من $\mathcal{L}(E)$ التطبيق الخطّي الذي يقرن بكلّ شعاعٍ $X={}^t[x_1,\ldots,x_p]$ من الفضاء E، الشعاع $u(X)=Y={}^t[y_1,\ldots,y_p]$ من E، المعرّف كما يلي :

$$\forall i\in\mathbb{N}_p,\qquad y_i=\frac{1}{p-1}\sum_{j\in\mathbb{N}_p\setminus\{i\}}x_j$$

1. عيّن $A=\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})$، و $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_p)$ هو الأساس القانوني في E.
2. لتكن I المصفوفة الواحديّة في $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$، ولتكن J المصفوفة في $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ التي جميع ثوابتها تساوي 1.
   ① احسب J^n في حالة n من $\mathbb{N}$.
   ② أثبت أنه أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$، توجد ثنائية (a_n,b_n) يطلب تعيينها تحقّق
   $$A^n=a_nA+b_nI$$
   ③ أثبت أن A قَلوبة واحسب A^{-1}.
   ④ أثبت أنه يوجد (λ_1,λ_2) في $\mathbb{R}^2$، تُحقّق $(A-\lambda_1I)(A-\lambda_2I)=0$.
3. لتكن $C=\dfrac{p-1}{p}A+\dfrac{1}{p}I$. أثبت أنّ C مصفوفة لإسقاط q في الأساس $\mathcal{E}$. عيّن كلاً من $E_1=\mathrm{Im}\,q$ و $E_2=\ker q$، ثم عيّن أساساً $\mathcal{F}$ للفضاء E تكون عنده المصفوفة $\tilde{A}=\mathrm{mat}(u,\mathcal{F},\mathcal{F})$ مصفوفة قطريّة، وعيّن مصفوفة قَلوبة Q تُحقّق $A=Q\,\tilde{A}\,Q^{-1}$.

الحل

1. في الحقيقة نجد مباشرة أنّ

$$A = \frac{1}{p-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

①.2 نلاحظ أولاً أنّ $J^2 = pJ$ وينتج من ذلك أنّ $\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = p^{n-1}J$.

②.2 نلاحظ أنّ $(p-1)A = J - I$، ولأنّ المصفوفتين I و J تتبادلان استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned} (p-1)^n A^n &= (J-I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} J^k \\ &= (-1)^n I + \frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} p^k\right) J \\ &= (-1)^n I + \frac{(p-1)^n - (-1)^n}{p} J \end{aligned}$$

وأخيراً

$$(p-1)^n A^n = (-1)^n I + \frac{(p-1)^n - (-1)^n}{p}\big(I + (p-1)A\big)$$

ومنه

$$A^n = \underbrace{\left(\frac{1}{p} + \frac{(-1)^n}{p(p-1)^{n-1}}\right)}_{a_n} I + \underbrace{\left(\frac{p-1}{p} - \frac{(-1)^n}{p(p-1)^{n-1}}\right)}_{b_n} A$$

③.2 وبوجه خاص، نجد في حالة $n = 2$ أنّ

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p(p-1)}\right) I + \left(\frac{p-1}{p} - \frac{1}{p(p-1)}\right) A \\ &= \frac{1}{p-1} I + \frac{p-2}{p-1} A \end{aligned}$$

ومنه $\big((p-1)A - (p-2)I\big)A = I$. إذن المصفوفة A قَلوبة، ولدينا

$$A^{-1} = (p-1)A - (p-(p-2))I$$

④.2 لقد رأينا أنّ $(p-1)A^2-(p-2)A-I=0$ وهذا يُكافئ

$$\big((p-1)A+I\big)\big(A-I\big)=0$$

ومنه

$$\left(A+\frac{1}{p-1}I\right)\big(A-I\big)=0$$

إذن يكفي أن نعرّف $\lambda_1=-\frac{1}{p-1}$ و $\lambda_2=1$ لنجد المطلوب.

3. لتكن $C=\frac{p-1}{p}A+\frac{1}{p}I=\frac{1}{p}J$. عندئذ نرى مباشرة أنّ $C^2=C$ وهذا يُثبتُ أنّ التطبيق الخطّي q الذي مصفوفته C ، بالنسبة إلى الأساس القانوني، هو إسقاطٌ خطّي.

وإذا عرّفنا الشعاع $\mathbb{1}={}^t[1,1,\ldots,1]$ لاحظنا أنّ $C=\frac{1}{p}\mathbb{1}\times{}^t\mathbb{1}$ ، وعليه

$$\forall X\in\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R}),\quad CX=\frac{1}{p}({}^t\mathbb{1}X)\mathbb{1}$$

وهذا يثبتُ أنّ

$$E_1=\operatorname{Im}q=\mathbb{R}\mathbb{1} \text{ و } E_2=\ker q=\left\{X\in\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R}):{}^t\mathbb{1}X=0\right\}$$

ليكن إذن الأساس $\mathcal{F}=(f_1,f_2,\ldots,f_p)$ للفضاء E المعرّف بدلالة الأساس القانوني $\mathcal{E}$ كما يأتي :

$$f_p=\sum_{j=1}^{p}e_j=\mathbb{1},\quad\forall k\in\mathbb{N}_{p-1},\quad f_k=e_k-e_{k+1}$$

فيكون $E_1=\operatorname{vect}(f_p)$ و $E_2=\operatorname{vect}(f_1,\ldots,f_{p-1})$.

وبالاستفادة من كون $q=\frac{p-1}{p}u+\frac{1}{p}I$ نجد

$$\forall k\in\mathbb{N}_p,\quad u(f_k)=\frac{p}{p-1}q(f_k)-\frac{1}{p-1}f_k$$

ومنه

$$u(f_p)=f_p,\quad\forall k\in\mathbb{N}_{p-1},\quad u(f_k)=-\frac{1}{p-1}f_k$$

فيكون

$$\widetilde{A} = \mathrm{mat}(u,\mathcal{F},\mathcal{F}) = \frac{1}{p-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & p-1 \end{bmatrix}$$

وإذا تأمّلنا المخطّط التبديلي المجاور استنتجنا أنّ

$$\begin{array}{ccc} (E,\mathcal{E}) & \xrightarrow{u} & (E,\mathcal{E}) \\ {\scriptstyle I^{-1}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle I} \\ (E,\mathcal{F}) & \xrightarrow{u} & (E,\mathcal{F}) \end{array}$$

$$A = Q\widetilde{A}Q^{-1}$$

حيث $Q = \mathrm{mat}(I,\mathcal{F},\mathcal{E})$. أي

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 7. ليكن u التطبيق الخطّي من $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ الذي تعطى مصفوفته بالنسبة إلى الأساس القانوني $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ كما يلي :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

اكتب المصفوفة $M' = \mathrm{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}')$ في حالة $\mathcal{E}' = (e_1', e_2', e_3')$ هو الأساس المعرّف كما يلي :

$$e_1' = e_1 + e_2 + e_3, \quad e_2' = e_2 + e_3, \quad e_3' = e_3$$

الحل

1. لدينا

$$\begin{aligned} u(e_1) &= e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ u(e_2) &= 2e_1 + 3e_2 + e_3 \\ u(e_3) &= 3e_1 + e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

ونجد بحساب بسيط أنّ

$$\begin{aligned} u(e'_1) &= 6e'_1 \\ u(e'_2) &= 5e'_1 - e'_2 - e'_3 \\ u(e'_3) &= 3e'_1 - 2e'_2 + e'_3 \end{aligned}$$

إذن

$$\mathrm{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}') = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 8. ليكن الفضاء الشعاعي $E = \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$، حيث $n \geq 2$. وليكن σ من $\mathcal{S}_n$ تبديلاً على المجموعة $\mathbb{N}_n$. ولننظر في التطبيق الخطّي p_σ من $\mathcal{L}(E)$ الذي يقرن بكلّ شعاع $X = {}^t[x_1, \ldots, x_n]$ الشعاع $p_\sigma(X) = {}^t[x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}]$.

1. عبّر باستعمال رمز كرونيكر عن المصفوفة $P_\sigma = \mathrm{mat}(p_\sigma, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = (a^\sigma_{ij})_{ij}$. في حالة $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ هو الأساس القانوني في E.
2. لتكن $M = (m_{ij})_{ij}$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، احسب $P_\sigma M$ و $M P_\sigma$ و $P_\sigma M P_\sigma^{-1}$.
3. استنتج أن المصفوفتين التاليتين متشابهتان :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

الحل

1. لمّا كان الشعاع e_j من الأساس القانوني في E هو $e_j = {}^t[\delta_{1j},\dots,\delta_{nj}]$ استنتجنا أنّ $p_\sigma(e_j)$ هو الشعاع $e_{\sigma^{-1}(j)}$، وعليه فإنّ مصفوفة p_σ بالنسبة إلى الأساس القانوني هي $P_\sigma = (a_{ij}^\sigma)$ حيث

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad a_{ij}^\sigma = \delta_{\sigma(i)j}$$

2. لتكن $M = (m_{ij})_{ij}$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. عندئذ

$$[P_\sigma M]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{\sigma(i)k} m_{kj} = m_{\sigma(i)j}$$

$$[M P_\sigma]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \delta_{\sigma(k)j} = m_{i\sigma^{-1}(j)}$$

وبوجه خاص، إذا كان σ و σ' تبديلين من $\mathcal{S}_n$ كان $P_{\sigma'} = (\delta_{\sigma'(i)j})$ ومن ثَمّ

$$[P_\sigma P_{\sigma'}]_{ij} = \delta_{\sigma'\circ\sigma(i)j} = [P_{\sigma'\circ\sigma}]_{ij}$$

إذن نستنتج بوجه خاص أنّ $P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^{-1}$. ومنه، نجد مباشرة أنّ

$$[P_\sigma M P_\sigma^{-1}]_{ij} = m_{\sigma(i)\sigma(j)}$$

3. فإذا عرّفنا التبديل $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$، والمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ كان لدينا

$$P_\sigma A P_\sigma^{-1} = B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

وعليه فإنّ المصفوفتين A و B متشابهتان. ∎

التمرين 9. ليكن الشعاعان $X = {}^t[x_1, \ldots, x_n]$ و $Y = {}^t[y_1, \ldots, y_n]$ من $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$، نفترض أنّ

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1 \text{ و } \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 1 \text{ و } \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \theta$$

ونعرّف المصفوفة $M = aX \cdot {}^tX + bY \cdot {}^tY$ حيث (a, b) من $\mathbb{R}^2$. أثبت أنه يوجد عددان λ و μ يُحقّقان $M^3 + \lambda M^2 + \mu M = 0$.

ادرس حالة المصفوفة $M = (m_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ المعرّفة كما يلي :

$$m_{ij} = \begin{cases} \alpha & : \quad i + j = 0 \bmod 2 \\ \beta & : \quad i + j = 1 \bmod 2 \end{cases}$$

الحل

1. لنعرّف $A = X \cdot {}^tX$ و $B = Y \cdot {}^tY$. ولنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
A^2 &= X \cdot \underbrace{{}^tX \cdot X}_{1} \cdot {}^tX &&= X \cdot {}^tX &&= A,\\
B^2 &= Y \cdot \underbrace{{}^tY \cdot Y}_{1} \cdot {}^tY &&= Y \cdot {}^tY &&= B\\
AB &= X \cdot \underbrace{{}^tX \cdot Y}_{\theta} \cdot {}^tY &&= \theta X \cdot {}^tY,\\
BA &= Y \cdot \underbrace{{}^tY \cdot X}_{\theta} \cdot {}^tX &&= \theta Y \cdot {}^tX.
\end{aligned}$$

وأخيراً نستنتج مما سبق أنّ

$$ABA = \theta^2 A \text{ و } BAB = \theta^2 B.$$

ولمّا كان $M = aA + bB$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}
M^2 &= (aA + bB)(aA + bB) = a^2A + b^2B + ab(AB + BA)\\
M^3 &= (a^2A + b^2B + ab(AB + BA))(aA + bB)\\
&= a^3A + b^3B + (a^2b + ab^2)(AB + BA) + a^2bABA + ab^2BAB\\
&= (a^3 + a^2b\theta^2)A + (b^3 + ab^2\theta^2)B + ab(a + b)(AB + BA)
\end{aligned}$$

وعليه نرى أنّ

$$M^3 - (a + b)M^2 = ab(\theta^2 - 1)(aA + bB) = ab(\theta^2 - 1)M$$

وأخيراً

$$M^3 - (a+b)M^2 + ab(1-\theta^2)M = 0$$

2. لندرس حالة المصفوفة $M = (m_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ المعرّفة كما يأتي :

$$m_{ij} = \begin{cases} \alpha & : \quad i+j = 0 \bmod 2 \\ \beta & : \quad i+j = 1 \bmod 2 \end{cases}$$

نلاحظ مباشرة أنّ

$$m_{ij} = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}(-1)^{i+j}$$

فإذا عرّفنا الشعاعين X و Y كما يلي :

$$X = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } Y = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ (-1)^n \end{bmatrix}$$

ووضعنا $a = n\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ و $b = n\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ كان

$$M = aX\cdot {}^tX + bY\cdot {}^tY$$

ونلاحظ مباشرة أنّ

$${}^tX\cdot X = 1, \quad {}^tY\cdot Y = 1, \quad {}^tY\cdot X = \frac{(-1)^n - 1}{2n}$$

إذن في هذه الحالة لدينا

$$M^3 - n\alpha M^2 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4}\left(n^2 - \frac{1-(-1)^n}{2}\right)M = 0$$

وبصيغة مُكافئة

$$M^3 - n\alpha M^2 + \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\left(n - \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor M = 0$$

وهي الصيغة المرجوّة. ■

التمرين 10. أيّاً كان a من $\mathbb{R}$، نعرّف المصفوفة $M_a = (m_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ كما يلي :

$$m_{ij} = \begin{cases} C_{j-1}^{i-1} \cdot a^{j-i} & : \quad j \geq i \\ 0 & : \quad j < i \end{cases}$$

1. أثبت أن المجموعة $G = \left\{ M_a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R} \right\}$ زمرة جزئية من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ تُشاكِل تقابلياً $(\mathbb{R},+)$.

2. لتكن $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ولنفترض أنّ $a_{ij} = 0$ عندما $i \geq j$، وأنّ $b_{ij} = 0$ حين يكون $i \geq j - s$ حيث $s \in \{0,\ldots,n-1\}$.
وأخيراً لتكن المصفوفة $C = AB = (c_{ij})$. أثبت أن $c_{ij} = 0$، عندما يتحقَّق الشرط $i \geq j - s - 1$. واستنتج أن $(M_a - I_n)^n = 0$.

3. أثبت أنه مهما يكن كثير الحدود P من $\mathbb{R}[X]$، يكن

$$\deg P < n \Rightarrow P(X) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k P(X + ka)$$

4. لتكن (p,n) من $\mathbb{N}^2$ تُحقّق $n \geq p > 0$. نرمز بالرمز S_n^p إلى عدد التطبيقات الغامرة من $\mathbb{N}_n$ إلى $\mathbb{N}_p$. أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} C_p^k S_n^k = p^n$. **مساعدة** : يمكن حساب عدد التطبيقات من $\mathbb{N}_n$ إلى $\mathbb{N}_p$ بطريقتين.

5. استنتج قيمة S_n^p. واحسب بوجه خاص S_n^1 و S_n^2.

الحل

1. بملاحظة أنّ

$$\left(X + a\right)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} C_{j-1}^{i} a^{j-1-i} X^i = \sum_{i=1}^{j} C_{j-1}^{i-1} a^{j-i} X^{i-1}$$

نستنتج أنّ M_a هي مصفوفة التطبيق الخطّي

$$\tau_a : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X], P \mapsto P(X + a)$$

بالنسبة إلى الأساس القانوني $\mathcal{E} = (X^{k-1})_{k \in \mathbb{N}_n}$ للفضاء $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. أي

$$M_a = \operatorname{mat}\left(\tau_a, \mathcal{E}, \mathcal{E}\right)$$

وهذا يفيدنا في إثبات أنّ $M_0 = I$ و $M_a^{-1} = M_{-a}$ و $M_{a+b} = M_a M_b$ ، وعليه تكون المجموعة G زمرة جزئيّة من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ ، تُشاكل تقابليّاً $(\mathbb{R},+)$ وفق التشاكل الزمري $a \mapsto M_a$.

2. لتكن $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ولنفترض أنّ $a_{ij} = 0$ عندما $i \geq j$ ، وأنّ $b_{ij} = 0$ حين يكون $i \geq j - s$ حيث $s \in \{0,\ldots,n-1\}$. وأخيراً لتكن المصفوفة $C = AB = (c_{ij})$ ، وليكن (i,j) من $\mathbb{N}_n^2$ يُحقّق $i \geq j - s - 1$. عندئذ

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \underbrace{\sum_{(i\geq k)\vee(k\geq j-s)} a_{ik} b_{kj}}_{0} + \sum_{k\in]i,j-s[} a_{ik} b_{kj}$$

فإذا كان $i \geq j - s - 1$ كان $]i, j-s[= \varnothing$ ومن ثمّ $c_{ij} = 0$.

3. نستنتج مما سبق، وبناءً على كون $i \geq j$ يقتضي $[M_a - I]_{ij} = 0$ ، أنّ

$$i \geq j - s \Rightarrow [(M_a - I)^{s+1}]_{ij} = 0$$

وذلك بالتدريج على العدد s من $\{0,\ldots,n-1\}$. وفي حالة $s = n - 1$ نجد

$$i > j - n \Rightarrow [(M_a - I)^n]_{ij} = 0$$

أي $(M_a - I)^n = 0$ لأنّ الشرط $i > j - n$ محقّق أيّاً كان (i,j) من $\mathbb{N}_n^2$. نستنتج إذن أنّ

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} (M_a)^k = 0$$

وهذا يُكافئ

$$I + \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^k M_{ka} = 0$$

وهذه المساواة المصفوفيّة تُكافئ المساواة الآتية

$$I_E = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{k-1} \tau_{ka}$$

بين تطبيقات خطيّة على $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. وهذه المساواة تُكافئ

$$\deg P < n \Rightarrow P(X) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k P(X + ka)$$

4. لتكن (p,n) من $\mathbb{N}^2$ تُحقّق $n \geq p > 0$. نرمز بالرمز S_n^p إلى عدد التطبيقات الغامرة من $\mathbb{N}_n$ إلى $\mathbb{N}_p$. لتكن $\mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_p)$ مجموعة التطبيقات من $\mathbb{N}_n$ إلى $\mathbb{N}_p$. وفي حالة مجموعة جزئيّة غير خالية B من $\mathbb{N}_p$ ، نرمز بالرمز $\mathbb{S}_n^B$ إلى مجموعة التطبيقات من $\mathbb{N}_n$ إلى $\mathbb{N}_p$ التي صورتها B . عندئذ من الواضح أنّ $(\mathbb{S}_n^B)_{\varnothing \neq B \subset \mathbb{N}_p}$ تجزئة للمجموعة $\mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_p)$. إذن

$$\operatorname{card} \mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_p) = \sum_{\varnothing \neq B \subset \mathbb{N}_p} \operatorname{card} \mathbb{S}_n^B$$

ومن الواضح أيضاً أنّ $\operatorname{card} \mathbb{S}_n^B = S_n^{\operatorname{card} B}$. إذن

$$\operatorname{card} \mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_p) = \sum_{\varnothing \neq B \subset \mathbb{N}_p} S_n^{\operatorname{card} B} = \sum_{1 \leq k \leq p} C_p^k S_n^k$$

أو

$$p^n = \sum_{k=1}^{p} C_p^k S_n^k$$

5. يمكننا كتابة النتيجة السابقة عندما تتحول قيمة p بالشكل

$$\begin{aligned}
0^n &= C_0^0 S_n^0 \\
1^n &= C_1^0 S_n^0 + C_1^1 S_n^1 \\
2^n &= C_2^0 S_n^0 + C_2^1 S_n^1 + C_2^2 S_n^2 \\
&\vdots \\
j^n &= C_j^0 S_n^0 + C_j^1 S_n^1 + C_j^2 S_n^2 + C_j^3 S_n^3 + \cdots + C_j^j S_n^j \\
&\vdots \\
p^n &= C_0^0 S_n^0 + C_p^1 S_n^1 + C_p^2 S_n^2 + C_p^3 S_n^3 + \cdots + C_p^j S_n^j + \cdots + C_p^p S_n^p
\end{aligned}$$

فإذا عرّفنا الشعاعين S و V من $\mathcal{M}_{1\times(p+1)}(\mathbb{R})$ كما يأتي

$$V = \left[0^n, 1^n, 2^n, \ldots, p^n\right] \text{ و } S = \left[0, S_n^1, S_n^2, \ldots, S_n^p\right]$$

أمكن كتابة الجملة السابقة بالصيغة المصفوفاتية $V = SM_1$ حيث M_1 هي المصفوفة التي درسناها سابقاً والتي توافق حالة $a = 1$.

$$M_1 = \begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \cdots & C_p^0 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_p^1 \\ \vdots & \ddots & C_2^2 & & C_p^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & C_p^p \end{bmatrix}$$

ولمّا كان $M_1^{-1} = M_{-1}$ أي

$$(M_1)^{-1} = \begin{bmatrix} C_0^0 & (-1)C_1^0 & (-1)^2C_2^0 & \cdots & (-1)^pC_p^0 \\ 0 & C_1^1 & (-1)C_2^1 & \cdots & (-1)^{p-1}C_p^1 \\ \vdots & \ddots & C_2^2 & & (-1)^{p-2}C_p^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & C_p^p \end{bmatrix}$$

استنتجنا من $S = V(M_1)^{-1}$ أنّ

$$\begin{aligned} S_n^p &= 1^n(-1)^{p-1}C_p^1 + 2^n(-1)^{p-2}C_p^2 + \cdots + p^n(-1)^{p-p}C_p^p \\ &= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}C_p^k k^n \end{aligned}$$

وبوجه خاص

$$\begin{aligned} S_n^1 &= 1 \\ S_n^2 &= 2^n - 2 \\ S_n^3 &= 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \end{aligned}$$

ويمكننا أن نثبت أيضاً بالتدريج أنّ

$$S_{n+1}^p = p(S_n^p + S_n^{p-1})$$

مما يتيح لنا أن نبرهن أنّ :

$$S_{n+1}^n = n! \cdot C_{n+1}^2$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 11. ليكن $E=\mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد درجتها على n.

وليكن d و δ التطبيقين الخطيّين من $\mathcal{L}(E)$ المعرّفين كما يلي:

$$d : E \to E : P(X) \mapsto P'(X)$$

$$\delta : E \to E : P(X) \mapsto P(X+1)-P(X)$$

1. ليكن $\mathcal{B}=(e_k)_{0\le k\le n}$ أساس E المعّرف كما يلي:

$$e_0=1, \quad \forall k\in\mathbb{N}_n, \quad e_k=\frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$

① اكتب $\Delta=\operatorname{mat}(\delta,\mathcal{B},\mathcal{B})$ مصفوفة التطبيق δ بالنسبة إلى الأساس $\mathcal{B}$.

② احسب المصفوفات $(\Delta^k)_{k\in\mathbb{N}_n}$.

③ اكتب $D=\operatorname{mat}(d,\mathcal{B},\mathcal{B})$ مصفوفة التطبيق d بالنسبة إلى الأساس $\mathcal{B}$.

④ استنتج عبارة d بدلالة $(\delta^k)_{k\in\mathbb{N}_n}$.

2. بالاستفادة من منشور تايلور. استنتج أيضاً عبارة δ بدلالة $(d^k)_{k\in\mathbb{N}_n}$.

الحل

①.1 نلاحظ أنّ $\delta(e_0)=0$ و $\delta(e_1)=e_0$ وأنّه في حالة $k\ge 1$ لدينا

$$\begin{aligned}\delta(e_{k+1})&=\frac{(X+1)X(X-1)\cdots(X-k+1)}{(k+1)!}-\frac{X(X-1)\cdots(X-k)}{(k+1)!}\\&=\frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{(k+1)!}\big((X+1)-(X-k)\big)=e_k\end{aligned}$$

وعلى هذا يكون

$$\Delta=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&0&1&\ddots&\vdots\\ \vdots&&0&\ddots&0\\ \vdots&&&\ddots&1\\ 0&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{bmatrix}=(\delta_{i+1,j})\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

حيث $\delta_{\alpha\beta}$ هو رمز كرونيكر.

②.1 لنثبت بالتدريج على العدد k من $\mathbb{N}_n$ أنّ $\Delta^k = (\delta_{i+k,j})$ ، فإذا كان هذا صحيحاً في حالة k من $\mathbb{N}_{n-1}$ كان

$$[\Delta^{k+1}]_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n+1}[\Delta^k]_{i\ell}[\Delta]_{\ell j} = \sum_{k=1}^{n+1}\delta_{i+k,\ell}\delta_{\ell+1,j} = \delta_{i+k+1,j}$$

أي

$$\Delta^k = \begin{array}{c} \overset{k}{\longleftrightarrow}\qquad\qquad\qquad \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \mathbf{0} & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

③.1 نلاحظ أنّ $d(e_0) = 0$ و $d(e_1) = e_0$ ونتيقّن بحساب مباشر أنّ

$$d(e_2) = e_2' = e_1 - \frac{1}{2}e_0$$
$$d(e_3) = e_3' = e_2 - \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{3}e_0$$

لنثبت إذن بوجه عام أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}_n,\quad d(e_k) = e_k' = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\frac{1}{j}e_{k-j}$$

لنفترض صحّة هذه النتيجة في حالة k ، فإذا استفدنا من المساواة $e_{k+1} = \dfrac{1}{k+1}(X-k)e_k$ وجدنا

$$d(e_{k+1}) = \frac{1}{k+1}e_k + \frac{X-k}{k+1}d(e_k)$$

وإذا استفدنا من فرْض التدريج كتبنا

$$d(e_{k+1}) = \frac{1}{k+1}e_k + \frac{X-k}{k+1}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\frac{1}{j}e_{k-j}$$

ولكن

$$\begin{aligned}(X-k)e_{k-j} &= (X-k+j)e_{k-j} - je_{k-j}\\ &= (k+1-j)e_{k+1-j} - je_{k-j}\\ &= (k+1)e_{k+1-j} - j(e_{k+1-j}+e_{k-j})\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}d(e_{k+1}) &= \frac{1}{k+1}e_k + \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\left(e_{k+1-j} - \frac{j}{k+1}\left(e_{k+1-j}+e_{k-j}\right)\right)\\ &= \frac{1}{k+1}e_k + \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j}e_{k+1-j} - \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left(e_{k+1-j}+e_{k-j}\right)\\ &= \frac{1}{k+1}e_k + \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j}e_{k+1-j} - \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k}\left((-1)^{j-1}e_{k+1-j} - (-1)^{j}e_{k-j}\right)\\ &= \frac{1}{k+1}e_k + \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j}e_{k+1-j} - \frac{1}{k+1}\left(e_k - (-1)^k e_0\right)\end{aligned}$$

وعليه نجد

$$d(e_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j}e_{k+1-j} + \frac{(-1)^k}{k+1}e_0 = \sum_{j=1}^{k+1}\frac{(-1)^{j-1}}{j}e_{k+1-j}$$

وهي العلاقة المطلوبة. وعليه تأخذ المصفوفة $D = \mathrm{mat}\left(d,\mathcal{B},\mathcal{B}\right)$ الشكل التالي :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & & \cdots & \frac{(-1)^{n-1}}{n}\\ \vdots & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{3}\\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \frac{-1}{2}\\ \vdots & & & & & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

وهذا يثبتُ أنّ ④.1

$$D = \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\Delta^k$$

وينتج من ذلك أنّ

$$d = \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\delta^k$$

2. بالاستفادة من منشور تايلور. يمكننا أن نكتبَ

$$P(X+1)=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k\,!}P^{(k)}(X)=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k\,!}d^k\big(P(X)\big)$$

ومنه

$$\delta\big(P(X)\big)=P(X+1)-P(X)=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k\,!}d^k\big(P(X)\big)$$

أو

$$\delta=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k\,!}d^k$$

■

ملاحظة. تعبِّر النتيجتان السابقتان عن المساواتين :

$I+\delta=\exp(d)$ و $d=\operatorname{Log}(I+\delta)$!.

التمرين 12. ليكن u من $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ، ولتكن M مصفوفة u بالنسبة إلى الأساس القانوني $\mathcal{E}$، نفترض أيضاً أنّ مصفوفة u بالنسبة إلى أساس آخر $\mathcal{F}$ هي M' فإذا كان

$$M=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5&1&?\\2&-1&?\\1&0&?\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad M'=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ما هي مصفوفة الانتقال بين الأساسين ؟

الحل

بملاحظة أنّ

$$M'-I=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

نرى أنّ $(M'-I)^3=0$ وينتج من ذلك أنّ $(u-I)^3=0$. وهذا بدوره يقتضي أنّ $(M-I)^3=0$. فإذا افترضنا أنّ

$$M=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5&1&a\\2&-1&b\\1&0&c\end{bmatrix}$$

وجدنا

$$(M-I)^2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & a \\ 2 & -3 & b \\ 1 & 0 & c-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & a \\ 2 & -3 & b \\ 1 & 0 & c-2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 11+a & 0 & a+b+ac \\ b & 11 & 2a-5b+bc \\ c+1 & 1 & a+\left(c-2\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$(M-I)^3 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 1 & a \\ 2 & -3 & b \\ 1 & 0 & c-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11+a & 0 & a+b+ac \\ b & 11 & 2a-5b+bc \\ c+1 & 1 & a+(c-2)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 33+4a+b+ac & a+11 & * \\ 22+2a-2b+bc & b-33 & * \\ a+c^2-c+9 & c-2 & * \end{bmatrix}$$

وهكذا نرى أنّ $(M-I)^3 = 0$ يقتضي أن يكون العمود الثاني في هذه المصفوفة على الأقل معدوماً، أي أن يكون

$$a=-11 \quad \text{و} \quad b=33 \quad \text{و} \quad c=2$$

وفي هذه الحالة نجد بالتعويض أنّ $(M-I)^3 = 0$ وأنّ

$$(M-I)^2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 33 & 11 & -121 \\ 3 & 1 & -11 \end{bmatrix}$$

لنختر إذن أيّ شعاع X يُحقّق $(M-I)^2X \neq 0$، مثلاً الشعاع $f_3 = {}^t[0,1,0]$. ولنضع بالتعريف

$$f_2 = (M-I)f_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad f_1 = (M-I)f_2 = (M-I)^2 f_3 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نستنتج من $(M-I)f_1 = 0$ و $f_1 = (M-I)f_2$ و $f_2 = (M-I)f_3$ أنّ

$$Mf_1 = f_1 \quad \text{و} \quad Mf_2 = f_2 + f_1 \quad \text{و} \quad Mf_3 = f_3 + f_2$$

وهذا يثبت أنّه إذا عرّفنا $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ كان $\mathrm{mat}(u, \mathcal{F}, \mathcal{F}) = M'$. أمّا مصفوفة الانتقال فهي

$$P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \mathrm{mat}\left(I_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{F}, \mathcal{E}\right) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 11 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وهي تحقّق $M = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} M' (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}})^{-1}$. ■

التمرين 13. نتأمّل في هذا التمرين الأساس القانوني $\left(E_{ij}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ لفضاء المصفوفات المربّعة $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ، حيث $\mathbb{K}$ حقلٌ جزئي من $\mathbb{C}$.

1. لتكن $M = (m_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ احسب كلّاً من ME_{ij} و $E_{ij}M$.
2. لتكن $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ ، أو مركز $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ، مجموعة المصفوفات التي تتبادل مع جميع عناصر $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. عيِّن $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$.
3. أثبت أنّه مهما يكن (i,j) من $\mathbb{N}_n^2$ ، يكن $F_{ij} \overset{\text{def}}{=} I + E_{ij} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. واستنتج أنّ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{vect}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))$.
4. عيِّن $\mathcal{Z}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))$ ، أي مجموعة المصفوفات التي تتبادل مع جميع المصفوفات القَلوبة.
5. ليكن f تطبيقاً خطيّاً على فضاء شعاعي منتهي البُعد على $\mathbb{K}$. نفترض أنّ للتطبيق f المصفوفة نفسها بالنسبة إلى أيِّ أساس. عيِّن f .
6. لتكن $\mathcal{U}$ مجموعة المصفوفات المثلثيّة العليا التي تساوي جميع عناصرها القطرية الواحد أي:

$$\mathcal{U} = \left\{M = \left(a_{ij}\right) : \left(i > j \Rightarrow a_{ij} = 0\right) \wedge (a_{ii} = 1)\right\}$$

أثبت أنّ $\mathcal{U}$ هي زمرة جزئيّة من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ ، ثُمّ عيِّن $\mathcal{Z}(\mathcal{U})$ ، أي مجموعة المصفوفات التي تتبادل مع عناصر $\mathcal{U}$ ، وبيِّن أنّ $\mathcal{Z}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}$ زمرة بالنسبة إلى ضرب المصفوفات تشاكل تقابليّاً الزمرة $(\mathbb{K}, +)$.

الحل

1. لتكن $M=(m_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ عندئذ نجد مباشرة أنّ

$$\begin{aligned}
[ME_{ij}]_{k\ell} &= \sum_{s=1}^{n} m_{ks}[E_{ij}]_{s\ell} = \sum_{s=1}^{n} m_{ks}\delta_{is}\delta_{j\ell} = m_{ki}\delta_{j\ell}\\
[E_{ij}M]_{k\ell} &= \sum_{s=1}^{n} [E_{ij}]_{ks}m_{s\ell} = \sum_{s=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{js}m_{s\ell} = m_{j\ell}\delta_{ik}
\end{aligned}$$

ومنه

$$ME_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \overset{j}{\downarrow} & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0\cdots0 & m_{1i} & 0\cdots0\\ \vdots\quad\vdots & \vdots & \vdots\quad\vdots\\ 0\cdots0 & m_{ni} & 0\cdots0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad E_{ij}M = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\\ m_{j1} & \cdots & m_{jn}\\ 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i\\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

2. لتكن $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$، مجموعة المصفوفات التي تتبادل مع جميع عناصر $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ولتكن المصفوفة $M=(m_{ij})$ من $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$. عندئذ يكون $\forall i\in\mathbb{N}_n,\ ME_{i1}=E_{i1}M$، وبناءً على نتيجة السؤال السابق، فإنّ هذا يُكافئ

$$\forall i\in\mathbb{N}_n, \forall(k,\ell)\in\mathbb{N}_n^2,\quad m_{ki}\delta_{1\ell} = [ME_{i1}]_{k\ell} = [E_{i1}M]_{k\ell} = m_{1\ell}\delta_{ik}$$

وبوجه خاص، في حالة $\ell=1$، يكون

$$\forall i\in\mathbb{N}_n, \forall k\in\mathbb{N}_n,\quad m_{ki} = m_{11}\delta_{ik}$$

ومن ثَمَّ $M=m_{11}I$. وبالطبع كلُّ مصفوفة من هذا النمط تتبادل مع جميع عناصر $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، إذن

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \{\lambda I : \lambda\in\mathbb{K}\}$$

في الحقيقة، لقد أثبتنا أنّ :

$$.\{M : \forall i\in\mathbb{N}_n, E_{i1}M = ME_{i1}\} = \{\lambda I : \lambda\in\mathbb{K}\}$$

3. ليكن (i,j) من $\mathbb{N}_n^2$، ولنعرّف $F_{ij}=I+E_{ij}$. عندئذ نتحقّق مباشرة أنّه في حالة $i\neq j$ لدينا

$$F_{ij}(I-E_{ij}) = I$$

وهذا يثبتُ أنّ $F_{ij} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ وأنّ $F_{ij}^{-1} = I - E_{ij}$ في حالة $i \neq j$. ونتحقَّق من جهة أخرى أنّ

$$F_{ii}\left(I - \tfrac{1}{2}E_{ii}\right) = I$$

وهذا يثبتُ أنّ $F_{ii} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ وأنّ $F_{ii}^{-1} = I - \frac{1}{2}E_{ii}$. إذن في جميع الأحوال لدينا

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad F_{ij} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$$

ولمّا كان $I \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ استنتجنا أنّ

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad E_{ij} = F_{ij} - I \in \operatorname{vect}\left(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})\right)$$

ولكن $\operatorname{vect}\left((E_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}\right) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ، إذن $\operatorname{vect}\left(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})\right) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4. لتكن $\mathcal{Z}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))$ مجموعة المصفوفات التي تتبادل مع جميع المصفوفات القَلوبة. لمّا كانت هذه المجموعة فضاءً شعاعيّاً جزئيّاً استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})) &= \mathcal{Z}\left(\operatorname{vect}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))\right)\\ &= \mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \left\{\lambda I : \lambda \in \mathbb{K}\right\}\end{aligned}$$

5. ليكن f تطبيقاً خطيّاً على فضاء شعاعي منتهي البُعد على $\mathbb{K}$. ولنفترض أنّ للتطبيق f المصفوفة نفسها C بالنسبة إلى أيِّ أساس. لنتأمّل إذن أساساً $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ ، ومصفوفة $P = (p_{ij})$ من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. نعرّف عندئذ الأساس $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ بالعلاقات $f_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$. فتكون $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ ويكون $\operatorname{mat}(u,\mathcal{E}) = P^{-1}\operatorname{mat}(u,\mathcal{F})P$ ، ولمّا كان $\operatorname{mat}(u,\mathcal{E}) = \operatorname{mat}(u,\mathcal{F}) = C$ استنتجنا أنّ $PC = CP$.

إذن لقد أثبتنا أنّ المصفوفة C تتبادل مع جميع المصفوفات القَلوبة P ، أي إنّها تنتمي إلى $\mathcal{Z}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))$ فهي إذن من الشكل λI حيث $\lambda \in \mathbb{K}$. وهذا يُثبتُ أنّ $f \in \mathbb{K}I_E$ ، وبالعكس، لا تتغيّر مصفوفة أيٍّ من التطبيقات الخطيّة في $\mathbb{K}I_E$ بتغيير الأساس.

6. لتكن $\mathcal{U}$ مجموعة المصفوفات المثلثيّة العليا التي تساوي جميع عناصرها القطرية الواحد أي :

$$\mathcal{U} = \left\{M = (a_{ij}) : (i > j \Rightarrow a_{ij} = 0) \wedge (a_{ii} = 1)\right\}$$

- من الواضح أنّ $I \in \mathcal{U}$ وأنّ $\mathcal{U}$ مغلقة بالنسبة إلى ضرب المصفوفات.

- لتكن M من $\mathcal{U}$ ولنعرّف $N = M - I$. عندئذ تُحقِّق المصفوفة N الخاصّة

$$i \leq j \Rightarrow [N]_{ij} = 0$$

وهذا يُثبتُ أنّ $N^n = 0$ إذ نبرهن بالتدريج على k من $\mathbb{N}_n$ أنّ

$$i \leq j + k - 1 \Rightarrow [N^k]_{ij} = 0$$

وعليه تكون $M = I + N$ قَلوبة ويكون

$$M^{-1} = I - N + N^2 + \cdots + (-1)^{n-1} N^{n-1}$$

إذن تنتمي المصفوفة M^{-1} أيضاً إلى $\mathcal{U}$. فنكون بذلك قد أثبتنا أنّ $\mathcal{U}$ زمرة جزئيّة من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

- في الحقيقة،

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(\mathcal{U}) &= \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \forall U \in \mathcal{U}, MU = UM \right\} = \mathcal{Z}(-I + \mathcal{U}) \\
&= \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \left(i < j \Rightarrow ME_{ij} = E_{ij} M \right) \right\} \\
&= \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \left(i < j \Rightarrow MF_{ij} = F_{ij} M \right) \right\}
\end{aligned}$$

- ليكن $M = (m_{ij})$ عنصراً من $\mathcal{Z}(\mathcal{U})$. عندئذ نستنتج من المساواة

$$\forall j \in \{2, \ldots, n\}, \quad ME_{1j} = E_{1j} M$$

أنّ

$$\forall j \in \{2, \ldots, n\}, \forall \ell \in \mathbb{N}_n, \quad m_{11} \delta_{j\ell} = [ME_{1j}]_{1\ell} = [E_{1j} M]_{1\ell} = m_{j\ell}$$

ومنه $m_{ij} = 0$ في حالة $(1 < i) \wedge (i \neq j)$ و $m_{ii} = m_{11}$ في حالة $i \in \mathbb{N}_n$.

وكذلك، نستنتج من المساواة $ME_{in} = E_{in} M$، في حالة i من $\mathbb{N}_{n-1}$، أنّ

$$\forall i \in \{2, \ldots, n-1\}, \quad m_{1i} = [ME_{in}]_{1n} = [E_{in} M]_{1n} = m_{nn} \delta_{i1} = 0$$

ومنه $m_{ij} = 0$ في حالة $((i,j) \neq (1,n)) \wedge (i \neq j)$ و $m_{ii} = m_{11}$ في حالة i من $\mathbb{N}_n$. إذن $M = m_{11} I + m_{1,n} E_{1,n}$. وبالعكس، تتبادل كلُّ مصفوفة من الشكل $\lambda I + \mu E_{1,n}$ مع جميع مصفوفات $\mathcal{U}$.

إذن

$$\mathcal{Z}(\mathcal{U}) = \left\{\lambda I + \mu E_{1,n} : (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\right\}$$

وبوجه خاص نرى أنّ

$$\mathcal{Z}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} = \left\{I + \mu E_{1,n} : \mu \in \mathbb{K}\right\}$$

والتطبيق $\mu \mapsto I + \mu E_{1,n}$ تشاكل زمريّ تقابلي بين $(\mathbb{K}, +)$ و $(\mathcal{Z}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}, \times)$. ■

التمرين 14. ليكن a عدداً حقيقيّاً غير صفري، ولتكن A و B مصفوفتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ادرس المعادلة $aX + (\operatorname{tr} X)A = B$ بالنسبة إلى المجهول X من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

الحل

في الحقيقة، إذا كان X حلاً للمعادلة المدروسة كان $(\operatorname{tr} X)(a + \operatorname{tr} A) = \operatorname{tr} B$ وهنا نناقش الحالات الآتية.

① حالة $a + \operatorname{tr} A = 0$.

❶ فإمّا أن يكون $\operatorname{tr} B \neq 0$، وعندئذ لا توجد حلول للمسألة.

❷ أو أن يكون $\operatorname{tr} B = 0$، وفي هذه الحالة تكون جميع مصفوفات المجموعة $\left\{\frac{1}{a}(B - \lambda A) : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ حلولاً للمعادلة المدروسة.

② حالة $a + \operatorname{tr} A \neq 0$. وهنا يكون للمسألة المدروسة حلٌّ وحيد هو

$$X = \frac{1}{a}\left(B - \frac{\operatorname{tr} B}{a + \operatorname{tr} A} A\right)$$ ■

التمرين 15. لتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ولنعرّف

$$\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AM = MA\}$$

1. أثبت أنّ $\mathcal{C}_A$ جبر جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. نفترض أنّ $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ وأنّ الأعداد $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ مختلفة مثنى مثنى.

① عيِّن $\mathcal{C}_A$.

② أثبت أنّ صورة التطبيق الخطّي

$$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M \mapsto MA - AM$$

مكوّنة من المصفوفات التي ثوابت أقطارها الرئيسيّة صفرية.

الحل

1. من الواضح أنّ $\mathcal{C}_A$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. وإذا كانت M و N مصفوفتين من $\mathcal{C}_A$ كان

$$A(MN) = (AM)N = (MA)N = M(AN) = M(NA) = (MN)A$$

وهذا يثبتُ أنّ $\mathcal{C}_A$ مجموعة مغلقة بالنسبة إلى ضرب المصفوفات، ونرى وضوحاً أنّ $I \in \mathcal{C}_A$. وهذا يثبتُ أنّ $\mathcal{C}_A$ جبرٌ جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

①.2 لتكن $M = (m_{ij})$ مصفوفة من $\mathcal{C}_A$. عندئذ

$$[MA]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}\lambda_j\delta_{kj} = \lambda_j m_{ij}$$
$$[AM]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i\delta_{ik}m_{kj} = \lambda_i m_{ij}$$

ونستنتج من كون $AM = MA$ أنّ

$$\forall(i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad (\lambda_j - \lambda_i)m_{ij} = 0$$

ولأنّ الأعداد $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ مختلفة مثنى مثنى، استنتجنا

$$\forall(i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad i \ne j \Rightarrow m_{ij} = 0$$

أي إنّ M تنتمي إلى مجموعة المصفوفات القطريّة $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. وبالعكس، نرى من الواضح أنّ كلَّ مصفوفة قطريّة من $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ تتبادل مع المصفوفة A . وعليه فإنّ

$$\mathcal{C}_A = \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{vect}((E_{ii})_{i\in\mathbb{N}_n})$$

إذ رمزنا بالرمز $(E_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ إلى عناصر الأساس القانوني في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

②.2 في الحقيقة، إنّ $\ker\varphi = \mathcal{C}_A$. ولأنّ $\dim \mathcal{C}_A = n$ استنتجنا أنّ $\operatorname{rg}\varphi = n^2 - n$. ولكن من الواضح بالحساب المباشر أنّ

$$\operatorname{Im}\varphi \subset \left\{M = (m_{ij}) : \forall i \in \mathbb{N}_n, m_{ii} = 0\right\} = \operatorname{vect}((E_{ij})_{1\le i\ne j\le n})$$

ولمّا كان

$$\dim \operatorname{vect}((E_{ij})_{1\le i\ne j\le n}) = n^2 - n$$

استنتجنا أن الاحتواء السابق مساواة، أي إنّ

$$\operatorname{Im}\varphi = \left\{M = (m_{ij}) : \forall i \in \mathbb{N}_n, m_{ii} = 0\right\}$$ ■

التمرين 16. لتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، تُحقّق $\operatorname{tr}(M)=0$، وغير معدومة.

1. أثبت أنّه توجد مصفوفة عمود X_1 من $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ تجعل الجملة (X_1, MX_1) حرّة.
2. استنتج أنّ M تشابه مصفوفة N من الشكل $N=\left[\begin{array}{c|c} 0 & \times\cdots\times \\ \hline \times & \\ \vdots & M_1 \\ \times & \end{array}\right]$، و M_1 مصفوفة من $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ تُحقّق $\operatorname{tr}(M_1)=0$.
3. استنتج أنّ M تشابه مصفوفة قطرها الرئيسي صفري.
4. استنتج أنّه توجد مصفوفتان A و B من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، تحقّقان $M=AB-BA$.

الحل

1. لنفترض أنّه لا يوجد شعاع عمود X يَجعل الجملة (X,MX) جملة حرّة. فإذا كان X شعاعاً غير معدوم نتج من الارتباط الخطّي للجملة (X,MX) أنّه يوجد عددان α و β يُحقّقان $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ و $\alpha MX+\beta X=0$. ولمّا كان $\alpha=0$ يقتضي $\beta=0$ استنتجنا أنّ $\alpha\neq 0$. إذن

$$\forall X\in\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R})\backslash\{0\},\exists\lambda_X\in\mathbb{R},\quad MX=\lambda_X X$$

فإذا كان $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ الأساس القانوني في $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R})$ وعرّفنا $\lambda_i=\lambda_{e_i}$ استنتجنا من المساواة السابقة أنّ M مصفوفة قطريّة $M=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. ولمّا كان

$$\forall i\in\mathbb{N}_{n-1},\quad M(e_n+e_i)=Me_n+Me_i$$

استنتجنا أنّ

$$\forall i\in\mathbb{N}_{n-1},\quad \lambda_{e_n+e_i}(e_n+e_i)=\lambda_n e_n+\lambda_i e_i$$

ومن ثَمّ $\forall i\in\mathbb{N}_{n-1},\lambda_i=\lambda_{e_n+e_1}=\lambda_n$، وعليه $M=\lambda_n I$. وأخيراً، لمّا كان $0=\operatorname{tr}M=n\lambda_n$، استنتجنا أنّ $\lambda_n=0$ ومن ثَمّ $M=0$ وهذا يناقض الفرْض. إذن لا بدّ أن يوجد شعاع X_1 في $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R})$ يجعل الجملة (X_1,MX_1) جملة حرّة.

2. نضع $X_2=MX_1$، ونتمّم الجملة (X_1,X_2) إلى أساس $\mathcal{F}=(X_1,\ldots,X_n)$ للفضاء $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R})$ ثُمّ لنتأمّل التطبيق

$$U_M:\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R}),Y\mapsto MY$$

المقرون بالمصفوفة M.

عندئذ نعلم أنّ $M = \mathrm{mat}\left(U_M, \mathcal{E}, \mathcal{E}\right)$ وأنّ

$$N = \mathrm{mat}\left(U_M, \mathcal{F}, \mathcal{F}\right) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \times\cdots\times \\ \hline \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} & M_1 \end{array}\right]$$

ولمّا كانت المصفوفتان M و N هما مصفوفتا التطبيق U_M نفسه بالنسبة إلى أساسين مختلفين، استنتجنا من جهة أولى أنّهما متشابهتان، ومن جهة ثانية أنّ $0 = \mathrm{tr}\, M = \mathrm{tr}\, N = \mathrm{tr}\, M_1$.

3. لنتأمّل الخاصّة $\mathbb{P}_n$ الآتية :

❰ في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ كلُّ مصفوفة أثرُها معدوم تشابه مصفوفة عناصر قطرها الرئيسي صفرية. ❱

- الخاصّة $\mathbb{P}_1$ صحيحة على وجه التفاهة.
- لنتأمّل حالة $n = 2$، ولتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ أثرها معدوم. فإمّا أن تكون هي نفسها معدومة وهي من ثَمّ تُحقِّق الخاصّة المطلوبة، وإمّا أن يكون $M \neq 0$ وعندئذ يمكننا الاستفادة مما أثبتناه في 2. لنرى أنّ M تشابه مصفوفة من الشكل $N = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{bmatrix}$ حيث $d = \mathrm{tr}\, N = 0$، أي إنّ عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة N صفرية. فنكون بذلك قد أثبتنا أنّ $\mathbb{P}_2$ صحيحة.
- لنفترض إذن أنّ $n \geq 3$ وأنّ الخاصّة $\mathbb{P}_{n-1}$ صحيحة. ولتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ أثرها معدوم. فإمّا أن تكون هي نفسها معدومة وهي من ثَمّ تُحقِّق الخاصّة المطلوبة، أو أن يكون $M \neq 0$ وعندئذ يمكننا الاستفادة مما أثبتناه في 2. لنرى أنّه توجد مصفوفة قلوبة P من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ تُحقِّق $P^{-1}MP = N_1$ حيث

$$N_1 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \times\cdots\times \\ \hline \begin{smallmatrix} \times \\ \vdots \\ \times \end{smallmatrix} & M_1 \end{array}\right] \quad \text{و} \quad \mathrm{tr}\, M_1 = \mathrm{tr}\, N_1 = 0$$

واعتماداً على فرْض التدريج، توجد مصفوفة $\tilde{Q}$ من $\mathcal{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ تُحقّق $\tilde{Q}^{-1}M_1\tilde{Q} = M_2$ حيث M_2 مصفوفة عناصر قطرها الرئيسي صفرية من $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

فإذا عرفنا

$$Q=\left[\begin{array}{c|c}1 & 0\cdots 0\\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{Q}\\ 0 & \end{array}\right] \quad \text{كان} \quad Q^{-1}=\left[\begin{array}{c|c}1 & 0\cdots 0\\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{Q}^{-1}\\ 0 & \end{array}\right]$$

ونتج من ذلك أنّ

$$Q^{-1}P^{-1}MPQ=Q^{-1}\left[\begin{array}{c|c}0 & \times\cdots\times\\ \hline \times & \\ \vdots & M_1\\ \times & \end{array}\right]Q=\left[\begin{array}{c|c}0 & \times\ \ \cdots\ \ \times\\ \hline \times & \\ \vdots & \tilde{Q}^{-1}M_1\tilde{Q}\\ \times & \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}0 & \times\cdots\times\\ \hline \times & \\ \vdots & M_2\\ \times & \end{array}\right]$$

ومن ثَمّ، تُشابه المصفوفة M مصفوفةً عناصر قطرها الرئيسية صفرية، وهذا يثبت صحة $\mathbb{P}_n$.

4. لتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ أثرها معدوم. عندئذ توجد مصفوفة قلوبة P من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ تُحقّق $P^{-1}MP=N$، و N مصفوفة عناصر قطرها معدومة. لتكن $\tilde{A}=\operatorname{diag}(0,1,\ldots,n)$ مصفوفة قطريّة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ عناصر قطرها الرئيسي مختلفة مثنى مثنى. نعلم استناداً إلى نتيجة التمرين السابق أنّ مجموعة المصفوفات التي قطرها الرئيسي صفري هي صورة التطبيق $L\mapsto \tilde{A}L-L\tilde{A}$، إذن توجد مصفوفة $\tilde{B}$ تُحقّق $\tilde{A}\tilde{B}-\tilde{B}\tilde{A}=N$ وعندئذ يكون

$$M=PNP^{-1}=AB-BA$$

حيث $A=P\tilde{A}P^{-1}$ و $B=P\tilde{B}P^{-1}$. ■

ملاحظة. لقد أثبتنا في هذا التمرين الخاصّتين المهمّتين التاليتين :

- في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ تشابه كلُّ مصفوفة أثرُها معدوم مصفوفةً عناصر قطرها الرئيسي صفرية.
- في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ تُكتبُ كلُّ مصفوفة أثرُها معدوم بالشكل $AB-BA$.

التمرين 17. لتكن $J=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. عيّن المصفوفات X من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$، التي تُحقِّق المعادلة $X^2+X=J$.

الحل

- لنفترض أنّه يوجد حلٌّ X للمعادلة المدروسة. فإذا استفدنا من نتيجة التمرين 1. وجدنا عددين α و β من $\mathbb{R}$ يُحقّقان $X^2 = \alpha X + \beta I_2$ ، وعليه يكون

$$(\alpha - 1)X - J + \beta I_2 = 0$$

ولـمّا كانت الجملة (I_2, J) جملة حرّة استنتجنا أنّ $\alpha - 1 \neq 0$. إذن يوجد عددان λ و β في $\mathbb{R}$ يُحقّقان

$$X = \lambda I_2 + \mu J$$

- ولكن $J^2 = 2J$ إذن

$$\begin{aligned}
X^2 + X = J &\Leftrightarrow (\lambda^2 I_2 + (2\lambda\mu + 2\mu^2)J) + \lambda I_2 + \mu J = J \\
&\Leftrightarrow (\lambda^2 + \lambda)I_2 + \mu(2\lambda + 2\mu + 1)J = J \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \lambda^2 + \lambda = 0 \\ \mu(2\lambda + 2\mu + 1) = 1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

فإذا لا حظنا أنّ

$$\begin{aligned}
\mu(2\mu + 2\lambda + 1) = 1 &\Leftrightarrow \mu^2 + \mu(\lambda + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow (\mu + \tfrac{\lambda}{2} + \tfrac{1}{4})^2 = \tfrac{9}{16} + \tfrac{1}{4}(\lambda^2 + \lambda) \\
&\Leftrightarrow (\mu + \tfrac{\lambda}{2} - \tfrac{1}{2})(\mu + \tfrac{\lambda}{2} + 1) = \tfrac{1}{4}(\lambda^2 + \lambda)
\end{aligned}$$

استنتجنا أنّ $X = \lambda I_2 + \mu J$ تُحقّق $X^2 + X = J$ إذا وفقط إذا كان

$$\lambda\big(\lambda + 1\big) = 0 \quad \text{و} \quad (\mu + \tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2})(\mu + \tfrac{1}{2}\lambda + 1) = 0$$

أي إذ وفقط إذا كان

$$(\lambda, \mu) \in \left\{(0, \tfrac{1}{2}), (0, -1), (-1, 1), (-1, -\tfrac{1}{2})\right\}$$

أو إذا وفقط إذا كان

$$X \in \left\{\tfrac{1}{2}J, -J, -I_2 + J, -I_2 - \tfrac{1}{2}J\right\}$$

- وبالعكس، نتيقّن بالحساب المباشر، أنّ المصفوفات الأربع السابقة هي حلولٌ للمعادلة المدروسة. بذا يتمّ إنجاز الحل. ■

المحدِّدات وجمل المعادلات الخطيّة

1. التطبيقات المتعدِّدة الخطيّة

1-1. تعريف. ليكن p من $\mathbb{N}^*$، ولتكن E_1 و E_2 و ... و E_p و F فضاءات شعاعيّة على حقل $\mathbb{K}$. نقول إنّ التطبيق $f : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p \to F$ **تطبيق $p-$خطّي** إذا وفقط إذا كانت التطبيقات الآتية

$$f_{j,A_j} : E_j \to F, x_j \mapsto f(a_1,\ldots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\ldots,a_p)$$

خطيّةً، وذلك أيّاً كان j من $\mathbb{N}_p$، وأيّاً كان $A_j = (a_1,\ldots,a_{j-1},a_{j+1},\ldots,a_p)$ من $E_1 \times \cdots \times E_{j-1} \times E_{j+1} \times \cdots \times E_p$.

ونرمز بالرمز $\mathcal{L}_p(E_1,\ldots,E_p;F)$ إلى مجموعة التطبيقات الـ $p-$خطّية من الفضاء $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ إلى F. وهي تكوّن فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$.

وأخيراً، عندما يكون الفضاء الشعاعي F هو الحقل $\mathbb{K}$ نفسه، نسمّي عناصر الفضاء الشعاعي $\mathcal{L}_p(E_1,\ldots,E_p;\mathbb{K})$ **أشكالاً** $p-$خطّيةً على $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$.

2-1. ملاحظة. أيّاً كان التطبيق الـ $p-$خطّي : $f : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p \to F$، تتحقّق الخاصة التالية :

$$\forall (x_1,\ldots,x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p,$$
$$(\exists j \in \mathbb{N}_p, x_j = 0) \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_p) = 0$$

وذلك لأنه وفقاً لتعريف التطبيقات الـ $p-$خطّية يكون التطبيق $f_{j,(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots x_p)}$ خطياً.

3-1. تعريف. ليكن p من $\mathbb{N}^*$، وليكن E و F فضاءين شعاعيّين على حقل $\mathbb{K}$. نقول إنّ التطبيق الـ $p-$خطّي f من $\mathcal{L}_p(E^p;F)$ **متناظرٌ** إذا وفقط إذا كان

$$\forall (x_1,\ldots,x_p) \in E^p, \forall (i,j) \in \mathbb{N}_p^2,$$
$$(i < j) \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p) = f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_p)$$

ونقول إنّ التطبيق الـ $p-$خطّي f **تخالفيٌّ** إذا وفقط إذا كان :

$$\forall (x_1,\ldots,x_p) \in E^p, \forall (i,j) \in \mathbb{N}_p^2,$$
$$(i<j) \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p) = -f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_p)$$

وأخيراً نقول إنّ التطبيق الـ $p-$خطّي f **متناوبٌ** إذا وفقط إذا كان :

$$\forall (x_1,\ldots,x_p) \in E^p, \forall (i,j) \in \mathbb{N}_p^2,$$
$$(i<j) \wedge (x_i = x_j) \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_p) = 0$$

ونرمز بالرمز $\mathcal{L}_p^S(E^p;F)$ إلى فضاء التطبيقات الـ $p-$خطّيّة المتناظرة من E^p إلى F، وبالرمز $\mathcal{L}_p^A(E^p;F)$ إلى فضاء التطبيقات الـ $p-$خطّيّة المتناوبة من E^p إلى F.

4-1. **صياغة جديدة**. ليكن p من $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$، وليكن E و F فضاءين شعاعيّين على حقل $\mathbb{K}$. أيّاً كان التطبيق الـ $p-$خطّي f من $\mathcal{L}_p(E^p;F)$، وأيّاً كان التبديل σ من S_p، نرمز بالرمز $\overline{\sigma}(f)$ إلى التطبيق الـ $p-$خطّي المعرَّف بالعلاقة

$$\forall (x_1,\ldots,x_p) \in E^p,\ \ \overline{\sigma}(f)(x_1,\ldots,x_p) = f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)})$$

وهكذا، يمكننا صياغة التعريف السابق كما يأتي:

- يكون f من $\mathcal{L}_p(E^p;F)$ متناظراً إذا وفقط إذا كان $\forall \sigma \in S_p,\ \overline{\sigma}(f) = f$.
- ويكون f تخالفيّاً إذا وفقط إذا كان $\forall \sigma \in S_p,\ \overline{\sigma}(f) = \Delta(\sigma) f$، و $\Delta(\sigma)$ هو توقيع التبديل σ، ويساوي $(-1)^{k_\sigma}$ إذا أمكن كتابة σ ناتجَ تركيب k_σ مناقلةً.[1]

5-1. **مبرهنة**. ليكن p من $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$، وليكن E و F فضاءين شعاعيّين على حقل $\mathbb{K}$. وليكن التطبيق الـ $p-$خطّي f من $\mathcal{L}_p(E^p;F)$. عندئذ

① إذا كان f متناوباً، كان f تخالفياً.

② وإذا كان العدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ مختلفاً عن 2، وكان f تخالفياً، كان f متناوباً.

[1] راجع خواص الزمرة المتناظرة في بحث البنى الجبريّة

الإثبات

① لنفترض أنّ f متناوبٌ. وليكن (i,j) من $\mathbb{N}_p^2$ يحقّق $i<j$، و $(x_1,\ldots,x_p)$ من E^p.
عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned}
0 &= f(x_1,\ldots,\underbrace{x_i+x_j}_{i \text{ الموقع}},\ldots,\underbrace{x_i+x_j}_{j \text{ الموقع}},\ldots,x_p)\\
&= f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_i,\ldots,x_p)+f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p)\\
&\quad +f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_p)+f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_j,\ldots,x_p)
\end{aligned}$$

ولمّا كان f متناوباً، كان لدينا

$$f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_j,\ldots,x_p)=0 \quad \text{و} \quad f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_i,\ldots,x_p)=0$$

ينتج من ذلك أنّ

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p)+f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_p)=0$$

وهذا يثبت أنّ f تخالفيّ.

② ليكن (i,j) من $\mathbb{N}_p^2$ يحقّق $i<j$، وليكن $x=(x_1,\ldots,x_p)$ من E^p، يُحقّق $x_i=x_j$. ولنتأمّل المُناقلة $\sigma=\tau_{ij}=(i,j)$، أي التي تُبادل بين الدليلين i و j. لمّا كان f تخالفيّاً، كان لدينا

$$\overline{\sigma}(f)(x)=\Delta(\sigma)\cdot f(x)=-f(x)$$

ولدينا، من جهة أخرى،

$$\overline{\sigma}(f)(x)=f(x)$$

لأنّ $x_i=x_j$. فنستنتج أنّ $f(x)=-f(x)$ أو

$$2f(x)=0$$

وبالاستفادة من كوْن العدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ لا يساوي 2، نجد $f(z)=0$. والتطبيق f متناوبٌ. ❐

تبيّن المبرهنة السابقة تكافؤ مفهومَي تناوب وتخالف التطبيقات المتعدِّدة الخطيّة، عندما يكون العدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ مختلفاً عن 2.

6-1. **مبرهنة**. ليكن p من $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$، وليكن E و F فضاءَيْن شعاعيّين على حقل $\mathbb{K}$.
وليكن التطبيق الـ $p-$خطّي f من $\mathcal{L}_p(E^p;F)$. لنعرّف التطبيق

$$\mathcal{A}(f)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_p}\Delta(\sigma)\cdot\overline{\sigma}(f)$$

عندئذ يكون $\mathcal{A}(f)$ تطبيقاً $p-$خطّياً متناوباً، نسمّيه التطبيق الـ $p-$خطّي المتناوب المبني على f.

الإثبات

- إنّ $\mathcal{A}(f)$ تطبيقٌ $p-$خطّي لأنه عبارة خطية بتطبيقات من $\mathcal{L}_p(E^p;F)$.
- ليكن (i,j) من $\mathbb{N}_p^2$ يحقّق $j<i$، وليكن $x=(x_1,\ldots,x_p)$ من E^p، يُحقّق $x_i=x_j$. ولنتأمّل المُناقلة $\tau=\tau_{ij}=(i,j)$، أي التي تُبادل بين الدليلين i و j. وأخيراً لنذكّر بالرمز A_p الذي يرمز إلى الزمرة المتناوبة وهي الزمرة الجزئية من S_p المؤلّفة من التباديل التي يساوي توقيعها $+1$. لتكن $B=\{\tau\circ\sigma\in S_p:\sigma\in A_p\}$، عندئذ تكون B هي مجموعة التباديل ذات التوقيع -1، أي $B=S_p\backslash A_p$. ومن ثمّ

$$\mathcal{A}(f)=\sum_{\sigma\in A_p}\Delta(\sigma)\overline{\sigma}(f)+\sum_{\sigma\in A_p}\Delta(\tau\circ\sigma)\overline{\tau\circ\sigma}(f)$$

إذن

$$\mathcal{A}(f)=\sum_{\sigma\in A_p}\Big(\overline{\sigma}(f)-\overline{\tau\circ\sigma}(f)\Big)$$

ومنه

$$\mathcal{A}(f)(x)=\sum_{\sigma\in A_p}\Big(f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)})-f(x_{\tau\sigma(1)},\ldots,x_{\tau\sigma(p)})\Big)$$

ولكن، في حالة σ من A_p و k من $\mathbb{N}_p$، يتحقّق ما يأتي :

- إذا كان $\sigma(k)\notin\{i,j\}$، كان $\sigma(k)=\tau\circ\sigma(k)$ ومن ثمّ $x_{\sigma(k)}=x_{\tau\sigma(k)}$.
- وإذا كان $\sigma(k)=i$، كان $\tau\sigma(k)=j$ ومن ثمّ $x_{\sigma(k)}=x_i=x_j=x_{\tau\circ\sigma(k)}$.
- وإذا كان $\sigma(k)=j$، كان $i=\tau\sigma(k)$ ومن ثمّ $x_{\sigma(k)}=x_j=x_i=x_{\tau\circ\sigma(k)}$.

وعليه يكون $(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)})=(x_{\tau\circ\sigma(1)},\ldots,x_{\tau\circ\sigma(p)})$، ومن ثمّ $\mathcal{A}(f)(x)=0$.
ونكون بذلك قد أثبتنا أنّ $\mathcal{A}(f)$ متناوبٌ، وهذا يُكمل الإثبات. ❐

وأخيراً نُنهي هذه الفقرة بالخاصّة المهمّة الآتية للتطبيقات المتعدِّدة الخطيّة المتناوبة.

1-7. **مبرهنة**. ليكن p من $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$، وليكن E و F فضاءين شعاعيّين على حقل $\mathbb{K}$. وليكن التطبيق الـ $p-$خطّي المتناوب f من $\mathcal{L}_p^A(E^p;F)$. عندئذ لا تتغيَّر قيمة f، عند $(a_1,\ldots,a_p)$ من E^p، إذا أضفنا إلى أحد الأشعّة، وليكن a_i، عبارة خطيّةً ما $\sum_{j\in\mathbb{N}_p\backslash\{i\}}\lambda_j a_j$ ببقيّة الأشعة $(a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_p)$، أي

$$f(a_1,\ldots,a_p) = f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i + \sum_{j\in\mathbb{N}_p\backslash\{i\}}\lambda_j a_j, a_{i+1},\ldots,a_p)$$

الإثبات

تنتج صحة هذه الخاصّة من المساواة البسيطة الآتية :

$$\begin{aligned} f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i + \sum_{j\in\mathbb{N}_p\backslash\{i\}}\lambda_j a_j, a_{i+1},\ldots,a_p) &= f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_p) \\ &+ \sum_{j\in\mathbb{N}_p\backslash\{i\}}\lambda_j f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_j,a_{i+1},\ldots,a_p) \end{aligned}$$

ثُمّ نستفيدُ من كوْنِ f متناوباً، فيكتمل الإثبات. ❐

2. المُحدِّدات

1-2. **مبرهنة وتعريف**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً بُعده منته ويساوي n على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ أساساً للفضاء E. **يوجد** شكل $n-$خطيّ متناوب **وحيد** f يُحقِّق الشرط $f(e_1,\ldots,e_n) = 1$. نرمز إلى f بالرمز $\det_{\mathcal{E}}$، ونسمّيه **المُحدِّد** بالأساس $\mathcal{E}$. وتكون الجملة $(\det_{\mathcal{E}})$ أساساً للفضاء $\mathcal{L}_n^A(E^n;\mathbb{K})$، أي يكون

$$\mathcal{L}_n^A(E^n;\mathbb{K}) = \mathbb{K}\cdot\det_{\mathcal{E}}$$

وأخيراً، إذا كان $\mathcal{E}^* = (e_1^*,\ldots,e_n^*)$ هو الأساس الثنويّ للأساس $\mathcal{E}$، كان

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{E}}(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_{\sigma\in S_n}\Delta(\sigma)\prod_{i\in\mathbb{N}_n}\left\langle e_j^*, x_{\sigma(j)}\right\rangle \\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\Delta(\sigma)\prod_{i\in\mathbb{N}_n}\left\langle e_{\sigma(j)}^*, x_j\right\rangle \end{aligned}$$

وذلك أيّاً كان $(x_1,\ldots,x_n)$ من E^n.

الإثبات

نبدأ أولاً بإثبات الوجود. ليكن الشكل الـ $n-$خطيّ على E المعرّف بالعلاقة

$$\vartheta : E^n \to \mathbb{K}, \quad (x_1,\ldots,x_n) \mapsto \prod_{j=1}^{n} \left\langle e_j^*, x_j \right\rangle$$

ولنضع $\mathcal{A}(\vartheta) = \det_{\mathcal{E}}$. نعلم بمقتضى المبرهنة 1-6. أنّ $\det_{\mathcal{E}}$ شكلٌ $n-$خطيٌّ متناوبٌ. ويكون

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{E}}\left(x_1,\ldots,x_n\right) &= \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma)\overline{\sigma}\left(\vartheta\right)\left(x_1,\ldots,x_n\right) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \prod_{i \in \mathbb{N}_n} \left\langle e_j^*, x_{\sigma(j)} \right\rangle && (1)\\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma^{-1}) \prod_{i \in \mathbb{N}_n} \left\langle e_j^*, x_{\sigma^{-1}(j)} \right\rangle \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \prod_{i \in \mathbb{N}_n} \left\langle e_{\sigma(j)}^*, x_j \right\rangle && (2)
\end{aligned}$$

ونلاحظ أنّ

$$\det_{\mathcal{E}}(e_1,\ldots,e_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \prod_{i \in \mathbb{N}_n} \left\langle e_j^*, e_{\sigma(j)} \right\rangle = \Delta(I) \prod_{i \in \mathbb{N}_n} \left\langle e_j^*, e_j \right\rangle = 1$$

وبذلك نكون قد أكملنا إثبات جزء الوجود في المبرهنة، لنثبت إذن الوحدانية.

ليكن g من $\mathcal{L}_n^A(E^n;\mathbb{K})$، ولنعرّف $h = g - g(e_1,\ldots,e_n)\cdot \det_{\mathcal{E}}$. من الواضح أنّ h شكلٌ $n-$خطيٌّ متناوبٌ يُحقّق $h(e_1,\ldots e_n) = 0$. ولنتأمل تطبيقاً ما $\nu : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$.

- إذا لم يكن ν متبايناً، وُجِدَ دليلان $j \neq i$ يُحقّقان $\nu(i) = \nu(j)$، وينتج من ذلك أنّ
$$h(e_{\nu(1)},\ldots,e_{\nu(n)}) = 0$$
لأنّ h متناوبٌ.

- وإذا كان ν متبايناً، كان ν عنصراً من S_n وكان
$$h(e_{\nu(1)},\ldots,e_{\nu(n)}) = \overline{\nu}(h)(e_1,\ldots,e_n) = \Delta(\nu)\cdot h(e_1,\ldots,e_n) = 0$$

نستنتج من المناقشة السابقة أنّ

$$\forall\left(i_1,\ldots,i_n\right) \in \left(\mathbb{N}_n\right)^n, \quad h\left(e_{i_1},\ldots,e_{i_n}\right) = 0 \qquad (*)$$

ليكن $(x_1,\ldots,x_n)$ من E^n ، فيكون

$$\forall j \in \mathbb{N}_n,\ x_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ij} e_i$$

حيث $\xi_{ij} = \langle e_i^*, x_j \rangle$. وعندئذ

$$\begin{aligned} h(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_{i_1=1}^{n} \xi_{i_1 1} h(e_{i_1}, x_2,\ldots,x_n) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \xi_{i_1 1} \sum_{i_2=1}^{n} \xi_{i_2 2} h(e_{i_1}, e_{i_2},\ldots,x_n) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \xi_{i_1 1}\xi_{i_2 2}\cdots\xi_{i_n n} h(e_{i_1}, e_{i_2},\ldots,e_{i_n}) = 0 \end{aligned}$$

إذن $h = 0$ أو $g = g(e_1,\ldots,e_n)\cdot \det_{\mathcal{E}}$ ، وهذا يُثبتُ المطلوب. ❐

2-2. **ملاحظة**. إذا كان $(x_1,\ldots,x_n)$ من E^n ، وكان $\forall j \in \mathbb{N}_n,\ x_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ij} e_i$ حيث $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ هو أساس للفضاء E ، كان

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{E}}(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_{\sigma\in S_n} \Delta(\sigma)\, \xi_{1\sigma(1)}\xi_{2\sigma(2)}\cdots\xi_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \Delta(\sigma)\, \xi_{\sigma(1)1}\xi_{\sigma(2)2}\cdots\xi_{\sigma(n)n} \end{aligned}$$

وذلك بمقتضى المبرهنة السابقة.

3-2. **مبرهنة**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً بُعده منته ويساوي n من $\mathbb{N}^*$ على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{A} = (a_1,\ldots,a_n)$ عنصراً من E^n . عندئذ تكون الخواص الثلاث الآتية متكافئة:

① الجملة $\mathcal{A}$ أساس للفضاء E .

② أيّاً كان الأساس $\mathcal{E}$ للفضاء E ، فلدينا $\det_{\mathcal{E}}(a_1,\ldots,a_n) \neq 0$.

③ يوجد أساس $\mathcal{E}$ للفضاء E ، يُحقِّق $\det_{\mathcal{E}}(a_1,\ldots,a_n) \neq 0$.

الإثبات

① ⇐ ② ليكن $\mathcal{E}$ أساساً ما للفضاء E ، نجد، بمقتضى المبرهنة السابقة، عنصراً λ من $\mathbb{K}$ يُحقِّق $\det_{\mathcal{E}} = \lambda \det_{\mathcal{A}}$.

فمن جهة أولى، يكون $\lambda = \det_{\mathcal{E}}(a_1,\ldots,a_n) = \lambda\det_{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n)$. ومن جهة ثانية، يكون $1 = \det_{\mathcal{E}}(e_1,\ldots,e_n) = \lambda\det_{\mathcal{A}}(e_1,\ldots,e_n)$. إذن

$$\det_{\mathcal{E}}(a_1,\ldots a_n) = \lambda \neq 0$$

② ⇐ ③ هذا اقتضاء تافه، لوجود أساس للفضاء E.

③ ⇐ ① إنّ الجملة $\mathcal{A}$ حرّةٌ، وإلاّ أمكن التعبير عن أحد الأشعة $a_1,\ldots,a_n$، وليكن a_i، بعبارة خطيّة $a_i = \sum_{j\in\mathbb{N}_n\setminus\{i\}} \lambda_j a_j$ في بقية الأشعة. ومن ثَمّ يكون، استناداً إلى المبرهنة 1-7.

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{E}}(a_1,\ldots,a_p) &= \det_{\mathcal{E}}(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i - \sum_{j\in\mathbb{N}_p\setminus\{i\}}\lambda_j a_j, a_{i+1},\ldots,a_p)\\ &= \det_{\mathcal{E}}(a_1,\ldots,a_{i-1},0,a_{i+1},\ldots,a_p) = 0\end{aligned}$$

وبذلك يتم الإثبات. ❐

2-4. نتيجة. ليكن E فضاءً شعاعيّاً بُعده منته ويساوي n من $\mathbb{N}^*$ على حقل $\mathbb{K}$. ولتكن $\mathcal{A} = (a_1,\ldots,a_n)$ جملة من E. إذا كانت $\mathcal{A}$ جملة مرتبطة خطيّاً كان

$$\det_{\mathcal{E}}(a_1,\ldots,a_n) = 0$$

أيّاً كان الأساس $\mathcal{E}$ للفضاء E.

3. مُحدِّد تطبيق خطيّ من فضاء شعاعي إلى نفسه

3-1. مبرهنة وتعريف. ليكن E فضاءً شعاعيّاً بُعده منته ويساوي n من $\mathbb{N}^*$ على حقل $\mathbb{K}$. وليكن u من $\mathcal{L}(E)$. يوجد في الحقل $\mathbb{K}$ عنصر وحيد $\det u$، نسمّيه **مُحدِّد التطبيق الخطيّ** u، يُحقِّق الشرط

$$\forall f \in \mathcal{L}_n^A(E^n,\mathbb{K}),\quad \forall (x_1,\ldots,x_n)\in E^n,$$
$$f(u(x_1),\ldots,u(x_n)) = \det u \cdot f(x_1,\ldots,x_n)$$

الإثبات

ليكن f عنصراً من $\mathcal{L}_n^A(E^n,\mathbb{K})$. ولنعرّف $\Phi_u(f)$ كما يلي

$$\Phi_u(f) : E^n \to \mathbb{K},\quad (x_1,\ldots.x_n)\mapsto f(u(x_1),\ldots,u(x_n))$$

من الواضح أنّ $\Phi_u(f)$ شكلٌ $n-$خطّي متناوبٌ على E.

لنتأمّل إذن التطبيق الخطيّ

$$\Phi_u : \mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}) \to \mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}), \quad f \mapsto \Phi_u(f)$$

لمّا كان $\dim \mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}) = 1$، استنتجنا أنّ $\dim \mathcal{L}(\mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K})) = 1$، وكان التطبيق المطابق $(I_{\mathcal{L}(\mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}))})$ أساساً للفضاء $\mathcal{L}(\mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}))$. إذن يوجد عدد وحيد $\det u$ يُحقِّق $\Phi_u = \det u \cdot I_{\mathcal{L}(\mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}))}$. وتُكافِئ هذه المساواة العلاقة المطلوبة. ❐

3-2. **نتيجة**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً بُعده منته ويساوي n من $\mathbb{N}^*$ على حقل $\mathbb{K}$. وليكن u من $\mathcal{L}(E)$، وأخيراً ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً ما للفضاء E. عندئذ يكون

$$\det u = \det_{\mathcal{E}}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$$

الإثبات

لمّا كان لدينا

$$\forall f \in \mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}), \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n,$$
$$f(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det u \cdot f(x_1, \ldots, x_n)$$

نتجت العلاقة المطلوبة بأخذ $f = \det_{\mathcal{E}}$ و $(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{E}$. ❐

3-3. **مبرهنة**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً بُعده منته ويساوي n من $\mathbb{N}^*$ على حقل $\mathbb{K}$. عندئذ تتحقّق الخواص الآتية:

1. $\det I_E = 1$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall u \in \mathcal{L}(E), \qquad \det(\lambda u) = \lambda^n \det u$
3. $\forall u \in \mathcal{L}(E), \qquad \det u = \det {}^t u$
4. $\forall (u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2, \quad \det u \circ v = \det u \cdot \det v$

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً للفضاء E، وليكن $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{E}$.

1. نعلم بمُقتضى المبرهنة السابقة أنّ

$$\det I_E = \det_{\mathcal{E}}(I_E(e_1),\dots,I_E(e_n)) = \det_{\mathcal{E}}(e_1,\dots,e_n) = 1$$

2. وكذلك لدينا

$$\begin{aligned}\det(\lambda u) &= \det_{\mathcal{E}}(\lambda u(e_1),\dots,\lambda u(e_n))\\ &= \lambda^n \det_{\mathcal{E}}(u(e_1),\dots,u(e_n)) = \lambda^n \det u\end{aligned}$$

3. لتكن المصفوفتان $\text{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E}) = (a_{ij})$ و $\text{mat}({}^t u,\mathcal{E}^*,\mathcal{E}^*) = (b_{ij})$. نعلم أنّه، أيّاً كان j من $\mathbb{N}_n$، كان

$${}^t u(e_j^*) = \sum_{i=1}^n b_{ij}e_i^* \quad \text{و} \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$$

وكذلك $\forall (i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\quad a_{ij} = b_{ji}$. لذلك يمكننا أن نكتب استناداً إلى النتيجة 2-2.

$$\begin{aligned}\det u &= \det_{\mathcal{E}}(u(e_1),\dots,u(e_n)) = \sum_{\sigma\in S_n}\Delta(\sigma)\cdot\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}\\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\Delta(\sigma)\cdot\prod_{j=1}^n b_{j\sigma(j)} = \det_{\mathcal{E}^*}({}^t u(e_1^*),\dots,{}^t u(e_n^*)) = \det {}^t u\end{aligned}$$

4. لمّا كان التطبيق

$$f : E^n \to \mathbb{K},\quad (x_1,\dots,x_n)\mapsto \det_{\mathcal{E}}(v(x_1),\dots,v(x_n))$$

شكلاً $n-$ خطيّاً متناوباً على E، كان

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in E^n,\quad f(u(x_1),\dots,u(x_n)) = \det u\cdot f(x_1,\dots,x_n)$$

إذن أيّاً كان $(x_1,\dots,x_n)$ من E^n، يكُن

$$\det_{\mathcal{E}}(v\circ u(x_1),\dots,v\circ u(x_n)) = \det u\cdot\det_{\mathcal{E}}(v(x_1),\dots,v(x_n))$$

فإذا أخذنا $(x_1,\dots,x_n) = (e_1,\dots,e_n)$ وجدنا

$$\begin{aligned}\det v\circ u &= \det_{\mathcal{E}}(v\circ u(e_1),\dots,v\circ u(e_n))\\ &= \det u\cdot\det_{\mathcal{E}}(v(e_1),\dots,v(e_n))\\ &= \det u\cdot\det v\end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته. ❐

3-4. مبرهنة. ليكن E فضاءً شعاعيّاً بُعده منته ويساوي n من $\mathbb{N}^*$ على حقل $\mathbb{K}$. وليكن u من $\mathcal{L}(E)$. يكون u قَلوباً إذا وفقط إذا كان $\det u \neq 0$، وعندئذ يكون

$$\det u^{-1} = \frac{1}{\det u}$$

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً ما للفضاء E. يكون التطبيق u قَلوباً إذا وفقط إذا كان $n = \operatorname{rg} u$، وهذا يُكافئ كوْن $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ جملة حرّة. وهذا بدوره يُكافئ كوْن

$$\det u = \det_{\mathcal{E}}(u(e_1), \ldots, u(e_n)) \neq 0$$

وتنتج المساواة الأخيرة من العلاقة $u \circ u^{-1} = I_E$ وذلك بمقتضى المبرهنة السابقة. ❐

4. مُحدِّد مصفوفة مربّعة

1-4. تعريف. لتكن $M = (a_{ij})$ مصفوفة مربّعة من المرتبة $n \geq 1$ على حقل $\mathbb{K}$. نسمّي محدِّد أعمدة المصفوفة M بالأساس القانوني $\mathcal{E}_n$ للفضاء $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ **مُحدِّد المصفوفة** M ونرمز إليه بالرمز $\det M$، أي

$$\det M = \det_{\mathcal{E}_n}(C_1(M), \ldots, C_n(M))$$

و $(C_j(M))_{j\in\mathbb{N}_n}$ هي أعمدة المصفوفة M. تتيح لنا النتيجة 2-2. أن نكتبَ إذن

$$\det M = \sum_{\sigma\in S_n} \Delta(\sigma)\cdot\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma\in S_n} \Delta(\sigma)\cdot\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}$$

2-4. ملاحظات

- ❖ تبيّن المساواة السابقة مباشرة أنّ $\det M = \det {}^tM$.
- ❖ ومن ناحية أخرى، يبيّن التعريف السابق أنه إذا تأمّلنا التطبيق الخطّي
$$U_M : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}),\ X \mapsto MX$$
حيث M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، كان $\det M = \det U_M$.
- ❖ إذا طُبِّق على أعمدة (أسطر) مصفوفة مربّعة M، تبديل σ ضُرِبتْ قيمة $\det M$ في العدد $\Delta(\sigma)$. وذلك لأنّ المحدِّد شكل خطّي متناوبٌ فهو إذن تخالفي.

- لا تتغيّر قيمة مُحدِّد مصفوفة إذا جمعنا إلى أحد أعمدتها (أسطرها) عبارة خطيّة في بقية الأعمدة (الأسطر)، وذلك استناداً إلى المبرهنة 1-7.

- وبناءً على المبرهنة 3-3. والملاحظة الأولى يكون

1. $\det I_n = 1$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \det(\lambda M) = \lambda^n \det M$
3. $\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad \det(MN) = \det M \cdot \det N$

5. حساب المحدِّدات

5-1. مبرهنة. لتكن $M = (a_{ij})$ مصفوفة مربّعة من المرتبة $n \geq 1$ على حقل $\mathbb{K}$. ولنفترض أنّ $n = p + q$ حيث $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$، وأنّ المصفوفة M تُكتب بالشكل

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$$

حيث $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ و $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ و $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$ و 0 هي المصفوفة الصفريّة في $\mathcal{M}_{q\times p}(\mathbb{K})$. عندئذ يكون $\det M = \det A \cdot \det B$.

الإثبات

لنرمز بالرموز a_1 ، a_2 ، $\ldots$ ، a_p ، $a_{p+1} = b_{p+1} + c_{p+1}$ ، $\ldots$ ، $a_n = b_n + c_n$ إلى أعمدة المصفوفة M. أي

$$a_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{pk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 1 \leq k \leq p; \quad a_k = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{pk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{c_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{p+1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}}_{b_k}, \quad p+1 \leq k \leq n;$$

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ الأساس القانوني للفضاء $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. ولنعرِّف $E' = \mathrm{vect}(\mathcal{E}')$ حيث $\mathcal{E}' = (e_1, \ldots, e_p)$، و $E'' = \mathrm{vect}(\mathcal{E}'')$ حيث $\mathcal{E}'' = (e_{p+1}, \ldots, e_n)$. فيكون a_j عنصراً من E' أيّاً كان j من $\mathbb{N}_p$.

لنتأمّل الشكل الـ p– خطّي المتناوب

$$f : E'^p \to \mathbb{K}, \quad (x_1,\ldots,x_p) \mapsto \det_{\mathcal{E}}(x_1,\ldots,x_p,a_{p+1},\ldots,a_n)$$

لمّا كان $(\det_{\mathcal{E}'})$ أساساً للفضاء $\mathcal{L}_p^A(E'^p;\mathbb{K})$ ، أمكننا إيجاد عددٍ λ يُحقّق $f = \lambda \det_{\mathcal{E}'}$. ويكون عندئذ $\lambda = f(e_1,\ldots,e_p)$. وعليه يمكننا أن نكتب:

$$\begin{aligned} \det M &= f(a_1,\ldots,a_p) = \lambda \cdot \det_{\mathcal{E}'}(a_1,\ldots,a_p) \\ &= f(e_1,\ldots,e_p) \cdot \det A \end{aligned} \quad ❶$$

من جهة أخرى، لمّا كان $c_j \in E'$ أيّاً كان j من $\{p+1,\ldots,n\}$ ، ولأن جمع عبارة خطية ما في الأشعة $(e_1,\ldots,e_p)$ إلى العمود a_j ، في حالة j من $\{p+1,\ldots,n\}$ ، لا يغيِّر قيمة المُحدِّد الآتي :

$$\lambda = \det_{\mathcal{E}}(e_1,\ldots,e_p,c_{p+1}+b_{p+1},\ldots,c_n+b_n)$$

نتج لدينا أنّ

$$\lambda = \det_{\mathcal{E}}(e_1,\ldots,e_p,b_{p+1},\ldots,b_n) \quad ❷$$

وأخيراً، لمّا كان

$$g : E''^q \to \mathbb{K}, \quad (x_{p+1},\ldots,x_n) \mapsto \det_{\mathcal{E}}(e_1,\ldots,e_p,x_{p+1},\ldots,x_n)$$

شكلاً q– خطياً متناوباً على E'' ، يوجد عددٌ μ يُحقّق $g = \mu \det_{\mathcal{E}''}$ ، ويكون

$$\mu = g(e_{p+1},\ldots,e_n) = \det_{\mathcal{E}}(e_1,\ldots,e_n) = 1$$

ينتج من ذلك أنّ $g = \det_{\mathcal{E}''}$ ، وبالاستفادة من ❷ يكون

$$\begin{aligned} \lambda &= \det_{\mathcal{E}}(e_1,\ldots,e_p,b_{p+1},\ldots,b_n) \\ &= g(b_{p+1},\ldots,b_n) = \det_{\mathcal{E}''}(b_{p+1},\ldots,b_n) = \det B \end{aligned}$$

وبالعودة إلى العلاقة ❶ نجد

$$\det M = \det A \cdot \det B$$

فيكتمل الإثبات. ❒

يمكننا بالتدريج تعميم المبرهنة السابقة على النحو الآتي:

5-2. **مبرهنة**. لتكن M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفة مربّعة من المرتبة $n \geq 1$ على حقل $\mathbb{K}$.
ولنفترض أن المصفوفة M مثلثيّة كُتليّاً، أي إنه توجد $(p_1,\ldots,p_m)$ في $\mathbb{N}^{*m}$ تُحقّق $n = \sum_{i=1}^{m} p_i$، وتوجد مصفوفات $(A_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_m^2}$ تحقّق $A_{ij} \in \mathcal{M}_{p_i\times p_j}(\mathbb{K})$ على أن تكون A_{ij} مصفوفة صفريّة في حالة $j > i$، فتُكتب M بالشكل:

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & & A_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{mm} \end{bmatrix}$$

عندئذ يكون

$$\det M = \prod_{k=1}^{m} \det A_{kk}$$

5-3. **مبرهنة**. لتكن $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفة مربّعة من المرتبة $n \geq 1$ على حقل $\mathbb{K}$. ولنعرّف أيّاً كانت (i,j) من $\mathbb{N}_n^2$ المصفوفة M_{ij} من $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ التي نحصل عليها بحذف السطر ذي الدليل i والعمود ذي الدليل j من المصفوفة M. عندئذ يكون

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad \det M = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det M_{ij}, \qquad ❶$$

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \det M = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det M_{ij}, \qquad ❷$$

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ الأساس القانوني للفضاء $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. إنّ محدِّد المصفوفة M هو محدِّد أعمدتها بالأساس $\mathcal{E}$. أي

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i \quad \text{و} \quad \det M = \det_{\mathcal{E}}(C_1,\ldots,C_n)$$

لنثبّت عنصراً j من $\mathbb{N}_n$. لمّا كان التطبيق

$$\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \det_{\mathcal{E}}(C_1,\ldots,C_{j-1},x,C_{j+1},\ldots,C_n)$$

خطيّاً، كان بالإمكان أن نكتب

$$\begin{aligned}\det M &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \det_{\mathcal{E}}(C_1,\dots,C_{j-1},e_i,C_{j+1},\dots,C_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{j-1} \cdot \det_{\mathcal{E}}(e_i,C_1,\dots,C_{j-1},C_{j+1},\dots,C_n)\end{aligned}$$

إذ تنتج المساواة الأخيرة من كوْن $\Delta(\sigma_j)$ هو توقيع $\sigma_j = (1,2,\dots,j)$ الذي يساوي $(-1)^{j-1}$.

لحساب المُحدِّد $\det_{\mathcal{E}}(e_i,C_1,\dots,C_{j-1},C_{j+1},\dots,C_n)$ نطبّق التبديل الممثَّل بالدورة $\sigma_i = (1,2,\dots,i)$، والذي يساوي توقيعه $\Delta(\sigma_i) = (-1)^{i-1}$، على أسطر المصفوفة التي أعمدتها هي $(e_i,C_1,\dots,C_{j-1},C_{j+1},\dots,C_n)$ فتصبح قيمة المُحدِّد

$$\det_{\mathcal{E}}(e_i,C_1,\dots,C_{j-1},C_{j+1},\dots,C_n)$$

مساويةً لما يأتي :

$$(-1)^{i-1}\det\begin{bmatrix} 1 & a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n}\\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n}\\ & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}\end{bmatrix}$$

وتُكتب هذه النتيجة بالشكل

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{E}}(e_i,C_1,\dots,C_{j-1},C_{j+1},\dots,C_n) &= (-1)^{i-1}\det\left[\begin{array}{c|c} 1 & a_{i1}\dots a_{in}\\ \hline 0 & \\ \vdots & M_{ij}\\ 0 & \end{array}\right]\\ &= (-1)^{i-1}\det M_{ij}\end{aligned}$$

وبالعودة إلى $\det M$ نجد

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{j-1}(-1)^{j-1}\det M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det M_{ij}$$

وهذا يثبت المساواة ❶.

وتنتج المساواة ❷ من السابقة بالاستفادة من كوْن $\det M = \det {}^tM$. ❐

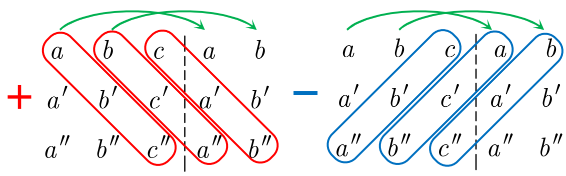
5-4. ملاحظات

- تسمّى العلاقةُ ❶ في المبرهنة السابقة نشرَ مُحدِّد M وفق العمود ذي الدليل j.
- وتسمّى العلاقة ❷ في المبرهنة نفسها نشرَ مُحدِّد M وفق السطر ذي الدليل i.
- تنتج من المبرهنة السابقة الحالتان الخاصّتان الآتيتان:

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} = ab' - ba'$$

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - a'bc'' - ab''c'$$

إذ يمكنُنا تذكُّر هذه القاعدة بالاستفادة من الطريقة الموضّحة في الشكل الآتي:



5-5. تعريف. لتكن $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفة مربّعة من المرتبة $n \geq 1$ على حقل $\mathbb{K}$. ولنعرّف أيّاً كانت (i,j) من $\mathbb{N}_n^2$، المصفوفة M_{ij} من $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ التي نحصل عليها بحذف السطر ذي الدليل i والعمود ذي الدليل j من المصفوفة M. ولنضع

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

نسمّي العدد A_{ij} **تمام العامل** a_{ij} في المصفوفة M. ونرمز بالرمز $\mathrm{com}(M)$ إلى المصفوفة المربّعة (A_{ij}) من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، ونسميها **تمام المصفوفة** M.

5-6. مبرهنة. لتكن $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفة مربّعة من المرتبة $n \geq 1$ على حقل $\mathbb{K}$. عندئذ يكون

$$M \cdot {}^t\mathrm{com}(M) = {}^t\mathrm{com}(M) \cdot M = \det(M) \cdot I_n$$

الإثبات

سنحتفظ بالرموز الواردة في التعريف السابق، ولتكن $M\,{}^t\mathrm{com}(M) = (\gamma_{ij})$. عندئذ

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k}\det M_{jk}$$

- ❖ فإذا كان $j = i$ مثّلَت العلاقة السابقة نشرَ مُحدِّد M وفق السطر ذي الدليل i . إذن يكون $\gamma_{ij} = \det M$ في هذه الحالة.
- ❖ وإذا كان $j \neq i$ مثّلَت العلاقة السابقة النشرَ وفق السطر ذي الدليل i، لمُحدِّد المصفوفة $\widetilde{M}$ التي تنتج من M باستبدال السطر ذي الدليل i بالسطر ذي الدليل j . فيكون في هذه الحالة $\gamma_{ij} = \det \widetilde{M} = 0$ لأنّ للمصفوفة $\widetilde{M}$ سطرين متماثلين.

نكون قد أثبتنا أنّ $M\,{}^t\,\mathrm{com}(M) = (\det M)I_n$ ، ويثبتُ القارئ بأسلوب مماثل أنّه لدينا أيضاً ${}^t\mathrm{com}(M)\,M = (\det M)\cdot I_n$ ، فيكتمل البرهان. ❒

5-7. نتيجة : لتكن $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفة مربّعة من المرتبة $n \geq 1$ على حقل $\mathbb{K}$. إذا كانت M قَلوبة، أي تنتمي إلى $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$، كان

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\cdot {}^t\mathrm{com}(M)$$

5-8. مثال تقليدي. لتكن $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ من $\mathbb{K}^n$ ، وليكن

$$V(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \det\begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_1^{n-1} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & & \xi_2^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \xi_n & \xi_n^2 & \ldots & \xi_n^{n-1}\end{bmatrix} = \det\left((\xi_i^{j-1})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}\right)$$

والمطلوب حساب المُحدِّد $V(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ ، الذي يسمّى محدِّد **فاندرموند** VANDERMONDE.

سنفترض فيما يلي أنّ القيم $\xi_1,\ldots,\xi_n$ مختلفة مثنى مثنى، وإلاّ كانت قيمة المُحدِّد المطلوب صفراً لتساوي سطرين في المصفوفة المدروسة في تلك الحالة.

نتأمّل كثير الحدود P من $\mathbb{K}[X]$ المُعرّف كما يأتي

$$P(X) = \det \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_1^{n-1} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & & \xi_2^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & X & X^2 & \ldots & X^{n-1} \end{bmatrix} = V(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, X)$$

من الواضح أنّ $\deg P \leq n-1$ ، وأنّ $\forall k \in \mathbb{N}_{n-1}, \quad P(\xi_k) = 0$. ينتج من ذلك أنّ

$$P(X) = \lambda \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (X - \xi_k)$$

و λ هي أمثال X^{n-1} في P ، فهي إذن $V(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. ومنه

$$P(X) = V(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (X - \xi_k)$$

وهذا، حين تكون $X = \xi_n$ ، يقتضي أنّ

$$V(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n) = V(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (\xi_n - \xi_k)$$

تتيح لنا العلاقة السابقة أن نثبت بالتدريج

$$V(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n) = (\xi_2 - \xi_1) \cdots \prod_{k=1}^{m-1} (\xi_m - \xi_k) \cdots \prod_{k=1}^{n-2} (\xi_{n-1} - \xi_k) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (\xi_n - \xi_k)$$

أو

$$V(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\xi_j - \xi_i)$$

6. جمل المعادلات الخطّية

ليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديلياً، ولتكن الجماعتان $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$ و $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ من $\mathbb{K}$.

تُسمّى جملة المعادلات

$$\mathcal{L}:\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & \beta_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & \beta_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & \beta_n \end{array}\right.$$

جملة n معادلة خطيّة ذات p مجهولاً هي x_1، ...، x_p.

ويمكننا أن نقرن بجملة المعادلات الخطيّة $\mathcal{L}$ جملةَ معادلات خطيّة أخرى $\mathcal{H}$ نسميّها جملة المعادلات الخطيّة المتجانسة الموافقة للجملة $\mathcal{L}$، وهي

$$\mathcal{H}:\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

وإذا رمزنا بالرمز $B_{\mathcal{L}}$ إلى الشعاع $^t[\beta_1,\ldots,\beta_n]$ من $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K})$ ورمزنا، حين يكون j من $\mathbb{N}_p$، بالرمز C_j إلى الشعاع $^t[a_{1j},\ldots,a_{nj}]$ من $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K})$، كُتِبتْ جملة المعادلات الخطيّة $\mathcal{L}$ بالشكل المُكافئ الآتي، والذي يسمّي الشكل الشعاعيّ للجملة الخطيّة $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}^\dagger : x_1\cdot C_1 + x_2\cdot C_2 + \cdots + x_p\cdot C_p = B_{\mathcal{L}}$$

وكذلك إذا رمزنا بالرمز X إلى الشعاع المجهول $^t[x_1,\ldots,x_p]$ من $\mathcal{M}_{p\times1}(\mathbb{K})$، وبالرمز $A_{\mathcal{L}}$ إلى المصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ التي أعمدتها هي $C_1, C_2, \ldots, C_p$، كُتِبتْ جملة المعادلات الخطيّة $\mathcal{L}$ بالشكل المُكافئ الآتي، والذي يسمّي الشكل المصفوفيّ للجملة الخطيّة $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}^* : A_{\mathcal{L}}\, X = B_{\mathcal{L}}$$

وأخيراً إذا رمزنا بالرمز $u_{\mathcal{L}}$ إلى التطبيق الخطّي

$$u_{\mathcal{L}} : \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}), \quad Y \mapsto A_{\mathcal{L}}\, Y$$

كُتِبتْ جملة المعادلات الخطيّة $\mathcal{L}$ بالشكل المُكافئ الآتي، والذي يسمّي الشكل الهندسيّ للجملة الخطيّة $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}^{\bullet} : u_{\mathcal{L}}(X) = B_{\mathcal{L}}$$

لمّا كانت رتبة التطبيق الخطّي $u_{\mathcal{L}}$ هي نفسها رتبة المصفوفة $A_{\mathcal{L}}$، وهي كذلك تساوي رتبة جملة الأشعّة $C_1, C_2, \ldots, C_p$. كان بالإمكان وضع التعريف الآتي:

6-1. تعريف. نسمّي رتبة جملة المعادلات الخطّية $\mathcal{L}$، أيّاً من الأعداد المتساوية الآتية: رتبة التطبيق الخطّي $u_{\mathcal{L}}$، أو رتبة المصفوفة $A_{\mathcal{L}}$، أو رتبة جملة الأشعّة $C_1, C_2, \ldots, C_p$. ونرمز إلى هذه الرتبة بالرمز $\operatorname{rg} \mathcal{L}$.

6-2. مبرهنة. بالاحتفاظ بالرموز والتعاريف السابقة، يكون لدينا ما يأتي :

① إذا كان $\operatorname{rg} \mathcal{L} = n = p$، قَبِلتْ جملة المعادلات الخطيّة $\mathcal{L}$ (التي تسمّى في هذه الحالة جملة كرامر (Cramer) حلاًّ، وحلاًّ وحيداً فقط.

② إذا رمزنا بالرمز $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ إلى مجموعة حلول الجملة المتجانسة $\mathcal{H}$، كان $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ فضاء شعاعياً جزئياً من $\mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K})$ بُعده يساوي $p - \operatorname{rg} \mathcal{L}$.

③ تقبل الجملة $\mathcal{L}$ حلاً، إذا وفقط إذا انتمى الشعاع $B_{\mathcal{L}}$ إلى صورة التطبيق الخطيّ $u_{\mathcal{L}}$، أي إذا كان $B_{\mathcal{L}} \in \operatorname{Im} u_{\mathcal{L}}$. وفي هذه الحالة، إذا كان X_0 حلاً ما للجملة $\mathcal{L}$، وكانت $\mathcal{S}(\mathcal{L})$ مجموعة حلول الجملة $\mathcal{L}$، كان

$$\mathcal{S}(\mathcal{L}) = \{X_0 + X : X \in \mathcal{S}(\mathcal{H})\} = X_0 + \mathcal{S}(\mathcal{H})$$

الإثبات

إنّ الإثبات بسيط جداً ومتروك تمريناً للقارئ. ❒

6-3. تعريف. نقول عن جملتي معادلات خطّية $\mathcal{L}$ و $\mathcal{L}'$ إنّهما متكافئتان، إذا وفقط إذا كان لهما مجموعة الحلول نفسها، أي $\mathcal{S}(\mathcal{L}) = \mathcal{S}(\mathcal{L}')$.

تقوم الدراسة العملية لجملة معادلات خطيّة $\mathcal{L}$ على إخضاع هذه الجملة لِعمليات أوّلية بهدف تحويلها إلى جملة مُكافئة $\widetilde{\mathcal{L}}$، تكون أبسط وأسهل معالجة.

لنتأملّ مجدّداً الجملة $\mathcal{L}$، ولنرمز بالرمز $\mathcal{L}_i$ إلى المعادلة ذات الرقم i، وأخيراً لنذكّر بالرمز $(E_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ للدلالة على الأساس القانوني في $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. نسمّي عمليّة أوّلية أيّ واحد من التحويلات الآتية :

- المُبادلة بين المعادلتين $\mathcal{L}_i$ و $\mathcal{L}_j$، تُكافئ هذه العمليّة ضرب كلٍّ من المصفوفة $A_{\mathcal{L}}$ والشعاع $B_{\mathcal{L}}$ يساراً في المصفوفة P_{ij} :

$$P_{ij}=\begin{array}{cc}
\begin{matrix} & & & i & & j & & & \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & & & & & & & 0\\
0 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\
 & & & \vdots & 1\;\ddots\;1 & \vdots & & & \\
 & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & 1 & \ddots & 0\\
0 & & & & & & & 0 & 1
\end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{array} = I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$

والجملة التي نحصل عليها بعد إجراء هذه العمليّة تُكافئ الأولى لأنّ المصفوفة P_{ij} قَلوبة.

- استبدال $\mathcal{L}_i + \lambda\cdot\mathcal{L}_j$ بالمعادلة $\mathcal{L}_i$ حيث λ من $\mathbb{K}$، و $i \neq j$، تُكافئ هذه العمليّة ضرب كلٍّ من المصفوفة $A_{\mathcal{L}}$ والشعاع $B_{\mathcal{L}}$ يساراً في المصفوفة القلوبة $I_n + \lambda E_{ij}$:

$$I_n+\lambda E_{ij}=\begin{array}{cc}
\begin{matrix} & & & j & \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix}
1 & & & & \\
 & 1 & & \lambda & \\
 & & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & 1
\end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{array}$$

- استبدال $\lambda\cdot\mathcal{L}_i$ بالمعادلة $\mathcal{L}_i$ حيث λ من $\mathbb{K}^*$، تُكافئ هذه العمليّة ضرب كلٍّ من المصفوفة $A_{\mathcal{L}}$ والشعاع $B_{\mathcal{L}}$ يساراً في المصفوفة القلوبة $I_n + (\lambda-1)E_{ii}$:

$$I_n+(\lambda-1)E_{ii}=\begin{array}{cc}
\begin{matrix} & & i & & \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix}
1 & & & & \\
 & \ddots & & & \\
 & & \lambda & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & 1
\end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{array}$$

يتيح الاختيار المناسب لهذه العمليات الأوّلية، **بعد إعادة ترتيب (أو تسميّة) المجاهيل إذا اقتضى الأمر**، تحويل الجملة الخطيّة $\mathcal{L}$ إلى جملة مُكافئة $\tilde{\mathcal{L}} : \tilde{A}\,X = \tilde{B}$، حيث يكون للمصفوفة $\tilde{A}$ الشكل الآتي

$$\tilde{A} = \begin{array}{cc} & \overleftrightarrow{\qquad r \qquad} \\ r \updownarrow & \begin{bmatrix} \times & \cdots & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \times & \times & \cdots & \times \\ & & \ddots & \times & \cdots & \times \\ & & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} = (\tilde{a}_{ij})$$

و r هي رتبة المصفوفة A، وللشعاع $\tilde{B}$ الشكل ${}^{t}\left[\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_r, \ldots, \tilde{b}_n\right]$، حيث يمكن (**بعد إعادة ترتيب المجاهيل إذا لزم**) أن نفترض أنّ $0 \neq \tilde{a}_{11} \cdot \tilde{a}_{22} \cdots \tilde{a}_{rr}$ وهذا ما سنفعله لاحقاً.

وهنا نناقش الحالات الآتية:

① حالة $n = r < p$. فتكون الجملة حَلولة، وبالسماح للمتحولات $x_{r+1}, \ldots, x_p$ بأخذ قيم اختياريّة نحصل على جملة كرامر، مثلّثية سهلة الحل، وتعطي $x_1, \ldots, x_r$ بدلالة $x_{r+1}, \ldots, x_p$.

② حالة $n = r = p$. فتكون الجملة جملة كرامر، مثلّثية سهلة الحل.

③ حالة $n > r$، و ${}^{t}[\tilde{b}_{r+1}, \ldots, \tilde{b}_n] \neq 0$. لا تقبل الجملة في هذه الحالة حلولاً.

④ حالة $n > r$، و ${}^{t}[\tilde{b}_{r+1}, \ldots, \tilde{b}_n] = 0$. الجملة حَلولة، وتؤول الجملة في هذه الحالة إلى الحالة الأولى.

4-6. مثال. حلّ الجملة الخطيّة التالية

$$\mathcal{L} : \begin{cases} L_1 & : & & & y & + & z & = & 5 \\ L_2 & : & 2x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ L_3 & : & 3x & + & y & - & z & = & 4 \end{cases}$$

لتسهيل عرض الحل سنقوم بتمثيل التحويلات الأوّلية ببساطة، كما في الشكل الآتي، حيث وضعنا في العمود الأوّل أمثال x، وفي العمود الثاني أمثال y، ووضعنا أمثال z في العمود الثالث، وأخيراً وضعنا الطرف الثاني في العمود الرابع.

إنّ جميع الجمل الخطيّة الممثلة فيما يأتي متكافئة:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 2 & 9\\ 3 & 1 & -1 & 4\end{array}\right] \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 3 & 1 & -1 & 4\end{array}\right] \underset{L_3\leftarrow L_3-\frac{3}{2}L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 0 & -\frac{1}{2} & -4 & -\frac{19}{2}\end{array}\right]$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+\frac{1}{2}L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -7\end{array}\right] \underset{L_3\leftarrow -\frac{2}{7}L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_3\\ L_1\leftarrow L_1-2L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right] \underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$$

$$\underset{L_1\leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$$

إذن تُكافئ الجملةُ الخطيّة $\mathcal{L}$ الجملة

$$\widetilde{\mathcal{L}} : \begin{cases} x = 1\\ y = 3\\ z = 2\end{cases}$$

وهي تبيِّن مباشرة الحلّ المطلوب.

5-6. **ملاحظة مهمّة**. إذا أردنا حلّ عددٍ من الجمل الخطيّة

$$\mathcal{L}_i : A\,X_i = B_i, \quad i = 1,2,\ldots,k$$

لها جميعاً المصفوفة A نفسها، فمن الأفضل، والأسرع، إجراء العمليات الأوّلية على الأشعّة $B_1,\ldots,B_{k-1},B_k$ في آنٍ واحدٍ مع المصفوفة A.

لنأخذ مثلاً حالة مصفوفة قَلوبة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، وليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ الأساس القانوني للفضاء $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. أمّا أعمدة المصفوفة A^{-1} فهي $(A^{-1}e_1,\ldots,A^{-1}e_n)$، وللحصول على الشعاع $C_j = A^{-1}e_j$، يجب حلّ الجملة الخطيّة $\mathcal{L}_j : A\,X = e_j$. إذن لحساب A^{-1} نسعى إلى حلّ n جملةٍ خطيّة : $\mathcal{L}_i : A\,X_i = e_i, \quad i = 1,2,\ldots,n$.

سنبيّن في المثال التالي طريقة تنظيم العمليات المذكورة فيما سبق لحساب مقلوب مصفوفة.

6-6. مثال. لحساب مقلوب المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. يجب علينا حلّ الجمل الخطية الثلاث الآتية:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و } AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و } AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

لنحصل على أعمدة A^{-1} . سنمثّل فيما يلي هذه الجمل الثلاث في مصفوفة واحدة وإجراء العمليات الأوليّة عليها:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2} L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -4 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2} L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow -\frac{2}{7} L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right]$$

ونتابع لنجد

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right]$$

ونستنتج إذن أنّ

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 8 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

تمرينات

التمرين 1. احسب المحدّدين الآتيين

$$\Delta_1 = \det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5\\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0\\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1\\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3\\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \Delta_2 = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 0 & 8\\ 3 & 0 & 0 & 2\\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل

1. لحساب قيمة المحدِّد Δ_1 نلاحظ أنّ المبادلة بين السطرين الأول والأخير ثُمّ المبادلة بين العمودين الثالث والرابع تفيداننا في كتابة ما يأتي :

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5\\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0\\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1\\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3\\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 & 7 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0\\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1\\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1\\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ثُمّ إذا جمعنا إلى العمود الثاني ضعفي العمود الأوّل، ثُمّ طرحنا من الثاني ضعفي الثالث وجدنا

$$\det\begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1\\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 4 & 14 & 7 & 0 & 0\\ 3 & 10 & 5 & 0 & 0\\ 3 & 10 & 2 & 5 & 1\\ 1 & 7 & 4 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0\\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1\\ 1 & -1 & 4 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

وأخيراً إذا بادلنا بين العمودين الثاني والثالث وجدنا

$$\det\begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0\\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1\\ 1 & -1 & 4 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 6 & 5 & 1\\ 1 & 4 & -1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 4 & 7\\ 3 & 5 \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} 6 & 5 & 1\\ -1 & 2 & 3\\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ولكن $\det\begin{bmatrix} 4 & 7\\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 20 - 21 = -1$ ، وكذلك

$$\det\begin{bmatrix} 6 & 5 & 1\\ -1 & 2 & 3\\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 6 & 5 & 1\\ -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 6 & 4 & 1\\ -1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2(-6+4) = -4$$

وعليه نجد أنّ $\Delta_1 = -4$.

2. لحساب قيمة المحدِّد Δ_2 نلاحظ أنّ المبادلة بين السطرين الأول والثالث ثُمّ المبادلة بين العمودين الثاني والرابع تفيداننا في كتابة ما يلي :

$$\Delta_2 = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = 20 \times 5 = 100$$

فيتمّ الإثبات. ■

التمرين 2. احسب محدّد المصفوفة $A = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ المعرّفة بالعلاقة

$$a_{ij} = |i - j|$$

الحل

نستبدل تدريجيّاً عندما تتناقص j من n حتّى 2 بالعمود ذي الدليل j حاصل طرح العمود ذي الدليل $j-1$ منه أي $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$، فلا تتغير قيمة المحدِّد المطلوب :

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & 2 & \vdots \\ \vdots & 2 & \ddots & \ddots & 1 & 2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ n-1 & \cdots & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 2 & -1 & -1 & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 & 1 \\ n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ولاتتغيّر قيمة هذا المحدِّد الأخير إذا جمعنا سطره الأخير إلى بقيّة الأسطر :

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 2 & -1 & -1 & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 & 1 \\ n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} n-1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & -2 & 0 & \ddots & & \vdots \\ n+1 & -2 & -2 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 2n-3 & & \ddots & \ddots & -2 & 0 \\ n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

وهذا المحدِّد الأخير سهلُ الحساب لأنّه محدِّد مصفوفة مثلّثيّة فنجد

$$\det A = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 3. لتكن $A = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ المصفوفة المعرّفة كما يلي:

$$a_{ij} = \begin{cases} a & : \quad i > j, \\ b & : \quad i < j, \\ x_i & : \quad i = j. \end{cases}$$

حيث $(x_1, \ldots, x_n, a, b)$ من $\mathbb{R}^{n+2}$. احسب $\det A$ بافتراض $a \neq b$، ثُمّ ادرس حالة $a = b$. تمكن الاستفادة من التابع $x \mapsto \det A_x$ و A_x هي المصفوفة التي نحصل عليها بجمع x إلى جميع ثوابت A، والاستعانة بالتابع

$$t \mapsto f(t) = \prod_{k=1}^{n} (t - x_k)$$

الحل

لنفترض أنّ $a \neq b$، ولنتأمّل المحدِّد

$$\det A_x = \begin{vmatrix} x + x_1 & x + b & \cdots & x + b \\ x + a & x + x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & x + x_{n-1} & x + b \\ x + a & \cdots & x + a & x + x_n \end{vmatrix}$$

بعد طرح السطر الأوّل في المحدِّد السابق من بقيّة الأسطر، ثُمّ نشر المحدِّد الناتج وفق السطر الأوّل، نرى أنّ التابع $x \mapsto \det A_x$ هو تابع كثير الحدود من الدرجة الأولى، أي يوجد ثابتان λ و μ يُحقّقان

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \det A_x = \lambda x + \mu$$

لتعيين الثابتين λ و μ نلاحظ أنّ المصفوفتين A_{-a} و A_{-b} مثلّثيّتان، وعليه يكون

$$\det A_{-b} = (-1)^n f(b) \quad \text{و} \quad \det A_{-a} = (-1)^n f(a)$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} -\lambda a + \mu &= (-1)^n f(a) \\ -\lambda b + \mu &= (-1)^n f(b) \end{aligned}$$

إذن

$$\mu=(-1)^{n-1}\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}\quad \text{و}\quad \lambda=(-1)^{n-1}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ولمّا كان المحدِّد المطلوب هو $\det A_0=\mu$ استنتجنا أنّ

$$\det A=(-1)^{n-1}\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}=(-1)^n f(b)+(-1)^{n-1}b\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

لنأتِ الآن إلى حالة $a=b$. لنثبّت العدد b في $\mathbb{R}$، ولنلاحظ أنّ التابع $a\mapsto \det A$ تابع مستمرٌّ للمتحوّل a، إذن نحصل على قيمة $\det A$ في حالة $a=b$ بجعل a تسعى إلى b في العبارة السابقة، فنجد أنّ

$$\det A_x=\begin{vmatrix} x_1 & b & \cdots & b\\ b & x_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & x_{n-1} & b\\ b & \cdots & b & x_n\end{vmatrix}=(-1)^n f(b)+(-1)^{n-1}bf'(b)$$

وقد عرّفنا $\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$ $f(x)=$.

التمرين 4. لتكن $A_n=(a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ المصفوفة المعرّفة بالعلاقة $a_{ij}=S_{i\wedge j}$، حيث S_1 و S_2 و...و S_n هي أعداد من $\mathbb{R}$، و $i\wedge j=\min(i,j)$. احسب $\det A_n$. وطبّق ذلك في حالة $S_k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

الحل

نلاحظ أنّ

$$A_n=\begin{bmatrix} S_1 & S_1 & \cdots & S_1\\ S_1 & S_2 & \cdots & S_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ S_1 & S_2 & & S_n\end{bmatrix}$$

فإذا استبدلنا بالسطر ذي الدليل n حاصل طرح السطر ذي الدليل $n-1$ منه، وجدنا أنّ

$$\det A_n = \left[\begin{array}{cccc|c} S_1 & S_1 & \cdots & S_1 & S_1 \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_2 & S_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ S_1 & S_2 & & S_{n-1} & S_{n-1} \\ \hline 0 & 0 & & 0 & S_n - S_{n-1} \end{array}\right] = (S_n - S_{n-1}) \det \begin{bmatrix} S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ S_1 & S_2 & & S_{n-1} \end{bmatrix}$$

وعليه نرى أنّ

$$\det A_n = (S_n - S_{n-1}) \det A_{n-1}$$

إذن

$$\det A_n = S_1 \prod_{k=2}^{n} (S_k - S_{k-1})$$

وبوجه خاص، في حالة $S_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ نجد أنّ $\det A_n = n!$، ويتمّ الإثبات. ■

التمرين 5. لتكن A و B مصفوفتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، والعدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ لا يساوي 2.

نعرّف P من $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ كما يأتي :

$$P = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right]$$

أثبت أنّ $\det P = \det(A+B)\det(A-B)$.

الحل

لتكن I المصفوفة الواحديّة من المرتبة n ولنعرّف المصفوفة الكتليّة

$$J = \left[\begin{array}{c|c} I & I \\ \hline I & -I \end{array}\right]$$

من المرتبة $2n$. عندئذ نلاحظ مباشرة، أنّه مهما تكن A و B مصفوفتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ يكن

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} I & I \\ \hline I & -I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & I \\ \hline I & -I \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{c|c} I & I \\ \hline I & -I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A+B & A-B \\ \hline A+B & B-A \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 2(A+B) & 0 \\ \hline 0 & 2(A-B) \end{array}\right] \end{aligned}$$

فإذا عرّفنا $\alpha = \det J$ استنتجنا أنّ

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad \alpha^2 \det\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right] = 2^{2n} \det\left[\begin{array}{c|c} A+B & 0 \\ \hline 0 & A-B \end{array}\right]$$

وبوجه خاص، في حالة $B=0$ و $A=I$ نجد أنّ $\alpha^2 = 2^{2n}$، ومنه

$$\det\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{c|c} A+B & 0 \\ \hline 0 & A-B \end{array}\right] = \det(A+B)\det(A-B)$$

وذلك أيّاً كانت المصفوفتان A و B من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

التمرين 6. لتكن $A=(a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ المصفوفة المعرّفة، كما يأتي:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2\cos\theta & : \quad i=j, \\ 1 & : \quad |i-j|=1, \\ 0 & : \quad |i-j|>1. \end{cases}$$

حيث θ من $\mathbb{R}$، احسب $\det A_n$.

الحل

لنلاحظ أولاً أنّ

$$A_n = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{bmatrix}$$

ولنضع $\Delta_n = \det A_n$. نلاحظ مباشرة أنّ

$$\Delta_1 = 2\cos\theta \quad \text{و} \quad \Delta_2 = 4\cos^2\theta - 1$$

لنفترض إذن أنّ $n \geq 3$، ولننشر محدِّد المصفوفة A_n وفق السطر الأوّل، عندئذ نجد أنّ

$$\det A_n = 2\cos\theta \det A_{n-1} - \det A_{n-2}$$

للحصول على صيغة بسيطة للمحدِّد Δ_n نلاحظ أنّ

$$\Delta_1 = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} \quad \text{و} \quad \Delta_2 = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$$

وعندئذ نستفيد من العلاقة التدريجيّة $\Delta_n = 2\cos\theta\,\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$، فنثبت بوجه عام أنّ

$$\Delta_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

وهو المطلوب.

التمرين 7. لتكن $1 \leq n$، وليكن $(a_1, \ldots, a_n)$ و $(b_1, \ldots, b_n)$ من $\mathbb{K}^n$. نفترض أن

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad a_i + b_j \neq 0$$

نسمي مصفوفة **كوشي** Cauchy المتعلّقة بالأعداد $(a_1, \ldots, a_n ; b_1, \ldots, b_n)$ تلك المصفوفة $\mathcal{C}(a_1, \ldots, a_n ; b_1, \ldots, b_n) = (\alpha_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ المعرّفة بالعلاقة

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{a_i + b_j}$$

1. احسب المحدّد $c(a_1, \ldots, a_n ; b_1, \ldots, b_n) = \det \mathcal{C}(a_1, \ldots, a_n ; b_1, \ldots, b_n)$.

2. ادرس حالة مصفوفة **هيلبرت** Hilbert التي نرمز إليها بالرمز $\mathcal{H}_n$ والتي توافق الحالة الخاصة $a_k = b_k = k - \frac{1}{2}$.

الحل

بطرح السطر الأخير من جميع الأسطر التي تسبقه لا تتغير قيمة المحدِّد، ولكن نرى في المصفوفة الناتجة أنّ العمود ذي الدليل j يحوي عاملاً مشتركاً هو $\dfrac{1}{a_n + b_j}$ وأنّ السطر ذي الدليل i، حيث $(i < n)$ يحوي عاملاً مشتركاً هو $a_n - a_i$ إذن

$$c(a_1, \ldots, a_n ; b_1, \ldots, b_n) = \frac{\prod_{i=2}^{n}(a_n - a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n + b_j)} \det \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & & & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

وفي المحدِّد الأخير، إذا طرحنا العمود الأخير من بقيّة الأعمدة، حصلنا على محدِّد مصفوفة جديدة، يحوي العمود ذي الدليل j فيها، حيث $j < n$، عاملاً هو $b_n - b_j$، ويحوي السطر ذي الدليل i، حيث $(i < n)$ عاملاً مشتركاً هو $\dfrac{1}{a_i + b_n}$ إذن

$$c(a_1, \ldots, a_n ; b_1, \ldots, b_n) = \frac{\prod_{i=2}^{n}(a_n - a_i) \prod_{i=2}^{n}(b_n - b_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n + b_j) \prod_{j=1}^{n-1}(a_j + b_n)} \det \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وعليه نجد بعد نشر المحدِّد الأخير بالنسبة إلى السطر الأخير أنّ

$$c(a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_n)=\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)\prod_{j=1}^{n-1}(a_j+b_n)}c(a_1,\ldots,a_{n-1};b_1,\ldots,b_{n-1})$$

أو

$$c(a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_n)=\frac{\prod_{1\leq i<n}\big((a_n-a_i)(b_n-b_i)\big)}{\prod_{\max(i,j)=n}(a_i+b_j)}c(a_1,\ldots,a_{n-1};b_1,\ldots,b_{n-1})$$

وهذه العلاقة تفيدنا أن نبرهن بالتدريج أنّ

$$c(a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_n)=\frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}\big((a_j-a_i)(b_j-b_i)\big)}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_i+b_j)}$$

أمّا في حالة مصفوفة هِلبرت الموافقة لحالة $a_k=b_k=k-\frac{1}{2}$ فتأخذ العلاقة التدريجيّة الشكل

$$\det\mathcal{H}_n=\frac{\big((n-1)!\big)^4}{(2n-1)!\cdot(2n-2)!}\det\mathcal{H}_{n-1}$$

ومن ثَمّ

$$\det\mathcal{H}_n=\frac{1}{(2n-1)\left(C_{2n-2}^{n-1}\right)^2}\det\mathcal{H}_{n-1}$$

إذن

$$\det\mathcal{H}_n=\left(\prod_{1\leq k<n}(2k+1)\right)^{-1}\left(\prod_{1\leq k<n}C_{2k}^{k}\right)^{-2}$$

وبوجه خاص نرى أنّ $\frac{1}{\det\mathcal{H}_n}\in\mathbb{N}^*$. ■

التمرين 8. ادرس تبعاً لقيم الوسطاء a, b, m الجمل الخطيّة الآتية:

$$\begin{cases} x + y + z = m+1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(a+1)x + 3y + az = a+4 \\ 4(a-1)x + (a+1)y + (2a-1)z = 2a+2 \\ (5a-4)x + (a+1)y + (3a-4)z = a-1 \end{cases}$$

الحل

1. لنكتب الجملة الأولى بالصيغة المصفوفيّة، فنجد

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ m & 1 & m-1 & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{array}\right]$$

ثُمّ نجرى عليها التحويلات الأوّليّة المبيَّنة فيما يأتي:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ m & 1 & m-1 & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 1-m & -1 & -m^2 \\ 0 & m-1 & 0 & -m \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 1-m & -1 & -m^2 \\ 0 & m-1 & 0 & -m \end{array}\right] \xrightarrow[]{L_3 \leftarrow -L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 1-m & -1 & -m^2 \\ 0 & 0 & 1 & m+m^2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[]{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1-m^2 \\ 0 & 1-m & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & m+m^2 \end{array}\right]$$

وعليه تُكافئ الجملة المدروسة الجملة

$$\begin{cases} x+y=1-m^2 \\ (1-m)y=m \\ z=m+m^2 \end{cases}$$

- فإذا كان $m=1$ كانت الجملة مستحيلة، وليس لها حلول.
- وإذا كان $m\neq 1$ كان

$$\begin{cases} x=1-m^2-\dfrac{m}{1-m} \\ y=\dfrac{m}{1-m} \\ z=m+m^2 \end{cases}$$

وهو الحل المطلوب.

2. لنكتب الجملة الثانية بالصيغة المصفوفيّة، فنجد

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{array}\right]$$

ثُمّ نجرى عليها التحويلات الأوّليّة المبيَّنة فيما يأتي:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{L_1\leftarrow L_1-aL_2 \\ L_3\leftarrow L_3-L_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & b(1-a^2) & 1-a & 1-ab \\ 1 & ab & 1 & b \\ 0 & b(1-a) & a-1 & 1-b \end{array}\right]$$

ثُمّ نعيد ترتيب الأسطر $L_2\to L_1\to L_3\to L_2$ فنحصل على الجملة المكافئة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & ab & 1 & b \\ 0 & b(1-a) & a-1 & 1-b \\ 0 & b(1-a^2) & 1-a & 1-ab \end{array}\right]$$

فإذا طرحنا من السطر الأخير جداء ضرب السطر الثاني في المقدار $(1+a)$ حصلنا على الجملة المُكافئة الآتية:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & ab & 1 & b \\ 0 & b(1-a) & a-1 & 1-b \\ 0 & 0 & (2+a)(1-a) & b-a \end{array}\right]$$

وهنا نناقش الحالات الآتية:

- حالة $a=1$، عندئذ تأخذ الجملة الشكل الآتي

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & b & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right]$$

  - فإذا كان $b \neq 1$ كانت مجموعة الحلول خالية.
  - وإذا كان $b=1$ كانت الحلول هي

$$x=\alpha \text{ و } y=\beta \text{ و } z=1-\alpha-\beta \text{ حيث } (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 .$$

- حالة $a=-2$، عندئذ تأخذ الجملة الشكل الآتي

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2b & 1 & b \\ 0 & 3b & -3 & 1-b \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right]$$

  - فإذا كان $b \neq -2$ كانت مجموعة الحلول خالية.
  - وإذا كان $b=-2$ كانت الحلول هي

$$x=\alpha \text{ و } y=-\frac{1+\alpha}{2} \text{ و } z=\alpha \text{ حيث } \alpha\in\mathbb{R} .$$

- حالة $a \notin \{1,-2\}$. في هذه الحالة تُكتب الجملة بالشكل

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & ab & 1 & b \\ 0 & b & -1 & \dfrac{1-b}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{b-a}{(2+a)(1-a)} \end{array}\right] \xrightarrow[L_2\leftarrow L_2+L_3]{L_1\leftarrow L_1-L_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & ab & 0 & b-\dfrac{b-a}{(2+a)(1-a)} \\ 0 & b & 0 & \dfrac{1-b}{1-a}+\dfrac{b-a}{(2+a)(1-a)} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{b-a}{(2+a)(1-a)} \end{array}\right]$$

أو

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & ab & 0 & b-\dfrac{b-a}{(2+a)(1-a)} \\ 0 & b & 0 & \dfrac{2-b-ab}{(2+a)(1-a)} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{b-a}{(2+a)(1-a)} \end{array}\right]$$

- فإذا كان $b=0$ كانت مجموعة الحلول خالية.
- وإذا كان $b\neq 0$ كان للجملة حلٌّ وحيدٌ هو

$$\begin{aligned} x &= \frac{a-b}{a^2+a-2} \\ y &= \frac{ab+b-2}{b(a^2+a-2)} \\ z &= \frac{a-b}{a^2+a-2} \end{aligned}$$

وبذا يكتمل الحلّ.

3. لنكتب الجملة الثالثة بالصيغة المصفوفيّة بعد أن نعيد ترتيب المجاهيل، فنجد

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2(a+1) & a & a+4 \\ a+1 & 4(a-1) & 2a-1 & 2a+2 \\ a+1 & 5a-4 & 3a-4 & a-1 \end{array}\right] \end{array}$$

ثُمّ نجرى عليها التحويلات الأوّليّة

$$L_3 \leftarrow -3L_3+(a+1)L_1 \quad \text{و} \quad L_2 \leftarrow -3L_2+(a+1)L_1$$

فنجد

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2(a+1) & a & a+4 \\ 0 & 2a^2-8a+14 & a^2-5a+3 & a^2-a-2 \\ 0 & 2a^2-11a+14 & a^2-8a+12 & a^2+2a+7 \end{array}\right]$$

وبطرح السطر الثالث من السطر الثاني نجد

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2(a+1) & a & a+4 \\ 0 & a & a-3 & -a-3 \\ 0 & 2a^2-11a+14 & a^2-8a+12 & a^2+2a+7 \end{array}\right]$$

فإذا طرحنا من السطر الثالث جداء ضرب السطر الثاني في المقدار $2a-11$ وجدنا

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2(a+1) & a & a+4 \\ 0 & a & a-3 & -a-3 \\ 0 & 14 & -a^2+9a-21 & 3a^2-3a-26 \end{array}\right]$$

ثُمّ نطرح من السطر الثاني بعد ضربه بالعدد 14 جداء ضرب السطر الثالث بالمقدار a فنجد

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2(a+1) & a & a+4 \\ 0 & 0 & a^3-9a^2+35a-42 & -3a^3+3a^2+12a-42 \\ 0 & 14 & -a^2+9a-21 & 3a^2-3a-26 \end{array}\right]$$

أو

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2(a+1) & a & a+4 \\ 0 & 14 & -a^2+9a-21 & 3a^2-3a-26 \\ 0 & 0 & (a-2)(a^2-7a+21) & -3a^3+3a^2+12a-42 \end{array}\right]$$

وعليه لا توجد حلول لهذه الجملة في حالة $a=2$، أمّا إذا كان $a \neq 2$ فتقبل هذه الجملة حلاًّ وحيداً هو

$$\begin{aligned} x &= \frac{2a^3-6a^2-11a+15}{a^3-9a^2+35a-42} \\ y &= \frac{7a^2+44a-66}{a^3-9a^2+35a-42} \\ z &= \frac{-3a^3+3a^2+12a-42}{a^3-9a^2+35a-42} \end{aligned}$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 9. ادرس تبعاً لقيم الوسيطين λ و μ الجملة الخطيّة الآتية:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = \mu \\ x + y + \lambda z + t = \mu^2 \\ x + y + z + \lambda t = \mu^3 \end{cases}$$

الحل

إذا رمزنا بالرمز J إلى المصفوفة التي جميع ثوابتها تساوي الواحد كُتِبت مصفوفة هذه الجملة A_λ بالصيغة $A_\lambda = J + (\lambda - 1)I$ ، وإذا تذكّرنا أنّ $J^2 = 4J$ استنتجنا أنّ

$$\big(A_\lambda - (\lambda - 1)I\big)^2 = 4\big(A_\lambda - (\lambda - 1)I\big)$$

وهذا يُكافئ

$$A_\lambda^2 - 2(\lambda + 1)A_\lambda + (\lambda - 1)(\lambda + 3)I = 0$$

- في حالة $\lambda \notin \{1, -3\}$ استنتجنا من المساواة السابقة أنّ A_λ قلوبة وأنّ

$$A_\lambda^{-1} = \frac{1}{(\lambda - 1)(\lambda + 3)}\big(2(\lambda + 1)I - A_\lambda\big) = \frac{1}{\lambda - 1}\left(I - \frac{1}{\lambda + 3}J\right)$$

وللجملة المدروسة حلٌّ وحيدٌ في هذه الحالة هو

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\lambda - 1}\left(1 - \frac{1 + \mu + \mu^2 + \mu^3}{\lambda + 3}\right) \\ y &= \frac{1}{\lambda - 1}\left(\mu - \frac{1 + \mu + \mu^2 + \mu^3}{\lambda + 3}\right) \\ z &= \frac{1}{\lambda - 1}\left(\mu^2 - \frac{1 + \mu + \mu^2 + \mu^3}{\lambda + 3}\right) \\ t &= \frac{1}{\lambda - 1}\left(\mu^3 - \frac{1 + \mu + \mu^2 + \mu^3}{\lambda + 3}\right) \end{aligned}$$

- في حالة $\lambda = 1$ و $\mu \neq 1$ ليس للجملة حلول.
- وفي حالة $\lambda = 1$ و $\mu = 1$ للجملة عددٌ لانهائي من الحلول، هي

$$\big\{(x, y, z, t) : x + y + z + t = 1\big\}$$

- في حالة $\lambda = -3$. نضع اختصاراً $A = A_{-3}$ فيكون لدينا $A = J - 4I$ ونلاحظ أنّ

$$A^2 = J^2 - 8J + 16I = -4J + 16I = -4A$$

فإذا وضعنا $B = -\frac{1}{4}A$ استنتجنا أنّ $B^2 = B$. وعليه نرى أنّ B هي مصفوفة إسقاط خطّي على الفضاء

$$\operatorname{Im} B = \ker(I - B) = \left\{X : JX = 0\right\}$$

توازياً مع الفضاء $\ker B = \operatorname{Im}(I - B) = \mathbb{C}\mathbb{1}$، وقد رمزنا بالرمز $\mathbb{1}$ إلى الشعاع الذي تساوي جميع مركّباته الواحد. وأخيراً إذا عرّفنا

$$b = {}^t\left[1, \mu, \mu^2, \mu^3\right]$$

أخذت الجملة المدروسة الصيغة $BX = -\frac{1}{4}b$. وعليه تقبل الجملة حلولاً إذا وفقط إذا كان $b \in \operatorname{Im} B$ أي إذا وفقط إذا كان $Jb = 0$ أي $1 + \mu + \mu^2 + \mu^3 = 0$.

  - إذن في حالة $\lambda = -3$ و $\mu \notin \{-1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ ليس للجملة حلول.
  - وفي حالة $\lambda = -3$ و $\mu \in \{-1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$، نعلم أنّ $b \in \operatorname{Im} B$ فيوجد X_0 يُحقّق $BX_0 = b$ ومنه $Bb = B^2X_0 = BX_0 = b$ إذن $A(-\frac{1}{4}b) = b$، فتكون مجموعة حلول الجملة $AX = b$ هي $-\frac{1}{4}b + \mathbb{C}\mathbb{1}$. ■

التمرين 10. احسب مقلوب كلٍّ من المصفوفات التالية:

❶ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ ❷ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 15 & 23 \\ 6 & 15 & 46 & 73 \\ 8 & 23 & 73 & 130 \end{bmatrix}$

❸ $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 5 \\ 2 & -7 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ ❹ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \\ 190 & 210 & 231 & 253 \\ 1140 & 1330 & 1540 & 1771 \end{bmatrix}$

الحل

في جميع الحالات نجري التحويلات البسيطة المألوفة ونبيّن العمليّات المُجراة.

❶ لنبدأ بالحالة الأولى

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow -L_2+4L_1 \\ L_3 \leftarrow -L_3+3L_1 \\ L_4 \leftarrow -L_4+2L_1}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 10 & 13 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 10 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

ثُمّ

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 10 & 13 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 10 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2-7L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_4}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -36 & -10 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

ثُمّ

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -36 & -10 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2+L_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & -11 & -1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

ونعيد ترتيب الأسطر كما يلي

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & -11 & -1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L_4 \leftrightarrow L_2 \\ L_4 \leftarrow \frac{-1}{40}L_4 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{-9}{40} \end{array}\right]$$

ثُمّ نحلّ الجملة المثلّثيّة كما يلي :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{-9}{40} \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L_3 \leftrightarrow L_3+L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2-7L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1-4L_4}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & \frac{-4}{40} & \frac{-4}{40} & \frac{-4}{40} & \frac{36}{40} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{3}{40} & \frac{-7}{40} & \frac{-7}{40} & \frac{23}{40} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{-9}{40} & \frac{11}{40} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{-9}{40} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1-3L_3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{-7}{40} & \frac{-7}{40} & \frac{23}{40} & \frac{3}{40} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{40} & \frac{-9}{40} & \frac{11}{40} & \frac{1}{40} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{-9}{40} & \frac{11}{40} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{-9}{40} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1-2L_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-9}{40} & \frac{11}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{40} & \frac{-9}{40} & \frac{11}{40} & \frac{1}{40} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{-9}{40} & \frac{11}{40} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{-9}{40} \end{array}\right]$$

وأخيراً

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\\3&4&1&2\\2&3&4&1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{40}\begin{bmatrix}-9&11&1&1\\1&-9&11&1\\1&1&-9&11\\11&1&1&-9\end{bmatrix}$$

❷ لنأتِ إلى المصفوفة الثانية.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&6&8&1&0&0&0\\2&5&15&23&0&1&0&0\\6&15&46&73&0&0&1&0\\8&23&73&130&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-8L_1]{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_3\leftarrow L_3-6L_1}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&6&8&1&0&0&0\\0&1&3&7&-2&1&0&0\\0&3&10&25&-6&0&1&0\\0&7&25&66&-8&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_3\leftarrow L_3-3L_2\\L_4\leftarrow L_4-7L_2}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&6&8&1&0&0&0\\0&1&3&7&-2&1&0&0\\0&0&1&4&0&-3&1&0\\0&0&4&17&6&-7&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_4\leftarrow L_4-4L_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&6&8&1&0&0&0\\0&1&3&7&-2&1&0&0\\0&0&1&4&0&-3&1&0\\0&0&0&1&6&5&-4&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_3\leftarrow L_3-4L_4\\L_2\leftarrow L_2-7L_4\\L_1\leftarrow L_1-8L_4}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&6&0&-47&-40&32&-8\\0&1&3&0&-44&-34&28&-7\\0&0&1&0&-24&-23&17&-4\\0&0&0&1&6&5&-4&1\end{array}\right]$$

ونتابع حلّ الجملة المثلّثيّة :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&6&0&-47&-40&32&-8\\0&1&3&0&-44&-34&28&-7\\0&0&1&0&-24&-23&17&-4\\0&0&0&1&6&5&-4&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{L_2\leftarrow L_2-3L_3\\L_1\leftarrow L_1-6L_3}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&0&97&98&-70&16\\0&1&0&0&28&35&-23&5\\0&0&1&0&-24&-23&17&-4\\0&0&0&1&6&5&-4&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1-2L_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&41&28&-24&6\\0&1&0&0&28&35&-23&5\\0&0&1&0&-24&-23&17&-4\\0&0&0&1&6&5&-4&1\end{array}\right]$$

وعليه يكون

$$\begin{bmatrix}1&2&6&8\\2&5&15&23\\6&15&46&73\\8&23&73&130\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}41&28&-24&6\\28&35&-23&5\\-24&-23&17&-4\\6&5&-4&1\end{bmatrix}$$

❸ لنأتِ إلى المصفوفة الثالثة.

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2]{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_3} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 10 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow -L_4]{L_3 \leftarrow -L_3} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4}]{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_4} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -3 & 1 & 0 & 21 & -8 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -36 & 15 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 + 3L_2} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 81 & -32 & -8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -36 & 15 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

وعليه

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 5 \\ 2 & -7 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 81 & -32 & -8 & 9 \\ 8 & -3 & -1 & 1 \\ -36 & 15 & 3 & -4 \\ -10 & 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

❹ وأخيراً نجد

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \\ 190 & 210 & 231 & 253 \\ 1140 & 1330 & 1540 & 1771 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1771 & -231 & 21 & -1 \\ -5060 & 671 & -62 & 3 \\ 4830 & -650 & 61 & -3 \\ -1540 & 210 & -20 & 1 \end{bmatrix}$$

ويتمّ الحل. ■

التمرين 11. أثبت أنّ المصفوفة الآتية قَلوبة، أياً كان n من $\mathbb{N}^*$.

$$A_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{n!} \\ \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n+1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} & \cdots & \frac{1}{(2n)!} \end{bmatrix}$$

الحل

ليكن $T = {}^t[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. يكفي ليتم الإثبات أن نبرهنَ أنّ $A_n T = 0$ يقتضي $T = 0$. لنفترض إذن أنّ $A_n T = 0$، ولنعرّف كثير الحدود

$$P(X) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha_j}{(n+j)!} X^{n+j}$$

من الواضح أنّ $\deg P(X) \le 2n$، وأنّ X^n يقسم P. ومن جهة أخرى نلاحظ أنّ الشرط $A_n T = 0$ يُكافئ

$$P^{(n)}(1) = P^{(n-1)}(1) = \cdots = P'(1) = P(1) = 0$$

إذن 1 جذرٌ مضاعفٌ $n+1$ مرّة على الأقل، ونستنتج أنّ $(X-1)^{n+1}$ يقسم $P(X)$ أيضاً. وعليه فإنّ كثير الحدود $X^n(X-1)^{n+1}$ الذي درجته $2n+1$ يقسم كثير الحدود $P(X)$ الذي درجته أصغر تماماً من $2n+1$ فهو إذن معدوم. وينتج من كون $P(X) = 0$ أنّ الشعاع T صفري وبذا يتم الإثبات. ∎

التمرين 12. لتكن المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 9 & 10 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4.1 \\ 18 \end{bmatrix},$$

أوجد حلول الجملتين الخطيتين $AX_1 = b_1$ و $AX_2 = b_2$. ماذا تلاحظ؟

الحل

نحلُّ الجملتين في آن معاً. كما يلي :

$$
\left[\begin{array}{ccc:cc} 10 & 9 & 1 & -5 & -5 \\ 9 & 10 & 5 & 4 & 4.1 \\ 1 & 5 & 9 & 18 & 18 \end{array}\right]
\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}
\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & -1 & -4 & -9 & -9.1 \\ 9 & 10 & 5 & 4 & 4.1 \\ 1 & 5 & 9 & 18 & 18 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 9L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}
\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & -1 & -4 & -9 & -9.1 \\ 0 & 19 & 41 & 85 & 86 \\ 0 & 6 & 13 & 27 & 27.1 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3}
\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & -1 & -4 & -9 & -9.1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 4.7 \\ 0 & 6 & 13 & 27 & 27.1 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2}
\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & -1 & -4 & -9 & -9.1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 4.7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1.1 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3}}
\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & -1 & 0 & 3 & -13.5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 6.9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1.1 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}
\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -6.6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 6.9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1.1 \end{array}\right]
$$

وعليه

$X_1 = {}^t[1,-2,3]$ و $X_2 = {}^t[-6.6, 6.9, -1.1]$.

فإذا عرّفنا $\left\| {}^t[x,y,z] \right\| = \max(|x|,|y|,|z|)$ لاحظنا أنّ

$$
\frac{\left\| b_2 - b_1 \right\|}{\left\| b_1 \right\|} = \frac{1}{180} \quad \text{و} \quad \frac{\left\| X_2 - X_1 \right\|}{\left\| X_1 \right\|} = \frac{89}{30}
$$

فالخطأ النسبي في قيمة النتيجة X أكبر بخمسمئة وأربع وثلاثين مرّةً من الخطأ النسبي في قيمة الطرف الثاني b. نقول في مثل هذه الحالة أنّ المصفوفة A سيّئة الحالة. ■

التمرين 13. لتكن X و Y مصفوفتين من $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R})$.

1. أوجد شرطاً لازماً وكافياً على $\gamma = {}^tY\cdot X$ كي تكون المصفوفة $I_n + X\,{}^tY$ قَلوبَة، واحسب مقلوبها في هذه الحالة.
2. لتكن M مصفوفة قَلوبَة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، نضع $N = M + X\cdot{}^tY$. أوجد شرطاً لازماً وكافياً على العدد ${}^tYM^{-1}X$ حتى تكون المصفوفة N قَلوبَة، واحسب مقلوبها N^{-1} في هذه الحالة.
3. لنضع

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad N = \begin{bmatrix} 2.01 & 3 & 5.99 & 1.98 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

احسب M^{-1}، واستنتج N^{-1}. كيف يجب تغيير الثابت $a_{24} = 1$ في M حتى تصبح المصفوفة M غير قَلوبَة ؟

الحل

1. لنضع $A = I_n + X\,{}^tY$ عندئذ نلاحظ أنّ

$$AX = X + X({}^tYX) = (1+\gamma)X$$

- فإذاكان $\gamma = -1$ كان $X \neq 0$ و $AX = 0$ وهذا يعني أنّ A غير قَلوبة.
- وإذاكان $\gamma \neq -1$ استنتجنا مما سبق أنّ $AX\,{}^tY = (1+\gamma)X\,{}^tY$، أو

$$AX\,{}^tY = (1+\gamma)(A - I_n)$$

أو $A((1+\gamma)I_n - X\,{}^tY) = (1+\gamma)I_n$، ومن ثَمّ

$$(I_n + X\,{}^tY)^{-1} = I - \frac{1}{1+{}^tYX}X\,{}^tY$$

2. لتكن M مصفوفة قَلوبَة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، ولنضع $N = M + X\,{}^tY$. عندئذ

$$N = (I_n + X({}^tYM^{-1}))M$$

وعليه تكون N قلوبة إذا وفقط إذاكان ${}^tYM^{-1}X + 1 \neq 0$، وعندئذ يكون

$$N^{-1} = M^{-1}(I_n + X({}^tYM^{-1}))^{-1} = M^{-1}\left(I_n - \frac{1}{1+{}^tYM^{-1}X}X\,{}^tYM^{-1}\right)$$

وأخيراً

$$N^{-1} = M^{-1} - \frac{1}{1 + {}^{t}YM^{-1}X}(M^{-1}X)({}^{t}YM^{-1})$$

3. لتكن M المصفوفة

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

ولنحسب مقلوبها.

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 3 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 4 & -8 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_4} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 11 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 4 & -8 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - 8L_3} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 11 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 36 & -96 & -8 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - 3L_3 - L_4} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -22 & 60 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 11 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 36 & -96 & -8 & 9 \end{array}\right].$$

ومن ثَمّ

$$M^{-1}=\begin{bmatrix}-22 & 60 & 5 & -6\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ -4 & 11 & 1 & -1\\ 36 & -96 & -8 & 9\end{bmatrix}$$

لنتأمّل الآن المصفوفة N الآتية

$$N=\begin{bmatrix}2.01 & 3 & 5.99 & 1.98\\ 1 & 2 & 3 & 1\\ -3 & -6 & 0 & -2\\ 0 & 4 & 8 & 1\end{bmatrix}$$

فنلاحظ أنّ

$$N-M=\begin{bmatrix}0.01 & 0 & -0.01 & -0.02\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\underbrace{\frac{1}{100}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{X}\times\ {}^t\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\-2\end{bmatrix}}_{Y}$$

إذن $N=M+X\,{}^tY$ ، ولكن $0\neq\frac{1}{10}={}^tYM^{-1}X+1$ إذن N قلوبة ولدينا

$$N^{-1}=M^{-1}-\frac{1}{1+{}^tYM^{-1}X}(M^{-1}X)({}^tYM^{-1})$$

أو

$$N^{-1}=\begin{bmatrix}-22 & 60 & 5 & -6\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ -4 & 11 & 1 & -1\\ 36 & -96 & -8 & 9\end{bmatrix}-\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-22\\ -1\\ -4\\ 36\end{bmatrix}\big[-90,241,20,-23\big]$$

وأخيراً

$$N^{-1}=\begin{bmatrix} -220 & 590.2 & 49 & -56.6 \\ -10 & 26.1 & 2 & -2.3 \\ -40 & 107.4 & 9 & -10.2 \\ 360 & -963.6 & -80 & 91.8 \end{bmatrix}$$

فإذا عرّفنا في حالة مصفوفة $M=(a_{ij})$ المقدار

$$\|M\| = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=0}^{n}|a_{ij}|$$

لاحظنا أنّ

$$\frac{\|N^{-1}-M^{-1}\|}{\|M^{-1}\|}=\frac{6732}{745} \quad \text{و} \quad \frac{\|N-M\|}{\|M\|}=\frac{1}{325}$$

فالخطأ النسبي في قيمة المقلوب أكبر 2936 مرّةً من الخطأ النسبي في قيمة المصفوفة، نقول في مثل هذه الحالة أنّ المصفوفة M سيّئة الحالة.

ومن جهة أخرى، إذا عرّفنا

$$Y_1={}^t[0,0,0,\alpha] \quad \text{و} \quad X_1={}^t[0,1,0,0]$$

كان

$$N_1=M+X_1{}^tY_1=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1+\alpha \\ -3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

وتكون N_1 غير قَلوبة إذا وفقط إذا كان ${}^tY_1M^{-1}X_1+1=0$ وهذا يُكافئ $1-96\alpha=0$، أو $\alpha=\frac{1}{96}$، فإذا استبدلنا بالثابت $\frac{97}{96}$ a_{24} من المصفوفة M لم تَعُدْ المصفوفة الناتجة قَلوبة. ■

التمرين 14. لتكن المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0&2\\6&6&1&7\\2&16&6&9\\2&4&8&22\end{bmatrix}$$

1. أوجد مصفوفة مثلّثية عليا U، وأخرى مثلثية سفلى L عناصرها القطرية تساوي 1، تُحقّقان $A=L\cdot U$.
2. أوجد مقلوب كلٍّ من U و L، ثم استنتج A^{-1}.

الحل

1. نبحث عن مصفوفة $U=(u_{ij})$ مثلثيّة عليا وأخرى $L=(\ell_{ij})$ مثلثيّة سفلى عناصر قطرها الرئيسي تساوي 1، تحقّقان $A=LU$. في الحقيقة، يمكن تعيين الثوابت وفق الترتيب المبيّن فيما يأتي:

$$\begin{bmatrix}2&1&0&2\\6&6&1&7\\2&16&6&9\\2&4&8&22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\\ell_{21}^{②}&1&0&0\\\ell_{31}^{③}&\ell_{32}&1&0\\\ell_{41}^{④}&\ell_{42}&\ell_{43}&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_{11}^{①}&u_{12}^{⑤}&u_{13}^{⑥}&u_{14}^{⑦}\\0&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\0&0&u_{33}&u_{34}\\0&0&0&u_{44}\end{bmatrix}$$

- فمن جداء ضرب العمود الأوّل من U في السطر الأوّل من L نجد $u_{11}=2$.
- ومن جداء ضرب العمود الأوّل من U في الأسطر الثاني والثالث والرابع من L نجد
$$\ell_{21}=3,\ \ell_{31}=1,\ \ell_{41}=1$$
- ومن جداء ضرب الأعمدة الثاني والثالث والرابع من U في السطر الأوّل من L نجد
$$u_{12}=1,\ u_{13}=0,\ u_{14}=2$$
- ومن جداء ضرب العمود الثاني من U في السطر الثاني من L نجد $u_{22}=3$.
- ومن جداء ضرب العمود الثاني من U في السطرين الثالث والرابع من L نجد
$$\ell_{32}=5,\ \ell_{42}=1$$
- ومن جداء ضرب العمودين الثالث والرابع من U في السطر الثاني من L نجد
$$u_{23}=1,\ u_{24}=1$$
- ومن جداء ضرب العمود الثالث من U في السطر الثالث من L نجد $u_{33}=1$.

- ومن جداء ضرب العمود الثالث من U في السطر الرابع من L نجد $\ell_{43} = 7$.
- ومن جداء ضرب العمود الرابع من U في السطر الثالث من L نجد $u_{34} = 2$.
- ومن جداء ضرب العمود الرابع من U في السطر الرابع من L نجد $u_{44} = 5$.

وعليه

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 6 & 1 & 7 \\ 2 & 16 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 8 & 22 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{U}$$

2. حساب مقلوب L :

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2}} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 14 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[]{L_4 \leftarrow L_4 - 7L_3} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 14 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -96 & 34 & -7 & 1 \end{array}\right]$$

ومنه

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 14 & -5 & 1 & 0 \\ -96 & 34 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

وبأسلوب مماثل نحسب U^{-1} :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow \frac{1}{5}L_4]{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_4}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-7}{30} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

ومنه

$$U^{-1} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 15 & -5 & 5 & -7 \\ 0 & 10 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 30 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

وأخيراً لمّا كان $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$ استنتجنا أنّ

$$A^{-1} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 15 & -5 & 5 & -7 \\ 0 & 10 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 30 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 14 & -5 & 1 & 0 \\ -96 & 34 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 772 & -268 & 54 & -7 \\ -362 & 128 & -24 & 2 \\ 1572 & -558 & 114 & -12 \\ -576 & 204 & -42 & 6 \end{bmatrix}$$

التمرين 15. لتكن المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2&4\\-1&5&0&-4\\2&0&6&10\\4&-4&10&29\end{bmatrix}$$

1. أثبت أنه توجد مصفوفة مثلثية سفلى S عناصرها القطرية موجبة تماماً، تُحقّق
$$A=S\cdot {}^tS$$

2. جِدْ مقلوبَ S، ثم استنتج A^{-1} .

الحل

1. نبحث عن مصفوفة $S=(s_{ij})$ مثلثيّة سفلى عناصر قطرها الرئيسي موجبة، تحقّق $A=S\,{}^tS$. في الحقيقة، يمكن تعيين الثوابت وفق الترتيب المبيّن فيما يلي :

$$\begin{bmatrix}1&-1&2&4\\-1&5&0&-4\\2&0&6&10\\4&-4&10&29\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_{11}^{\textcircled{1}}&0&0&0\\s_{21}^{\textcircled{2}}&s_{22}^{\textcircled{5}}&0&0\\s_{31}^{\textcircled{3}}&s_{32}^{\textcircled{6}}&s_{33}^{\textcircled{8}}&0\\s_{41}^{\textcircled{4}}&s_{42}^{\textcircled{7}}&s_{43}^{\textcircled{9}}&s_{44}^{\textcircled{10}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}s_{11}&s_{21}&s_{31}&s_{41}\\0&s_{22}&s_{32}&s_{42}\\0&0&s_{33}&s_{43}\\0&0&0&s_{44}\end{bmatrix}$$

- فمن جداء ضرب العمود الأوّل من ${}^tS$ في السطر الأوّل من S نجد $s_{11}=1$.
- ومن جداء ضرب العمود الأوّل من ${}^tS$ في الأسطر الثاني والثالث والرابع من S نجد

$$s_{21}=-1,\ s_{31}=2,\ s_{41}=4$$

- ومن جداء ضرب العمود الثاني من ${}^tS$ بالسطر الثاني من S نجد $s_{22}=2$.
- ومن جداء ضرب العمود الثاني من ${}^tS$ في السطرين الثالث والرابع من S نجد

$$s_{32}=1,\ s_{42}=0$$

- ومن جداء ضرب العمود الثالث من ${}^tS$ في السطر الثالث من S نجد $s_{33}=1$.
- ومن جداء ضرب العمود الثالث من ${}^tS$ في السطر الرابع من S نجد $s_{43}=2$.
- ومن جداء ضرب العمود الرابع من ${}^tS$ في السطر الرابع من S نجد $s_{44}=3$.

وعليه نرى أنّ

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2&4\\-1&5&0&-4\\2&0&6&10\\4&-4&10&29\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\2&1&1&0\\4&0&2&3\end{bmatrix}}_{S}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1&-1&2&4\\0&2&1&0\\0&0&1&2\\0&0&0&3\end{bmatrix}}_{{}^tS}$$

2. لنحسب مقلوب S :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\-1&2&0&0&0&1&0&0\\2&1&1&0&0&0&1&0\\4&0&2&3&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-4L_1]{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1\\L_3\leftarrow L_3-2L_1}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&2&0&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&-2&0&1&0\\0&0&2&3&-4&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-2L_3]{L_3\leftarrow L_3-\frac{1}{2}L_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&2&0&0&1&1&0&0\\0&0&1&0&\frac{-5}{2}&\frac{-1}{2}&1&0\\0&0&0&3&1&1&-2&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_4\leftarrow\frac{1}{3}L_4]{L_2\leftarrow\frac{1}{2}L_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0&\frac{-5}{2}&\frac{-1}{2}&1&0\\0&0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{-2}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right]$$

إذن

$$S^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{-5}{2}&\frac{-1}{2}&1&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{-2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6&0&0&0\\3&3&0&0\\-15&-3&6&0\\2&2&-4&2\end{bmatrix}$$

ولـمّا كان $A^{-1} = {}^tS^{-1}S^{-1}$ استنتجنا أنّ

$$A^{-1} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix}6 & 3 & -15 & 2\\ 0 & 3 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 6 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 0 & 0\\ -15 & -3 & 6 & 0\\ 2 & 2 & -4 & 2\end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{18}\begin{bmatrix}137 & 29 & -49 & 2\\ 29 & 22 & -13 & 2\\ -49 & -13 & 26 & -4\\ 2 & 2 & -4 & 2\end{bmatrix}$$

تسمّى الطريقة المبيّنة في هذا التمرين، طريقة Cholesky . وبذا يُنجَز الإثبات. ■

التمرين 16. لتكن $n \geq 2$ و $(a_1,\ldots,a_n)$ و $(b_1,\ldots,b_n)$ من $\mathbb{R}^n$. نفترض أنّ الأعداد $a_1,\ldots,a_n$ مختلفة مثنى مثنى، وكذلك أنّ الأعداد $b_1,\ldots,b_n$ مختلفة مثنى مثنى، وأخيراً أنّ $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, a_i + b_j \neq 0$. لتكن $(y_1,\ldots,y_n)$ من $\mathbb{R}^n$ ، أوجد حلّ جملة المعادلات الخطية

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{a_i + b_j} = y_i, \qquad i \in \mathbb{N}_n$$

يمكن لتحقيق ذلك الاستفادة من التابع الكسري $F(X) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{X + b_j}$. ثُمّ استنتج مقلوب مصفوفة Cauchy المتعلّقة بالأعداد $(a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_n)$ أي المصفوفة :

$(\alpha_{ij}) = \mathcal{C}(a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_n)$ المعرّفة بالعلاقات $\alpha_{ij} = \dfrac{1}{a_i + b_j}$

وأخيراً احسب مقلوب مصفوفة **هيلبرت** التي نرمز إليها $\mathcal{H}_n$ والتي توافق الحالة الخاصة $a_k = k - \frac{1}{2}$ ، و $b_k = k - \frac{1}{2}$.

الحل

- لنتأمّل التابع الكسري $F(X)$ المعطى في نصّ التمرين. تُكافئ الجملةُ المدروسةُ مجموعةَ الشروط:

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad F(a_i) = y_i$$

- ولكن بتوحيد المقامات لدينا

$$F(X) = \frac{Q(X)}{\prod_{j\in\mathbb{N}_n}(X+b_j)}$$

و $Q(X)$ هو كثير حدود درجته $n-1$ على الأكثر ويُحقِّق الشروط

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad Q(a_i) = y_i \prod_{j\in\mathbb{N}_n}(a_i+b_j)$$

- فإذا رمزنا بالرمز ℓ_i إلى كثير حدود لاغرانج

$$\ell_i(X) = \prod_{k\in\mathbb{N}_n\setminus\{i\}} \frac{X-a_i}{a_k-a_i}$$

كان لدينا

$$Q(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}_n} Q(a_i)\ell_i(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}_n}\Big(y_i\prod_{j\in\mathbb{N}_n}(a_i+b_j)\Big)\ell_i(X)$$

- ولكن انطلاقاً من المساواة

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{X+b_j} = \frac{Q(X)}{\prod_{j\in\mathbb{N}_n}(X+b_j)}$$

نرى أنّه في حالة m من $\mathbb{N}_n$ لدينا

$$x_m = \left.\frac{Q(X)}{\prod_{j\in\mathbb{N}_n\setminus\{m\}}(X+b_j)}\right|_{X\leftarrow -b_m} = \frac{Q(-b_m)}{\prod_{j\in\mathbb{N}_n\setminus\{m\}}(b_j-b_m)}$$

ولكن

$$\begin{aligned}
Q(-b_m) &= \sum_{i\in\mathbb{N}_n}\left(y_i\prod_{j\in\mathbb{N}_n}(a_i+b_j)\right)\ell_i(-b_m)\\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}_n}\left(y_i\prod_{j\in\mathbb{N}_n}(a_i+b_j)\right)\prod_{k\in\mathbb{N}_n\setminus\{i\}}\left(\frac{a_k+b_m}{a_k-a_i}\right)\\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}_n}\frac{y_i}{a_i+b_m}\cdot\frac{\prod_{j\in\mathbb{N}_n}(a_i+b_j)(a_j+b_m)}{\prod_{k\in\mathbb{N}_n\setminus\{i\}}(a_k-a_i)}
\end{aligned}$$

إذن

$$x_m = \sum_{i\in\mathbb{N}_n} \frac{y_i}{a_i+b_m}\cdot\frac{\prod\limits_{j\in\mathbb{N}_n}(a_i+b_j)(a_j+b_m)}{\prod\limits_{k\in\mathbb{N}_n\setminus\{i\}}(a_k-a_i)\prod\limits_{k\in\mathbb{N}_n\setminus\{m\}}(b_k-b_m)}$$

وعلى هذا نرى أنّ $x_j = \sum_{i=1}^{n}\mu_{ij}y_i$ حيث

$$\begin{aligned}\mu_{ij} &= \frac{1}{a_i+b_j}\cdot\frac{\prod\limits_{k\in\mathbb{N}_n}(a_i+b_k)(a_k+b_j)}{\prod\limits_{k\in\mathbb{N}_n\setminus\{i\}}(a_k+b_j)\prod\limits_{k\in\mathbb{N}_n\setminus\{j\}}(b_k-b_j)}\\ &= (a_i+b_j)\prod_{k\in\mathbb{N}_n\setminus\{i\}}\frac{b_j+a_k}{a_k-a_i}\cdot\prod_{k\in\mathbb{N}_n\setminus\{j\}}\frac{a_i+b_k}{b_k-b_j}\end{aligned}$$

ونستنتج أنّ المصفوفة (μ_{ij}) هي مقلوب المصفوفة $(\alpha_{ij}) = \mathcal{C}(a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_n)$.

▫ لنتأمّل حالة مصفوفة هيلبرت $\mathcal{H}_n$ الموافقة لحالة $a_k = b_k = k-\frac{1}{2}$. فنجد أنّ

$$\begin{aligned}\prod_{k\in\mathbb{N}_n\setminus\{i\}}\frac{b_j+a_k}{a_k-a_i} &= \prod_{k\in\mathbb{N}_n\setminus\{i\}}\frac{j+k-1}{k-i}\\ &= \frac{j(j+1)\cdots(j+i-2)(j+i)\cdots(j+n-1}{(1-i)(2-i)\cdots(-1)(1)\cdots(n-i)}\\ &= (-1)^{i-1}C_{j+i-2}^{i-1}C_{n+j-1}^{i+j-1}\end{aligned}$$

وكذلك

$$\prod_{k\in\mathbb{N}_n\setminus\{j\}}\frac{a_i+b_k}{b_k-b_j} = \prod_{k\in\mathbb{N}_n\setminus\{j\}}\frac{i+k-1}{k-j} = (-1)^{j-1}C_{j+i-2}^{j-1}C_{n+i-1}^{i+j-1}$$

إذن

$$\mu_{ij} = (-1)^{i+j}(i+j-1)(C_{i+j-2}^{i-1})^2C_{n+i-1}^{i+j-1}C_{n+j-1}^{i+j-1}\in\mathbb{Z}$$

ويمكننا أيضاً التعبير عن μ_{ij} بالصيغة

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\quad \mu_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{h_n(i)h_n(j)}{i+j-1}$$

وقد عرّفنا $h_n(k) = nC_{n+k-1}^{n}C_{n-1}^{k-1}$.

وهكذا نرى أنّ مقلوب مصفوفة هِلبرت $\mathcal{H}_n$ هي مصفوفة جميع حدودها أعداد صحيحة. وبوجه خاص نجد مثلاً

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{bmatrix}$$

وبذا يتمّ الحل. ■

التمرين 17. في حالة $1 \leq m$، نضع $E_m = \mathbb{C}_{m-1}[X]$ فضاء كثيرات الحدود العقدية التي لا تزيد درجتها على $m-1$. وليكن فيما يلي (n,m) من $\mathbb{N}^{*2}$.

1. ليكن k عنصراً من $\mathbb{N}_{n+m}$، نعرّف العنصر e_k من $E_n \times E_m$ كما يأتي:

$$e_k = \begin{cases} (X^{n-k}, 0) & : \quad 1 \leq k \leq n \\ (0, X^{n+m-k}) & : \quad n < k \leq n+m \end{cases}$$

أثبت أنّ الجملة $\mathcal{E} = (e_k)_{1 \leq k \leq n+m}$ أساس للفضاء $E_n \times E_m$.

2. ليكن كثيرا الحدود $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ و $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ من E_{m+1} و E_{n+1} على التوالي. نفترض أنّ $a_m \neq 0$ و $b_n \neq 0$، ونضع

$$\Phi(W) = S(X)P(X) + T(X)Q(X)$$

وذلك أياً كان $W = (S(X), T(X))$ من $E_n \times E_m$.

① أثبت أنّ Φ تطبيق خطّي من $E_n \times E_m$ إلى E_{n+m}.

② ليكن $\Delta(X) = \gcd(P(X), Q(X))$ القاسم المشترك الأعظم لكثيري الحدود P و Q، ولتكن $d = \deg \Delta(X)$. نضع

$$Q(X) = \Delta(X)\,Q_1(X) \quad \text{و} \quad P(X) = \Delta(X)\,P_1(X)$$

- أثبت أنّ $P_1(X)$ و $Q_1(X)$ أوّليان فيما بينهما.
- أثبت أنّ

$$\ker\Phi = \left\{(-\lambda(X)Q_1(X), \lambda(X)P_1(X)) :\ \lambda(X)\in E_d\right\}$$

واستنتج قيمة $\dim\ \ker\Phi$.

③ ليكن الأساس $\mathcal{F} = (X^{n+m-1}, X^{n+m-2}, \ldots, X, 1)$ للفضاء E_{n+m}. اكتب $\mathrm{mat}(\Phi,\mathcal{E},\mathcal{F})$. ثُمّ استنتج أنّ رتبة المصفوفة $M(P,Q)$ من $\mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C})$ المبيّنة فيما يأتي.

$$\begin{array}{c}
\overbrace{\hphantom{a_m\quad 0\quad \cdots\quad \cdots\quad 0}}^{n}\ \overbrace{\hphantom{b_n\quad 0\quad \cdots\quad \cdots\quad 0}}^{m}\\
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
a_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
a_{m-1} & a_m & \ddots & & \vdots & b_{n-1} & b_n & \ddots & & \vdots\\
\vdots & a_{m-1} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & a_m & 0 & \vdots & & \ddots & b_n & 0\\
a_1 & \vdots & & a_{m-1} & a_m & b_1 & & & b_{n-1} & b_n\\
a_0 & a_1 & & & a_{m-1} & b_0 & b_1 & & & b_{n-1}\\
0 & a_0 & \ddots & & \vdots & 0 & b_0 & \ddots & & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b_1 & \vdots\\
\vdots & & \ddots & a_0 & a_1 & \vdots & & \ddots & b_0 & b_1\\
0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0
\end{array}\right]
\end{array}$$

تساوي درجة المضاعف المشترك الأصغر لكثيري الحدود P و Q. أي إنّ

$$\mathrm{rg}\,(M(P,Q)) = \deg\ \mathrm{lcm}(P(X),Q(X))$$

3. نحتفظ برموز السؤال السابق، ونضع $\mathcal{R}(P,Q) = \det M(P,Q)$. أثبت أنّ P و Q أوليّان فيما بينهما إذا وفقط إذا كان $\mathcal{R}(P,Q) \neq 0$.

4. نسمّي **مميِّز كثير حدود** P العدد $\mathcal{D}(P) = \mathcal{R}(P,P')$. احسب $\mathcal{D}(P)$ في الحالة الخاصّة $P(X) = X^3 + aX + b$ واستنتج شرطاً لازماً وكافياً على (a,b) حتى تقبل المعادلة $P(X) = 0$ جذراً مضاعفاً.

5. أثبت أنّ شرطاً لازماً وكافياً حتى يقبل $aX^2 + bX + c$ و $a'X^2 + b'X + c'$ جذراً مشتركاً هو

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')\cdot(bc' - cb')$$

.6 نحتفظ برموز السؤال .2 أياً كان كثير الحدود $U(X)$ و العدد a من $\mathbb{C}$، نرمز بالرمز $\tau_a(U)(X)$ إلى كثير الحدود $U(X+a)$. ثم نتأمّل التطبيقات الخطيّة التالية:

$$\begin{array}{llllll}\Psi & : E_n\times E_m & \to & E_n\times E_m & :(S,T) & \mapsto (\tau_{-a}(S),\tau_{-a}(T)),\\ \Phi_1 & : E_n\times E_m & \to & E_{n+m} & :(S,T) & \mapsto S(X)\tau_{-a}(P)(X)+T(X)Q(X),\\ \Theta & : E_{n+m} & \to & E_{n+m} & :U & \mapsto \tau_a(U),\\ \Phi_2 & : E_n\times E_m & \to & E_{n+m} & :(S,T) & \mapsto S(X)P(X)+T(X)\tau_a(Q)(X).\end{array}$$

① أثبت أنّ $\Phi_2=\Theta\circ\Phi_1\circ\Psi$، واستنتج أنّ

$$\mathcal{R}(P,\tau_a(Q))=\mathcal{R}(\tau_{-a}(P),Q)$$

② احسب $R(P,X)$، ثم أثبت أن $\mathcal{R}(P,XQ)=(-1)^m P(0)\mathcal{R}(P,Q)$.

③ استفدْ من .6① لإثبات المساواة

$$\mathcal{R}(P,(X-a)Q)=(-1)^m P(a)\mathcal{R}(P,Q)$$

④ أثبت أن $\mathcal{R}(P,\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k))=(-1)^{nm}\prod_{k=1}^{n}P(\alpha_k)$، واستنتج المساواة :

$$\mathcal{R}\Big(\prod_{k=1}^{m}(X-\beta_k),\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)\Big)=(-1)^{nm}\prod_{\substack{1\le j\le m\\1\le k\le n}}(\alpha_k-\beta_j).$$

الحل

.1 نعرّف في حالة k من $\mathbb{N}_{n+m}$، العنصر e_k من $E_n\times E_m$ كما يأتي:

$$e_k=\begin{cases}(X^{n-k},0) & : 1\le k\le n\\ (0,X^{n+m-k}) & : n<k\le n+m\end{cases}$$

عندئذ نلاحظ أنّ

$$\sum_{k=1}^{n+m}a_ke_k=\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-k}X^k,\sum_{k=0}^{m-1}a_{n+m-k}X^k\right)$$

وعليه فإنّ

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n+m}a_ke_k=0\right)&\Rightarrow\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-k}X^k=0\right)\wedge\left(\sum_{k=0}^{m-1}a_{n+m-k}X^k=0\right)\\&\Rightarrow a_1=a_2=\cdots=a_{n+m}=0\end{aligned}$$

وهذا يثبت أنّ الجملة $\mathcal{E} = (e_k)_{1\le k\le n+m}$ حرّة، فهي أساس للفضاء $E_m \times E_n$، لأنّ عدد حدودها يساوي بُعد الفضاء.

2.ليكن كثيرا الحدود $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ و $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ من E_{m+1} و E_{n+1} على التوالي. نفترض أنّ $a_m \neq 0$ و $b_n \neq 0$، ونضع

$$\Phi(W) = S(X)P(X) + T(X)Q(X)$$

وذلك أياً كان $W = (S(X), T(X))$ من $E_n \times E_m$.

①.2 من الواضح أنّ التطبيق Φ تطبيق خطّي من $E_n \times E_m$ إلى E_{n+m}.

②.2 لنعرّف إذن Δ القاسم المشترك الأعظم $\gcd(P,Q)$ لكثيري الحدود P و Q، ولتكن d درجة كثير الحدود Δ أي $d = \deg\Delta$. عندئذ يمكننا أن نعرّف كثيرَي الحدود P_1 و Q_1 كما يأتي:

$$P(X) = \Delta(X) P_1(X) \quad \text{و} \quad Q(X) = \Delta(X) Q_1(X)$$

- ولـمّا كان

$$\Delta = \gcd(P,Q) = \gcd\left(\Delta P_1, \Delta Q_1\right) = \Delta \gcd\left(P_1, Q_1\right)$$

استنتجنا أنّ $\gcd\left(P_1, Q_1\right) = 1$، أي إنّ P_1 و Q_1 أوّليّان فيما بينهما.

- لنفترض أنّ $W = (S(X), T(X))$ ينتمي إلى $\ker\Phi$ عندئذ يكون

$$S(X)P(X) = -T(X)Q(X)$$

أو، بعد الاختصار على Δ،

$$S(X)P_1(X) = -T(X)Q_1(X)$$

ولمّا كان P_1 يقسم TQ_1 وهو أوّلي مع Q_1 استنتجنا أنّ $P_1 \mid T$ فيوجد كثير حدود λ يُحقِّق $T = \lambda P_1$ وعندئذ يكون $S = -\lambda Q_1$. ونستنتج من المساواة $T = \lambda P_1$ أنّ

$$\deg \lambda + \deg P_1 = \deg T < m$$

ولكن $\deg P_1 = \deg P - \deg \Delta = m - d$، إذن $\deg \lambda + m - d < m$ أو $\deg \lambda < d$، أي يوجد λ ينتمي إلى E_d ويُحقِّق

$$W = (-\lambda(X)Q_1(X), \lambda(X)P_1(X)).$$

وبالعكس، ينتمي كلُّ عنصر من الصيغة $\big(-\lambda(X)Q_1(X), \lambda(X)P_1(X)\big)$، حيث λ من E_d، إلى الفضاء الجزئي $\ker \Phi$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\ker \Phi = \left\{\big(-\lambda(X)Q_1(X), \lambda(X)P_1(X)\big) :\ \lambda(X) \in E_d\right\}$$

ولمّا كان من الواضح أنّ التطبيق $\lambda \mapsto (-\lambda Q_1, \lambda P_1)$ تقابلٌ خطّي بين E_d و $\ker \Phi$ استنتجنا أنّ

$$\dim \ker \Phi = \dim E_d = d$$

③.2 ليكن الأساس $\mathcal{F} = (X^{n+m-1}, X^{n+m-2}, \ldots, X, 1)$ للفضاء E_{n+m}. عندئذ

$$\Phi(e_j) = \begin{cases} X^{n-j}P(X) & : \quad 1 \le j \le n \\ X^{n+m-j}Q(X) & : \quad n < j \le n+m \end{cases}$$

ومن ثَمّ

$$\Phi(e_j) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k X^{n+k-j} & : \quad 1 \le j \le n \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^{n+m+k-j} & : \quad n < j \le n+m \end{cases}$$

أو

$$\Phi(e_j) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=j}^{j+m} a_{j+m-i} X^{n+m-i} & : \quad 1 \le j \le n \\ \displaystyle\sum_{i=j-n}^{j} b_{j-i} X^{n+m-i} & : \quad n < j \le n+m \end{cases}$$

إذن $M\big(P,Q\big)=\operatorname{mat}\big(\Phi,\mathcal{E},\mathcal{F}\big)$ إذ عرّفنا المصفوفة $M(P,Q)$ من $\mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C})$ كما يلي :

$$M(P,Q)=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{n} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{m} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_m & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{m-1} & a_m & \ddots & \vdots & b_{n-1} & b_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_{m-1} & \ddots & 0 & \vdots & b_{n-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a_m & \vdots & & \ddots & b_n \\ a_1 & & & a_{m-1} & b_1 & & & b_{n-1} \\ a_0 & a_1 & & \vdots & b_0 & b_1 & & \vdots \\ 0 & a_0 & \ddots & \vdots & 0 & b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 & \vdots & \ddots & \ddots & b_1 \\ \vdots & & a_0 & a_1 & \vdots & & b_0 & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{bmatrix} \end{array}$$

وعليه فإنّ

$$\operatorname{rg} M\big(P,Q\big)=\operatorname{rg}\Phi=\dim E_{n+m}-\dim\ker\Phi=n+m-d$$

ولكن نعلم أنّ

$$n+m-d=\deg PQ-\deg\Delta=\deg\operatorname{lcm}(P,Q)$$

لأنّ كثيري الحدود PQ و $\gcd(P,Q)\operatorname{lcm}(P,Q)$ شريكان. إذن

$$\operatorname{rg} M(P,Q)=\deg\operatorname{lcm}(P,Q)$$

3. نحتفظ برموز السؤال السابق، ونضع $\mathcal{R}(P,Q)=\det M(P,Q)$. يكون كثيرا الحدود P و Q أوليّين فيما بينهما إذا وفقط إذا كان $d=\deg\Delta=0$ ، وهذا يكافئ أنّ رتبة المصفوفة $M(P,Q)$ من $\mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C})$ تساوي $n+m$ ، أي إنّها قلوبة، أو إنّ محدِّدها لا يساوي الصفر. وعليه نرى أنّ

$$\big(\mathcal{R}(P,Q)\neq 0\big)\Leftrightarrow\big(P \text{ و } Q \text{ أوّليّان فيما بينهما}\big)$$

4. نسمّي مميِّز كثيرالحدود P العددَ $\mathcal{D}(P)=\mathcal{R}(P,P')$.

- إذا كان $\mathcal{D}(P)=0$ استنتجنا أنّ P و P' ليسا أوّليين فيما بينهما، فلهما قاسم مشترك من الدرجة الأولى، وليكن $X-\alpha$ وهذا يقتضي أنّ $P(\alpha)=P'(\alpha)=0$ أي إنّ لكثير الحدود P جذراً مضاعفاً.
- وبالعكس، إذا كان α جذراً مضاعفاً لكثير الحدود P، استنتجنا أنّ $X-\alpha$ يقسم كلاً من P و P'، وهذا يقتضي أنّ كثيرَي الحدود P و P' ليسا أوليَّين فيما بينهما، أي $\mathcal{D}(P)=0$.

إذن لقد أثبتنا أنّ

$$(\mathcal{D}(P)=0)\Leftrightarrow(\text{يقبل جذراً مضاعفاً } P)$$

لنحسب على سبيل المثال المميِّز $\mathcal{D}(P)$ في حالة $P(X)=X^3+aX+b$. في الحقيقة، إنّ

$$\mathcal{D}(P)=\det\begin{bmatrix}1&0&3&0&0\\0&1&0&3&0\\a&0&a&0&3\\b&a&0&a&0\\0&b&0&0&a\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&a&0&3\\a&0&a&0\\b&0&0&a\end{bmatrix}+3\det\begin{bmatrix}0&1&3&0\\a&0&0&3\\b&a&a&0\\0&b&0&a\end{bmatrix}$$

$$=a\det\begin{bmatrix}1&3&0\\a&a&0\\b&0&a\end{bmatrix}-3\det\begin{bmatrix}a&0&3\\b&a&0\\0&0&a\end{bmatrix}+9\det\begin{bmatrix}a&0&3\\b&a&0\\0&b&a\end{bmatrix}$$

$$=-2a^3-3a^3+9(a^3-3b^2)=4a^3-27b^2$$

وعليه

$$\mathcal{D}(X^3+aX+b)=4a^3-27b^2$$

وتقبل المعادلة $X^3+aX+b=0$ جذراً مُضاعفاً إذا وفقط إذا كان $a^3-27b^2=0$.

5. يقبل كثيرا الحدود $P = aX^2 + bX + c$ و $Q = a'X^2 + b'X + c'$ جذراً مشتركاً إذا وفقط إذا لم يكونا أوّليين فيما بينهما، أي إذا وفقط إذا كان $\mathcal{R}(P,Q) = 0$. ولكن

$$\mathcal{R}(P,Q) = \det\begin{bmatrix} a & 0 & a' & 0 \\ b & a & b' & a' \\ c & b & c' & b' \\ 0 & c & 0 & c' \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} a & 0 & a' & 0 \\ 0 & c & 0 & c' \\ c & b & c' & b' \\ b & a & b' & a' \end{bmatrix}$$

$$= -\det\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ c & b & c' - \frac{a'}{a}c & b' - \frac{c'}{c}b \\ b & a & b' - \frac{a'}{a}b & a' - \frac{c'}{c}a \end{bmatrix}$$

$$= -ac\det\begin{bmatrix} c' - \frac{a'}{a}c & b' - \frac{c'}{c}b \\ b' - \frac{a'}{a}b & a' - \frac{c'}{c}a \end{bmatrix}$$

$$= -\det\begin{bmatrix} ac' - a'c & cb' - c'b \\ ab' - a'b & ca' - c'a \end{bmatrix}$$

$$= (ab' - a'b)(cb' - c'b) - (ca' - c'a)^2$$

وبذا يتم إثبات المطلوب.

6. نحتفظ برموز السؤال 2. وأياً كان كثير الحدود $U(X)$ والعدد a من $\mathbb{C}$، نرمز بالرمز $\tau_a(U)(X)$ إلى كثير الحدود $U(X+a)$. ثم نتأمّل التطبيقات الخطيّة التالية:

$$\begin{array}{llllll} \Psi & : E_n \times E_m & \to & E_n \times E_m & : (S,T) & \mapsto & (\tau_{-a}(S), \tau_{-a}(T)), \\ \Phi_1 & : E_n \times E_m & \to & E_{n+m} & : (S,T) & \mapsto & S \times \tau_{-a}(P) + T \times Q, \\ \Theta & : E_{n+m} & \to & E_{n+m} & : U & \mapsto & \tau_a(U), \\ \Phi_2 & : E_n \times E_m & \to & E_{n+m} & : (S,T) & \mapsto & S \times P + T \times \tau_a(Q). \end{array}$$

①.6 ليكن $W = (S, T)$ عنصراً من $E_n \times E_m$ عندئذ

$$\begin{aligned}\Theta \circ \Phi_1 \circ \Psi(W) &= \Theta \circ \Phi_1(\tau_{-a}(S), \tau_{-a}(T)) \\ &= \Theta(\tau_{-a}(S) \times \tau_{-a}(P) + \tau_{-a}(T) \times Q) \\ &= \Theta(\tau_{-a}(S \times P + T \times \tau_a(Q))) \\ &= S \times P + T \times \tau_a(Q) = \Phi_2(W)\end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ أنّ $\Phi_2 = \Theta \circ \Phi_1 \circ \Psi$. إذن

$$\mathrm{mat}(\Phi_2, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \mathrm{mat}(\Theta, \mathcal{F}, \mathcal{F}) \cdot \mathrm{mat}(\Phi_1, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \cdot \mathrm{mat}(\Psi, \mathcal{E}, \mathcal{E})$$

ولكن نرى مباشرة أنّ المصفوفتين $\mathrm{mat}(\Theta, \mathcal{F}, \mathcal{F})$ و $\mathrm{mat}(\Psi, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ مصفوفتين مثلّثيّتين ثوابت قطريهما الرئيسيّين تساوي جميعاً الواحد، إذن

$$\det \mathrm{mat}(\Phi_2, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \det \mathrm{mat}(\Phi_1, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$

ولكن

$$\mathrm{mat}(\Phi_2, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = M(P, \tau_a(Q)) \quad \text{و} \quad \mathrm{mat}(\Phi_1, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = M(\tau_{-a}(P), Q)$$

إذن

$$\det M(\tau_{-a}(P), Q) = \det M(P, \tau_a(Q))$$

أو

$$\mathcal{R}(P, \tau_a(Q)) = \mathcal{R}(\tau_{-a}(P), Q)$$

②.6 في الحقيقة، نلاحظ أنّ

$$\mathcal{R}(P, X) = \det \begin{bmatrix} a_m & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{m-1} & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ a_1 & & & & 0 & 1 \\ a_0 & 0 & & \cdots & & 0 \end{bmatrix} = (-1)^m a_0 = (-1)^m P(0)$$

ومن جهة أخرى

$$M(P,XQ)=\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
\overbrace{\hphantom{a_{m-1}\quad a_{m-1}\quad a_{m-1}\quad a_{m-1}}}^{n+1} & \overbrace{\hphantom{b_{n-1}\quad b_{n-1}\quad b_{n-1}\quad b_{n-1}}}^{m}
\end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccccc}
a_m & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0\\
a_{m-1} & a_m & \ddots & \vdots & b_{n-1} & b_n & \ddots & \vdots\\
\vdots & a_{m-1} & \ddots & & \vdots & b_{n-1} & \ddots & \\
 & \ddots & a_m & 0 & & \ddots & b_n & 0\\
a_1 & & a_{m-1} & a_m & b_0 & & b_{n-1} & b_n\\
a_0 & a_1 & & a_{m-1} & 0 & b_0 & & b_{n-1}\\
0 & a_0 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & b_0 & \\
 & & a_0 & a_1 & & & 0 & b_0\\
0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}$$

فإذا نشرنا محدِّد هذه المصفوفة وفق السطر الأخير وجدنا مباشرة أنّ

$$\mathcal{R}(P,XQ)=(-1)^m P(0)\mathcal{R}(P,Q)$$

③.6 لقد وجدنا في ①.6 أنّه في حالة a من $\mathbb{C}$ لدينا

$$\mathcal{R}(P,\tau_a(Q))=\mathcal{R}(\tau_{-a}(P),Q)$$

وعليه يكون

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\big(P,(X-a)Q\big) &= \mathcal{R}(P,\tau_{-a}(XQ(X+a)))\\
&= \mathcal{R}(\tau_a(P),XQ(X+a))\\
&= (-1)^m(\tau_a(P)(0))\mathcal{R}(\tau_a(P),\tau_a(Q))\\
&= (-1)^m P(a)\mathcal{R}(\tau_{-a}\circ\tau_a(P),Q)\\
&= (-1)^m P(a)\mathcal{R}(P,Q)
\end{aligned}$$

وأخيراً

$$\mathcal{R}(P,(X-a)Q)=(-1)^m P(a)\mathcal{R}(P,Q)$$

④.6 تتيح لنا الخاصّة السابقة أن نثبتَ بالتدريج على العدد n أنّ

$$\mathcal{R}\left(P,\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)\right)=(-1)^{mn}\prod_{k=1}^{n}P(\alpha_k)$$

ومن ثَمّ يكون

$$\mathcal{R}\left(\prod_{j=1}^{m}(X-\beta_j),\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)\right)=(-1)^{mn}\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_k-\beta_j)$$

وهو المطلوب.

التمرين 18.

I. **مقدّمة**. نذكّر أنّ كثيرات حدود تشبيشِف Tchebychev من النوع الأوّل هي كثيرات الحدود $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالخاصّة

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad T_n(\cos\theta)=\cos n\theta \qquad ①$$

أمّا كثيرات حدود تشبيشف من النوع الثاني فهي كثيرات الحدود $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة كما يأتي:

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad U_n=\frac{1}{n+1}T'_{n+1} \qquad ②$$

1. أثبت أنّ

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad U_n(\cos\theta)=\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} \qquad ③$$

2. أثبت أيضاً أنّ

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad T_{n+1}(X)&=2XT_n(X)-T_{n-1}(X)\\ U_{n+1}(X)&=2XU_n(X)-U_{n-1}(X)\end{aligned}$$

3. ماذا تقول عن $\mathcal{Z}_n$ مجموعة جذور كثير الحدود U_n ؟

4. أثبت أنّ

$$\forall(m,k)\in\mathbb{N}^2,\quad m\le k\Rightarrow U_kU_{m+1}-U_{k+1}U_m=U_{k-m-1} \qquad ④$$

5. أثبت أيضاً أنّ

$$2\sum_{k=0}^{n-1}U_k(X)U_k(Y)=\frac{U_n(X)U_{n-1}(Y)-U_{n-1}(X)U_n(Y)}{X-Y} \qquad ⑤$$

$$2\sum_{k=0}^{n-1}(U_k(Y))^2=U_{n-1}(Y)U'_n(Y)-U_n(Y)U'_{n-1}(Y) \qquad ⑥$$

II. لتكن n من $\mathbb{N}^*$. ولنتأمّل المصفوفة المربّعة $A_n = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}(X))$ المعرّفة كما يأتي :

$$a_{ij} = \begin{cases} 2X & : \quad i = j \\ 1 & : \ |i-j| = 1 \\ 0 & : \ |i-j| > 1 \end{cases}$$

1. أثبت أنّ $\det(A_n) = U_n(X)$.

2. نتأمّل المصفوفة المربّعة $L_n = (\ell_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}(X))$ المعرّفة كما يلي :

$$\ell_{ij} = \delta_i^j + \frac{U_{j-1}}{U_j}\delta_i^{j+1}$$

وكذلك المصفوفة القطريّة $D_n = (d_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}(X))$ المعرّفة كما يلي :

$$d_{ij} = \frac{U_j}{U_{j-1}}\delta_i^j = \begin{cases} \dfrac{U_j}{U_{j-1}} & : \ i = j \\ 0 & : \ i \neq j \end{cases}$$

هنا δ_i^j هو رمز كرونيكر الذي يساوي 1 في حال تساوي الدليلين ويساوي 0 في حال اختلافهما. أثبت أنّ $A_n = L_n D_n {}^t L_n$.

3. نتأمّل المصفوفة المربّعة $T_n = (t_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}(X))$ المعرّفة كما يلي :

$$t_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j-i}\dfrac{U_{j-1}}{U_{i-1}} & : \ j \leq i \\ 0 & : \ j > i \end{cases}$$

أثبت أنّ $T_n = L_n^{-1}$. واستنتج أنّ

$$A_n^{-1} = \frac{1}{U_n}\Big((-1)^{i+j}\,U_{n-i\vee j}\cdot U_{i\wedge j-1}\Big)_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$$

وقد رمزنا $i \wedge j = \min(i,j)$ و $i \vee j = \max(i,j)$.

4. نتأمّل الشعاع $\mathcal{V}_n(Y) = {}^t[U_0(Y),\ldots,U_{i-1}(Y),\ldots,U_{n-1}(Y)]$.

- احسب المقدار ${}^t\mathcal{V}_n(\alpha)\mathcal{V}_n(\beta)$ عندما يكون α و β عنصرين من $\mathcal{Z}_n$.
- احسب المقدار $A_n\mathcal{V}_n(Y)$.

- استنتج أنّ الجملة $\left(\sqrt{\frac{2(1-\alpha^2)}{n+1}}V_n(\alpha)\right)_{\alpha\in\mathcal{Z}_n}$ جملةٌ متعامدة نظاميّة من الأشعّة الذاتيّة للمصفوفة A_n .
- لتكن المصفوفتان $P_n = \left(p_{ij}\right)$ و $\Lambda_n = \left(\lambda_{ij}\right)$ المعرّفتين كما يلي :

$$p_{ij} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\cdot\sin\left(\frac{\pi ij}{n+1}\right) \quad \text{و} \quad \lambda_{ij} = 2\left(X+\cos\left(\frac{\pi j}{n+1}\right)\right)\delta_i^j$$

استنتج أنّ $P = {}^tP = P^{-1}$. وأنّ $A_n = P_n\Lambda_n P_n$.

5. استنتج من الدراسة السابقة أنّه في حالة $1 \le i \le j \le n$ لدينا

$$\frac{1}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{\pi ip}{n+1}\right)\sin\left(\frac{\pi jp}{n+1}\right)}{X-\cos\left(\frac{\pi p}{n+1}\right)} = \frac{U_{n-j}(X)U_{i-1}(X)}{U_n(X)}$$

6. هل يمكنك إثبات هذه النتيجة بأسلوب آخر ؟

الحل

I. نذكّر أنّ كثيرات حدود تشبيشِف من النوع الأوّل هي كثيرات الحدود $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالخاصّة

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta \qquad ①$$

أمّا كثيرات حدود من النوع الثاني فهي كثيرات الحدود $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة كما يلي :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad U_n = \frac{1}{n+1}T'_{n+1} \qquad ②$$

1. هذا ونستنتج من اشتقاق المتطابقة $T_{n+1}(\cos\theta) = \cos(n+1)\theta$ أنّ

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} \qquad ③$$

هذا ونستنتج من كون $\omega\mapsto\cos n\omega$ و $\omega\mapsto\dfrac{\sin((n+1)\omega)}{\sin\omega}$ تابعين تحليليَّين أنّ

$$\forall\omega\in\mathbb{C},\quad T_n(\cos\omega) = \cos n\omega \quad \text{و} \quad \forall\omega\in\mathbb{C},\quad U_n(\cos\omega) = \frac{\sin((n+1)\omega)}{\sin\omega}$$

2. كما نستنتج من الخاصّة

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\qquad \begin{aligned}\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta&=2\cos\theta\cos n\theta\\ \sin(n+2)\theta+\sin n\theta&=2\cos\theta\sin(n+1)\theta\end{aligned}$$

أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \begin{aligned}T_{n+1}(X)&=2XT_n(X)-T_{n-1}(X)\\ U_{n+1}(X)&=2XU_n(X)-U_{n-1}(X)\end{aligned}$$

إذن تُحقّق المتتاليتان $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ العلاقة التدريجيّة نفسها، ولا تختلفان إلا في شرطَي البدء، إذ إنّ

$$U_0=1,\,U_1=2X \quad \text{و} \quad T_0=1,\,T_1=X$$

ونصطلح عادة $U_{-1}=0$ فتكون العلاقة التدريجيّة التي تعرّف $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ صحيحة بدءاً من $n=0$.

3. نستنتج من المساواة ③ أنّ مجموعة جذور كثير الحدود U_n في حالة n من $\mathbb{N}^*$ هي

$$\mathcal{Z}_n=\left\{\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right):k\in\mathbb{N}_n\right\}$$

وهي مجموعة متناظرة بالنسبة إلى 0.

4. واستناداً إلى العلاقة التدريجيّة لدينا

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}U_{k+1}&U_k\\U_{m+1}&U_m\end{bmatrix}&=\det\begin{bmatrix}U_{k+1}-2XU_k&U_k\\U_{m+1}-2XU_m&U_m\end{bmatrix}\\&=-\det\begin{bmatrix}U_{k-1}&U_k\\U_{m-1}&U_m\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}U_k&U_{k-1}\\U_m&U_{m-1}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ أنّه في حالة (m,k) من $\mathbb{N}^2$ حيث $m\le k$ لدينا

$$\det\begin{bmatrix}U_{k+1}&U_k\\U_{m+1}&U_m\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}U_{k-m+1}&U_{k-m}\\U_1&U_0\end{bmatrix}=-U_{k-m-1}$$

أو

$$④\qquad \forall(m,k)\in\mathbb{N}^2,\quad m\le k\Rightarrow U_kU_{m+1}-U_{k+1}U_m=U_{k-m-1}$$

5. ومن جهة أخرى، أيّاً كان k من $\mathbb{N}$ كان

$$\begin{aligned} U_{k+1}(X) + U_{k-1}(X) &= 2XU_k(X) \\ U_{k+1}(Y) + U_{k-1}(Y) &= 2YU_k(Y) \end{aligned}$$

فإذا ضربنا المعادلة الأولى في المقدار $U_k(Y)$ والثانية في المقدار $U_k(X)$ وطرحنا المعادلتين الناتجتين وجدنا

$$S_k - S_{k-1} = 2(X-Y)U_k(X)U_k(Y)$$

وقد عرّفنا $S_k = U_{k+1}(X)U_k(Y) - U_k(X)U_{k+1}(Y)$. وبجمع هذه العلاقات نجد

$$2\sum_{k=0}^{n-1} U_k(X)U_k(Y) = \frac{U_n(X)U_{n-1}(Y) - U_{n-1}(X)U_n(Y)}{X-Y} \qquad ⑤$$

وبملاحظة أنّ ألمقدار $\dfrac{U_n(X)U_{n-1}(Y) - U_{n-1}(X)U_n(Y)}{X-Y}$ يُكتب بالصيغة

$$U_{n-1}(Y)\frac{U_n(X) - U_n(Y)}{X-Y} - U_n(Y)\frac{U_{n-1}(X) - U_{n-1}(Y)}{X-Y}$$

نستنتج مما سبق أنّ

$$2\sum_{k=0}^{n-1} (U_k(Y))^2 = U_{n-1}(Y)U_n'(Y) - U_n(Y)U_{n-1}'(Y) \qquad ⑥$$

II. لتكن n من $\mathbb{N}^*$. ولنتأمّل المصفوفة المربّعة $A_n = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}(X))$ المعرّفة كما يأتي :

$$a_{ij} = \begin{cases} 2X & : \quad i = j \\ 1 & : \quad |i-j| = 1 \\ 0 & : \quad |i-j| > 1 \end{cases} \qquad \text{أي} \qquad A_n = \begin{bmatrix} 2X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2X & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2X \end{bmatrix}$$

1. لنرمز بالرمز $\Delta_n(X)$ إلى محدِّد المصفوفة A_n . عندئذ نلاحظ أنّ

$$\Delta_2(X) = 4X^2 - 1 \quad \text{و} \quad \Delta_1(X) = 2X$$

ونلاحظ بنشر المحدِّد السابق وفق العمود الأوّل، في حالة $n \geq 3$ أنّ

$$\Delta_n(X) = 2X\Delta_{n-1}(X) - \Delta_{n-2}(X)$$

فإذا عرّفنا اصطلاحاً $\Delta_0(X) = 1$ كانت المتتالية $(\Delta_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ هي المتتالية التدريجيّة المعرّفة كما يلي :

$$\Delta_0(X) = 1, \qquad \Delta_1(X) = 2X,$$

$$\forall n \geq 2, \qquad \Delta_n(X) = 2X\Delta_{n-1}(X) - \Delta_{n-2}(X)$$

إذن ترتبط المحدِّدات $(\Delta_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ بكثيرات حدود تشبيشِف من النوع الثاني بالعلاقة

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; \Delta_n(X) = U_n(X)$$

2. لنتأمّل المصفوفة المربّعة $L_n = (\ell_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}(X))$ المعرّفة كما يلي :

$$\ell_{ij} = \delta_i^j + \frac{U_{j-1}}{U_j}\delta_i^{j+1} = \begin{cases} 1 & : \;\; i = j \\ \dfrac{U_{j-1}}{U_j} & : \;\; i = j+1 \\ 0 & : \;\; i \notin \{j, j+1\} \end{cases}$$

ولنتأمّل كذلك المصفوفة القطريّة $D_n = (d_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}(X))$ المعرّفة كما يأتي:

$$d_{ij} = \frac{U_j}{U_{j-1}}\delta_i^j = \begin{cases} \dfrac{U_j}{U_{j-1}} & : \;\; i = j \\ 0 & : \;\; i \neq j \end{cases}$$

هنا δ_i^j هو رمز كرونيكر الذي يساوي 1 في حال تساوي الدليلين، ويساوي 0 في حال اختلافهما. أي

$$L_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \frac{U_0}{U_1} & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{U_1}{U_2} & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{U_{n-2}}{U_{n-1}} & 1 \end{bmatrix}, \quad D_n = \begin{bmatrix} \frac{U_1}{U_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{U_2}{U_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{U_n}{U_{n-1}} \end{bmatrix}$$

لتكن (i,j) من $\mathbb{N}_n^2$ ، عندئذ نجد أنّ

$$\begin{aligned}[L_n D_n {}^tL_n]_{ij} &= \sum_{(r,m)\in\mathbb{N}_n^2} \ell_{ir} d_{rm} \ell_{jm} = \sum_{m\in\mathbb{N}_n} \ell_{im} d_{mm} \ell_{jm} \\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}_n} \left(\delta_i^m + \frac{U_{m-1}}{U_m}\delta_i^{m+1}\right)\left(\delta_j^m + \frac{U_{m-1}}{U_m}\delta_j^{m+1}\right)\frac{U_m}{U_{m-1}} \\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}_n} \left(\delta_i^m\delta_j^m \frac{U_m}{U_{m-1}} + \delta_i^{m+1}\delta_j^m + \delta_i^m\delta_j^{m+1} + \frac{U_{m-1}}{U_m}\delta_i^{m+1}\delta_j^{m+1}\right) \\ &= \delta_i^j\left(\frac{U_j + U_{j-2}}{U_{j-1}}\right) + \delta_i^{j+1} + \delta_i^{j-1}\end{aligned}$$

وفق الاصطلاح $U_{-1} = 0$.

ولكن بالاعتماد على العلاقة التدريجيّة التي تُحقِّقها المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نرى مباشرة أنّ

$$U_j + U_{j-2} = 2XU_{j-1}$$

إذن

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\quad [L_n D_n {}^tL_n]_{ij} = \delta_i^j 2X + \delta_i^{j+1} + \delta_i^{j-1}$$

وهذا يُثبتُ أنّ

$$A_n = L_n D_n {}^tL_n$$

3. لنتأمّل المصفوفة المربّعة $T_n = (t_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}(X))$ المعرّفة كما يلي :

$$t_{ij} = \begin{cases} (-1x)^{j-i}\dfrac{U_{j-1}}{U_{i-1}} & : \quad j \le i \\ 0 & : \quad j > i \end{cases}$$

أي

$$T_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\dfrac{U_0}{U_1} & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \dfrac{U_0}{U_2} & -\dfrac{U_1}{U_2} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \dfrac{(-1)^{n-1}U_0}{U_{n-1}} & \cdots & \cdots & \dfrac{U_{n-3}}{U_{n-1}} & -\dfrac{U_{n-2}}{U_{n-1}} & 1 \end{bmatrix}$$

لتكن (i,j) من $\mathbb{N}_n^2$، تُحقّق الشرط $j \le i$ عندئذ

$$\begin{aligned}\left[T_n L_n\right]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\ell_{kj} = \sum_{k=1}^{i}\left((-1)^{k-i}\frac{U_{k-1}}{U_{i-1}}\right)\left(\delta_k^j + \frac{U_{j-1}}{U_j}\delta_k^{j+1}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{i}\left((-1)^{k-i}\frac{U_{k-1}}{U_{i-1}}\delta_k^j\right) + \sum_{k=1}^{i}\left((-1)^{k-i}\frac{U_{k-1}}{U_{i-1}}\frac{U_{j-1}}{U_j}\delta_k^{j+1}\right)\\ &= (-1)^{j-i}\frac{U_{j-1}}{U_{i-1}} + (-1)^{j+1-i}\frac{U_j}{U_{i-1}}\frac{U_{j-1}}{U_j}(1-\delta_i^j)\\ &= (-1)^{j-i}\frac{U_{j-1}}{U_{i-1}}\delta_i^j = \delta_i^j\end{aligned}$$

ولمّا كانت المصفوفتان L_n و T_n مصفوفتين مثلّثيّتين سفليتين استنتجنا مما سبق أنّ

$$T_n = L_n^{-1}$$

وهكذا نرى أنّ

$$A_n^{-1} = B_n = {}^tT_n D_n^{-1} T_n$$

والمصفوفة A_n^{-1} مصفوفة متناظرة.

ليكن إذن (i,j) عنصراً من $\mathbb{N}_n^2$ يُحقّق الشرط $j \le i$، عندئذ

$$\begin{aligned}\left[B_n\right]_{ij} &= \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}_n^2} t_{pi}\frac{1}{d_{pq}}t_{qj} = \sum_{i\le p\le n}\sum_{j\le q\le n} t_{pi}\frac{1}{d_{pq}}t_{qj}\\ &= (-1)^{i+j}\sum_{i\le p\le n}\sum_{j\le q\le n}(-1)^{p+q}\frac{U_{i-1}}{U_{p-1}}\frac{U_{j-1}}{U_q}\delta_p^q\\ &= (-1)^{i+j}U_{i-1}U_{j-1}\times\sum_{i\le p\le n}\frac{1}{U_{p-1}U_p}\end{aligned}$$

وبالاستفادة من العلاقة ④ في الحالة الخاصّة الموافقة لقيمة m تساوي $k-1$ نجد

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad U_k^2 - U_{k+1}U_{k-1} = 1$$

وينتج من ذلك أنّ

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{U_k}{U_{k-1}} - \frac{U_{k+1}}{U_k} = \frac{1}{U_kU_{k-1}}$$

إذن

$$\forall i \in \mathbb{N}_n,\quad \sum_{k=i}^{n}\frac{1}{U_kU_{k-1}}=\frac{U_i}{U_{i-1}}-\frac{U_{n+1}}{U_n}$$

وعليه، مهما يكن العنصر (i,j) من $\mathbb{N}_n^2$ الذي يحقّق $j \leq i$ يكن

$$\begin{aligned}[B_n]_{ij} &= (-1)^{i+j}U_{i-1}U_{j-1}\times\left(\frac{U_i}{U_{i-1}}-\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)\\ &= (-1)^{i+j}\frac{U_{j-1}}{U_n}\left(U_nU_i-U_{n+1}U_{i-1}\right)\end{aligned}$$

وبالعودة إلى ④ وأخذ $k=n$ و $m=i-1$ نجد

$$[B_n]_{ij}=(-1)^{i+j}\frac{U_{j-1}U_{n-i}}{U_n}$$

فإذا تذكّرنا أنّ B_n مصفوفة متناظرة استنتجنا أنّ

$$A_n^{-1}=\frac{1}{U_n}\left((-1)^{i+j}U_{n-i\vee j}\cdot U_{i\wedge j-1}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$$

وقد رمزنا $i\wedge j=\min(i,j)$ و $i\vee j=\max(i,j)$.

4. لنتأمّل الشعاع

$$\mathcal{V}_n(Y)=\begin{bmatrix}U_0(Y)\\U_1(Y)\\ \vdots\\U_{i-1}(Y)\\ \vdots\\U_{n-1}(Y)\end{bmatrix}$$

عندئذ نلاحظ أنّ

$$A_n\mathcal{V}_n(Y)=\begin{bmatrix}2XU_0(Y)+U_1(Y)\\ \vdots\\U_{i-1}(Y)+U_{i+1}(Y)+2XU_i(Y)\\ \vdots\\U_{n-1}(Y)+U_{n+1}(Y)+2XU_n(Y)\end{bmatrix}$$

وبالاستفادة من العلاقة التدريجيّة نجد

$$A_n\mathcal{V}_n(Y)=\begin{bmatrix}(2X+2Y)U_0(Y)\\ \vdots\\ (2X+2Y)U_i(Y)\\ \vdots\\ (2X+2Y)U_n(Y)\end{bmatrix}=2(X+Y)\mathcal{V}_n(Y)$$

ولكن لنفترض الآن أنّ α و β عنصران من $\mathcal{Z}_n$ مجموعة جذور كثير الحدود U_n عندئذ

$$^t\mathcal{V}_n(\alpha)\mathcal{V}_n(\beta)=\sum_{k=0}^{n-1}U_k(\alpha)U_k(\beta)=0$$

وذلك بالاعتماد على المساواة ⑤ ونظراً إلى كون $U_n(\alpha)=U_n(\beta)=0$. ومن جهة أخرى، نجد بالاستفادة من المساواة ⑥ أنّ

$$^t\mathcal{V}_n(\alpha)\mathcal{V}_n(\alpha)=\sum_{k=0}^{n-1}(U_k(\alpha))^2=\frac{1}{2}U_{n-1}(\alpha)U_n'(\alpha)$$

ونستنتج من اشتقاق طرفي المساواة ③ أنّه مهما كانت θ من $\mathbb{R}$ كان

$$-U_n'(\cos\theta)\sin^2\theta=(n+1)\cos((n+1)\theta)-\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}\cos\theta$$

ومن ثَمّ إذا كان $\alpha=\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)$ كان

$$U_n'(\alpha)=(n+1)\frac{(-1)^{k+1}}{\sin^2\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)},\quad U_{n-1}(\alpha)=\frac{\sin\left(\pi k-\frac{\pi k}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)}=(-1)^{k-1}$$

وعليه

$$\frac{1}{2}U_{n-1}(\alpha)U_n'(\alpha)=\frac{n+1}{2\sin^2\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)}=\frac{n+1}{2(1-\alpha^2)}$$

إذن، الجملة $\left(\sqrt{\frac{2(1-\alpha^2)}{n+1}}V_n(\alpha)\right)_{\alpha\in\mathcal{Z}_n}$ جملةٌ متعامدة نظاميّة من الأشعّة الذاتيّة للمصفوفة A_n.

لتكن المصفوفة P_n من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ التي أعمدتها جملة الأشعّة السابقة.

وتحديداً $P_n = (p_{ij})$ حيث

$$p_{ij} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \cdot U_{i-1}\left(\cos\frac{\pi j}{n+1}\right) \cdot \sin\frac{\pi j}{n+1} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \cdot \sin\left(\frac{\pi ij}{n+1}\right)$$

استناداً إلى ما سبق نرى مباشرة أنّ $P = {}^tP = P^{-1}$.

ولتكن المصفوفة القطريّة $\Lambda_n = (\lambda_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ المعرّفة بالصيغة

$$\lambda_{ij} = 2\left(X + \cos\left(\frac{\pi j}{n+1}\right)\right)\delta_i^j$$

عندئذ يكون لدينا $A_n = P_n \Lambda_n P_n$.

5. ولمّا كان $A_n^{-1} = P_n \Lambda_n^{-1} P_n$ استنتجنا أنّ

$$[A_n^{-1}]_{ij} = P_n \Lambda_n^{-1} P_n = \frac{1}{n+1}\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{\pi ip}{n+1}\right)\sin\left(\frac{\pi jp}{n+1}\right)}{X + \cos\left(\frac{\pi p}{n+1}\right)}$$

فنكون بذلك قد أثبتنا المساواة التالية

$$\frac{1}{n+1}\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{\pi ip}{n+1}\right)\sin\left(\frac{\pi jp}{n+1}\right)}{X + \cos\left(\frac{\pi p}{n+1}\right)} = (-1)^{i+j}\,\frac{U_{n-i\vee j}(X)\cdot U_{i\wedge j-1}(X)}{U_n(X)}$$

وقد رمزنا $i \wedge j = \min(i,j)$ و $i \vee j = \max(i,j)$. وبالاستفادة من الخاصّة الواضحة

$$U_n(-X) = (-1)^n U_n(X)$$

نستنتج أنّه في حالة $1 \le i \le j \le n$ لدينا

$$\frac{1}{n+1}\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{\pi ip}{n+1}\right)\sin\left(\frac{\pi jp}{n+1}\right)}{X - \cos\left(\frac{\pi p}{n+1}\right)} = \frac{U_{n-j}(X)U_{i-1}(X)}{U_n(X)}$$

6. في الحقيقة، يمكن إثبات النتيجة السابقة بأسلوب آخر. لمّا كانت جذور كثير الحدود U_n بسيطة استنتجنا بتفريق الكسر $\dfrac{P}{U_n}$ أنّ

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \deg P < n \Rightarrow \frac{P(X)}{U_n(X)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{Z}_n} \frac{P(\alpha)}{U_n'(\alpha)} \cdot \frac{1}{X-\alpha}$$

وبالاستفادة من عبارة $U_n(\cos\theta)$ نجد بالحساب المباشر أنّ $U_n'(\alpha) = -\dfrac{n+1}{1-\alpha^2}T_{n+1}(\alpha)$

إذن في حالة كثير حدود P درجته أصغر تماماً من n لدينا

$$\frac{P(X)}{U_n(X)} = -\frac{1}{n+1}\sum_{\alpha\in\mathcal{Z}_n}\frac{(1-\alpha^2)P(\alpha)}{T_{n+1}(\alpha)}\cdot\frac{1}{X-\alpha}$$

فإذا تذكّرنا أنّ $\mathcal{Z}_n = \left\{\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) : k\in\mathbb{N}_n\right\}$ استنتجنا أنّه في حالة كثير حدود P درجته أصغر تماماً من n لدينا

$$\frac{P(X)}{U_n(X)} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}P\left(\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)\right)\sin^2\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)}{X-\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)}$$

فإذا اخترنا $P(X) = U_{n-j}(X)U_{i-1}(X)$ في حالة $1\le i\le j\le n$ حصلنا على العلاقة المطلوبة. وبذا يتم الإثبات. ■

اختزال التطبيقات الخطيّة

1. عموميات

1-1. **تعريف**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً مختلفاً عن $\{0\}$ على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E)$. نسمّي **قيمة ذاتيّة** للتطبيق الخطّي u، كل عنصر λ من $\mathbb{K}$ يجعل $u - \lambda I_E$ غير متباين، أي يُحقِّق الشرط

$$\ker(u - \lambda I_E) \neq \{0\}$$

وإذا كانت λ قيمة ذاتيّة للتطبيق الخطّي u، أسمينا الفضاء الشعاعي الجزئي

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$$

الفضاء الذاتي للتطبيق الخطّي u الموافق للقيمة الذاتية λ، وأسمينا العناصر **غير الصفرية** في E_λ **أشعة ذاتية** للتطبيق الخطّي u موافقة للقيمة الذاتيّة λ.

وأخيراً نسمّي **طيف التطبيق الخطّي** u مجموعة قيمه الذاتيّة، ونرمز إليه بالرمز $\mathrm{sp}(u)$:

$$\mathrm{sp}(u) = \left\{\lambda \in \mathbb{K} : \ker(u - \lambda I_E) \neq 0\right\}$$

2-1. **مبرهنة**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً مختلفاً عن $\{0\}$ على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E)$. وأخيراً لتكن $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ جماعة من القيم الذاتية المختلفة مثنى مثنى للتطبيق الخطّي u. عندئذ يكون المجموع $\sum_{k=1}^{n} E_{\lambda_k}$ مجموعاً مباشراً.

الإثبات

لنرمز بالرمز $\mathcal{P}_n$ إلى القضية الآتية:

« أياً كانت الجملة $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ المؤلّفة من n قيمةً ذاتيّة مختلفة مثنى مثنى للتطبيق الخطّي u، كان المجموع $\sum_{k=1}^{n} E_{\lambda_k}$ مجموعاً مباشراً.»

القضيّة $\mathcal{P}_1$ صحيحة وضوحاً.

لنفترض جدلاً وجود عدد k تكون عنده $\mathcal{P}_k$ خطأ، وليكن m أصغر عدد طبيعي أكبر تماماً من 1، تكون عنده $\mathcal{P}_m$ غير صحيحة. عندئذ توجد جماعة منتهية $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}_m}$ من القيم الذاتيّة المختلفة مثنى مثنى للتطبيق u، لا يكون عندها المجموع $\sum_{k=1}^{m} E_{\lambda_k}$ مجموعاً مباشراً، ومن ثَمّ، لأنّ m أصغري، يمكن أن نجد عناصر $x_1, x_2, \ldots, x_m$ تُحقّق

$$\forall k \in \mathbb{N}_m, \quad x_k \in E_{\lambda_k} \setminus \{0\} \text{ و } \sum_{k=1}^{m} x_k = 0$$

ويكون من ثَمّ

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_m \cdot x_k = 0 \text{ و } 0 = u\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right) = \sum_{k=1}^{m} u(x_k) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot x_k$$

ينتج من ذلك، بالطرح، أنّ

$$\sum_{k=1}^{m-1} (\lambda_m - \lambda_k) \cdot x_k = 0$$

ولكنّ المجموع $\sum_{k=1}^{m-1} E_{\lambda_k}$ مجموع مباشر استناداً إلى تعريف m، إذن

$$\forall i \in \mathbb{N}_{m-1}, \quad (\lambda_m - \lambda_i)\, x_i = 0$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\forall i \in \mathbb{N}_{m-1}, \lambda_i = \lambda_m$$

لأنّ الأشعة $x_1, \ldots, x_{m-1}$ غير صفرية، وهذا يناقض كوْن القيم الذاتيّة $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}_m}$ مختلفة مثنى مثنى. نستنتج من ذلك أنّ $\mathcal{P}_n$ صحيحة أياً كانت n. ❐

3-1. نتيجة. ليكن E فضاءً شعاعيّاً مختلفاً عن $\{0\}$ على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ يكون المجموع $\sum_{\lambda\in\mathrm{sp}(u)} E_\lambda$ مجموعاً مباشراً.

سنفترض في كلِّ ما يأتي أنّ E فضاء شعاعيّ منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$ وأن بعده n أكبر أو يساوي 1.

1-4. **تمهيد**. ليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ لا يتعلّق كثير الحدود

$$\det\left(\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})-XI_n\right)\in\mathbb{K}[X]$$

بالأساس $\mathcal{E}$ للفضاء E.[1]

الإثبات

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{E}) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "I_E^{-1}"'] & (E,\mathcal{E}) \\
(E,\mathcal{E}') \arrow[r, "u"] & (E,\mathcal{E}') \arrow[u, "I_E"']
\end{tikzcd}$$

ليكن $\mathcal{E}$ و $\mathcal{E}'$ أساسين للفضاء E. لمّا كان المخطّط المجاور تبديلياً، وجدنا أنّ

$$\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E}) = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}\times\operatorname{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}')\times(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}$$

ومن ثَمّ

$$\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})-XI_n = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}\times\left(\operatorname{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}')-XI_n\right)\times(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\begin{aligned}
\det\left(\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})-XI_n\right) &= \det P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}\det\left(\operatorname{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}')-XI_n\right)\frac{1}{\det P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}}\\
&= \det\left(\operatorname{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}')-XI_n\right)
\end{aligned}$$

وبذلك يكتمل الإثبات. ❐

يفيدنا هذا التمهيد في صياغة التعريف الآتي:

1-5. **تعريف**. ليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E)$. نسمّي كثيرَ الحدود

$$\det\left(\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})-XI_n\right)$$

حيث $\mathcal{E}$ أساسٌ ما للفضاء E، **كثيرَ الحدود المميِّز** للتطبيق الخطّي u، ونرمز إليه بالرمز $\mathcal{X}_u(X)$.

1-6. **نتيجة**. ليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E)$. إنّ القيم الذاتية للتطبيق الخطّي u هي جذور كثير الحدود المميّز $\mathcal{X}_u(X)$ للتطبيق u، أي

$$\operatorname{sp}(u)=\left\{\lambda\in\mathbb{K}:\mathcal{X}_u(\lambda)=0\right\}$$

---

[1] يمكن النظر إلى المصفوفة التي نحسب محدّدها بأنها عنصر من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}(X))$، و $\mathbb{K}(X)$ هو حقل الكسور التي ثوابتها في $\mathbb{K}$ بمتحوّل واحد X.

7-1. **تعريف** : ليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E)$. نسمّي رتبة مضاعفة القيمة الذاتية λ للتطبيق الخطّي u، رتبة مضاعفة λ كجذر لكثير الحدود $\mathcal{X}_u(X)$، ونرمز إليها بالرمز $m_u(\lambda)$.

فيكون

$$m_u(\lambda) = k \Leftrightarrow \left((X-\lambda)^k \mid \mathcal{X}_u(X)\right) \wedge \left((X-\lambda)^{k+1} \nmid \mathcal{X}_u(X)\right)$$

نذكّر بالرمز $C_j(B)$ الذي يدلّ على العمود ذي الدليل j في المصفوفة B من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

ليكن $\mathcal{E}$ الأساس القانوني في $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$، ولنتأمّل في $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفتين A_0 و A_1 . لمّا كان $\det_{\mathcal{E}}$ شكلاً $n-$خطياً أمكننا أن نكتب

$$\text{❶} \quad \det(A_0 + A_1) = \sum_{j_1=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\cdots\sum_{j_n=0}^{1} \det_{\mathcal{E}}(C_1(A_{j_1}), C_2(A_{j_2}), \ldots, C_n(A_{j_n}))$$

فإذا كانت J مجموعة جزئيّة من $\mathbb{N}_n$، عرّفنا المصفوفة A_J من أعمدتها على الوجه التالي:

$$C_j(A_J) = \begin{cases} C_j(A_1) & : \quad j \in J, \\ C_j(A_0) & : \quad j \notin J. \end{cases}$$

يفيدنا هذا الرمز الجديد بكتابة العلاقة ❶ بالشكل

$$\text{❷} \quad \det(A_0 + A_1) = \sum_{J \subset \mathbb{N}_n} \det(A_J)$$

فإذا استعملنا العلاقة ❷ لحساب $\det(M - XI_n)$ بوضع $A_0 = -XI_n$ و $A_1 = M$ حصلنا على

$$\det(M - XI_n) = (-X)^n + \sum_{\varnothing \neq J \subset \mathbb{N}_n} (-X)^{n-\operatorname{card}(J)} \det M_{J,J}$$

حيث $M_{J,J}$ هي المصفوفة المربّعة من المرتبة $\operatorname{card}(J)$، التي نحصل عليها من M بعد حذف الأعمدة والأسطر التي لا تنتمي أدلّتها إلى J .

وأخيراً نجد

$$\det(M - XI_n) = (-X)^n + \sum_{k=1}^{n} (-X)^{n-k} \sum_{J \in P_k^{(n)}} \det M_{J,J}$$

حيث $P_k^{(n)}$ هي مجموعة أجزاء $\mathbb{N}_n$ التي يساوي عدد عناصر كلٍّ منها k .

نكون بذلك قد أثبتنا المبرهنة المهمّة الآتية:

1-8. **مبرهنة**. لتكن M مصفوفة مربّعة من المرتبة n. عندئذ يكون

$$\det(M - XI_n) = (-X)^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \tau_k(M) \cdot X^{n-k}$$

وقد عرّفنا $\tau_k(M) = \sum_{J \in P_k^{(n)}} \det M_{J,J}$ و $P_k^{(n)}$ مجموعة أجزاء $\mathbb{N}_n$ التي يساوي عدد عناصر كلٍ منها k، و $M_{J,J}$ هي المصفوفة المربّعة من المرتبة $\operatorname{card}(J)$، التي نحصل عليها من M بعد حذف الأعمدة والأسطر التي لا تنتمي أدلّتها إلى J.

نلاحظ بوجه خاص أنّ $\det(M - XI_n)$ هو كثير حدود من الدرجة n، حدُّه المسيطر هو $(-1)^n X^n$، وحدُّه الثابت هو $\det M$، وحدُّه ذو الدرجة $n-1$ هو $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} M \cdot X^{n-1}$.

1-9. **نتيجة**. ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ يكون كثير حدوده المميِّز $\mathcal{X}_u(X)$ كثير حدود من الدرجة n في $\mathbb{K}[X]$، حدُّه المسيطر هو $(-1)^n X^n$، وحدُّه الثابت هو $\det u$، وحدُّه ذو الدرجة $n-1$ هو $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} u \cdot X^{n-1}$.

وبوجه خاص إذا كان $\mathbb{K}$ هو حقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$، كان طيف التطبيق u غير خالٍ، أي $\operatorname{sp}(u) \neq \varnothing$.

1-10. **مبرهنة**. ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ تتحقّق الخواص الآتية:

1. إنّ للتطبيقين الخطيين u و ${}^t u$ كثير الحدود المميِّز ذاته.
2. ليكن F فضاء شعاعياً جزئياً مختلفاً عن $\{0\}$ من E، يُحقّق $u(F) \subset F$. ولنرمز بالرمز $v = u_{\|F}$ إلى التطبيق الخطيّ من $\mathcal{L}(F)$ الذي يُحرِّضه u على F أي
$$v : F \to F, x \mapsto u(x)$$
عندئذ يقسم كثيرُ الحدود $\mathcal{X}_v(X)$ كثيرَ الحدود $\mathcal{X}_u(X)$.
3. ليكن F و G فضاءَيْن شعاعيَّيْن جزئيَّين مختلفين عن $\{0\}$ من E، ويُحقّقان $u(F) \subset F$ و $u(G) \subset G$. نفترض أيضاً أنّ الفضاءَيْن F و G متتامّان، أي $E = F \oplus G$. عندئذ يكون $\mathcal{X}_u(X) = \mathcal{X}_v(X) \cdot \mathcal{X}_w(X)$ وقد عرّفنا
$$v = u_{\|F} \in \mathcal{L}(F) \quad \text{و} \quad w = u_{\|G} \in \mathcal{L}(G)$$

الإثبات

1. ليكن $\mathcal{E}$ أساساً للفضاء الشعاعي E، وليكن $\mathcal{E}^*$ الأساس الثنويّ للأساس $\mathcal{E}$. نعلم أنّه إذا كانت $M = \mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ كانت ${}^tM = \mathrm{mat}({}^tu, \mathcal{E}^*, \mathcal{E}^*)$، ومن ثمّ

$$\mathcal{X}_u(X) = \det(M - XI_n) = \det({}^tM - XI_n) = \mathcal{X}_{{}^tu}(X)$$

2. ليكن $\mathcal{E}' = (e_1, \ldots, e_r)$ أساساً للفضاء F، ولنتمّمه إلى أساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ للفضاء E. تُكتب مصفوفة u في هذا الأساس بالشكل

$$M = \mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \left[\begin{array}{c|c} P & R \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$$

حيث $P = \mathrm{mat}(v, \mathcal{E}', \mathcal{E}')$. إذن

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_u(X) &= \det(M - XI_n) = \det(P - XI_r) \cdot \det(Q - XI_{n-r}) \\ &= \mathcal{X}_v(X) \cdot \det(Q - XI_{n-r})\end{aligned}$$

3. ليكن $\mathcal{E}' = (e_1, \ldots, e_r)$ أساساً للفضاء F، وليكن $\mathcal{E}'' = (e_{r+1}, \ldots, e_n)$ أساساً للفضاء G، عندئذ يكون $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً للفضاء E. وتُكتب مصفوفة u في هذا الأساس بالشكل

$$M = \mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$$

حيث $P = \mathrm{mat}(v, \mathcal{E}', \mathcal{E}')$ و $Q = \mathrm{mat}(w, \mathcal{E}'', \mathcal{E}'')$. إذن

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_u(X) &= \det(M - XI_n) = \det(P - XI_r) \cdot \det(Q - XI_{n-r}) \\ &= \mathcal{X}_v(X) \cdot \mathcal{X}_w(X)\end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته. ❐

1-11. نتيجة. ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. ولتكن λ قيمة ذاتيّة للتطبيق الخطّي u. عندئذ يكون بُعد الفضاء الذاتيّ $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$ الموافق للقيمة الذاتيّة λ أصغر أو يساوي رتبة مضاعفة القيمة الذاتية λ. أي

$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}(u), \quad 1 \leq \dim E_\lambda \leq m_u(\lambda)$$

الإثبات

ليكن $F = E_\lambda$ ، عندئذ يكون F فضاء شعاعياً جزئياً مختلفاً عن $\{0\}$ من E ، ويُحقّق $u(F) \subset F$. ويكون أيضاً $v = u_{\| F} = \lambda I_F$. إذن

$$\mathcal{X}_v(X) = (\lambda - X)^{\dim F}$$

وهو يقسم كثير الحدود $\mathcal{X}_u(X)$ بمقتضى المبرهنة السابقة. ولكن

$$(\lambda - X)^{\dim F} | \mathcal{X}_u(X) \Rightarrow \dim F \le m_u(\lambda)$$

وبذا يتمّ الإثبات. ❐

2. التطبيقات الخطيّة القابلة للتمثيل بمصفوفات قطريّة

2-1. مبرهنة. ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ تكون الخاصتان الآتيتان متكافئتين:

1. يوجد أساس $\mathcal{E}$ للفضاء E يجعل المصفوفة $\operatorname{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ قطريّة.
2. يقبل كثير الحدود $\mathcal{X}_u(X)$ التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في $\mathbb{K}[X]$ ، ويكون بُعد الفضاء الذاتيّ الموافق لأي قيمة ذاتية للتطبيق u مساوياً رتبة مضاعفتها.

الإثبات

1. $\Leftarrow$ 2. ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً للفضاء E يجعل المصفوفة $\operatorname{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ قطريّة. ولنرمز بالرموز $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ إلى العناصر المختلفة في قطر المصفوفة M . ولنفترض أنّ λ_i مكرّرة m_i مرّة. عندئذ يكون لدينا، من جهة أولى،

$$\mathcal{X}_u(X) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{m_i}$$

ومن ثَمّ $\operatorname{sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$.

من جهة ثانية، نلاحظ أنّ

$$m_i = \operatorname{card}\{j \in \mathbb{N}_n : u(e_j) = \lambda_i e_j\}$$

إذن $m_i \le \dim E_{\lambda_i}$. وذلك أياً كان i من $\mathbb{N}_p$. وبالاستفادة من النتيجة 1-11. يكون $m_i \ge \dim E_{\lambda_i}$ أياً كان i من $\mathbb{N}_p$. وهذا يثبتُ أنّ

$$\forall i \in \mathbb{N}_p,\ m_i = \dim E_{\lambda_i}$$

2. $\Leftarrow$ 1. نعلم، استناداً إلى الفرْض، أنّ

$$\mathcal{X}_u(X) = \prod_{i=1}^{p}(\lambda_i - X)^{m_i}$$

و $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ عناصر مختلفة مثنى مثنى من $\mathbb{K}$ تُكوّن في مجموعتها طيف التطبيق الخطّي u . وأنّ $\forall i \in \mathbb{N}_p,\ m_i = \dim E_{\lambda_i}$ ، وقد رمزنا $E_{\lambda_k} = \ker(u - \lambda_k I_E)$.

بناءً على المبرهنة 2-1. يكون المجموع $F = \sum_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}$ مجموعاً مباشراً، ومن ثَمّ

$$\dim F = \sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{p} m_k = \deg \mathcal{X}_u(X) = n = \dim E$$

إذن $F = E$ ، أو $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}$.

فإذا اخترنا أساساً $\mathcal{E}_k$ لكلٍّ من الفضاءات الجزئيّة E_{λ_k} ، استنتجنا أساساً للفضاء الكلّي E بوضع $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{E}_p$ ، وكانت المصفوفة $\mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ مصفوفة قطريّة، واكتَمَلَ الإثبات. ❒

نستنتج من المبرهنة السابقة النتيجة المهمّة الآتية:

2-2. **نتيجة**. ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. إذا قَبِلَ u قيماً ذاتيّة مختلفة عددها يساوي بُعد الفضاء E ، أي $\mathrm{card}\,(\mathrm{sp}(u)) = \dim E$ ، قَبِلَ u التمثيل بمصفوفة قطريّة.

☜ وجهة النظر المصفوفيّة.

3-2. **تعريف**. لتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. نقول إنّ المصفوفة M تشابه مصفوفة قطرية إذا، وفقط إذا، وُجدتْ مصفوفة قَلوبة P من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ ، ووُجِدتْ مصفوفة قطريّة D من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ، تُحقِّقان

$$M = P\,D\,P^{-1}$$

يُكافئُ ذلك قولنا إنّ التطبيق الخطّي

$$U_M : \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K}), \quad X \mapsto M\,X$$

يقبل التمثيل بمصفوفة قطرية، إذ نأخذ $P = \mathrm{mat}(I_{\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K})}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ ، و $\mathcal{E}$ هو الأساس القانوني للفضاء $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K})$ ، و $\mathcal{V}$ هو أساس $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K})$ المؤَلّف من الأشعة الذاتيّة للتطبيق الخطّي U_M .

4-2. **مثال**. ليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديلياً عدده المميِّز لا يساوي 2. ولنتأمّل في $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ المصفوفة

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

ولتكن الأشعّة v_4, v_3, v_2, v_1 من $\mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{K})$ المُعرَّفة كما يأتي:

$$v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} Mv_1 &= (a+b+c+d)\,v_1, & Mv_2 &= (a-b+c-d)\,v_2, \\ Mv_3 &= (a+b-c-d)\,v_3, & Mv_4 &= (a-b-c+d)\,v_4, \end{aligned}$$

فالأشعّة v_4, v_3, v_2, v_1 أشعّة ذاتيّة للتطبيق الخطّي U_M وهي تُكوِّن أساساً $\mathcal{V}$ للفضاء $\mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{K})$. وذلك لأنّ المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

قَلوبة، إذ تُحقِّق $P^2 = 4I_4$. وتكون $D = \mathrm{mat}(U_M, \mathcal{V}, \mathcal{V})$ مصفوفة U_M في الأساس $\mathcal{V}$، مصفوفة قطريّة، تُحقِّق $M = P\,D\,P^{-1}$:

$$D = \begin{bmatrix} a+b+c+d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b+c-d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+b-c-d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b-c+d \end{bmatrix}$$

فالمصفوفة M تشابه مصفوفة قطريّة. ويمكننا أن نحسب $\mathcal{X}_M(X) = \mathcal{X}_D(X)$ لنجد

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_M(X) = {} & (X-a)^4 - 2(b^2+c^2+d^2)(X-a)^2 \\ & - 8bcd\,(X-a) + (b^2-c^2-d^2)^2 - 4c^2d^2 \end{aligned}$$

3.التطبيقات الخطّية القابلة للتمثيل بمصفوفات مثلّثية

3-1.**تعريف**. ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. نقول إنّ التطبيق الخطّي u يقبل التمثيل بمصفوفة مثلثيّة، إذا وفقط إذا وُجِدَ أساس $\mathcal{E}$ للفضاء الشعاعي E يجعل المصفوفة $\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})$ مصفوفة مثلثيّة.

لنلاحظ أنّنا لم نحدّد: أَتكون المصفوفة $\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})$ مثلثيّة عليا أم مثلثيّة سفلى، ذلك لأنّه إذا كان $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ وعرّفنا $\mathcal{E}'=(e_n,e_{n-1},\ldots,e_1)$، وكانت $\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})$ مثلثيّة عليا (سفلى)، كانت المصفوفة $\mathrm{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}')$ مثلثيّة سفلى (عليا).

3-2. **مبرهنة**. ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ يقبل u التمثيل بمصفوفة مثلّثيّة إذا وفقط إذا كان كثير الحدود المميِّز $\mathcal{X}_u(X)$ يقبل التفريق إلى جداء ضرب عوامل من الدرجة الأولى في $\mathbb{K}[X]$.

الإثبات

- ليكن $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ أساساً للفضاء E يجعل $\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})=(a_{ij})$ مصفوفة مثلّثية عليا. عندئذ يكون $\mathcal{X}_u(X)=\prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-X)$.
- وبالعكس، سنثبت بالتدريج على $\dim F=n$ أنّ كلّ تطبيق خطّي من $\mathcal{L}(F)$ يقبل كثير حدوده المميِّز التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في $\mathbb{K}[X]$، يقبل التمثيل بمصفوفة مثلّثيّة.

إنّ هذه القضيّة صحيحة حين يكون $n=1$. لنفترض صحّة هذه القضيّة، مهما يكن الفضاء الشعاعي F الذي بُعده أصغر تماماً من n. ليكن E فضاءً شعاعياً بُعده n. وليكن u من $\mathcal{L}(E)$ بحيث يقبل كثير الحدود المميِّز $\mathcal{X}_u(X)$ التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في $\mathbb{K}[X]$.

لتكن λ من $\mathrm{sp}(u)$، إذ إنّ $\mathrm{sp}\,(u)\neq\varnothing$ لأنّ $\mathcal{X}_u(X)$ يقبل التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في $\mathbb{K}[X]$، وليكن x شعاعاً ذاتياً للتطبيق u موافقاً للقيمة الذاتيّة λ. أي إنّ x عنصر من $E_\lambda\backslash\{0\}$.

لنضع $e_1 = x$، ولنتمّمه إلى أساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ للفضاء الشعاعي E. وليكن $p : E \to F$ الإسقاط الخطّي للفضاء E على $F = \text{vect}\left((e_2, e_3, \ldots, e_n)\right)$ توازياً مع $G = \mathbb{K}e_1$، ثُمَّ لنعرّف

$$s : F \to E, \, x \mapsto x$$

ولنضع أخيراً $v = p \circ u \circ s \in \mathcal{L}(F)$. فإذا كانت $M = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = (m_{ij})$ كان

$$\forall j \in \{2, \ldots, n\}, \quad p \circ u \circ s(e_j) = \sum_{i=2}^{n} m_{ij} e_i$$

وصار لدينا

$$\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \text{mat}(v, \mathcal{E}', \mathcal{E}') & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

حيث $\mathcal{E}' = (e_2, \ldots, e_n)$ أساس للفضاء F.

لدينا من جهة أولى، $\dim F < n$ و $v \in \mathcal{L}(F)$، ونعلم من جهة ثانية أنّ

$$\mathcal{X}_u(X) = (\lambda - X)\mathcal{X}_v(X)$$

فهذا يقتضي أنّ $\mathcal{X}_v(X)$ يقبل التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في $\mathbb{K}[X]$. ينجم عن ذلك، استناداً إلى فرْض التدريج، أنه يوجد أساس $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n)$ للفضاء F يجعل المصفوفة $\text{mat}(v, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}})$ مثلّثية عليا. عندئذ تكون المصفوفة $\text{mat}(u, \mathcal{F}, \mathcal{F})$، حيث $\mathcal{F}$ هو الأساس $(e_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n)$ للفضاء E، مصفوفة مثلثيّة عليا أيضاً، ويكتمل الإثبات. □

نستنتج من المبرهنة السابقة النتيجة المهمّة الآتية:

3-3. نتيجة. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منتهي البعد على حقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$. عندئذ يقبل كلُّ تطبيق خطّي u من $\mathcal{L}(E)$، التمثيل بمصفوفة مثلّثيّة.

الإثبات

هذه النتيجة صحيحة لأنه في $\mathbb{C}[X]$ يقبل كلُّ كثير حدود غير ثابت التفريق إلى جداء ضرب عوامل من الدرجة الأولى. □

4. كثيرات الحدود والتطبيقات الخطّية

ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$، ولتكن k من $\mathbb{N}$. إذا كانت $k = 0$ اصطلحنا أنّ $u^k = I_E$. وإذا كانت $0 < k$ عرّفنا $u^k = u \circ u^{k-1} = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ مرّة}}$.

4-1. مبرهنة. ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. إنّ التطبيق

$$\Psi : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E), \quad P \mapsto P(u)$$

الذي يقرن بكثير الحدود $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ من $\mathbb{K}[X]$ التطبيقَ الخطّي $\Psi(P) = P(u)$ المعرّف بالصيغة $P(u) = \sum_{k=0}^{m} a_k u^k$، هو تشاكلٌ بين الجبرين $\mathbb{K}[X]$ و $\mathcal{L}(E)$.

الإثبات

يجب أن نثبت الخاصّة الآتية:

$$\begin{aligned}
&\forall(\lambda, P, Q) \in \mathbb{K} \times \left(\mathbb{K}[X]\right)^2, \ \forall u \in \mathcal{L}(E),\\
&\qquad P(u) + Q(u) = (P + Q)(u)\\
&\qquad \lambda \cdot P(u) = (\lambda P)(u)\\
&\qquad P(u) \circ Q(u) = (P \cdot Q)(u)
\end{aligned}$$

وهذا تحقّقٌ مباشر نتركه تمريناً للقارئ. ❒

4-2. مبرهنة. ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. وليكن كثيرا الحدود P و Q من $\mathbb{K}[X]$.
نفترض أنّ P و Q **أوليّان فيما بينهما**. عندئذ يكون

$$\ker\,(P \cdot Q)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$$

الإثبات

استناداً إلى مبرهنة بيزو Bezout نعلم أنه يوجد S و T من $\mathbb{K}[X]$ يُحقّقان

$$S\,P + T\,Q = 1$$

وهذه المساواة تقتضي أن يكون

$$S(u) \circ P(u) + T(u) \circ Q(u) = I_E \qquad (*)$$

- لتكن x من $\ker P(u) \cap \ker Q(u)$، إذن بناءً على $(*)$ يكون

$$x = S(u)\big(P(u)(x)\big) + T(u)\big(Q(u)(x)\big) = 0$$

وعليه $\ker P(u) \cap \ker Q(u) = \{0\}$.

- ومن ناحية أخرى، لتكن x من $\ker(PQ)(u)$، نعرّف

$$x_2 = S(u) \circ P(u)(x) \quad \text{و} \quad x_1 = T(u) \circ Q(u)(x)$$

فيكون

$$x_2 \in \ker Q(u) \quad \text{و} \quad x_1 \in \ker P(u)$$

واستناداً إلى $(*)$ يكون أيضاً $x = x_1 + x_2$. إذن

$$\ker(P\,Q)(u) = \ker P(u) + \ker Q(u)$$

وهذا هو المطلوب إثباته. ❐

4-3. **نتيجة**. ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. ولتكن $(P_k)_{k\in\mathbb{N}_m}$ كثيرات حدود أوّلية فيما بينها مثنى مثنى من $\mathbb{K}[X]$. وليكن $P = P_1P_2\cdots P_m$. عندئذ يكون

$$\ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^{m} \ker P_k(u)$$

الإثبات

هذه النتيجة تعميم مباشر للمبرهنة السابقة، ويجري إثباتها بالتدريج على العدد m. ❐

4-4. **نتيجة**. ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. هناك تكافؤ بين القضيتين الآتية:

1. يقبل التطبيق الخطّي u التمثيل بمصفوفة قطريّة.
2. يوجد كثير حدود P من $\mathbb{K}[X]$ يقبل التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى **مختلفة مثنى مثنى**، ويُحقّق $P(u) = 0$.

الإثبات

1. $\Leftarrow$ 2. لمّا كان التطبيق الخطّي u يقبل التمثيل بمصفوفة قطريّة، كان

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda\, I_E) \quad \text{حيث} \quad E = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{sp}(u)} E_\lambda$$

يكفي إذن أن نعرّف $P = \prod_{\lambda\in\mathrm{sp}(u)} (\lambda - X)$، ونتيقّن بسهولة أنّ P يُحقّق الشرط 2.

.2 $\Leftarrow$ .1 لنفترض أنّ $P=\prod_{k=1}^{m}(X-\mu_k)$ وأنّ الأعداد $\mu_1,\ldots,\mu_m$ مختلفة مثنى مثنى. لمّا كان $P(u)=0$ ، ولمّا كانت كثيرات الحدود $((X-\mu_k))_{k\in\mathbb{N}_m}$ أوليّة فيما بينها مثنى مثنى، كان

$$E=\ker P(u)=\bigoplus_{k=1}^{m}\ker(u-\mu_k I_E)$$

وذلك بمقتضى النتيجة 3-4. لنعرّف إذن

$$J=\{k\in\mathbb{N}_m:\ker(u-\mu_k I_E)\neq\{0\}\}$$

فيكون

$$E=\bigoplus_{k\in J}\ker(u-\mu_k I_E)$$

يكفي أن نختار أساساً $\mathcal{E}$ للفضاء E ، من الشكل $\bigcup_{k\in J}\mathcal{E}_k$ حيث $\mathcal{E}_k$ أساسٌ ما للفضاء الجزئي $\ker(u-\mu_k I_E)$ ، حتّى تكون المصفوفة $\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})$ قطريّة، ومنه 1. ❐

4-5. نتيجة. ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. ولنفترض أنّه يوجد في $\mathbb{K}[X]$ كثير حدود

$$P(X)=\prod_{k=1}^{m}(X-\mu_k)^{n_k}$$

(حيث الأعداد $\mu_1,\ldots,\mu_m$ مختلفة مثنى مثنى) يُحقّق $P(u)=0$. عندئذ يكون

$$E=\bigoplus_{k=1}^{m}\ker(u-\mu_k I)^{n_k}$$

الإثبات

تنتج هذه النتيجة من النتيجة 3-4. لأنّ $((X-\mu_k)^{n_k})_{k\in\mathbb{N}_m}$ كثيرات حدود أوليّة فيما بينها مثنى مثنى. ❐

4-6. مبرهنة – كايلي هاملتون Cayley-Hamilton. ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. إذا كان $\mathcal{X}_u$ هو كثير الحدود المميِّز لتطبيق الخطّي u كان

$$\mathcal{X}_u(u)=0$$

الإثبات

ليكن x عنصراً غير معدوم من E. لمّا كان بُعد الفضاء الشعاعي E منتهياً ويساوي n، كانت الجملة $(x, u(x), \ldots, u^n(x))$ مرتبطة خطيّاً. يمكننا إذن أن نعرّف $p = p_x$ أصغر عدد طبيعي k يجعل الجملة $(x, u(x), \ldots, u^k(x))$ مرتبطة. ونعرّف أيضاً

$$F_x = \operatorname{vect}\big((x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))\big)$$

إنّ اختيارنا للعدد p يجعل من الجملة $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ جملة حرّة، فهي إذن أساس للفضاء الجزئي F_x، نرمز إليه بالرمز $\mathcal{F}$. ولمّا كانت الجملة $(x, u(x), \ldots, u^p(x))$ مرتبطة، أمكننا أن نجد $(a_0, \ldots, a_{p-1})$ في $\mathbb{K}^p$ يُحقِّق

$$u^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \cdot u^k(x) \tag{1}$$

تقتضي هذه المساواة أنّ الفضاء F_x يُحقِّق $u(F_x) \subset F_x$، وإذا عرّفنا التطبيق الخطيّ

$$v = u_{\|F_x} : F_x \to F_x,\ y \mapsto u(y)$$

من $\mathcal{L}(F_x)$، صار لدينا بمقتضى المبرهنة 1-10.

$$\mathcal{X}_u(X) = Q(X)\,\mathcal{X}_v(X) \tag{2}$$

ولكن

$$M_x = \operatorname{mat}(v, \mathcal{F}, \mathcal{F}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{bmatrix}$$

ويبيّن حسابٌ مباشر نترك تفاصيله للقارئ أنّ

$$\mathcal{X}_v(X) = \det(M_x - X\,I_p) = (-1)^p\Big(X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k\Big)$$

واستناداً إلى العلاقة (1) نستنتج أنّ

$$\mathcal{X}_v(u)(x) = (-1)^p\Big(u^p(x) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x)\Big) = 0$$

وأخيراً نجد، بناءً على (2)، أنّ $\mathcal{X}_u(u)(x) = Q(u) \circ \mathcal{X}_v(u)(x) = 0$. ويُنجَزُ الإثبات بملاحظة أنّ x عنصر ما من E. ❐

5. تطبيقات

1-5. مبرهنة. لتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. ولنفترض أنّه يوجد في $\mathbb{C}[X]$ كثير حدود P يُكتب بالشكل $P(X) = \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k - X)^{n_k}$ ، و $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ أعداد مختلفة مثنى مثنى، ويُحقّق $P(A) = 0$. عندئذ يكون

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = Q_n(A)$$

حيث Q_n هو كثير الحدود الوحيد من $\mathbb{C}[X]$ ، الذي يُحقّق الشروط:

- $\deg Q_n < \deg P$
- $\forall k \in \mathbb{N}_p, \forall j \in \{0,1,\ldots,n_k - 1\}, (X^n)^{(j)}(\lambda_k) = (Q_n)^{(j)}(\lambda_k)$

الإثبات

لتكن $\sum_{k=1}^{p} n_k = \deg P = \ell$ ، ولنعرّف المجموعة

$$\Delta = \left\{(j,k) \in \mathbb{N}^2 : (1 \leq k \leq p) \wedge (0 \leq j < n_k)\right\}$$

فيكون $\operatorname{card} \Delta = \ell$. ثُمّ لنتأمّل التطبيق الخطّي:

$$\Phi : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}^{\Delta}, \quad T(X) \mapsto \left(T^{(j)}(\lambda_k)\right)_{(j,k)\in\Delta}$$

نلاحظ أولاً أنّ

$$\begin{aligned} T(X) \in \ker \Phi \quad &\Leftrightarrow \quad \forall (j,k) \in \Delta, \quad T^{(j)}(\lambda_k) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}_p, \quad (\lambda_k - X)^{n_k} | T(X) \\ &\Leftrightarrow \quad P(X) | T(X) \end{aligned}$$

إذن $\ker \Phi = \{S(X)P(X) : S \in \mathbb{C}[X]\}$.

لنعرّف $\mathbb{C}_{\ell-1}[X]$ بأنه الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{C}[X]$ المؤَلّف من كثيرات الحدود العقديّة التي درجاتها أصغر تماماً من ℓ ، فيكون $\dim \mathbb{C}_{\ell-1}[X] = \ell = \operatorname{card} \Delta$. ولنتأمّل

$$\Psi = \Phi_{|\mathbb{C}_{\ell-1}[X]} : \mathbb{C}_{\ell-1}[X] \to \mathbb{C}^{\Delta}, \quad \Psi(T) = \Phi(T)$$

لمّا كان $\ker \Psi = \mathbb{C}_{\ell-1}[X] \cap \ker \Phi = \{0\}$ ، كان Ψ تطبيقاً خطياً متبايناً بين فضاءَين شعاعيين لهما البُعد نفسه، إذن هو تقابل خطّي. وينتج بوجه خاص أنّ Φ غامر.

نستنتج من هذه الدراسة أنّه، أياً كان n من $\mathbb{N}$، **فيوجد** في $\mathbb{C}_{\ell-1}[X]$ كثير حدود **وحيد** Q_n يُحقّق $\Psi(Q_n) = \Phi(X^n)$. فشروط المبرهنة تعيّن Q_n بأسلوب وحيد.

ومن ناحيّة أخرى، يُحقّق كثير الحدود Q_n الخاصّة $X^n - Q_n \in \ker \Phi$ إذن يوجد في $\mathbb{C}[X]$ كثير حدود S_n، يُحقّق $X^n = Q_n(X) + S_n(X)P(X)$. ومنه

$$A^n = Q_n(A) + S_n(A)P(A) = Q_n(A)$$

لأنّ $P(A) = 0$. وهذا يُكمِلُ الإثبات. ❐

يمكننا أنّ نكون أكثر دقّة في صياغة المبرهنة السابقة. لنحتفظ برموز المبرهنة السابقة إذ أثبتنا أنّ

$$\Psi : \mathbb{C}_{\ell-1}[X] \to \mathbb{C}^{\Delta}, \quad T(X) \mapsto \left(T^{(j)}(\lambda_k)\right)_{(j,k)\in\Delta}$$

تقابل خطّي. إذن، أياً كان (j_0, k_0) من Δ، يوجد في $\mathbb{C}_{\ell-1}[X]$ كثير حدود وحيد P_{j_0,k_0} يُحقّق $\Psi(P_{j_0,k_0}) = \delta_{j,j_0}\delta_{k,k_0} = e_{j_0,k_0}(j,k)$، حيث $\delta_{\alpha,\beta}$ هو رمز كرونيكر المتعارف، أي

$$e_{j_0,k_0}(j,k) = \begin{cases} 1 & : \quad (j_0,k_0) = (j,k) \\ 0 & : \quad (j_0,k_0) \neq (j,k) \end{cases}$$

ولكنّ الجملة $(e_{j_0,k_0})_{(j_0,k_0)\in\Delta}$ هي الأساس القانوني للفضاء الشعاعي $\mathbb{C}^{\Delta}$، إذن تكوّن الجملة $(P_{j_0,k_0})_{(j_0,k_0)\in\Delta}$ أساساً للفضاء الشعاعي $\mathbb{C}_{\ell-1}[X]$.

ليكن Q من $\mathbb{C}_{\ell-1}[X]$ إذن توجد جملة $(\beta_{j,k})_{(j,k)\in\Delta}$ من $\mathbb{C}^{\Delta}$ تُحقّق

$$Q = \sum_{(j,k)\in\Delta} \beta_{j,k} P_{j,k}$$

ولتعيين الثوابت $(\beta_{j,k})_{(j,k)\in\Delta}$، نحسب من العلاقة السابقة $Q^{(t)}(\lambda_s)$ حيث (t,s) من Δ فنجد أنّ $Q^{(t)}(\lambda_s) = \beta_{t,s}$. إذن

$$\forall Q \in \mathbb{C}_{\ell-1}[X], \quad Q = \sum_{(j,k)\in\Delta} Q^{(j)}(\lambda_k) \cdot P_{j,k}$$

وبوجه خاص يكون

$$Q_n = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{n_k-1} \mathcal{U}_{j,k}(n) P_{j,k}$$

حيث $\mathcal{U}_{j,k}(n) = (X^n)^{(j)}\Big|_{X=\lambda_k}$.

أو

$$\mathcal{U}_{j,k}(n)=\begin{cases} n(n-1)\cdots(n-j+1)\,\lambda_k^{n-j} & : \quad n>j \\ n\,! & : \quad n=j \\ 0 & : \quad n<j \end{cases}$$

وأخيراً نجد

$$\forall n\geq 0,\quad A^n=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=0}^{n_k-1}\mathcal{U}_{j,k}(n)\cdot P_{j,k}(A) \qquad (3)$$

إذ توضّح العلاقة المهمّة (3) تبعيّة A^n للأس n.

5-2. نتيجة. لتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. وليكن $\rho(A)$ **نصف القطر الطيفيّ** للمصفوفة A، أي $\rho(A)=\max\{|\lambda|:\lambda\in\mathrm{sp}(A)\}$. وليكن $\|\cdot\|$ نظيماً ما على الفضاء الشعاعيّ $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. عندئذ يوجد ثابت K موجب تماماً يُحقّق

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq m\Rightarrow \|A^n\|\leq K\cdot n^{m-1}\cdot(\rho(A))^{n-m+1}$$

الإثبات

ليكن $P=\mathcal{X}_A$ كثير الحدود المميّز للمصفوفة A. فهو يُكتب بالشكل

$$P(X)=\prod_{k=1}^{p}(\lambda_k-X)^{n_k}$$

حيث $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ أعداد مختلفة مثنى مثنى تُكوّن طيف A، فيكون $P(A)=0$ استناداً إلى المبرهنة 4-6. ويكون من ثَمّ

$$\forall n\geq m,\quad A^n=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=0}^{n_k-1}n(n-1)\cdots(n-j+1)\cdot\lambda_k^{n-j}P_{j,k}(A)$$

وذلك باستعمال رموز المبرهنة السابقة. إذن، أياً كانت $m\leq n$، فإنّ

$$\begin{aligned}\|A^n\| &\leq \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=0}^{n_k-1}n(n-1)\cdots(n-j+1)\cdot(\rho(A))^{n-j}\left\|P_{j,k}(A)\right\| \\ &\leq n^{m-1}\cdot(\rho(A))^{n-m+1}\cdot\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=0}^{n_k-1}(\rho(A))^{m-1-j}\left\|P_{j,k}(A)\right\|\end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته، حيث $K=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=0}^{n_k-1}(\rho(A))^{m-1-j}\left\|P_{j,k}(A)\right\|$. ❐

5-3. **نتيجة**. لتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. وليكن $\rho(A)$ نصف قطرها الطيفيّ أي $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \operatorname{sp}(A)\}$. عندئذ تكون الخواص الآتية متكافئة :

1. إنّ $\rho(A) < 1$.
2. إنّ المتتالية $(A^n)_{n\geq 0}$ متقاربة من 0 في $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$.
3. إنّ المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ متقاربة في $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$.

5-4. **مبرهنة –المتتاليات الخطيّة التدريجيّة**. لتكن m من $\mathbb{N}^*$، وليكن $(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1})$ من $\mathbb{C}^m$، حيث $a_0 \neq 0$. إنّ الفضاء الشعاعيّ الجزئي من $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ المعرّف كما يأتي

$$\mathbb{S} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall n \geq m,\, u_n = a_{m-1}u_{n-1} + \cdots + a_1 u_{n-m+1} + a_0 u_{n-m}\right\}$$

هو فضاء شعاعيّ بُعده m. وإذا كان

$$X^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{n_k}$$

حيث $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ أعداد مختلفة مثنى مثنى، كوّنت الجملة $(\mathcal{S}_{t,s})_{(t,s)\in\Delta}$ حيث

$$\Delta = \left\{(j,k) \in \mathbb{N}^2 : (0 \leq j < n_k) \wedge (1 \leq k \leq p)\right\}$$

و

$$\mathcal{S}_{t,s}(n) = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-t+1)\,\lambda_s^{n-t} & : \quad n > t \\ t\,! & : \quad n = t \\ 0 & : \quad n < t \end{cases}$$

أساساً للفضاء $\mathbb{S}$.

الإثبات

لنثبت أوّلاً أن $\mathcal{S}_{t,s} \in \mathbb{S}$ وذلك أياً كانت (t,s) من Δ. في الحقيقة، نلاحظ أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{S}_{(t,s)}(n) = (X^n)^{(t)}\Big|_{X=\lambda_s}$$

ومنه، أياً كانت $m \leq n$ ، نجد

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} a_{m-k}\mathcal{S}_{t,s}(n-k) &= \sum_{k=1}^{m} a_{m-k}\left(X^{n-k}\right)^{(t)}\Big|_{X=\lambda_s}\\
&= \Big(\sum_{k=1}^{m} a_{m-k}X^{n-k}\Big)^{(t)}\Bigg|_{X=\lambda_s}\\
&= \Big(X^{n-m}\sum_{k=1}^{m} a_{m-k}X^{m-k}\Big)^{(t)}\Bigg|_{X=\lambda_s}\\
&= \left(X^{n-m}\Big(X^m-\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{n_k}\Big)\right)^{(t)}\Bigg|_{X=\lambda_s}\\
&= \left(X^{n}-X^{n-m}\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{n_k}\right)^{(t)}\Bigg|_{X=\lambda_s}\\
&= \left(X^n\right)^{(t)}\Big|_{X=\lambda_s} = \mathcal{S}_{t,s}(n)
\end{aligned}$$

إذن الجملة $(\mathcal{S}_{t,s})_{(t,s)\in\Delta}$ هي جملة من عناصر $\mathbb{S}$.

من ناحية أخرى نرى بسهولة أنّ التطبيق الخطّي

$$\Theta : \mathbb{S} \to \mathbb{C}^m, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})$$

تقابلٌ، ومن ثَمّ $\dim \mathbb{S} = m = \operatorname{card}\Delta$. يكفي إذن حتى يتمّ إثبات المطلوب أن نثبت أنّ الجملة $(\mathcal{S}_{t,s})_{(t,s)\in\Delta}$ تولّد الفضاء الشعاعي $\mathbb{S}$.

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ من $\mathbb{S}$ ، ولنعرّف الشعاع $Z_n = \begin{bmatrix} u_{n-m}\\ \vdots \\ u_{n-2}\\ u_{n-1}\end{bmatrix}$ من $\mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C})$ حين تكون $n \geq m$. فنلاحظ أنّ $Z_{n+1} = A\, Z_n$ ، حيث

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{m-1}\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$$

ومنه، يكون لدينا $\forall n \geq 0,\ \ Z_{n+m} = A^n Z_m$.

ولكن بنشر المُحدد $\mathcal{X}_A(X)$ وفق العمود الأوّل وبالتدريج على مرتبة هذا المحدّد نجد

$$\mathcal{X}_A(X) = (-1)^m \left(X^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k \right) = \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k - X)^{n_k}$$

وإذا استفدنا من العلاقة (3) بعد ملاحظة أنّ $\mathcal{X}_A(A) = 0$ وجدنا

$$\forall n \geq 0, \quad A^n = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{n_k-1} \mathcal{S}_{j,k}(n) \cdot P_{j,k}(A)$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \geq 0, \quad Z_{n+m} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{n_k-1} \mathcal{S}_{j,k}(n) \cdot P_{j,k}(A) Z_m$$

ولمّا كانت u_n هي المركّبة الأولى للشعاع Z_{n+m}، أمكننا بكتابة $\beta_{j,k}$ دلالة على المركّبة الأولى للشعاع $P_{j,k}(A)Z_m$ أن نستنتج أنّ

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{n_k-1} \beta_{j,k} \cdot \mathcal{S}_{j,k}(n)$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أنّ الجملة $(\mathcal{S}_{t,s})_{(t,s)\in\Delta}$ أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{S}$. ❐

5-5. مثال. لندرس المتتاليات $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالعلاقات :

$$\begin{aligned} 2x_{n+1} &= 5x_n - 5y_n + 2z_n \\ 2y_{n+1} &= 5x_n - 6y_n + 3z_n \\ 2z_{n+1} &= 6x_n - 9y_n + 5z_n \end{aligned}$$

في الحقيقة، إذا عرّفنا $T_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{C})$ و $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 5 \end{bmatrix}$، وجدنا أنّ العلاقات التدريجيّة التي تعرّف المتتاليات $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تُكافئ $T_{n+1} = AT_n$ وذلك أياً كانت $0 \leq n$. ومن ثَمّ

$$\forall n \geq 0, \quad T_n = A^n \cdot T_0$$

تؤول المسألة إذن إلى حساب A^n، لهذا علينا إيجاد كثير حدود P يُحقّق $P(A) = 0$، والمرشّح الوحيد أمامنا هو $\mathcal{X}_A$ كثير الحدود المميّز للمصفوفة A.

ونجد بالحساب المباشر

$$\mathcal{X}_A(X) = -X^3 + 2X^2 - \frac{5}{4}X + \frac{1}{4} = -(X-1)(X-\frac{1}{2})^2$$

لنبحث إذن عن كثير الحدود الوحيد $Q_n(X)$ الذي درجته أصغر أو تساوي 2 ويُحقّق

$$Q_n(1) = 1, \quad Q_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad Q_n'\left(\frac{1}{2}\right) = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

فنجد بالحل

$$Q_n(X) = (1-(n+1)2^{-n})(2X-1)^2 + n2^{-n}(2X-1) + 2^{-n}$$

ولكن

$$2A - I_3 = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}, \ (2A-I_3)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

إذن بالتعويض فيما سبق وبالاستفادة من $A^n = Q_n(A)$ نجد

$$A^n = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} + \frac{n}{2^n}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2^n}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

وعليه، أياً كانت n من $\mathbb{N}$، كان

$$\begin{aligned} x_n &= 3x_0 - 3y_0 + z_0 - 2^{-n}(2x_0 - 3y_0 + z_0) + n2^{-n}(x_0 - 2y_0 + z_0) \\ y_n &= 3x_0 - 3y_0 + z_0 - 2^{-n}(3x_0 - 4y_0 + z_0) + n2^{-n}(2x_0 - 4y_0 + 2z_0) \\ z_n &= 3x_0 - 3y_0 + z_0 - 2^{-n}(3x_0 - 3y_0) \qquad + n2^{-n}(3x_0 - 6y_0 + 3z_0) \end{aligned}$$

ونلاحظ بوجه خاص أنّ المتتاليات الثلاث $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من النهاية نفسها، وهي $3x_0 - 3y_0 + z_0$.

تمرينات

التمرين 1. احسب كثير الحدود المميّز لكل من المصفوفات التالية :

$$1.\quad M=\begin{bmatrix}0 & b & \cdots & b\\ a & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & 0 & b\\ a & \cdots & a & 0\end{bmatrix},\qquad 2.\quad M=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & a_n\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & a_2\\ a_n & \cdots & a_2 & a_1^2\end{bmatrix},$$

$$3.\quad M=\begin{bmatrix}a^2 & ab & ab & b^2\\ ab & a^2 & b^2 & ab\\ ab & b^2 & a^2 & ab\\ b^2 & ab & ab & a^2\end{bmatrix},\qquad 4.\quad M=\begin{bmatrix}3 & -5 & 2 & -6\\ 0 & 5 & 0 & 4\\ -2 & 7 & -1 & 11\\ 0 & -4 & 0 & -3\end{bmatrix}.$$

الحل

1. لتكن J المصفوفة من المرتبة n التي جميع ثوابتها تساوي 1. ولنتأمّل في حالة مصفوفةٍ A من المرتبة n وعنصرٍ t من $\mathbb{C}$ المصفوفة $A(t)=A+tJ$. عند حساب $\det A(t)$ يمكننا طرح العمود الأوّل من بقيّة الأعمدة، ثمّ نطرح السطر الأوّل من بقيّة الأسطر. ثمّ ننشر المحدّد وفق العمود الأوّل لنستنتج أنّ $\det A(t)$ هو كثير حدود من الدرجة الأولى في المتحوّل t. فيوجد ثابتان α و β يُحقّقان

$$\forall t\in\mathbb{C},\qquad \det A(t)=\alpha t+\beta$$

لنأتِ إلى حالة المصفوفة M الواردة في السؤال ولنفترض أنّ $a\neq b$، ولنضع $A=M-XI$. عندئذ من الواضح أنّ كلّاً من المصفوفتين $A(-a)$ و $A(-b)$ مصفوفة مثلّثيّة ومن ثَمّ

$$\det A(-b)=(-1)^n(X+b)^n \quad \text{و} \quad \det A(-a)=(-1)^n(X+a)^n$$

ولمّا كان $\det A(t)=\alpha t+\beta$ استنتجنا أنّ

$$-a\alpha+\beta=(-1)^n(X+a)^n$$
$$-b\alpha+\beta=(-1)^n(X+b)^n$$

ومن ثَمّ

$$\det A(0)=\beta=(-1)^n\frac{(X+a)^n b-(X+b)^n a}{b-a}$$

إذن، في حالة $a \neq b$، يكون لدينا

$$\mathcal{X}_M(X) = (-1)^n \frac{(X+a)^n b - (X+b)^n a}{b-a}$$

أمّا حالة $b = a$ فنستنتجها من الحالة السابقة بجعل b تسعى إلى a لنجد

$$\mathcal{X}_M(X) = (-1)^n \left((X+a)^n - na(X+a)^{n-1}\right)$$

2. لنضع بالتعريف

$$\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n)(X) = \det \begin{bmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & -X & \ddots & \vdots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -X & a_2 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1^2 - X \end{bmatrix}$$

سنثبتُ بالتدريج على العدد n أنّه مهما تكن $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ من $\mathbb{C}^n$ يكن

$$\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n)(X) = (-1)^n X^{n-2} \left(X^2 - a_1^2 X - \sum_{k=2}^{n} a_k^2 \right)$$

في الحقيقة، عند نشر المحدّد وفق العمود الأوّل نجد

$$\begin{aligned} \Delta_n(a_1, \dots, a_n) &= -X \Delta_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) - (-1)^n a_n \det \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -X & \ddots & \vdots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & -X & a_2 \end{bmatrix} \\ &= -X \Delta_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) - a_n^2 (-X)^{n-2} \end{aligned}$$

ونجد من جهة أخرى أنّ

$$\Delta_2(a_1, a_2)(X) = \det \begin{bmatrix} -X & a_2 \\ a_2 & a_1^2 - X \end{bmatrix} = X^2 - a_1^2 X - a_2^2$$

فالصيغة المعطاة صحيحة في حالة $n = 2$. وإذا افترضنا صحّتها في حالة $n - 1$ أي

$$\Delta_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})(X) = (-1)^{n-1} X^{n-3} \left(X^2 - a_1^2 X - \sum_{k=2}^{n-1} a_k^2 \right)$$

استنتجنا من العلاقة التدريجيّة أنّ

$$\begin{aligned}\Delta_n(a_1,\ldots,a_n) &= -X\Delta_{n-1}(a_1,\ldots,a_{n-1}) - a_n^2(-X)^{n-2}\\ &= (-1)^n X^{n-2}\left(X^2 - a_1^2 X - \sum_{k=2}^{n-1} a_k^2\right) - (-1)^n a_n^2 X^{n-2}\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ المطلوب.

3. نهدف إلى حساب كثير الحدود المميّز:

$$\mathcal{X}_M\left(X\right) = \det\left(M - XI\right) = \det\begin{bmatrix} a^2 - X & ab & ab & b^2\\ ab & a^2 - X & b^2 & ab\\ ab & b^2 & a^2 - X & ab\\ b^2 & ab & ab & a^2 - X\end{bmatrix}$$

بجمع الأسطر إلى السطر الأوّل نجد

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_M(X) &= \det\begin{bmatrix} (a+b)^2 - X & (a+b)^2 - X & (a+b)^2 - X & (a+b)^2 - X\\ ab & a^2 - X & b^2 & ab\\ ab & b^2 & a^2 - X & ab\\ b^2 & ab & ab & a^2 - X\end{bmatrix}\\ &= ((a+b)^2 - X)\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ ab & a^2 - X & b^2 & ab\\ ab & b^2 & a^2 - X & ab\\ b^2 & ab & ab & a^2 - X\end{bmatrix}\end{aligned}$$

وبطرح العمود الأوّل من بقيّة الأعمدة نجد

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_M(X) &= ((a+b)^2 - X)\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ ab & a^2 - ab - X & b^2 - ab & 0\\ ab & b^2 - ab & a^2 - ab - X & 0\\ b^2 & ab - b^2 & ab - b^2 & a^2 - b^2 - X\end{bmatrix}\\ &= ((a+b)^2 - X)\det\begin{bmatrix} a^2 - ab - X & b^2 - ab & 0\\ b^2 - ab & a^2 - ab - X & 0\\ ab - b^2 & ab - b^2 & a^2 - b^2 - X\end{bmatrix}\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_M(X) &= ((a+b)^2-X)(a^2-b^2-X)\det\begin{bmatrix}a^2-ab-X & b^2-ab\\ b^2-ab & a^2-ab-X\end{bmatrix}\\ &= ((a+b)^2-X)(a^2-b^2-X)\det\begin{bmatrix}(a-b)^2-X & (a-b)^2-X\\ b^2-ab & a^2-ab-X\end{bmatrix}\\ &= ((a+b)^2-X)(a^2-b^2-X)\det\begin{bmatrix}(a-b)^2-X & 0\\ b^2-ab & a^2-b^2-X\end{bmatrix}\end{aligned}$$

ومنه

$$\mathcal{X}_M(X) = ((a+b)^2-X)((a-b)^2-X)(a^2-b^2-X)^2$$

4. نهدف إلى حساب كثير الحدود المميّز :

$$\mathcal{X}_M(X) = \det(M-XI) = \det\begin{bmatrix}3-X & -5 & 2 & -6\\ 0 & 5-X & 0 & 4\\ -2 & 7 & -1-X & 11\\ 0 & -4 & 0 & -3-X\end{bmatrix}$$

بمناقلة العمودين الثاني والثالث، ثمّ السطرين الثاني والثالث نجد

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_M(X) &= \det\begin{bmatrix}3-X & -5 & 2 & -6\\ 0 & 5-X & 0 & 4\\ -2 & 7 & -1-X & 11\\ 0 & -4 & 0 & -3-X\end{bmatrix}\\ &= \det\begin{bmatrix}3-X & 2 & -5 & -6\\ -2 & -1-X & 7 & 11\\ 0 & 0 & 5-X & 4\\ 0 & 0 & -4 & -3-X\end{bmatrix}\\ &= \det\begin{bmatrix}3-X & 2\\ -2 & -1-X\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix}5-X & 4\\ -4 & -3-X\end{bmatrix}\\ &= ((X-3)(X+1)+4)((X+3)(X-5)+16)\\ &= (X^2-2X+1)(X^2-2X+1)\end{aligned}$$

وأخيراً نجد $\mathcal{X}_M(X) = (X-1)^4$. وبذا يُنجز الحلُّ.

التمرين 2. لتكن المصفوفة $A=\begin{bmatrix} m & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{bmatrix}$.

عيّن القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة A . هل تشابه المصفوفةُ A مصفوفةً قطرية؟

احسب A^n حين يكون n من $\mathbb{N}$.

الحل

لنضع $A_0=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$. عندئذ نجد بحساب بسيط أنّ

$$\mathcal{X}_{A_0}(X)=\det\begin{bmatrix} -X & 1 & 1\\ 1 & -X & 1\\ 1 & 1 & -X\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} -X & 1 & 1\\ 1+X & -X-1 & 0\\ 1+X & 0 & -1-X\end{bmatrix}$$

إذ طرحنا السطر الأوّل من السطرين الثاني والثالث. ومنه

$$\mathcal{X}_{A_0}(X)=(X+1)^2\det\begin{bmatrix} -X & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}=(X+1)^2\det\begin{bmatrix} 2-X & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

إذ جمعنا السطرين الثاني والثالث إلى الأوّل. إذن $\mathcal{X}_{A_0}(X)=(X+1)^2(2-X)$. نستنتج أنّ 2 قيمة ذاتيّة بسيطة للمصفوفة A_0 ، وأنّ -1 قيمة ذاتيّة مضاعفة للمصفوفة نفسها.

يكون $V={}^t[x,y,z]$ شعاعاً ذاتيّاً للمصفوفة A_0 موافقاً للقيمة الذاتيّة -1 إذا كان $x+y+z=1$ ، إذن، يتولّد الفضاء الذاتي للمصفوفة A_0 الموافق للقيمة الذاتية -1 بالشعاعين

$$V={}^t[1,-1,0] \quad \text{و} \quad U={}^t[1,1,-2]$$

أمّا الشعاع $W={}^t[1,1,1]$ فهو يولّد الفضاء الذاتي للمصفوفة A_0 الموافق للقيمة الذاتية -2 .

لمّا كان $A=A_0+mI_3$ استنتجنا أنّ مصفوفة $X\mapsto AX$ بالنسبة إلى الأساس (U,V,W) قطريّة، إذ

$$AW=(m+2)W \;\text{و}\; AV=(m-1)V \;\text{و}\; AU=(m-1)U$$

في الحقيقة، لمّا كانت A تشابه المصفوفة القطريّة

$$D = \begin{bmatrix} m-1 & 0 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m+2 \end{bmatrix}$$

استنتجنا أنّ كثير الحدود $P(X) = (X-m+1)(X-m-2)$ يُحقّق $P(A) = 0$.

إنّ باقي قسمة كثير الحدود X^n على P هو كثير حدود من الدرجة الأولى على الأكثر :

$$X^n = P(X)Q(X) + \alpha_n(X-m+1) + \beta_n(X-m-2)$$

فإذا عوضنا $X = m-1$ ثمّ $X = m+2$ وجدنا

$$\beta_n = -\frac{1}{3}(m-1)^n \quad \text{و} \quad \alpha_n = \frac{1}{3}(m+2)^n$$

ولأنّ $P(A) = 0$ استنتجنا أنّ

$$A^n = \frac{1}{3}(m+2)^n\left(A-(m-1)I_3\right) - \frac{1}{3}(m-1)^n\left(A-(m+2)I_3\right)$$

وبذا يتمّ إنجاز الحل. ■

التمرين 3. أثبت تشابه المصفوفتين التاليتين :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل

لنلاحظ أنّ

$$(A-I_4)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فإذا عرّفنا $v_4 = {}^t[0,0,0,1]$ ليتحقّق $(A-I_4)^3 v_4 \neq 0$، ثمّ عرّفنا v_1 و v_2 و v_3 بالصيغة

$$v_k = (A-I_4)^{4-k} v_4$$

كان لدينا

$$Av_1 = v_1 \text{ ، } Av_2 = v_2 + v_1 \text{ و } Av_3 = v_3 + v_2 \text{ و } Av_4 = v_4 + v_3 \text{ .}$$

حيث

$$v_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وهذا يثبت أنّ المصفوفتين A و B متشابهتان، وأنّ $P^{-1}AP = B$ وقد عرّفنا

$$P = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبذا يُنجز الحل. ■

التمرين 4. ادرس اختزال المصفوفات غير الصفرية الآتية، أي بيّن إذا كانت تُشابِه مصفوفات قطرية وفي حال الإيجاب عيّن مصفوفة الانتقال والمصفوفة القطرية الموافقة إن أمكن.

① المصفوفة $A = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ، حيث

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad a_{ij} = \alpha_i$$

② المصفوفة $B = (b_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ، حيث

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & : \quad i + j = n + 1 \\ 0 & : \quad i + j \neq n + 1 \end{cases}$$

③ المصفوفة $C = (c_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ، حيث

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad c_{ij} = \begin{cases} c_i & : \quad i + j = n + 1 \\ 0 & : \quad i + j \neq n + 1 \end{cases} \text{ ، و } c_i \in \mathbb{R}_+^* \text{ .}$$

④ المصفوفة $D = (d_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ، حيث

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad d_{ij} = \begin{cases} 1 & : \quad (i-1)(j-1)(i-j) = 0 \\ 0 & : \quad (i-1)(j-1)(i-j) \neq 0 \end{cases} \text{ .}$$

الحل

① لدراسة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \\ a_n & a_n & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

نعرّف الشعاع $\vec{a} = {}^t[a_1, a_2, \dots, a_n]$ من $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{C})$. عندئذ يمكن التعبير عن التطبيق الخطي U_A الموافق لهذه المصفوفة كما يأتي :

$$U_A : \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{C}), \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \vec{a}$$

وهنا نعرّف $\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ، ونناقش حالتين :

- حالة $\lambda \neq 0$. نعرّف المستوي الفوقي $\mathcal{H}$ في $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{C})$ الذي معادلته $\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$. فيكون $\forall \vec{x} \in \mathcal{H}, U_A(\vec{x}) = 0$. وهنا نختار أساساً $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ للفضاء $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{C})$ ، فيه $e_1 = \vec{a}$ ، والأشعّة $(e_2, \dots, e_n)$ أساسٌ للمستوي الفوقي $\mathcal{H}$. فيكون

$$\forall k \in \{2, \dots, n\}, \quad U_A(e_k) = 0 \quad \text{و} \quad U_A(e_1) = \lambda e_1$$

فتكون A مشابهة للمصفوفة القطريّة $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda, 0, \dots, 0)$ في هذه الحالة.

- حالة $\lambda = 0$. في هذه الحالة $U_A(\vec{a}) = 0$ ومن ثَمّ $U_A^2 = 0$. والعدد 0 هو القيمة الذاتيّة الوحيدة للمصفوفة غير الصفرية A . فهي إذن لا تشابه مصفوفة قطريّة في هذه الحالة.

② لدراسة المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & 1 & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

نتأمّل الأساس القانوني $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ في $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{C})$. ونلاحظ أنّ $Be_k=e_{n+1-k}$. ومن ثَمّ يكون $B^2=I_n$. يقبل كثير الحدود $P(X)=X^2-1$ التفريق إلى جداء ضرب كثيرات حدود من الدرجة الأولى ومختلفة مثنى مثنى، ويُحقّق $P(B)=0$. وهذا يبرهن أنّ المصفوفة B تشابه مصفوفة قطرية.

على وجه الدقّة. إذا عرّفنا $v_k=e_k+e_{n+1-k}$ في حالة k من $\left\{1,2,\ldots,\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\right\}$، وعرّفنا كذلك $v_k=e_k-e_{n+1-k}$ في حالة k من $\left\{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor,\ldots,n-1,n\right\}$، كان لدينا

$$Bv_k=\begin{cases} v_k & : \quad 1\leq k\leq \dfrac{n+1}{2}\\ -v_k & : \quad \dfrac{n+1}{2}<k\leq n\end{cases}$$

والمصفوفة B تشابه المصفوفة القطريّة

$$\Delta=\operatorname{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n-\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor})$$

③ لدراسة المصفوفة

$$C=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_1\\ \vdots & \iddots & c_2 & 0\\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots\\ c_n & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

نتأمّل الأساس القانوني $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ في $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{C})$. ونلاحظ أنّ

$$Ce_k=c_{n+1-k}e_{n+1-k}$$

فإذا عرّفنا

$$v_k=\begin{cases}\sqrt{c_k}e_k+\sqrt{c_{n+1-k}}e_{n+1-k} & : \quad 1\leq k\leq\frac{n+1}{2}\\ \sqrt{c_k}e_k-\sqrt{c_{n+1-k}}e_{n+1-k} & : \quad \frac{n+1}{2}<k\leq n\end{cases}$$

لاحظنا أنّ

$$Cv_k=\begin{cases}\sqrt{c_kc_{n+1-k}}v_k & : \quad 1\leq k\leq\frac{n+1}{2}\\ -\sqrt{c_kc_{n+1-k}}v_k & : \quad \frac{n+1}{2}<k\leq n\end{cases}$$

فالمصفوفة C تشابه المصفوفة القطريّة

$$\Delta = \operatorname{diag}(\underbrace{\sqrt{c_1c_n},\sqrt{c_2c_{n-1}},\ldots,\sqrt{c_\kappa c_{n+1-\kappa}}}_{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor},\underbrace{-\sqrt{c_{\kappa+1}c_{n-\kappa}},\ldots,-\sqrt{c_1c_n}}_{n-\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor})$$

حيث $\kappa = \left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor$.

④ لدراسة المصفوفة

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نعرّف $M = D - I_n$. ونتأمّل الأساس القانوني $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ في $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{C})$. عندئذ نلاحظ أنّ $Me_1 = \sum_{k=2}^{n} e_k$ و $\forall k \in \{2,\ldots,n\},\ Me_k = e_1$.

لنضع $v = \sum_{k=2}^{n} e_k$ ولنلاحظ ما يأتي :

$$\begin{aligned} M\left(e_1 + \frac{1}{\sqrt{n-1}}v\right) &= \sqrt{n-1}\left(e_1 + \frac{1}{\sqrt{n-1}}v\right) \\ M\left(e_1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}v\right) &= -\sqrt{n-1}\left(e_1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}v\right) \\ M\left(e_k - \frac{1}{n-1}v\right) &= 0 :\ 3 \leq k \leq n \end{aligned}$$

وعلى هذا فإنّ الجملة

$$\left(e_1 + \frac{1}{\sqrt{n-1}}v, e_1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}v, e_3 - \frac{1}{n-1}v, \ldots, e_n - \frac{1}{n-1}v\right)$$

تكوّن أساساً من الأشعّة الذاتيّة للمصفوفة M، ومن ثَمّ للمصفوفة D. والمصفوفة D تشابه المصفوفة القطريّة $\Delta = \left(1+\sqrt{n-1}, 1-\sqrt{n-1}, 0, \ldots, 0\right)$.

وبذا يتمّ إثبات المطلوب. ■

التمرين 5. حقل الدراسة هو $\mathbb{C}$. أوجد مصفوفة قطرية مشابهة للمصفوفة M في كلٍّ من الحالات الآتية، واحسب M^n في حالة n من $\mathbb{N}$.

$$1°.\quad M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\3&0&2&0\\0&2&0&3\\0&0&1&0\end{bmatrix},\qquad 2°.\quad M=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&1\end{bmatrix},$$

$$3°.\quad M=\begin{bmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\-1&2&0\end{bmatrix},\quad 4°.\quad M=\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&0&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

الحل

1. لنعيّن أوّلاً كثير الحدود المميِّز للمصفوفة M . فنجد

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_M(X)&=\det\begin{bmatrix}-X&1&0&0\\3&-X&2&0\\0&2&-X&3\\0&0&1&-X\end{bmatrix}\\&=-X\det\begin{bmatrix}-X&2&0\\2&-X&3\\0&1&-X\end{bmatrix}-3\det\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-X&3\\0&1&-X\end{bmatrix}\\&=-X(-X^3+7X)-3(X^2-3)=X^4-10X^2+9\end{aligned}$$

فالقيم الذاتيّة للمصفوفة M هي $\lambda_1=1$ و $\lambda_2=-1$ و $\lambda_3=3$ و $\lambda_4=-3$. وهي جميعاً بسيطة، فالمصفوفة M تشابه مصفوفة قطريّة. ونجد بحساب بسيط أنّ الأشعّة الآتية أشعّة ذاتيّة للمصفوفة M توافق هذه القيم الذاتيّة :

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix},\quad v_3=\begin{bmatrix}1\\3\\3\\1\end{bmatrix},\quad v_4=\begin{bmatrix}1\\-3\\3\\-1\end{bmatrix}$$

حيث

$Mv_k=\lambda_k v_k$ في حالة $1\le k\le 4$.

يُكتب باقي القسمة الإقليديّة R_n لكثير الحدود X^n على $\mathcal{X}_M$، وهو من الدرجة الثالثة على الأكثر، بالشكل

$$\begin{aligned}R_n &= (X^2-1)(\alpha_n(X-3)+\beta_n(X+3))\\&\quad+(X^2-9)(\gamma_n(X-1)+\delta_n(X+1))\end{aligned}$$

فإذا عوّضنا في المساواة $X^n = \mathcal{X}_M(X)Q(X)+R_n(X)$ المتحوّل X بالقيم 1، ثُمّ -1، ثُمّ 3، ثُمّ -3 وجدنا

$$\delta_n = -\frac{1}{16} \text{ و } \gamma_n = \frac{(-1)^n}{16} \text{ و } \beta_n = \frac{3^n}{48} \text{ و } \alpha_n = -\frac{(-3)^n}{48}$$

وعلى هذا نجد أنّ $M^n = R_n(M)$ أي

$$M^n = A_1 + (-1)^n A_2 + 3^n A_3 + (-3)^n A_4$$

حيث

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{1}{16}(M^2-9I_4)(M+I_4) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -3\\ 3 & 1 & -1 & -3\\ -3 & -1 & 1 & 3\\ -3 & -1 & 1 & 3\end{bmatrix}\\
A_2 &= \frac{1}{16}(M^2-9I_4)(M-I_4) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 3\\ -3 & 1 & 1 & -3\\ -3 & 1 & 1 & -3\\ 3 & -1 & -1 & 3\end{bmatrix}\\
A_3 &= \frac{1}{48}(M^2-I_4)(M+3I_4) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\\
A_4 &= -\frac{1}{48}(M^2-I_4)(M-3I_4) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1\\ -3 & 3 & -3 & 3\\ 3 & -3 & 3 & -3\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2.لنعيّن كثير الحدود المميِّز للمصفوفة M . فنجد

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_M(X) &= \det\begin{bmatrix} 1-X & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2-X & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2-X & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-X \end{bmatrix} \\
&= (1-X)\det\begin{bmatrix} -2-X & 1 & 0 \\ 1 & -2-X & 1 \\ 0 & 1 & 1-X \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2-X & 2 \\ 0 & 1 & 1-X \end{bmatrix} \\
&= (1-X)((2+X)^2(1-X)+1+2X)-(X-1)(X+2)+1 \\
&= (X^2-2)(X^2+2X-4)
\end{aligned}$$

فالقيم الذاتيّة للمصفوفة M هي

$$\lambda_4 = -\sqrt{5}-1 \text{ و } \lambda_3 = \sqrt{5}-1 \text{ و } \lambda_2 = -\sqrt{2} \text{ و } \lambda_1 = \sqrt{2}$$

وهي جميعاً بسيطة، فالمصفوفة M تشابه مصفوفة قطريّة. ونجد بحساب بسيط أنّ الأشعّة التالية أشعّة ذاتيّة للمصفوفة M توافق هذه القيم الذاتيّة:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2}+1 \\ -1 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{5}-2 \\ -\sqrt{5}+2 \\ -1 \end{bmatrix},\ v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{5}-2 \\ \sqrt{5}+2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حيث $Mv_k = \lambda_k v_k$ في حالة $1 \le k \le 4$.

يُكتب باقي القسمة الإقليديّة R_n لكثير الحدود X^n على $\mathcal{X}_M$، وهو من الدرجة الثالثة على الأكثر، بالشكل

$$\begin{aligned}
R_n &= (X^2-2)\Big(\alpha_n(X+1-\sqrt{5})+\beta_n(X+1+\sqrt{5})\Big) \\
&\quad +(X^2+2X-4)\Big(\gamma_n(X-\sqrt{2})+\delta_n(X+\sqrt{2})\Big)
\end{aligned}$$

فإذا عوّضنا في المساواة $X^n = \mathcal{X}_M(X)Q(X)+R_n(X)$ المتحوّل X بالقيم $\sqrt{2}$ ثمّ $-\sqrt{2}$ ثمّ $\sqrt{5}-1$ ثمّ $-\sqrt{5}-1$ وجدنا

$$\begin{aligned}
\beta_n &= -\tfrac{2\sqrt{5}+5}{20}\Big(-1+\sqrt{5}\Big)^n, &\qquad \alpha_n &= \tfrac{2\sqrt{5}-5}{20}\Big(-1-\sqrt{5}\Big)^n \\
\delta_n &= \tfrac{2+\sqrt{2}}{8}\Big(\sqrt{2}\Big)^n, &\qquad \gamma_n &= \tfrac{2-\sqrt{2}}{8}\Big(-\sqrt{2}\Big)^n
\end{aligned}$$

وعلى هذا نجد أنّ $M^n = R_n(M)$ أي

$$M^n = \left(\sqrt{2}\right)^n A_1 + \left(-\sqrt{2}\right)^n A_2 + \left(\sqrt{5}-1\right)^n A_3 + \left(-\sqrt{5}-1\right)^n A_4$$

حيث $A_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{8}(M^2 + 2M - 4I_4)(M + \sqrt{2}I_4)$ أي

$$A_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & 1 & 1+\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-1 & 1 \\ 1+\sqrt{2} & 1 & 1 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

و $A_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{8}(M^2 + 2M - 4I_4)(M - \sqrt{2}I_4)$ أي

$$A_2 = \frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 & -1 & \sqrt{2}-1 \\ -1 & \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+1 & -1 \\ \sqrt{2}-1 & -1 & -1 & \sqrt{2}-1 \end{bmatrix}$$

و $A_3 = -\frac{2\sqrt{5}+5}{20}(M^2 - 2I_4)(M + (1+\sqrt{5})I_4)$ أي

$$A_3 = \frac{1}{4\sqrt{5}}\begin{bmatrix} \sqrt{5}+2 & 1 & -1 & -\sqrt{5}-2 \\ 1 & \sqrt{5}-2 & -\sqrt{5}+2 & -1 \\ -1 & -\sqrt{5}+2 & \sqrt{5}-2 & 1 \\ -\sqrt{5}-2 & -1 & 1 & \sqrt{5}+2 \end{bmatrix}$$

و أخيراً $A_4 = \frac{2\sqrt{5}-5}{20}\left(M^2 - 2I_4\right)\left(M + (1-\sqrt{5})I_4\right)$ أي

$$A_4 = \frac{1}{4\sqrt{5}}\begin{bmatrix} \sqrt{5}-2 & -1 & 1 & -\sqrt{5}+2 \\ -1 & \sqrt{5}+2 & -\sqrt{5}-2 & 1 \\ 1 & -\sqrt{5}-2 & \sqrt{5}+2 & -1 \\ 2-\sqrt{5} & 1 & -1 & \sqrt{5}-2 \end{bmatrix}$$

3. لنعيّن كثير الحدود المميّز للمصفوفة M . فنجد

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_M(X) &= \det\begin{bmatrix} 2-X & -2 & 1 \\ 2 & -3-X & 2 \\ -1 & 2 & -X \end{bmatrix}\\ &= -X^3 - X^2 + 5X - 3\\ &= -(X-1)^2(X+3)\end{aligned}$$

إذن $\lambda_1 = 1$ قيمة ذاتيّة مضاعفة مرتيّن للمصفوفة M ، و $\lambda_2 = -3$ قيمة ذاتيّة بسيطة لها.
يبيّن حسابٌ بسيطٌ أنّ بُعد الفضاء الذاتي الموافق للقيمة $\lambda_1 = 1$ يساوي 2 وهو المستوي الذي معادلته $x - 2y + z = 0$ ، ويقبل أساساً الجملة (v_1, v_2) حيث

$$v_2 = {}^t[0,1,2] \quad \text{و} \quad v_1 = {}^t[2,1,0]$$

في حين نجد أنّ الشعاع $v_3 = {}^t[1,2,-1]$ شعاع ذاتي موافق للقيمة الذاتيّة -3 للمصفوفة M .
فالمصفوفة M تشابه المصفوفة القطريّة $\mathrm{diag}(1,1,-3)$. إذن يُحقّق كثير الحدود $P(X) = (X-1)(X+3)$ المساواة $P(M) = 0$.
يُكتب باقي القسمة الإقليديّة R_n لكثير الحدود X^n على P ، وهو من الدرجة الأولى على الأكثر، بالشكل

$$R_n = \alpha_n(X-1) + \beta_n(X+3)$$

فإذا عوّضنا في المساواة $X^n = \mathcal{X}_M(X)Q(X) + R_n(X)$ المتحوّل X بالقيم 1 ثُمّ -3 وجدنا

$$\beta_n = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad \alpha_n = -\frac{1}{4}(-3)^n$$

وعلى هذا نجد أنّ $M^n = R_n(M)$ أي

$$M^n = -\frac{1}{4}(-3)^n\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

4. لنعيّن كثير الحدود المميِّز للمصفوفة M . فنجد

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_M(X) &= \det\begin{bmatrix} -1-X & 0 & 2 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & -1 & 1-X \end{bmatrix} \\ &= -(X+1)(X^2-X+1)\end{aligned}$$

إذن القيم الذاتيّة للمصفوفة M هي $\{-1,-j,-j^2\}$ حيث $j=\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}\right)$. والمصفوفة تشابه المصفوفة القطريّة $\mathrm{diag}(-1,-j,-j^2)$. ونثبتُ بسهولة أنّ الأشعّة

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1-j \\ 1 \\ -j \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1-j^2 \\ 1 \\ -j^2 \end{bmatrix}$$

تؤلّف أساساً من الأشعّة الذاتيّة للمصفوفة M . وأخيراً لمّا كان $M^3=-I_3$ استنتجنا أنّ

$$M^n = \begin{cases} (-1)^m I_3 & : \quad n=3m \\ (-1)^m M & : \quad n=3m+1 \\ (-1)^m M^2 & : \quad n=3m+2 \end{cases}$$

وبذا يتمّ إثبات المطلوب. ■

التمرين 6. لتكن M مصفوفة مربعة من المرتبة n على حقل $\mathbb{K}$. نفترض أن M تُكتب بالشكل $M=\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ ، حيث $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ و $D\in\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ و $B\in\mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$ ، و $C\in\mathcal{M}_{q\times p}(\mathbb{K})$ ، و $p+q=n$.

1. أثبت أنه إذا كانت A قَلوبة فإنّ $\det M = \det A\cdot\det(D-CA^{-1}B)$.

2. أثبت أنه إذا كانت D قَلوبة فإنّ $\det M = \det D\cdot\det(A-BD^{-1}C)$.

3. ليكن (p,n) من $\mathbb{N}^2$ حيث $1\le p\le n$. ولتكن A من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ ، و B من $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$. أثبت أنّ

$$\det(XI_n+AB) = X^{n-p}\det(XI_p+BA)$$

4. تطبيق

- ليكن (X,Y) من $(\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K}))^2$، نضع $M = X\,{}^tY + Y\,{}^tX$. عيّن كثير الحدود المميّز للمصفوفة M. وادرس حالة $M = (\cos(j-i)\theta)_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$.
- لتكن A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، ولنضع $B = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{bmatrix}$ من $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. أثبت أنّ

$$\mathcal{X}_B(X) = (-1)^n \mathcal{X}_A(X^2)$$

الحل

1. في الحقيقة، لدينا في حالة A قَلوبة، المساواة المصفوفيّة التالية :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I_q \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_p & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

التي ينتج منها مباشرة أنّ

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B)$$

2. وكذلك، لدينا في حالة D قَلوبة، المساواة المصفوفيّة التالية :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ D^{-1}C & I_q \end{bmatrix}$$

التي ينتج منها مباشرة أنّ

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det D \det(A - BD^{-1}C)$$

3. بتطبيق النتيجتين السابقتين على المصفوفة

$$M = \begin{bmatrix} I_n & A \\ B & XI_p \end{bmatrix}$$

من $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K}(X))$ نستنتج أنّ

$$\det I_n \det(XI_p - BI_n^{-1}A) = \det(XI_p)\det(I_n - A(XI_n)^{-1}B)$$

أو

$$\det(XI_p - BA) = X^{p-n}\det(XI_n - AB)$$

وهذا يُكافئ القول

$$\mathcal{X}_{AB}(X) = (-X)^{n-p}\mathcal{X}_{BA}(X)$$

ويكفي أن نستبدل $-A$ بالمصفوفة A لنحصل أيضاً على

$$\det(XI_n + AB) = X^{n-p}\det(XI_p + BA)$$

$a.4$ لتكن $B = [X,Y]$ المصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times 2}(\mathbb{K})$ التي عمودها الأوّل X وعمودها الثاني Y. من الواضح أنّ $M = B\times {}^tB$. ومن جهة ثانية نلاحظ أنّ

$$^tB\times B = \begin{bmatrix} ^tXX & ^tXY \\ ^tXY & ^tYY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |X|^2 & X\cdot Y \\ X\cdot Y & |Y|^2 \end{bmatrix}$$

حيث $|X|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ و $|Y|^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$ و $X\cdot Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

وبالاستفادة من $\mathcal{X}_{B.{}^tB}(\lambda) = (-\lambda)^{n-2}\mathcal{X}_{{}^tB\cdot B}(\lambda)$ نستنتج أنّ

$$\mathcal{X}_M(\lambda) = (-\lambda)^{n-2}(\lambda^2 - (|X|^2 + |Y|^2)\lambda + |X|^2|Y|^2 - (X\cdot Y)^2)$$

وفي الحالة الخاصّة الموافقة لما يأتي:

$$Y = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \sin 2\theta \\ \vdots \\ \sin n\theta \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \cos 2\theta \\ \vdots \\ \cos n\theta \end{bmatrix}$$

يكون لدينا وضوحاً $M = X\cdot {}^tX + Y\cdot {}^tY$ ويكون لدينا أيضاً

$$\begin{aligned} |X|^2 &= \sum_{k=1}^{n}\cos^2 k\theta = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(1+\cos 2k\theta\big) \\ &= \frac{2n-1}{4} + \frac{1}{4}\sum_{k=-n}^{n} e^{2\mathrm{i}k\theta} \\ &= \frac{2n-1}{4} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{4\sin\theta} \end{aligned}$$

ولأنّ $|X|^2 + |Y|^2 = n$ نستنتج أنّ

$$|Y|^2 = \sum_{k=1}^{n}\sin^2 k\theta = \frac{2n+1}{4} - \frac{\sin(2n+1)\theta}{4\sin\theta}$$

وأخيراً

$$\begin{aligned} X\cdot Y &= \sum_{k=1}^{n}\sin k\theta\cos k\theta \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{2\,\mathrm{i}\,k\theta}\right) \\ &= \frac{\cos\theta}{4\sin\theta}-\frac{\cos(2n+1)\theta}{4\sin\theta} \end{aligned}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$|X|^2|Y|^2-(X\cdot Y)^2=\frac{n^2}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

ومن ثمّ

$$\mathcal{X}_M(\lambda)=(-\lambda)^{n-2}\left(\lambda^2-n\lambda+\frac{n^2}{4}-\frac{1}{4}\frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

$b.4$ من الواضح أنّ

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_B(X) &= \det\begin{bmatrix}-XI_n & I_n\\ A & -XI_n\end{bmatrix} \\ &= \det(-XI_n)\times\det\left(-XI_n+\frac{1}{X}A\right) \\ &= \det(X^2I_n-A)=(-1)^n\mathcal{X}_A(X^2) \end{aligned}$$

وبذا يُنجز الحل. ■

التمرين 7. لتكن المصفوفة $A=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{bmatrix}$. نتأمّل التطبيق الخطّي Φ من $\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$ المعرف بالعلاقة $\Phi(M)=AM-MA$ حين يكون M من $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. عيّن نواة Φ، وأثبت أنه قابل للتمثيل بمصفوفة قطرية.

الحل

من الواضح أنّ $\operatorname{vect}(\{I_2,A\})\subset\ker\Phi$. ليكن $\mathcal{E}=\left(E_{ij}\right)_{1\le i,j\le 2}$ الأساس القانوني في $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. عندئذ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
\Phi(E_{11}) &= \begin{bmatrix}0&4\\2&0\end{bmatrix}, & \Phi(E_{12}) &= \begin{bmatrix}-2&6\\0&2\end{bmatrix},\\
\Phi(E_{21}) &= \begin{bmatrix}-4&0\\-6&4\end{bmatrix}, & \Phi(E_{22}) &= \begin{bmatrix}0&-4\\-2&0\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ فإنّ $\operatorname{rg}\left(\Phi\right)=\dim\operatorname{Im}\Phi\ge 2$. ولمّا كان $4=\operatorname{rg}\Phi+\dim\ker\Phi$ استنتجنا أنّ بُعد نواة Φ يساوي 2 ومن ثَمّ $\ker\Phi=\operatorname{vect}(\{I_2,A\})$. ومن جهة أخرى لدينا

$$M=\operatorname{mat}\left(\Phi,\mathcal{E}\right)=\begin{bmatrix}0&-2&-4&0\\4&6&0&-4\\2&0&-6&-2\\0&2&4&0\end{bmatrix}$$

إذن $\mathcal{X}_M(X)=X^2(X^2-4)$. وهذا يُثبتُ أنّ Φ يقبل التمثيل بمصفوفة قطريّة لأنّ بُعد الفضاء الذاتي الموافق للقيمة الذاتيّة 0، وهو $\ker\Phi$، يساوي 2 وهي رتبة مُضاعفة هذه القيمة الذاتيّة. أمّا القيمتان الذاتيّتان 2 و -2 فهما بسيطتان. وبذا يتمّ الإثبات. ■

التمرين 8. ليكن E فضاء التوابع المستمرة على $[0,1]$ والتي تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$. وليكن التطبيق الخطيّ $u:E\to E:f\mapsto u(f)$ المعرف بالعلاقة

$$u(f)(x)=\int_0^1\min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

عيّن القيم والأشعة الذاتية للتطبيق الخطّي u .

الحل

لنلاحظ أوّلاً أنّ 0 ليس قيمة ذاتيّة للتطبيق الخطّي u . في الحقيقة، يقتضي $u(f)=0$ أن يكون

$$\forall x\in[0,1],\qquad \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t+x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

وباشتقاق طرفي هذه المساواة نجد

$$\forall x \in [0,1], \quad \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$$

وبالاشتقاق مرّة أخرى نستنتج أنّ $\forall x \in [0,1],\ f(x) = 0$: . أي إنّ $\ker u = \{0\}$
والتطبيق الخطيّ u متباينٌ ولا يقبل العدد 0 قيمة ذاتيّة.

لتكن λ من $\mathbb{C}^*$ وليكن f من E يُحقّقان المساواة $u(f) = \lambda f$ ، أي

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \frac{1}{\lambda}\left(\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}\,t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t\right)$$

نستنتج من هذه المساواة أنّ f ينتمي إلى الصف C^1 على $[0,1]$ ويُحقّق $f(0) = 0$ ، وكذلك

$$\forall x \in [0,1],\ f'(x) = \frac{1}{\lambda}\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

نستنتج من هذه المساواة أيضاً أنّ f' ينتمي إلى الصف C^1 على $[0,1]$ ويُحقّق $f'(1) = 0$ ، وكذلك

$$\forall x \in [0,1],\ f''(x) = -\frac{1}{\lambda} f(x)$$

ليكن ω من $\mathbb{C}$ يُحقّق $\omega^2 = \frac{1}{\lambda}$ عندئذ يكون f حلاً للمسألة التفاضليّة

$$f'' + \omega^2 f = 0 \text{ و } f'(1) = 0 \text{ و } f(0) = 0$$

المعادلة التفاضليّة تقتضي أنّ f من الصيغة $x \mapsto A\cos\omega x + B\sin\omega x$ ، أمّا الشرط $f(0) = 0$ فيقتضي أنّ $A = 0$ ، وأخيراً يقتضي الشرط $f'(1) = 0$ أن يكون $B\cos\omega = 0$.

إذن

- في حالة $\cos\omega \neq 0$ تقتضي المساواة $u(f) = \lambda f$ أن يكون $f = 0$. فالعدد $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$ ليس قيمة ذاتيّة للتطبيق الخطّي u .

- وفي حالة $\cos\omega = 0$، أي $\omega \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$، يكون التطبيق $x \mapsto \sin\omega x$ حلّاً غير صفري للمعادلة $u(f) = \lambda f$، أي شعاعاً ذاتيّاً للتطبيق u موافقاً للقيمة الذاتيّة $\lambda = 1/\omega^2$.

نستنتج أنّ مجموعة القيم الذاتيّة للتطبيق الخطّي u هي

$$\mathrm{Sp}(u) = \left\{\lambda_k = \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2} : k \in \mathbb{N}\right\}$$

وأنّ الفضاء الذاتي الموافق للقيمة الذاتيّة $\lambda_k = \dfrac{4}{\pi^2(2k+1)^2}$ مولَّدٌ بالتابع f_k المعرّف بالعلاقة

$$f_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}x\right)$$

وبذا يتمّ إثبات المطلوب. ■

التمرين 9. ليكن a و b عددين حقيقيين مختلفين. وليكن $E = \mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد درجتها عن n. عيّن القيم الذاتية والأشعة الذاتية للتطبيق u من $\mathcal{L}(E)$ المعرّف كما يأتي:

$$u(P)(X) = (X-a)(X-b)P'(X) - (nX - \tfrac{n}{2}(a+b))P(X)$$

الحل

لنفترض أنّ λ قيمة ذاتيّة للتطبيق الخطّي u، وأنّ كثير الحدود P هو شعاع ذاتي يوافق هذه القيمة الذاتيّة. عندئذ بمقارنة درجتي الحدّين المسيطرين في طرفي المساواة $u(P) = \lambda P$ نستنتج أنّ $\deg P = n$.

ومن جهة أخرى لنتأمّل جذراً α في $\mathbb{C}$ لكثير الحدود P. ولنفترض أنّ رتبة مضاعفته تساوي m. عندئذ يكون α جذراً مضاعفاً من المرتبة $m-1$ لكثير الحدود P'. ولكن نستنتج من المساواة $u(P) = \lambda P$ أنّ

$$(X-a)(X-b)P'(X) = \left(nX - \frac{n}{2}(a+b) + \lambda\right)P(X)$$

إنّ α هو جذر مضاعف من المرتبة m على الأقل لكثير الحدود $(X-a)(X-b)P'(X)$.

إذن لا بُدّ أن يكون α جذراً لكثير الحدود $(X-a)(X-b)$ أي $\alpha \in \{a, b\}$.

وعلى هذا لا بُدّ أن يأخذ P الصيغة

$$\mu(X-a)^k(X-b)^{n-k}$$

لنعرّف إذن $P_k=(X-a)^k(X-b)^{n-k}$ في حالة $0\leq k\leq n$. ولنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} u(P_k) &= \left(k(X-b)+(n-k)(X-a)-(nX-\frac{n}{2}(a+b))\right)P_k(X) \\ &= (a-b)\left(k-\frac{n}{2}\right)P_k(X)=\lambda_k P_k \end{aligned}$$

وقد عرّفنا $\lambda_k=(a-b)\left(k-\frac{n}{2}\right)$. إذن يقبل التطبيق الخطّي u التمثيل بمصفوفة قطريّة، طيفه مكوّن من $n+1$ قيمة ذاتيّة مختلفة هي $\left(\lambda_k\right)_{0\leq k\leq n}$، ويقبل الجملة $\left(P_k\right)_{0\leq k\leq n}$ أساساً من الأشعّة الذاتيّة. ■

التمرين 10. لتكن a و b و c أعداداً حقيقية مختلفة مثنى مثنى. وليكن $E=\mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد درجتها عن n . ادرس قابلية تمثيل التطبيق u من $\mathcal{L}(E)$ بمصفوفة قطرية، حيث

$$u(P)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,X}((aX+b)P(X))+cP(X)$$

الحل

لنلاحظ أنّ $u(X^k)=(a(k+1)+c)X^k+bkX^{k-1}$. إذن مصفوفة u بالنسبة إلى الأساس القانوني مصفوفة مثلّثيّة ونقرأ منها مباشرة طيف u لنجد

$$\mathrm{Sp}(u)=\left\{a(k+1)+c:0\leq k\leq n\right\}$$

وهو مكوّن من $n+1=\dim E$ قيمة ذاتيّة مختلفة. إذن يقبل التطبيق الخطّي u التمثيل بمصفوفة قطريّة. في الحقيقة، نلاحظ أنّ

$$u((aX+b)^k)=(a(k+1)+c)(aX+b)^k$$

إذن تكوّن الجملة $\left((aX+b)^k\right)_{0\leq k\leq n}$ أساساً للفضاء E مؤلّفاً من أشعّة ذاتيّة للتطبيق u . ■

التمرين 11. لتكن A و M مصفوفتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ تحقّقان $AM = MA$. نفترض أنّ عدد عناصر طيف M يساوي n .

1. أثبت أنّ كل شعاع ذاتي للمصفوفة M هو شعاع ذاتي للمصفوفة A .
2. أثبت أنّه يوجد $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ في $\mathbb{C}^n$ يُحقّق

$$A = \alpha_0 I_n + \alpha_1 M + \cdots + \alpha_{n-1} M^{n-1}$$

3. حلّ في $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ المعادلة $X^2 = A$ حيث $A = \begin{bmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

الحل

1. ليكن v شعاعاً ذاتيّاً للمصفوفة M موافقاً للقيمة الذاتيّة λ . لنضع $w = Av$ ، عندئذ يكون لدينا

$$Mw = M(Av) = A(Mv) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda w$$

إذن ينتمي الشعاع $w = Av$ إلى الفضاء الذاتي E_λ الموافق للقيمة الذاتيّة λ للمصفوفة M . ولمّا كان بُعد هذا الفضاء يساوي 1 استناداً إلى الفرض، استنتجنا أنّ $E_\lambda = \mathbb{C}v$ ، ومن ثَمّ يوجد عددٌ μ_λ يُحقّق $Av = \mu_\lambda v$. فكلُّ شعاع ذاتي للمصفوفة M هو شعاع ذاتي للمصفوفة A .

2. لنفترض أنّ $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ ، ولنفترض أنّ $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ هو أساسٌ للفضاء $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ مكوّنٌ من أشعّة ذاتيّة للمصفوفة M ، أي $\forall k \in \mathbb{N}_n,\ Mv_k = \lambda_k v_k$.

استناداً إلى 1.، مهما تكن k من $\mathbb{N}_n$ ، يوجد عددٌ μ_k من $\mathbb{C}$ يُحقّق $Av_k = \mu_k v_k$. ليكن P كثير الحدود الوحيد من $\mathbb{C}[X]$ الذي يُحقّق الشرطين

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, P(v_k) = \mu_k \quad \text{و} \quad \deg P < n$$

وهو كما نعلم موجودٌ، ويمكن التعبير عنه بسهولة باستعمال كثيرات حدود لاغرانج. عندئذ

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad P(M)v_k = P(\lambda_k)v_k = \mu_k v_k = Av_k$$

وهذا يبرهن أنّ $P(M) = A$ ، لأنّ $\mathcal{V}$ أساسٌ للفضاء $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$.

3. نجد بحساب مباشر أنّ كثير الحدود المميّز المصفوفة A المعطاة هو

$$\mathcal{X}_A(X) = -X(X-1)(X-16)$$

فإذا حقّقت المصفوفة B المساواة $B^2 = A$ كان لدينا $BA = AB$ ، واستناداً إلى ما سبق لا بُدَّ أن يوجد كثير حدود P من الدرجة الثانية على الأكثر يُحقّق $B = P(A)$ ، وتكون الأعداد $P(0)$ و $P(1)$ و $P(16)$ قيماً ذاتيّة للمصفوفة B . ونستنتج من المساواة $B^2 = A$ أنّ

$$\left(P(0)\right)^2 = 0 \text{ و } \left(P(1)\right)^2 = 1 \text{ و } \left(P(16)\right)^2 = 16$$

وعلى هذا يوجد $(\varepsilon, \varepsilon')$ في $\{-1,1\}^2$ يُحقّقان

$$P(0) = 0 \text{ و } P(1) = \varepsilon \text{ و } P(16) = 4\varepsilon'$$

ولكن لمّا كان $\deg P \leq 2$ استنتجنا مما سبق أنّ

$$P(X) = \frac{\varepsilon'}{60} X(X-1) - \frac{\varepsilon}{15} X(X-16)$$

وبملاحظة أنّ

$$P^2(X) - X = \left(\frac{17 + 8\varepsilon\varepsilon'}{3600} X - \frac{17}{240}\right) X(X-1)(X-16)$$

نستنتج مباشرة أنّ العكس صحيحٌ: أي إنّ $A = (P(A))^2$. وعلى هذا فإنّ

$$B^2 = A \Leftrightarrow B \in \left\{ \frac{\varepsilon'}{60} A(A-I) - \frac{\varepsilon}{15} A(A-16I) : (\varepsilon, \varepsilon') \in \{-1,1\}^2 \right\}$$

أو أنّ مجموعة حلول المعادلة $B^2 = A$ هي

$$B \in \left\{ \frac{2\varepsilon}{3} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\varepsilon'}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} : (\varepsilon, \varepsilon') \in \{-1,1\}^2 \right\}$$

وبذا يتمّ الإثبات. ■

التمرين 12. لتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. نفترض وجود عددين (λ, μ) من $\mathbb{C}^2$ ، ومصفوفتين (A, B) من $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ تُحقّقان $M^k = \lambda^k A + \mu^k B$ ، أياً كانت k من $\{1,2,3\}$. أثبت أنّ M تُشابِه مصفوفة قطرية.

الحل

استناداً إلى الفرْض لدينا $P(M) = P(\lambda)A + P(\mu)B$ وذلك أيّاً كان كثير الحدود P من $\mathbb{C}[X]$ الذي يُحقّق $P(0) = 0$ و $\deg P \leq 3$. وبوجه خاص يكون لدينا $Q(M) = 0$ في حالة كثير الحدود $Q(X) = X(X - \lambda)(X - \mu)$.

فإذا كانت الأعداد 0 و λ و μ مختلفة استنتجنا أنّ M تشابه مصفوفة قطريّة لأنّ Q يساوي جداء ضرب حدود مختلفة من الدرجة الأولى.

أمّا في حالة $\mu = 0$ و $\lambda \neq 0$ فيكون لدينا $M^2 = \mu^2 B = \mu M$. وهذا يثبتُ أنّ $R(M) = 0$ حيث $R(X) = X(X - \mu)$. إذن تشابه M مصفوفة قطريّة لأنّ R يساوي جداء ضرب حدود مختلفة من الدرجة الأولى. ونصل إلى النتيجة نفسها في الحالتين المماثلتين $\lambda = 0$ و $\mu \neq 0$، و $\lambda = \mu \neq 0$. وأخيراً تبقى الحالة التافهة $\lambda = \mu = 0$ التي تساوي فيها M مصفوفة قطريّة. وبذا يكتمل الحل. ∎

التمرين 13. لتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، $(1 \leq n)$. أثبت تكافؤ الخواص التالية:

① كثير الحدود المميّز للمصفوفة M يحقق $\mathcal{X}_M(X) = (-1)^n X^n$.

② أياً كان $0 < k$ فإنّ $\operatorname{tr}(M^k) = 0$.

③ يوجد عدد طبيعي p يُحقّق $M^p = 0$.

الحل

نعلم أنّ كلّ مصفوفة M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ تشابه مصفوفة مثلّثيّة، فتوجد مصفوفة مثلّثيّة عليا $N = (a_{ij})$ ومصفوفة قلوبة P تحقّقان $M = PNP^{-1}$.

①⇐② لنفترض أنّ $\mathcal{X}_M(X) = (-X)^n$ عندئذ يكون $\mathcal{X}_N(X) = (-X)^n$، ومن ثمّ $a_{ii} = 0$ أيّاً كان i من $\mathbb{N}_n$. وعليه، مهما يكن k من $\mathbb{N}^*$ تكن العناصر القطريّة في N^k معدومة. إذن

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \operatorname{tr} N^k = 0$$

وهذا يقتضي ② لأنّ $\operatorname{tr} N^k = \operatorname{tr} M^k$.

②⇐③ لنفترض أنّ $\operatorname{tr} M^k = 0$ أيّاً كان k من $\mathbb{N}^*$، ولنعرّف $\Lambda = \{a_{ii} : i \in \mathbb{N}_n\}$، وفي حالة λ من Λ لنعرّف $m_\lambda = \operatorname{card}\{i \in \mathbb{N}_n : a_{ii} = \lambda\}$.
عندئذ نستنتج بناءً على الفرْض أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \operatorname{tr} M^k = \operatorname{tr} N^k = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^k = \sum_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda \lambda^k = 0$$

ومن ثَمّ

$$\forall Q \in \mathbb{C}[X], \ \sum_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda \lambda Q(\lambda) = 0$$

فإذا كان μ عنصراً من Λ، واختبرنا المساواة السابقة على كثير الحدود

$$L_\mu = \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} \frac{X - \lambda}{\mu - \lambda}$$

استنتجنا أنّ $\forall \mu \in \Lambda, m_\mu \cdot \mu = 0$، وهذا يبرهن أنّ $\Lambda = \{0\}$. وبالطبع، نستنتج من كون عناصر قطر المصفوفة N معدومةً أنّ $N^n = 0$ ومن ثَمّ أنّ $M^n = 0$.

①⇐③ من الوضح أنّ الشرط $M^p = 0$ يقتضي أنّ $\operatorname{Sp}(M) = \{0\}$ ومن ثَمّ أنّ كثير الحدود المميّز للمصفوفة M هو $(-X)^n$. ■

التمرين 14. نقول عن مصفوفة $A = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ إنها **إحصائية** إذا وفقط إذا تحقق

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad a_{ij} \in [0,1] \quad \text{و} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

لتكن $A = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ مصفوفة إحصائية.

1. أثبت أنّ 1 قيمة ذاتية للمصفوفة A.
2. لتكن λ قيمة ذاتية للمصفوفة A في $\mathbb{C}$. أثبت أنّ $|\lambda| \leq 1$.
3. نفترض أنّ $a_{ii} > 0$ أياً كان i من $\mathbb{N}_n$. أثبت أنّ جميع القيم الذاتية للمصفوفة A (في $\mathbb{C}$) تقع داخل دائرة نصف قطرها أصغر تماماً من 1 وتمس الدائرة المثلّثية داخلاً.

الحل

1. ليكن $\mathbb{1}$ المصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ التي تساوي جميع ثوابتها الواحد. عندئذ نتيقّن مباشرة أنّ $A\mathbb{1}=\mathbb{1}$ ، إذن العدد 1 هو قيمة ذاتيّة للمصفوفة الإحصائيّة A .

2. لتكن λ قيمة ذاتيّة للمصفوفة A في $\mathbb{C}$ ، وليكن $X={}^t[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ شعاعاً ذاتيّاً موافقاً. ثُمّ نعرف $\left|x_q\right|=\max\left\{\left|x_i\right|:i\in\mathbb{N}_n\right\}$. فيكون $\left|x_q\right|>0$ لأنّ $X\neq 0$. نستنتج من المساواة المصفوفيّة $AX=\lambda X$ أنّ

$$\lambda x_q=\sum_{j=1}^{n}a_{qj}x_j$$

ومن ثَمّ

$$\left|\lambda\right|\left|x_q\right|\leq\sum_{j=1}^{n}\left|a_{qj}\right|\left|x_j\right|\leq\sum_{j=1}^{n}a_{qj}\left|x_q\right|=\left|x_q\right|$$

إذن $\left|\lambda\right|\leq 1$.

3. نعلم استناداً إلى الفرْض أنّ $\alpha=\min\limits_{1\leq i\leq n}a_{ii}>0$. لنختر إذن عدداً $\omega\in\left]0,1\right[$. ولنتأمّل المصفوفة

$$B=\frac{1}{1-\omega}\left(A-\omega I_n\right)$$

من الواضح أنّ B مصفوفة إحصائيّة. وإذا كانت λ قيمة ذاتيّة في $\mathbb{C}$ للمصفوفة A كانت $\dfrac{\lambda-\omega}{1-\omega}$ قيمة ذاتية للمصفوفة الإحصائيّة B ، وكان من ثَمّ $\left|\dfrac{\lambda-\omega}{1-\omega}\right|\leq 1$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall\lambda\in\mathrm{Sp}(A),\forall\omega\in\left]0,\alpha\right[,\ \left|\lambda-\omega\right|\leq\left|1-\omega\right|$$

وبجعل ω تسعى إلى α نستنتج أنّ

$$\mathrm{Sp}(A)\subset D(\alpha,1-\alpha)$$

و $D\left(\alpha,1-\alpha\right)$ هو القرص الذي مركزه α ويمس الدائرة المثلّثيّة داخلاً عند النقطة 1 . وبذا يتمّ إثبات المطلوب. ■

التمرين 15.

ليكن كثير الحدود $P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}X^k$ من الدرجة n في $\mathbb{C}[X]$. نفترض أنّ

$$P(X)=\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$$

و نضع $S_k=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k$ حين يكون $k\in\{0,1,\ldots,n\}$.

1. أثبت المطابقة : $\frac{P'(X)}{P(X)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{S_k}{X^{k+1}}+\frac{1}{X^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^{n+1}}{X-\lambda_i}$.

2. استنتج أنه في جوار $+\infty$ لدينا

$$P'(x)=\sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n-\ell}a_{n-\ell-i}S_i\right)x^{\ell-1}+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

3. أثبت أخيراً أنّ $a_0=1$ وأنّ $a_k=-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_{k-i}S_i$ حين يكون $k\in\mathbb{N}_n$.

4. لتكن A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. نعرّف المتتاليتين $(B_k)_{1\le k\le n}$ و $(a_k)_{1\le k\le n}$ بالعلاقات:

❖ $(B_1,a_1)=(A,-\operatorname{tr}B_1)$

❖ $(B_k,a_k)=\left(A(B_{k-1}+a_{k-1}I_n),-\frac{1}{k}\operatorname{tr}B_k\right)$ عندما $n\ge k>1$.

أثبت أنّ

$$\mathcal{X}_A(X)=(-1)^n\left(X^n+\sum_{k=1}^{n-1}a_{n-k}X^k\right)$$

الحل

1. في الحقيقة يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}\frac{P'(X)}{P(X)}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X-\lambda_i}=\frac{1}{X}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\lambda_i/X}\\&=\frac{1}{X}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i}{X}\right)^k+\frac{(\lambda_i/X)^{n+1}}{1-\lambda_i/X}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{S_k}{X^{k+1}}+\frac{1}{X^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^{n+1}}{X-\lambda_i}\end{aligned}$$

2. إذن في جوار $+\infty$ لدينا

$$\begin{aligned}
P'(x) &= \frac{1}{x^{n+1}}P(x)\left(\sum_{k=0}^{n} S_{n-k}x^k\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
&= \frac{1}{x^{n+1}}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}x^j\right)\left(\sum_{k=0}^{n} S_{n-k}x^k\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
&= \frac{1}{x^{n+1}}\sum_{0\le j,k\le n} a_{n-j}S_{n-k}x^{j+k} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
&= \frac{1}{x^{n+1}}\sum_{\substack{0\le j,k\le n\\ j+k>n}} a_{n-j}S_{n-k}x^{j+k} + O\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= \sum_{r=n+1}^{2n}\left(\sum_{\substack{0\le j,k\le n\\ j+k=r}} a_{n-j}S_{n-k}\right)x^{r-n-1} + O\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}
P'(x) &= \sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{\substack{0\le j,k\le n\\ j+k=n+\ell}} a_{n-j}S_{n-k}\right)x^{\ell-1} + O\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{\substack{0\le j,i\le n\\ j=i+\ell}} a_{n-j}S_{i}\right)x^{\ell-1} + O\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n-\ell} a_{n-i-\ell}S_{i}\right)x^{\ell-1} + O\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

3. ولكن لدينا من جهة أخرى $P'(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \ell a_{n-\ell}x^{\ell-1}$ وهذا يقتضي أنّه في جوار $+\infty$ لدينا

$$\sum_{\ell=1}^{n}\left(\ell a_{n-\ell} - \sum_{i=0}^{n-\ell} a_{n-i-\ell}S_i\right)x^{\ell-1} = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

أو

$$\forall \ell \in \{1,2,\ldots,n-1\},\quad \ell a_{n-\ell} = \sum_{i=0}^{n-\ell} a_{n-i-\ell}S_i = n a_{n-\ell} + \sum_{i=1}^{n-\ell} a_{n-i-\ell}S_i$$

ومنه

$$\forall \ell \in \{1,2,\ldots,n-1\},\quad -(n-\ell)a_{n-\ell} = \sum_{i=1}^{n-\ell} a_{n-\ell-i}S_i$$

وهذا يُكتبُ بالصيغة المُكافئة

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,n-1\},\quad a_k = -\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_{k-i}S_i \tag{1}$$

ومن جهة أخرى، لمّا كان λ_j جذراً لكثير الحدود P استنتجنا أنّ

$$\forall j \in \mathbb{N}_n,\ \ P(\lambda_j) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}\lambda_j^i = 0$$

وبجمع هذه المساويات نستنتج أنّ

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}S_i = 0$$

ولمّا كان $S_0 = n$ استنتجنا أنّ (1) تبقى صحيحة في حالة $k = n$.

4. لنثبت بالتدريج على العدد k أنّ

$$B_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k-i}A^i \tag{2}$$

هذا محقّقٌ وضوحاً في حالة $k = 1$. لنفترض صحة (2) عند k أصغر تماماً من n. عندئذ

$$B_{k+1} = A\big(B_k + a_k I\big) = A\left(\sum_{i=1}^{k} a_{k-i}A^i\right) + a_k A = \sum_{i=1}^{k+1} a_{k+1-i}A^i$$

وهذا يثبتُ صحّة (2) في حالة k من $\mathbb{N}_n$.

من جهة أخرى، لنفترض أنّ

$$\mathcal{X}_A(X) = (-1)^n\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i) = (-1)^n\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}X^k$$

لمّا كانت A تشابه مصفوفة قطريّة، قطرها $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ استنتجنا أنّ $S_k = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k = \operatorname{tr} A^k$. وهذا ما سيفيدنا في إثبات أنّ $a_k = b_k$ في حالة k من $\{0,1,\ldots,n\}$.

في الحقيقة لدينا وضوحاً $a_0 = b_0 = 1$. وكذلك فإنّ $b_1 = -\operatorname{tr} A = a_1$. لنفترض أنّ $a_j = b_j$ في حالة $j < k$. عندئذ يكون لدينا

$$a_k = -\frac{1}{k}\operatorname{tr} B_k = -\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_{k-i}\operatorname{tr} A^i = -\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_{k-i}S_i = b_k$$

وقد استفدنا من نتيجة السؤال السابق. وهكذا نكون قد أثبتنا المطلوب. ■

التمرين 16. لتكن x من $]-1,+1[$، و n من $\mathbb{N}$. ولنعرّف

$$I_n(x) = \int_0^\pi \frac{\cos nt}{1 - x\cos t}\,\mathrm{d}t$$

1. احسب كلاً من $I_0(x)$ و $I_1(x)$.
2. بافتراض $x \neq 0$ و $n \geq 1$، احسب $I_{n+1}(x) + I_{n-1}(x)$ بدلالة $I_n(x)$ و x.
3. استنتج قيمة $I_n(x)$.

الحل

1. في الحقيقة يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}
I_0(x) &= \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1-x\cos t} + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1-x\cos t}\\
&= \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1-x\cos t} + \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}u}{1+x\cos u} && ☞\ u = \pi - t\\
&= \int_0^{\pi/2}\frac{2\mathrm{d}t}{1-x^2\cos^2 t} = \int_0^{\pi/2}\frac{2}{1+\tan^2 t - x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} && ☞\ v = \tan t\\
&= \int_0^{\infty}\frac{2}{1-x^2+v^2}\cdot \mathrm{d}v = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\infty}\frac{2}{1+y^2}\cdot\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

وأخيراً $I_0(x) = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}$.

وكذلك فإنّ

$$I_0(x) - xI_1(x) = \int_0^{\pi} \frac{1}{1 - x\cos t}\mathrm{d}t - x\int_0^{\pi} \frac{\cos t}{1 - x\cos t}\mathrm{d}t = \pi$$

إذن

$$I_1(x) = \frac{\pi}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right) = \frac{\pi x}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})}$$

2. ومن جهة أخرى نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} I_{n+1}(x) + I_{n-1}(x) &= \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)t + \cos(n-1)t}{1 - x\cos t}dt \\ &= 2\int_0^{\pi} \frac{\cos nt \cos t}{1 - x\cos t}dt = \frac{2}{x}\int_0^{\pi} \cos nt\left(\frac{1}{1 - x\cos t} - 1\right)dt \\ &= \frac{2}{x}\left(I_n(x) - \int_0^{\pi} \cos nt dt\right) \end{aligned}$$

إذن في حالة $x \neq 0$ و n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$I_{n+1}(x) = \frac{2}{x}I_n(x) - I_{n-1}(x)$$

3. وعلى هذا تكون المتتالية $\left(I_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية خطيّة من المرتبة الثانية. كثير حدودها المميّز هو

$$Z^2 - \frac{2}{x}Z + 1 = 0$$

وله جذران مختلفان هما

$$Z_2 = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \quad \text{و} \quad Z_1 = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$$

ومن ثَمّ $I_n(x) = AZ_1^n + BZ_2^n$، إذ يتعيّن المقداران A و B بالشرطين

$$A + B = I_0(x) = \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$AZ_1 + BZ_2 = I_1(x) = \frac{\pi x}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{\pi}{Z_1\sqrt{1-x^2}}$$

وبالحلّ المشترك نستنتج أنّ $A=0$ و $B=\dfrac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}$. ومن ثمّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ I_n(x)=\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^n$$

وهذه النتيجة صحيحة في حالة $x\in\,]-1,1[$. ■

التمرين 17. لتكن $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ أعداداً حقيقية تحقّق $0<a_1<a_2<\cdots<a_n$.
ولتكن المصفوفة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ المعرّفة كما يلي :

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n\\ a_1 & 0 & a_3 & & & a_n\\ a_1 & a_2 & 0 & & & \vdots\\ \vdots & a_2 & a_3 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & a_n\\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & 0\end{bmatrix}$$

1. أثبت أنّ $\lambda\in\operatorname{sp}(A)\Leftrightarrow\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\lambda+a_k}=1$.
2. استنتج أنّ المصفوفة A تشابه مصفوفة قطرية.

الحل

1. لنفترض أنّ λ قيمة ذاتيّة للمصفوفة A وليكن $X={}^t[x_1,\ldots,x_n]$ شعاعاً ذاتيّاً موافقاً.
عندئذ تُكتب المساواة $AX=\lambda X$ بالصيغة المُكافئة

$$\sum_{k=1}^{n}a_kx_k=(\lambda+a_j)x_j\ :\ j\in\mathbb{N}_n \tag{1}$$

لنفترض على سبيل الجدل أنّ $u=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kx_k=0$. عندئذ نستنتج من كون $X\neq 0$ أنّ إحدى مركّبات هذا الشعاع، ولتكن x_ℓ غير معدومة، وهذا يقتضي أن يكون $\lambda+a_\ell=0$. وهذا بدوره يقتضي أن يكون $x_j=0$ في حالة $j\in\mathbb{N}_n\backslash\{\ell\}$. وعندئذ يكون $u=a_\ell x_\ell\neq 0$ ، وهذا ما يناقض افتراضنا الأوّل. إذن لابُدّ أن يكون $u\neq 0$.

وعليه نستنتج من المساواة (1) أنّ $\forall j \in \mathbb{N}_n,\ \lambda + a_j \neq 0$ ، ومن ثَمّ

$$X = u\,{}^t\left[\frac{1}{\lambda+a_1},\frac{1}{\lambda+a_2},\ldots,\frac{1}{\lambda+a_n}\right]$$

كما نستنتج من تعريف u أنّ

$$u = \sum_{k=1}^{n}\frac{ua_k}{\lambda+a_k} = u\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\lambda+a_k}$$

ولمّا كان $u \neq 0$ كان $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\lambda+a_k} = 1$.

وبالعكس، إذا كان λ عدداً ما يُحقّق

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\lambda+a_k} = 1$$

تيقّنّا مباشرة أنّ الشعاع

$$x_\lambda = {}^t\left[\frac{1}{\lambda+a_1},\frac{1}{\lambda+a_2},\ldots,\frac{1}{\lambda+a_n}\right]$$

هو شعاعٌ ذاتي للمصفوفة A موافقٌ للقيمة الذاتيّة λ . أي إنّ $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$.

2. لنتأمّل التابع

$$x \mapsto F(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x+a_k}$$

المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{-a_1,-a_2,\ldots,-a_n\}$. نلاحظ أنّ F متناقصٌ تماماً على كلٍّ مجال من مجالات تعريفه. كما نجد بحساب بسيطٍ أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}_n,\quad F((-a_k)^+) = +\infty,\ \ F((-a_k)^-) = -\infty$$

وأخيراً $\lim_{x\to\infty} F(x) = -1$.

إذن يغيِّر التابع F إشارته في كلٍّ من المجالات $\big(]-a_k,-a_{k-1}[\big)_{1<k\leq n}$ ، وكذلك في المجال $]-a_1,+\infty[$. إذن تقبل المعادلة $F(x) = 0$ حلولاً حقيقيّة متمايزة عددها n . ومن ثَمّ فإنّ $\mathrm{card}(\mathrm{sp}(A)) = n$. والمصفوفة A تشابه مصفوفة قطريّة. ■

التمرين 18. ليكن E فضاءً منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$. نذكّر أن E^* يمثّل ثنوي الفضاء E، وأنّ $\mathcal{L}(E)$ هو فضاء التطبيقات الخطّية من E إلى E.

I. في حالة a من E و f من E^*، نعرّف التطبيق $f \otimes a$ من $\mathcal{L}(E)$ كما يلي :

$$f \otimes a : E \to E : x \mapsto \langle f, x \rangle a$$

1. لتكن a من E و f من E^*، و u من $\mathcal{L}(E)$. أثبت أنّ

$$u \circ (f \otimes a) = f \otimes u(a) \quad \text{و} \quad (f \otimes a) \circ u = {}^t u(f) \otimes a$$

2. إذا كان $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ أساساً في E، و $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ أساساً في E^*. أثبت أنّ الجملة $(u_{ij})_{1 \le i,j \le n}$، حيث $u_{ij} = f_i \otimes a_j$، هي أساس في الفضاء $\mathcal{L}(E)$.

II. ليكن u و v تطبيقين خطّيّين **يقبلان التمثيل بمصفوفات قطريّة**. إذن يوجد أساس $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ مكوّن من أشعّة ذاتية للتطبيق u، وأعداد $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ليست بالضرورة متمايزة، تحقّق $\forall k \in \mathbb{N}_n,\ u(e_k) = \lambda_k e_k$. وكذلك يوجد أساس $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ مكوّن من أشعّة ذاتية للتطبيق v، وأعداد $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ليست بالضرورة متمايزة، تحقّق $\forall k \in \mathbb{N}_n,\ v(a_k) = \mu_k a_k$.

ليكن $\mathcal{E}^* = (e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{E}$.

1. احسب ${}^t u(e_j^*)$ في حالة $j \in \mathbb{N}_n$.

2. نضع $\Phi_{u,v} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) : X \mapsto X \circ u - v \circ X$.

① أثبت أنّ $u_{ij} = e_i^* \otimes a_j$ شعاعٌ ذاتي للتطبيق $\Phi_{u,v}$، وعيّن القيمة الذاتيّة الموافقة له. وذلك في حالة $1 \le i, j \le n$. ماذا تستنتج ؟

② اكتب كثير الحدود المميّز للتطبيق $\Phi_{u,v}$ بدلالة $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ و $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

③ نفترض في هذا السؤال أنّ $v = u$، ونضع $S = \mathrm{sp}(u)$ طيف u، و S_2 مجموعة الأجزاء المؤلّفة من عنصرين من S، و m_λ هي درجةُ مضاعفةِ العنصرِ λ من S. أثبت أنّ كثير الحدود المميّز للتطبيق $\Phi = \Phi_{u,u}$ هو

$$\mathcal{X}_\Phi(X) = (-X)^{\sum_{\lambda \in S} m_\lambda^2} \prod_{\{\lambda,\mu\} \in S_2} \left(X^2 - (\lambda - \mu)^2\right)^{m_\lambda m_\mu}$$

④ استنتج بُعد الفضاء $C_u = \{w \in \mathcal{L}(E) : w \circ u - u \circ w\}$.

3. ليكن u من $\mathcal{L}(E)$ ، تطبيقاً خطياً يقبل n قيمة ذاتية متمايزة مثنى مثنى. وليكن w من $\mathcal{L}(E)$. أثبت بالاستفادة مما سبق تكافؤ الشرطين:

① $w \circ u = u \circ w$.

② يوجد كثير حدود P درجته أصغر أو تساوي n بحيث $w = P(u)$.

الحل

I.1. في الحقيقة، مهما تكن x من E يكن

$$\begin{aligned} u \circ (f \otimes a)(x) &= u\left(\left\langle f,x \right\rangle a\right) = \left\langle f,x \right\rangle u(a) = (f \otimes u(a))(x) \\ (f \otimes a) \circ u(x) &= \left\langle f,u(x) \right\rangle a = \left\langle {}^t u(f),x \right\rangle a = ({}^t u(f) \otimes a)(x) \end{aligned}$$

وهذا يثبت المساواتين المطلوبتين.

I.2. نستنتج من المساواة $\sum\limits_{1\le i,j\le n} \lambda_{ij} u_{ij} = 0$ أنّ

$$\forall x \in E, \quad \sum_{j=1}^{n} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} f_i, x \right\rangle a_j = 0$$

ولأنّ $\mathcal{A}$ أساسٌ في E استنتجنا أنّ $\forall j \in \mathbb{N}_n, \forall x \in E, \quad \left\langle \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{ij} f_i, x \right\rangle = 0$ أو

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} f_i = 0$$

ولأنّ $\mathcal{F}$ أساسٌ في E^* استنتجنا أنّ $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \ \lambda_{ij} = 0$ ، فالجملة $\left(u_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$ جملة حرّة في $\mathcal{L}\left(E\right)$. ولمّا كان عددُ حدود هذه الجملة يساوي بُعدَ الفضاء $\mathcal{L}(E)$ ، كانت الجملة أساساً لهذا الفضاء.

II.1. ليكن الدليلان i و j من $\mathbb{N}_n$ ، عندئذ

$$\begin{aligned} \left\langle {}^t u(e_j^*), e_i \right\rangle &= \left\langle e_j^*, u(e_i) \right\rangle = \left\langle e_j^*, \lambda_i e_i \right\rangle \\ &= \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_j \left\langle e_j^*, e_i \right\rangle \end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ $\forall j \in \mathbb{N}_n, \ {}^t u(e_j^*) = \lambda_j e_j^*$.

II.2. ① ليكن الدليلان i و j من $\mathbb{N}_n$، عندئذ

$$\begin{aligned}\Phi_{u,v}(u_{ij}) &= u_{ij}\circ u - v\circ u_{ij}\\ &= (e_i^*\otimes a_j)\circ u - v\circ(e_i^*\otimes a_j)\\ &= {}^t u(e_i^*)\otimes a_j - e_i^*\otimes v(a_j)\\ &= \lambda_i e_i^*\otimes a_j - \mu_j e_i^*\otimes a_j = (\lambda_i-\mu_j)u_{ij}\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ مصفوفة $\Phi_{u,v}$ بالنسبة إلى الأساس $(u_{ij})_{1\le i,j\le n}$ مصفوفة قطريّة.

② كما نستنتج أنّ كثير الحدود المميِّز للتطبيق الخطّي $\Phi_{u,v}$ يُعطى بالصيغة

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{\Phi_{u,v}}(X) &= \det\Big(\mathrm{mat}(\Phi_{u,v},(u_{ij})_{1\le i,j\le n}) - XI\Big)\\ &= \prod_{1\le i,j\le n}(\lambda_i-\mu_j-X) = \prod_{j=1}^n \mathcal{X}_u(\mu_j+X)\end{aligned}$$

③ نفترض في هذا السؤال أنّ $u=v$، ونضع $S=\mathrm{sp}(u)$ طيف u، و S_2 مجموعة الأجزاء المؤلّفة من عنصرين من S، و m_λ هي درجةُ مضاعفةِ العنصرِ λ من S، ونكتب اختصاراً $\Phi=\Phi_{u,u}$. عندها

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_\Phi(X) &= \prod_{\mu\in S}\big(\mathcal{X}_u(\mu+X)\big)^{m_\mu} = \prod_{\mu\in S}\left(\prod_{\lambda\in S}(\lambda-\mu-X)^{m_\lambda}\right)^{m_\mu}\\ &= \prod_{(\lambda,\mu)\in S\times S}(\lambda-\mu-X)^{m_\lambda m_\mu}\\ &= \prod_{\lambda\in S}(-X)^{m_\lambda^2}\prod_{\{\lambda,\mu\}\in S_2}\big((\lambda-\mu-X)(\mu-\lambda-X)\big)^{m_\lambda m_\mu}\\ &= \Big(-X\Big)^{\sum_{\lambda\in S}m_\lambda^2}\prod_{\{\lambda,\mu\}\in S_2}\Big(X^2-(\lambda-\mu)^2\Big)^{m_\lambda m_\mu}\end{aligned}$$

④ لنلاحظ أنّ $C_u=\ker\Phi_{u,u}$ ومن ثَمّ فإنّ C_u هو الفضاء الذاتي للتطبيق $\Phi_{u,u}$ الموافق للقيمة الذاتيّة 0. ولمّا كان التطبيق الخطّي $\Phi_{u,u}$ يقبل التمثيل بمصفوفة قطريّة استنتجنا أنّ $\dim C_u$ يساوي رتبة مضاعفة القيمة الذاتيّة 0؛ أي $\sum_{\lambda\in S}m_\lambda^2$.

II.3.استناداً إلى الفرْض، لدينا $m_\lambda = 1$ أيّاً كانت قيمة λ من S. ومن ثَمّ فإنّ $\dim C_u = n$. ومن الواضح أنّ $\operatorname{vect}(I,u,u^2,\ldots,u^{n-1}) \subset C_u$. لنثبت أنّ الجملة $(I,u,u^2,\ldots,u^{n-1})$ جملة حرّة في $\mathcal{L}(E)$. في الحقيقة، إذا كان $\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u^k = 0$ استنتجنا أنّ كثير الحدود $\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k X^k$، الذي درجته $n-1$ على الأكثر، يقبل n جذراً مختلفاً هي عناصر طيف u، فجميع أمثاله معدومة. وعليه فإنّ بُعد الفضاء $\operatorname{vect}(I,u,u^2,\ldots,u^{n-1})$ يساوي n ومن ثَمّ $C_u = \operatorname{vect}(I,u,u^2,\ldots,u^{n-1})$. وهذه هي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 19. لنتأمّل في $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ المصفوفة $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

1. عيِّن القيم الذاتيّة والفضاءات الذاتيّة للمصفوفة M.
2. أثبت أنّه يوجد (α,β) في $\mathbb{R}^2$، ويوجد (A,B) في $(\mathcal{M}_4(\mathbb{R}))^2$، يطلب تعيينها، تُحقّق: $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.

الحل

1. لنحسب كثير الحدود المميِّز للمصفوفة M:

$$\mathcal{X}_M(X) = \det\begin{bmatrix} 3-X & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -X & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -X & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3-X \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 3-X & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -X & 0 & 2 \\ 0 & X & -X & 0 \\ X & 0 & 0 & -X \end{bmatrix}$$
$$= X^2\det\begin{bmatrix} 3-X & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -X & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = X^2\det\begin{bmatrix} 6-X & 4 & 2 & 3 \\ 4 & -X & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= X^2\det\begin{bmatrix} 6-X & 4 \\ 4 & -X \end{bmatrix} = X^2\left(X^2-6X-16\right)$$

وأخيراً $\mathcal{X}_M(X) = X^2(X+2)(X-8)$. فالعدد 0 قيمة ذاتيّة مُضاعفة، والعددان -2 و 8 قيمتان ذاتيّتان بسيطتان.

- الشعاع $v = {}^t[x,y,z,t]$ شعاعٌ ذاتي موافق للقيمة 0 في حالة $x+t=0$ و $y+z=0$. إذن بُعد الفضاء الذاتي E_0 الموافق يساوي 2 ويقبل الشعاعين الآتيين أساساً

$$v_2 = {}^t[0,1,-1,0] \quad \text{و} \quad v_1 = {}^t[1,0,0,-1]$$

- الشعاع $v = {}^t[x,y,z,t]$ شعاعٌ ذاتي موافق للقيمة -2 في حالة

$$\begin{aligned} 5x+2y+2z+3t &= 0 \\ x+y+t &= 0 \\ x+z+t &= 0 \\ 3x+2y+2z+5t &= 0 \end{aligned}$$

أي إنّ $v_3 = {}^t[1,-2,-2,1]$ هو أساس للفضاء الذاتي E_{-2} الموافق للقيمة الذاتيّة -2.

- الشعاع $v = {}^t[x,y,z,t]$ شعاعٌ ذاتي موافق للقيمة 8 في حالة

$$\begin{aligned} -5x+2y+2z+3t &= 0 \\ x-4y+t &= 0 \\ x-4z+t &= 0 \\ 3x+2y+2z-5t &= 0 \end{aligned}$$

أي إنّ $v_4 = {}^t[2,1,1,2]$ هو أساس للفضاء الذاتي E_8 الموافق للقيمة الذاتيّة 8.

2. نستنتج مما سبق أنّ كثير الحدود $P(X) = X(X+2)(X-8)$ يُحقّق $P(M)=0$. إذن يُكتب باقي قسمة X^n على P بالصيغة

$$R_n(X) = -\frac{a_n}{16}(X-8)(X+2) + \frac{b_n}{80}X(X+2) + \frac{c_n}{20}X(X-8)$$

ولمّا كان $R_n(0)=0$ و $R_n(-2)=(-2)^n$ و $R_n(8)=8^n$ ، في حالة $n\in\mathbb{N}^*$ ، استنتجنا أنّ

$$c_n = (-2)^n \quad \text{و} \quad b_n = 8^n \quad \text{و} \quad a_n = 0$$

ولأنّ $P(M)=0$ استنتجنا أنّ $M^n = R_n(M)$ ومنه

$$M^n = \frac{8^n}{80}M(M+2I_4) + \frac{(-2)^n}{20}M(M-8I_4) = 8^n A + (-2)^n B$$

حيث

$$A = \frac{1}{80}M(M+2I_4) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{20}M(M-8I_4) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

وبذا يُنجز الحل.

التمرين 20. لتكن δ من $\mathbb{C}$، ولنتأمّل في $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ المصفوفة $M_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1. أوجد كثير الحدود المميِّز للمصفوفة M_δ.
2. أثبت أنّ M_δ تُشابه مصفوفة قطريّة إذا وفقط إذا كان $\delta \notin \left\{0, \frac{27}{4}\right\}$.
3. أثبت أنّه إذا كان $|\delta| < \frac{1}{2}$ كان $\lim_{n\to\infty} (M_\delta)^n = 0$.

الحل

1. لنحسب كثير الحدود المميِّز للمصفوفة M_δ :

$$\mathcal{X}_{M_\delta}(X) = \det\begin{vmatrix} -X & 0 & \delta \\ 1 & -X & 0 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} = -X^3 + \delta(1+X)$$

2. لنضع $P(X) = \mathcal{X}_{M_\delta}(X) = -X^3 + \delta(1+X)$، عندئذ نلاحظ أنّ $P(X)$ يقبل في $\mathbb{C}$ جذراً مُضاعفاً λ إذا وفقط إذا كان $P(\lambda) = 0$ و $P'(\lambda) = 0$. وهذا يُكافئ

$$-3\lambda^2 + \delta = 0 \quad \text{و} \quad -\lambda^3 + \delta(1+\lambda) = 0$$

وهذا يُكافئ

$$\delta = 3\lambda^2 \quad \text{و} \quad \lambda^2(3+2\lambda) = 0$$

إذن $\lambda \in \left\{0, -\frac{3}{2}\right\}$ أو $\delta \in \left\{0, \frac{27}{4}\right\}$.

- فإذا افترضنا أنّ $\delta \notin \left\{0, \frac{27}{4}\right\}$ كانت جذور كثير الحدود المميِّز $\mathcal{X}_{M_\delta}(X)$ بسيطة، ونتج من ذلك أنّ المصفوفة M_δ تشابه مصفوفة قطريّة في هذه الحالة.
- أمّا في حالة $\delta = 0$. فالمصفوفة M_0 لا تشابه مصفوفة قطريّة لأنّها تقبل 0 قيمة ذاتيّة رتبة مضاعفتها 3 ، وبُعد الفضاء الذاتي الموافق يساوي 1 .
- وكذلك، في حالة $\delta = \frac{27}{4}$. لا تشابه المصفوفة $M_{27/4}$ مصفوفة قطريّة لأنّها تقبل $-\frac{3}{2}$ قيمة ذاتيّة رتبة مضاعفتها 2 ، وبُعد الفضاء الذاتي الموافق يساوي 1 .

إذن M_δ تشابه مصفوفة قطريّة إذا وفقط إذا كان $\delta \notin \left\{0, \frac{27}{4}\right\}$.

3. لنفترض أنّ $\left|\delta\right| < \frac{1}{2}$. ولتكن λ من $\mathbb{C}$ قيمة ذاتيّة للمصفوفة M_δ . عندئذ نستنتج من المساواة $\lambda^3 = \delta(1+\lambda)$ أنّ

$$\left|\lambda\right|^3 = \left|\delta\right|\left|1+\lambda\right| < \frac{1}{2}\left(1+\left|\lambda\right|\right)$$

وهذه تُكافئ بالإصلاح

$$\left(\left|\lambda\right| - 1\right)\left(\left|\lambda\right|^2 + (1 + \left|\lambda\right|)^2\right) < 0$$

ومن ثَمّ $\left|\lambda\right| < 1$. إذن في حالة $\left|\delta\right| < \frac{1}{2}$ ، يكون لدينا $\mathrm{sp}(M_\delta) \subset D(0,1)$ ، ومن ثَمّ

$$\lim_{n\to\infty} (M_\delta)^n = 0$$

وبذا يتمّ إثبات المطلوب. ■

التمرين 21. لتكن (a,b) من $\mathbb{R}^2$ و $2 \le n$. نتأمّل المصفوفة : $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 2n}$ من $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ المعرّفة كما يلي : $a_{ij} = a$ في حالة $i = j$ ، و $a_{ij} = b$ في حالة $i + j = 2n + 1$ وأخيراً $a_{ij} = 0$ في بقيّة الحالات. أي

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & & & \iddots & 0 \\ \vdots & & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & \iddots & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}$$

احسب $(A - aI_{2n})^2$ ثُمّ استنتج الشروط على (a,b) من $\mathbb{R}^2$ حتّى تشابه المصفوفة A مصفوفة قطريّة.

الحل

في الحقيقة، نجد بحساب مباشر أنّ $(A-aI_{2n})^2 = b^2 I_{2n}$. إذن يُحقّق كثير الحدود

$$P(X) = (X-a)^2 - b^2 = (X-a-b)(X-a+b)$$

المساواة $P(A) = 0$. فإذا كان $b \neq 0$، كان الحدّان $X-a-b$ و $X-a+b$ مختلفين وكانت من ثمّ المصفوفة A مُشابهة لمصفوفة قطريّة. وإذا كان $b = 0$ كانت المصفوفة A نفسها مصفوفة قطريّة. إذن، في جميع الأحوال، تشابه المصفوفة A مصفوفة قطريّة. ■

التمرين 22. نهدف في هذا التمرين إلى دراسة المتتالية التدريجيّة $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة كما يلي :

$$u_0 = u_1 = 1,$$
$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = u_n + (-1)^n u_{n-1}$$

1. نعرّف الشعاع $Z_n = \begin{bmatrix} u_{2n} \\ u_{2n-1} \end{bmatrix}$ وذلك مهما تكن $1 \leq n$. أوجد مصفوفة ثابتة A من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ تُحقّق $Z_{n+1} = AZ_n$ وذلك مهما تكن n.
2. احسب A^n وذلك مهما تكن n.
3. استنتج قيمة u_{2n} و قيمة u_{2n+1} بدلالة n.

الحل

1. في الحقيقة، لدينا في حالة n من $\mathbb{N}^*$ ما يأتي:

$$u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n-1}$$
$$u_{2n+2} = u_{2n+1} - u_{2n} = u_{2n-1}$$

وهذا يكافئ

$$\begin{bmatrix} u_{2n+2} \\ u_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2n} \\ u_{2n-1} \end{bmatrix}$$

ومن ثَمّ $Z_{n+1} = AZ_n$ حيث $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. بملاحظة أنّ $(A-I_2)^2 = 0$ نستنتج مباشرة أنّ

$$A^n = \left(I_2 + (A-I_2)\right)^n = I_2 + n(A-I_2) = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. ولمّا كان

$$Z_n = A^{n-1}Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

في حالة $n \geq 1$ ، استنتجنا أنّ $u_{2n} = n - 1$ و $u_{2n+1} = 1$ وذلك مهما تكن n من $\mathbb{N}$. ■

الفضاءات الشعاعيّة المزوَّدة بجداء سلّمي

يمثّل الحقلُ $\mathbb{K}$ في هذا الفصل حقلَ الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$ ،
أو حقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$.

1. الجداء السلّمي

1-1. **تعريف**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$. نسمّي **جداءً سلّمياً** على E كلَّ تطبيق

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : E\times E \to \mathbb{K}, \quad (x,y)\mapsto \langle x,y\rangle$$

يُحقّق الخواص التالية:

- $\mathbb{S}_1$ • أيّاً كانت x من E ، كان التطبيق $y\mapsto \langle x,y\rangle$ شكلاً خطّياً.
- $\mathbb{S}_2$ • أيّاً كانت (x,y) من E^2 ، كان $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ ، ونعبّر عن هذه الخاصّة بقولنا في حالة $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ إنّ الجداء السلّمي **هرمتيّ**. أمّا في حالة $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ فيُكتب هذا الشرط $\forall(x,y)\in E^2,\ \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ ، ونعبّر عنه بقولنا إنّ الجداء السلّمي **متناظر**.
- $\mathbb{S}_3$ • أيّاً كانت x من E ، كان $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ، ونقول إنّ الجداءَ السلّمي **موجبٌ**.
- $\mathbb{S}_4$ • أيّاً كانت x من $E\backslash\{0\}$ ، كان $\langle x,x\rangle \neq 0$ ، ونقول إنّ الجداءَ السلّمي **معرّفٌ**.

ونسمّي **فضاءَ جداء سلّمي** كلّ فضاء شعاعي E مزوَّد بجداء سلّمي $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ، ونرمز إليه بالرمز $\left(E,\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ ، أو فقط E إذا لم يكن هناك مجال للالتباس.

وأخيراً نسمّي **فضاءً إقليدياً** كل فضاء جداء سلّمي منتهي البعد على الحقل $\mathbb{R}$ ، ونسمّي **فضاءً هرمتيّاً** كل فضاء جداء سلّمي منتهي البعد على الحقل $\mathbb{C}$.

1-2. **ملاحظة**. ليكن E فضاءَ جداء سلّمي، ولتكن (x_1,x_2,z) من E^3، و (λ,μ) من $\mathbb{K}^2$، حينئذ يكون

$$\begin{aligned}\langle \lambda x_1+\mu x_2,y\rangle &= \overline{\langle y,\lambda x_1+\mu x_2\rangle}\\ &= \overline{\lambda\cdot\langle y,x_1\rangle+\mu\cdot\langle y,x_2\rangle}\\ &= \overline{\lambda}\cdot\langle x_1,y\rangle+\overline{\mu}\cdot\langle x_2,y\rangle\end{aligned}$$

فإذا كان $\mathbb{K}=\mathbb{R}$، كان الجداء السلّمي شكلاً ثنائي الخطيّة. أمّا في حالة $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ فنقول إنّ الجداء السلميّ نصف خطي بالنسبة إلى المركّبة الأولى.

1-3. أمثلة

- إذا كان $E=\mathbb{R}^n$ فإننا نسمّي الجداء السلّمي المألوف على E، الجداء السلمي المعرّف بالعلاقة

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot y_k$$

حيث $x=(x_1,\ldots,x_n)$ و $y=(y_1,\ldots,y_n)$ من E.

- إذا كان $E=\mathbb{C}^n$ فإننا نسمّي الجداء السلّمي المألوف على E الجداء السلمي المعرّف بالعلاقة

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{n}\overline{x}_k\cdot y_k$$

حيث $x=(x_1,\ldots,x_n)$ و $y=(y_1,\ldots,y_n)$ من E.

- إذا كان $E=\mathcal{C}([a,b])$ أي فضاء التوابع المستمرّة على $[a,b]$ والتي تأخذ قيمها في $\mathbb{C}$، فيمكننا أن نزوّد هذا الفضاء بالجداء السلّمي:

$$\forall(f,g)\in E^2,\ \langle f,g\rangle=\int_a^b\overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}\,t$$ [1]

---

[1] لمُكاملة تابع مستمرٍّ قِيَمُه عقدية، نُكامل جزأيه الحقيقي والتخيُّلي كلاً على حِدَتِه. فإذا كان u و v من $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ كان بالتعريف $\int_a^b(u+\mathrm{i}\,v)=\int_a^b u+\mathrm{i}\int_a^b v$.

- إذا كان E فضاء جداء سلّمي، وكان T من $\mathcal{L}(E)$ تطبيقاً خطّياً متبايناً، فإننا نعرّف جداءً سلّمياً جديداً على E بوضع $\forall(x,y)\in E^2,\ \langle\!\langle x,y\rangle\!\rangle=\langle T(x),T(y)\rangle$.

1-4. تعريف. ليكن E فضاء جداء سلّمي. نسمّي التطبيقَ

$$Q_{\langle,\rangle}:E\to\mathbb{R}_+,\ x\mapsto\langle x,x\rangle\overset{\text{تعريف}}{=}\|x\|^2$$

الشكل التربيعيّ الموافق للجداء السلمي $\langle\cdot,\cdot\rangle$. وكذلك نسمّي التطبيق

$$\|\cdot\|:E\to\mathbb{R}_+,x\mapsto\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$$

نظيم الجداء السلّمي الموافق للجداء السلمي E . وسنرى لاحقاً أنّ هذه التسمية مبررة، إذ إنّ $x\mapsto\|x\|$ هو فعلاً نظيم على الفضاء الشعاعي E .

إنّ معرفة الشكل التربيعي الموافق لجداء سلّمي كافية لتعيين هذا الجداء. هذا ما ستبيِّنه المبرهنة الآتية:

1-5. مبرهنة – المتطابقات القطبيّة. ليكن E فضاء جداء سلّمي.

- في حالة $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ، لدينا

$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in E\times E,\quad\langle x,y\rangle&=\frac{1}{2}\Big(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\Big)\\&=\frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\Big)\end{aligned}$$

- في حالة $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ، لدينا

$$\forall(x,y)\in E\times E,\ \langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\mathrm{i}^k\cdot\|\mathrm{i}^k x+y\|^2$$

الإثبات

- حالة $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. لتكن (x,y) من E^2 ، ولتكن ε من $\{+1,-1\}$ ، عندئذ يكون

$$\begin{aligned}\left\|x+\varepsilon y\right\|^2&=\langle x+\varepsilon y,x+\varepsilon y\rangle\\&=\langle x,x\rangle+\varepsilon\langle x,y\rangle+\varepsilon\langle y,x\rangle+\varepsilon^2\langle y,y\rangle\\&=\left\|x\right\|^2+2\varepsilon\langle x,y\rangle+\left\|y\right\|^2\end{aligned}$$

إذ استفدنا من كوْن الجداء السلّمي متناظراً في هذه الحالة ومن كوْن $\varepsilon^2=1$. وهذه المساواة تقتضي مباشرة المتطابقتين الواردتين في نصّ المبرهنة.

- حالة $\mathbb{C} = \mathbb{K}$. لتكن (x,y) من E^2، ولتكن ε من $\{+1,-1\}$، عندئذ يكون

$$\begin{aligned}\|x+\varepsilon y\|^2 &= \|x\|^2 + \varepsilon\langle x,y\rangle + \varepsilon\langle y,x\rangle + \varepsilon^2 \|y\|^2\\ &= \|x\|^2 + 2\varepsilon\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$

إذن نستنتج أنّ

$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big)$$

ومن جهة أخرى

$$\mathrm{Im}\langle x,y\rangle = \mathrm{Re}(-\mathrm{i}\langle x,y\rangle) = \mathrm{Re}(\langle \mathrm{i}x,y\rangle) = \frac{1}{4}\Big(\|\mathrm{i}\,x+y\|^2 - \|\mathrm{i}\,x-y\|^2\Big)$$

وأخيراً

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\langle x,y\rangle\\ &= \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\,\|\mathrm{i}\,x+y\|^2 - \mathrm{i}\,\|\mathrm{i}\,x-y\|^2\Big)\\ &= \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|-x+y\|^2 + \mathrm{i}\,\|\mathrm{i}\,x+y\|^2 - \mathrm{i}\,\|-\mathrm{i}\,x+y\|^2\Big)\end{aligned}$$

وهذه هي العلاقة المطلوبة. ❐

1-6. ملاحظة. ليكن E فضاء جداء سلّمي على الحقل $\mathbb{C}$. ولتكن $n \geq 3$. لنضع $\omega_n = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ وهو جذر من المرتبة n للواحد. عندئذ تكون لدينا المتطابقة القطبية الآتية، التي نترك إثباتها تمريناً للقارئ، وهي تعميم لتلك الواردة في المبرهنة السابقة،

$$\forall (x,y)\in E\times E,\ \ \langle x,y\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k\cdot \|\omega^k x+y\|^2$$

1-7. مبرهنة – متراجحة شوارتز Schwartz. ليكن E فضاء جداء سلّمي، عندئذ

$$\forall (x,y)\in E\times E,\quad \big|\langle x,y\rangle\big| \leq \|x\|\cdot\|y\|$$

وتتحقّق المساواة إذا وفقط إذا كانت الجملة (x,y) مرتبطة خطّياً.

الإثبات

ليكن (x,y) من E^2 . إذا كان $y=0$ كانت النتيجة واضحة. لنفترض إذن أنّ $y\neq 0$ ، ولنضع $\lambda=\langle x,y\rangle/\|y\|^2$. عندئذ يكون

$$\begin{aligned}0\leq\|x-\lambda y\|^2&=\|x\|^2+|\lambda|^2\cdot\|y\|^2-2\operatorname{Re}\langle x,\lambda y\rangle\\&=\|x\|^2-\frac{\left|\langle x,y\rangle\right|^2}{\|y\|^2}\end{aligned}$$

وهذا يثبت المتراجحة المطلوبة ، ويبيِّن أن المساواة تتحقّق فقط إذا كان $x=\lambda y$. ❐

1-8. **ملاحظة**. ينتج من متراجحة شوارتز السابقة أنه، في حالة $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ، وأيّاً كان الشعاعان غير الصفريّيْن x و y ، كان $\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}\in[-1,+1]$. وهذا ما يفيد في تعريف **زاوية شعاعين** غير صفريين x و y إذ نضع

$$\widehat{(x,y)}=\arccos\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$$

1-9. **مبرهنة**. ليكن E فضاء جداء سلّمي، عندئذ يكون $\|\cdot\|$ نظيماً على E .

الإثبات

- إذا كان $\|x\|=0$ كان $x=0$ لأن الجداء السلّمي معرّفٌ.
- أيّاً كانت x من E ، وأيّاً كانت λ من $\mathbb{K}$ ، فإنّ

$$\|\lambda\cdot x\|=\sqrt{\langle\lambda\cdot x,\lambda\cdot x\rangle}=\sqrt{\bar{\lambda}\lambda\cdot\langle x,x\rangle}=|\lambda|\sqrt{\langle x,x\rangle}=|\lambda|\cdot\|x\|$$

- وأخيراً أيّاً كانت (x,y) من E^2 ، فلدينا، استناداً إلى متراجحة شوارتز،

$$\left|\operatorname{Re}\langle x,y\rangle\right|\leq\left|\langle x,y\rangle\right|\leq\|x\|\cdot\|y\|$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\|x\|^2+\|y\|^2+2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle\\&\leq\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|=\left(\|x\|+\|y\|\right)^2\end{aligned}$$

وهذا يُثبت متراجحة المثلّث أي

$$\forall(x,y)\in E\times E,\quad\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$$

بذلك نكون قد أثبتنا أنّ $\|\cdot\|$ نظيم على E . ❐

1-10. **ملاحظة**. ليكن E فضاء جداء سلّمي، ولتكن (x,y) من $E \times E$. عندئذ يتحقّق التكافؤ الآتي

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \;\Leftrightarrow\; \|y\|\cdot x = \|x\|\cdot y$$

في الحقيقة، يبيّن الإثبات السابق أنّ المساواة تقع في متراجحة المثلّث إذا وفقط إذا كان $\operatorname{Re}\langle x,y\rangle \ge 0$، وكان $\operatorname{Im}\langle x,y\rangle = 0$، وكانت الجملة (x,y) مرتبطة خطيّاً. وتكافئ هذه الشروط مجتمعة كوْن $\|y\|\cdot x = \|x\|\cdot y$. ❐

1-11. **مبرهنة**. ليكن E فضاء جداء سلّمي، ولتكن (x,y) من $E \times E$. عندئذ تتحقّق المتطابقة الآتية والتي تسمّى **متطابقة متوازي الأضلاع**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

الإثبات

لقد وجدنا سابقاً أنّ

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

ونحصل على المتطابقة المطلوبة بجمع العلاقتين السابقتين. ❐

1-12. **ملاحظة**. تميِّزُ متطابقةُ متوازي الأضلاع فضاءات الجداء السلّمي من بين الفضاءات الشعاعيّة المنظّمة. أي إنه إذا كان $\left(E,\|\cdot\|\right)$ فضاءً شعاعيّاً منظّماً، وكان نظيمه يُحقِّق متطابقةَ متوازي الأضلاع، فيوجد جداء سلّمي $\langle\cdot,\cdot\rangle$ على E يُحقّق $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ وذلك أيّاً كانت x من E.

1-13. **تعريف**. ليكن E فضاء جداء سلّمي، وليكن $\|\cdot\|$ النظيم على E الموافق للجداء السلمي. نقول إنّ $\left(E,\|\cdot\|\right)$ **فضاءُ هِلبرت** Hilbert إذا وفقط إذا كان الفضاء الشعاعي المنظّم $\left(E,\|\cdot\|\right)$ فضاءً تامّاً، أي إذا تقاربت فيه كلُّ متتالية تحقّق شرط كوشي.

1-14. **تعريف**. لنذكّر أولاً ببعض التعاريف الخاصّة بالمصفوفات :

- إذا كانت M من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ كانت المصفوفة ^tM من $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ **منقول** M.
وكانت $\overline{M}$ هي **المصفوفة المرافقة** للمصفوفة M، أي التي ثوابتها هي مرافقات ثوابت M. وأخيراً نستعمل الرمز M^* للدلالة على المصفوفة $^t\overline{M}$.
- لتكن M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  - نقول إنّ المصفوفة M **متناظرة** إذا وفقط إذا كان $^tM = M$.
  - ونقول إنّ المصفوفة M **هرمتيّة** إذا وفقط إذا كان $M^* = M$، وهذا يكافئ كونها متناظرة في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
  - نقول أيضاً إنّ المصفوفة M **موجبة** إذا وفقط إذا تحقّق الشرطان
    1. $M = M^*$.
    2. $\forall X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}),\quad X^*MX \in \mathbb{R}_+$.

    (يمكن أن يثبت القارئ أنّ 2. $\Leftarrow$ 1. في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.)
  - وأخيراً نقول أيضاً إنّ المصفوفة M **معرّفة موجبة** إذا وفقط إذا تحقّق الشرطان
    1. $M = M^*$.
    2. $\forall X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})\backslash\{0\},\quad X^*MX \in \mathbb{R}_+^*$.

1-15. **تعريف**. ليكن E فضاء جداء سلّمي، ولتكن $(x_1,\ldots,x_m)$ جملة من أشعة الفضاء E. نسمّي **مصفوفة گرام** Gram للجملة $(x_1,\ldots,x_m)$، المصفوفة من $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ التي ثابت السطرِ ذي الدليل i والعمودِ ذي الدليل j فيها هو $\langle x_i, x_j\rangle$. ونرمز إلى هذه المصفوفة بالرمز $\mathrm{Gram}(x_1,\ldots,x_m)$.

1-16. **مبرهنة**. ليكن E فضاء جداء سلّمي، ولتكن $(x_1,\ldots,x_m)$ جملة من أشعة الفضاء E. عندئذ تكون المصفوفة $\mathrm{Gram}(x_1,\ldots,x_m)$ موجبة، وتكون الشروط الثلاثة الآتية متكافئة:

1. المصفوفة $\mathrm{Gram}(x_1,\ldots,x_m)$ معرّفة موجبة.
2. المصفوفة $\mathrm{Gram}(x_1,\ldots,x_m)$ قَلوبة.
3. الجملة $(x_1,\ldots,x_m)$ حرّة.

الإثبات

لنضع $(g_{ij}) = G = \mathrm{Gram}(x_1, \ldots, x_m)$، حيث $g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$. عندئذ، أيّاً كانت (i, j) من $\mathbb{N}_m^2$، كان $g_{ji} = \langle x_j, x_i \rangle = \overline{\langle x_i, x_j \rangle} = \overline{g}_{ij}$، ومنه $G^* = G$.

من ناحية أخرى، ليكن $\Lambda = {}^t[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$ من $\mathcal{M}_{m\times1}(\mathbb{K})$. نجد بحساب بسيط

$$\Lambda^* G \Lambda = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_m^2} \overline{\lambda}_i \cdot \langle x_i, x_j \rangle \cdot \lambda_j = \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot x_i \right\|^2$$

فالمصفوفة G موجبة.

ونلاحظ من هذه المساواة، أنّ الشرط اللازم والكافي كي توجد ثوابت $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ من $\mathbb{K}$، ليست جميعها صفرية وتُحقّق $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot x_i = 0$، هو أن يوجدَ شعاع $\Lambda = {}^t[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$ **غير صفري** يُحقق $\Lambda^* G \Lambda = 0$. وهذا يثبت التكافؤ 1. $\Leftrightarrow$ 3.

لإثبات الاقتضاء 1. $\Leftarrow$ 2. نتأمّل التطبيق الخطّي

$$u_G : \mathcal{M}_{m\times1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m\times1}(\mathbb{K}), \quad X \mapsto G X$$

إذا كانت $\Lambda \in \ker u_G$، كان $G \Lambda = 0$ ومن ثَمّ $\Lambda^* G \Lambda = 0$ وهذا يقتضي، استناداً إلى 1، أنّ $\Lambda = 0$. فالتطبيق u_G متباينٌ، وبناءً عليه يكون قَلوباً ومن ثَمّ تكون G قَلوبة.

وأخيراً، لنفترض أن الجملة $(x_1, \ldots, x_m)$ مرتبطة خطيّاً. عندئذ نجد في $\mathcal{M}_{m\times1}(\mathbb{K})$ شعاعاً $\Lambda = {}^t[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$، يُحقّق $\Lambda \neq 0$، و $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j = 0$. نستنتج إذن أنّ

$$\forall i \in \mathbb{N}_m, \quad 0 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{j=1}^{m} g_{ij} \lambda_j$$

وهذا يُكافئ أنّ $G \Lambda = 0$. ولمّا كانت $\Lambda \neq 0$، كان $\ker u_G \neq \{0\}$، فالتطبيق u_G ليس قَلوباً، ومن ثَمّ لا تكون المصفوفة G قَلوبة. ❐

تمرين : لتكن $\mathcal{H}_n = (a_{ij})$ المصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ المعرّفة بالعلاقة $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$، والمعروفة باسم مصفوفة هيلبرت. إنّ $\mathcal{H}_n$ مصفوفة معرّفة موجبة.

في الحقيقة، إذا كان $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ أي فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة التي درجاتها أصغر تماماً من n، وزوّدنا E بالجداء السلّمي الآتي

$$\forall (P,Q) \in E \times E, \quad \langle P,Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}\,t$$

ثُمَّ أخذنا $\mathcal{E} = (1, X, \ldots, X^{n-1})$ أساساً للفضاء E، كان لدينا $\mathcal{H}_n = \mathrm{Gram}(\mathcal{E})$. وهذا ما يثبت أنّ $\mathcal{H}_n$ مصفوفة معرّفة موجبة.

17-1. **تعريف**. ليكن E فضاء جداء سلّمي منتهي البُعد وبُعده n من $\mathbb{N}^*$، وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً للفضاء E. عندئذ تسمّى المصفوفةُ $\mathrm{Gram}(\mathcal{E})$ مصفوفةَ الجداء السلّمي $\langle \cdot,\cdot \rangle$ في الأساس $\mathcal{E}$. وعندئذ أيّاً كان $X = {}^t[x_1, \ldots, x_n]$ وأيّاً كان $Y = {}^t[y_1, \ldots, y_n]$ من $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ تتحقّق المساواة

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \right\rangle = X^* \, G \, Y$$

18-1. **مبرهنة**. ليكن E فضاء جداء سلّمي منتهي البُعد وبُعده n من $\mathbb{N}^*$، وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ و $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ أساسين للفضاء E. عندئذ يكون

$$\mathrm{Gram}\,(\mathcal{E}) = P^* \,\mathrm{Gram}\,(\mathcal{F})\, P$$

حيث $P = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \mathrm{mat}(I_E, \mathcal{E}, \mathcal{F})$.

الإثبات

لنضع $P = (p_{ij})$، فيكون عندئذ $\forall j \in \mathbb{N}_n,\ e_j = \sum_{k=1}^{n} p_{kj}\, f_k$. إذن، أيّاً كانت (i,j) من $\mathbb{N}_n^2$، كان

$$\begin{aligned}\langle e_i, e_j \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} p_{ki} f_k, \sum_{\ell=1}^{n} p_{\ell j} f_\ell \right\rangle \\ &= \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}_n^2} \overline{p_{ki}}\, \langle f_k, f_\ell \rangle\, p_{\ell j} = [P^* \,\mathrm{Gram}(\mathcal{E}) P]_{ij}\end{aligned}$$

وهذه هي المساواة المطلوبة. ❐

19-1. **نتيجة**. ليكن E فضاء جداء سلّمي منتهي البُعد وبُعده n من $\mathbb{N}^*$، ولنتأمّل أساساً $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ للفضاء E. عندئذ لا تتغيّر قيمة $\det \mathrm{Gram}(e_1,\ldots,e_n)$ إذا بادلنا بين أشعّة الجملة $\mathcal{E}$، أو إذا جمعنا إلى أحد الأشعة $e_1,\ldots,e_n$ عبارة خطيّة في بقيّة أشعّة الجملة $\mathcal{E}$.

الإثبات

ليكن σ تبديلاً من S_n، وليكن الأساس $\mathcal{F}=(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)})$. عندئذ يساوي محدِّد المصفوفة $P=P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}=\mathrm{mat}(I_E,\mathcal{E},\mathcal{F})$ توقيعَ التبديل σ أي $\det P=\Delta(\sigma)$ ومنه يكون $\det P^*\cdot\det P=\Delta^2(\sigma)=1$، واستناداً إلى المبرهنة السابقة يكون

$$\det \mathrm{Gram}(\mathcal{E})=\det \mathrm{Gram}(\mathcal{F})$$

من ناحية أخرى، إذا تأمّلنا الأساس $\mathcal{F}=(\tilde{e}_1,e_2,\ldots,e_n)$، حيث $\tilde{e}_1=e_1-\sum_{k=2}^{n}\lambda_k e_k$، كان لدينا

$$P=P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}=\mathrm{mat}(I_E,\mathcal{E},\mathcal{F})=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&\cdots&0\\ \lambda_2&1&\ddots&&\vdots\\ \vdots&0&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&\vdots&\ddots&1&0\\ \lambda_n&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}$$

ومنه $\det P=1$، وهذا ما يثبت أنّ

$$\det \mathrm{Gram}(\mathcal{E})=\det \mathrm{Gram}(\mathcal{F})$$ ❐

2. التعامد في فضاءات الجداء السلّمي

1-2. **تعريف**. ليكن E فضاء جداء سلّمي.

- نقول إنّ العنصرين x و y من E متعامدان، ونكتب $x\perp y$، إذا وفقط إذا كان $\langle x,y\rangle=0$.
- ونقول إنّ جماعة الأشعة $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ من E متعامدة إذا وفقط إذا كان
$$\forall(\alpha,\beta)\in A\times A,\quad \alpha\neq\beta\Rightarrow\langle x_\alpha,x_\beta\rangle=0$$
- ونقول إنّ جماعة الأشعة $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ من E متعامدة نظاميّة إذا وفقط إذا كان
$$\forall(\alpha,\beta)\in A\times A,\quad \langle x_\alpha,x_\beta\rangle=\delta_{\alpha,\beta}=\begin{cases}1 & : \ \alpha=\beta\\ 0 & : \ \alpha\neq\beta\end{cases}$$

❖ لتكن B مجموعة جزئيّة غير خالية من E، وليكن x عنصراً من E. نقول إنّ x عمودي على B، ونكتب $x \perp B$، إذا وفقط إذا كان $\forall y \in B,\ x \perp y$. ونرمز بالرمز $B^{\perp}$ إلى مجموعة العناصر x التي تنتمي إلى E والعموديّة على B.

2-2. **مثال مهم**. ليكن E فضاءَ التوابع المستمرّة على $[0,2\pi]$، والتي تأخذ قيمها في $\mathbb{C}$، مزوداً بالجداء السلّمي:

$$\forall (f,g) \in E \times E, \quad \langle f,g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\,\mathrm{d}\,t$$

ولتكن الجماعة $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$، حيث $e_k(x) = \exp(\mathrm{i}\,kx)$. عندئذ تكون الجماعة $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ جماعة متعامدة نظاميّة في E.

3-2. **مبرهنة**. ليكن E فضاء جداء سلّمي، ولتكن $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ جماعة متعامدة من الأشعّة غير الصفرية في E. حينئذ تكون الجماعةُ $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ حرةً.

الإثبات

في الحقيقة، إن مصفوفة Gram لكلّ جماعة جزئيّة منتهية من $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ قَلوبةٌ (لأنها قطرية وثوابت قطرها غير معدومة). وهذا يُثبت أنّ كل جماعة جزئيّة منتهية من $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ تكون حرةً، وهذا هو المطلوب إثباته. ❒

4-2. **مبرهنة**. ليكن E فضاء جداء سلّمي، ولتكن $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ جملة حرّة في E. حينئذ توجد جملة **متعامدة نظاميّة** وحيدة $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ في E، تُحقِّق، أيّاً كان k من $\mathbb{N}_n$، الشرطين الآتيين:

1. $\mathrm{vect}(\beta_1,\ldots,\beta_k) = \mathrm{vect}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$.
2. $\langle \alpha_k, \beta_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

الإثبات

سنبدأ أوّلاً بإثبات الوحدانية. لنفترض وجود جملتين متعامدتين نظاميتين $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$، و $(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$، تُحقِّقان، أيّاً كان k من $\mathbb{N}_n$، الشرطين الآتيين:

1. $\mathrm{vect}(\beta_1,\ldots,\beta_k) = \mathrm{vect}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) = \mathrm{vect}(\gamma_1,\ldots,\gamma_k)$.
2. $\langle \alpha_k, \beta_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$ و $\langle \alpha_k, \gamma_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

لتكن p من $\mathbb{N}_n$. لمّا كان الشعاع β_p ينتمي إلى $\mathrm{vect}(\gamma_1,\ldots,\gamma_p)$، وكانت الجملة $(\gamma_1,\ldots,\gamma_p)$ متعامدة نظاميّة كان

$$\beta_p = \sum_{j=1}^{p}\langle\gamma_j,\beta_p\rangle\gamma_j$$

ولكن إذا كان $p > j$، انتمى γ_j إلى $\mathrm{vect}\left(\gamma_1,\ldots,\gamma_j\right) = \mathrm{vect}\left(\beta_1,\ldots,\beta_j\right)$. وكان من ثَمّ $\beta_p \perp \gamma_j$، وهذا يتيح اختصار المجموع السابق ليصبح

$$\beta_p = t_p\gamma_p \quad \text{حيث} \quad \langle\gamma_p,\beta_p\rangle = t_p$$

ونستنتج من الشرط 2. ومن العلاقة $\langle\alpha_p,\beta_p\rangle = t_p\langle\alpha_p,\gamma_p\rangle$، أنّ $t_p \in \mathbb{R}_+^*$. وأخيراً لأنّ الجملتين نظاميتان وجدنا $t_p = \|\gamma_p\| t_p = \|\beta_p\| = 1$، وهذا ما يثبتُ أنّ $\beta_p = \gamma_p$.

أمّا إثبات الوجود فيجري بالتدريج على عدد العناصر في الجملة؛ أي n.

- حالة $n = 1$ بسيطة، إذ يكفي أن نأخذ $\beta_1 = \dfrac{1}{\|\alpha_1\|}\cdot\alpha_1$.
- لنفترض صحّةَ النتيجة عند قيمة ما للعدد n. ولتكن $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})$ جملة حرّة في E.

نجد استناداً إلى فرْض التدريج جملة متعامدة نظاميّة $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ في E، تُحقّق، أيّاً كان k من $\mathbb{N}_n$، الشرطين الآتيين :

1. $\mathrm{vect}(\beta_1,\ldots,\beta_k) = \mathrm{vect}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$.
2. $\langle\alpha_k,\beta_k\rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

لنضع إذن بالتعريف

$$\tilde{\beta}_{n+1} = \alpha_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\langle\beta_k,\alpha_{n+1}\rangle\cdot\beta_k$$

ولنلاحظ ما يأتي:

① إنّ $\tilde{\beta}_{n+1} \neq 0$، وذلك لأن الجملة $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})$ جملة حرّة في E.

② نجد بحساب بسيط ، أيّاً كان p من $\mathbb{N}_n$، أنّ

$$\begin{aligned}\langle\beta_p,\tilde{\beta}_{n+1}\rangle &= \langle\beta_p,\alpha_{n+1}\rangle - \sum_{k=1}^{n}\langle\beta_k,\alpha_{n+1}\rangle\cdot\underbrace{\langle\beta_p,\beta_k\rangle}_{\delta_{p,k}}\\ &= \langle\beta_p,\alpha_{n+1}\rangle - \langle\beta_p,\alpha_{n+1}\rangle = 0\end{aligned}$$

ومن ثَمّ يكون $\forall p \in \mathbb{N}_n,\ \tilde{\beta}_{n+1} \perp \beta_p$.

③ بالاستفادة من الخاصّة السابقة نجد أيضاً

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\beta}_{n+1},\tilde{\beta}_{n+1}\rangle &= \langle\tilde{\beta}_{n+1},\alpha_{n+1}\rangle - \sum_{k=1}^{n}\langle\beta_k,\alpha_{n+1}\rangle\cdot\underbrace{\langle\tilde{\beta}_{n+1},\beta_k\rangle}_{0}\\ &= \langle\tilde{\beta}_{n+1},\alpha_{n+1}\rangle\end{aligned}$$

ومنه يكون $\langle\alpha_{n+1},\tilde{\beta}_{n+1}\rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

④ إنّ المساواة $\mathrm{vect}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}) = \mathrm{vect}(\beta_1,\ldots,\beta_n,\tilde{\beta}_{n+1})$ واضحة.

يكفي إذن حتى يتم إثبات المطلوب أن نضع $\beta_{n+1} = \dfrac{1}{\|\tilde{\beta}_{n+1}\|}\cdot\tilde{\beta}_{n+1}$. ❐

2-5. **ملاحظة**. ليكن E فضاء جداء سلّمي، ولتكن $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ جملة حرّة في E. ولتكن $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ الجملة المتعامدة النظاميّة الوحيدة في E، التي تُحقِّق، أيّاً كان k من $\mathbb{N}_n$، الشرطين الآتيين:

1. $\mathrm{vect}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) = \mathrm{vect}(\beta_1,\ldots,\beta_k)$.
2. $\langle\alpha_k,\beta_k\rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

تُسمّى إجرائيّة إنشاء $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ انطلاقاً من $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ إجرائية Gram-Schmidt.

ينتج من المبرهنة السابقة النتيجة المُهمّة الآتية:

2-6. **نتيجة**. ليكن E فضاء جداء سلّمي منتهي البعد، عندئذ يوجد في E **أساس متعامد نظامي**.

2-7. **مبرهنة**. ليكن E فضاء جداء سلّمي منتهي البعد، وبُعده $n \geq 1$، ولتكن الجملة $(x_1,\ldots,x_m)$ من عناصر E. عندئذ توجد مصفوفة A من $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$، تُحقّق

$$\mathrm{Gram}(x_1,\ldots,x_m) = A^*A$$

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ أساساً متعامداً نظاميّاً للفضاء E. عندئذ يكون

$$\forall j\in\mathbb{N}_m,\quad x_j = \sum_{k=1}^{n}\langle e_k,x_j\rangle\cdot e_k$$

ومن ثَمّ، أيّاً كان (i,j) من $\mathbb{N}_m^2$، كان

$$\begin{aligned}\langle x_i, x_j\rangle &= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{\langle e_k, x_i\rangle}\cdot\langle e_\ell, x_j\rangle\cdot\langle e_k, e_\ell\rangle\\ &= \sum_{k=1}^{n}\overline{\langle e_k, x_i\rangle}\cdot\langle e_k, x_j\rangle\end{aligned}$$

فإذا عرّفنا المصفوفة $A = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ بالعلاقة $a_{ij} = \langle e_i, x_j\rangle$، كان لدينا

$$\langle x_i, x_j\rangle = \sum_{k=1}^{n}\overline{a}_{ki}\cdot a_{kj} = [A^*A]_{ij}$$

وهذا ما يثبت أنّ $\mathrm{Gram}(x_1,\ldots,x_m) = A^*A$. ❒

8-2. مبرهنة. ليكن E فضاء جداء سلّمي منتهي البعد وبُعده $n \geq 1$، ولتكن الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ أساساً للفضاء E. عندئذ **توجد** مصفوفة **وحيدة** A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، تكون مثلثيّة عليا وثوابت قطرها الأساسي[2] موجبة تماماً، وتُحقّق

$$\mathrm{Gram}(x_1,\ldots,x_m) = A^*A$$

ومن ناحية أخرى، يكون

$$\det\mathrm{Gram}(x_1,\ldots,x_n) \leq \prod_{k=1}^{n}\|x_k\|^2$$

إذ تتحقّق المساواة إذا وفقط إذا كانت الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ متعامدة.

الإثبات

لنثبت أولاً الوحدانية. لنفترض أنّ $A^*A = B^*B$، و A و B مصفوفتان مثلّثيتان علويتان ثوابت قطريهما الأساسيين موجبة تماماً، عندئذ يكون

$$D = (B^*)^{-1}A^* = B\,A^{-1}$$

فمن جهة أولى، المصفوفة $D = BA^{-1}$ مصفوفة مثلّثية عليا، ومن جهة ثانية تكون المصفوفة $D = (B^*)^{-1}A^*$ مصفوفة مثلّثية سفلى. فالمصفوفة D مصفوفة قطريّة، ثوابت قطرها موجبة تماماً.

---

[2] القطر الأساسي لمصفوفة مربّعة $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ هو الجملة $(a_{11}, a_{22},\ldots,a_{nn})$.

وأخيراً

$$D^2 = D\,D^* = B\,A^{-1}\left((B^*)^{-1}A^*\right)^* = B\,A^{-1}A\,B^{-1} = I_n$$

نستنتج إذن أنّ $D = I_n$، ومن ثَمّ $B = A$.

أمّا لإثبات الوجود، فنستعمل إجرائيّة Gram-Schmidt لتعيين أساس متعامد نظامي $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ للفضاء E، يُحقّق

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad (\operatorname{vect}(x_1,\ldots,x_k) = \operatorname{vect}(e_1,\ldots,e_k)) \wedge (\langle e_k, x_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*)$$

فإذا عرّفنا كما في السابق المصفوفة $A = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ بالصيغة $a_{ij} = \langle e_i, x_j \rangle$، كان لدينا من جهة أولى

$$\operatorname{Gram}(x_1, \ldots, x_n) = A^*\,A$$

ومن جهة ثانية:

- أيّاً كانت k من $\mathbb{N}_n$، كان $a_{kk} = \langle e_k, x_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$.
- وأيّاً كان (i,j) من $\mathbb{N}_n^2$ الذي يحقّق $i > j$، كان $x_j \in \operatorname{vect}(e_1,\ldots,e_j)$، ومن ثَمّ $e_i \perp x_j$. إذن $a_{ij} = \langle e_i, x_j \rangle = 0$.

وهذا يثبت أنّ المصفوفة A مصفوفة مثلثيّة عليا ثوابت قطرها الأساسي موجبة تماماً.

من ناحية أخرى لدينا

$$\det A = \prod_{k=1}^{n} a_{kk} = \prod_{k=1}^{n} \langle e_k, x_k \rangle \leq \prod_{k=1}^{n} \|e_k\| \cdot \|x_k\| = \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

إذن،

$$\det \operatorname{Gram}(x_1, \ldots, x_n) = |\det A|^2 \leq \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

ونرى أنّ المساواة تتحقّق في المتراجحة السابقة إذا وفقط إذا كان

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad \langle e_k, x_k \rangle = \|e_k\| \cdot \|x_k\|$$

وهذا يُكافئ الشرط

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad x_k = \|x_k\| \cdot e_k$$

أي إنّ الجملة $(x_1, \ldots, x_n)$ جملة متعامدة. ❐

2-9. **نتيجة**. ليكن $(F,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي، ولتكن $(x_1,\ldots,x_m)$ جملة من عناصر الفضاء F. عندئذ يكون

$$\det \operatorname{Gram}(x_1,\ldots,x_m) \le \prod_{k=1}^{m} \|x_k\|^2$$

إذ تتحقّق المساواة إذا وفقط إذا كانت الجملة $(x_1,\ldots,x_m)$ متعامدة، أو إذا انعدم أحد أشعّتها.

الإثبات

إذا كانت الجملة $(x_1,\ldots,x_m)$ مرتبطة، كانت المتراجحة صحيحة وضوحاً، لأن طرفها الأيسر معدوم في هذه الحالة، وتتحقّق عندها المساواة إذا وفقط إذا انعدم أحد أشعة الجملة.

أمّا إذا كانت الجملة $(x_1,\ldots,x_m)$ حرّة، فإننا نحصل على المطلوب بتطبيق المبرهنة السابقة على الفضاء $E = \operatorname{vect}(x_1,\ldots,x_m)$. ❐

2-10. **نتيجة – تفريق شولسكي** Cholesky. لتكن المصفوفة M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، ولنفترض أنها مصفوفة معرّفة موجبة. عندئذ توجد في $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفة مثلّثية عليا وحيدة A ثوابت قطرها الأساسي موجبة تماماً تُحقّق $M = A^*A$.

الإثبات

لنزوّد الفضاء الشعاعي $E = \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$، بالجداء السلّمي المعرّف كما يلي

$$\forall (X,Y)\in E\times E,\qquad \langle\!\langle X,Y\rangle\!\rangle = X^*MY$$

وليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ الأساس القانوني في E. عندئذ يكون $M = \operatorname{Gram}_{\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle}(\mathcal{E})$، ونحصل على المطلوب بالاستفادة من المبرهنة 2-8. ❐

2-11. **ملاحظة**. إنّ عكس المبرهنة السابقة صحيح أيضاً. فإذا كانت $M = A^*A$، حيث $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$، كانت المصفوفة M معرّفة موجبة. وذلك لأنّه من جهة أولى يكون

$$M^* = A^*(A^*)^* = A^*A = M$$

ومن جهة ثانية، إذا كان $\|\cdot\|$ هو النظيم الموافق للجداء السلّمي المألوف على $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$، كان

$$\forall X\in\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}),\qquad X^*MX = \|AX\|^2$$

2-12. **نتيجة – متراجحة هادامار** Hadamard. لتكن $A=(a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. عندئذ يكون
$$|\det A|\le\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

الإثبات

يمكننا أن نفترض أنّ المصفوفة A قَلوبة، وإلاّ كانت المتراجحة واضحة.

نزوّد الفضاء الشعاعي $E=\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$، بالجداء السلّمي المعرّف كما يلي
$$\forall (X,Y)\in E\times E,\quad \langle\!\langle X,Y\rangle\!\rangle = X^*A^*AY=\langle AX,AX\rangle$$
حيث $\langle\cdot,\cdot\rangle$ هو الجداء السلّمي المألوف على E. وليكن $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ الأساس القانوني في E. عندئذ يكون $A^*A=\mathrm{Gram}_{\langle\!\langle,\rangle\!\rangle}(\mathcal{E})$، واستناداً إلى النتيجة 2-9. يكون
$$\left|\det(A^*A)\right|\le\prod_{j=1}^{n}\langle\!\langle e_j,e_j\rangle\!\rangle$$
أو
$$|\det A|\le\prod_{j=1}^{n}\sqrt{\langle Ae_j,Ae_j\rangle}=\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}\qquad\square$$

3. الإسقاط القائم

3-1. **مبرهنة**. ليكن E فضاء جداء سلّمي، وليكن F فضاءً شعاعيّاً جزئياً من E، وأخيراً ليكن β من E.

1. يكون عنصرٌ α من F **أفضل تقريب** للعنصر β بعنصر من F، أي يُحقّق
$$\|\beta-\alpha\|=d(\beta,F)\quad \text{أو}\quad \forall\gamma\in F,\ \|\beta-\alpha\|\le\|\beta-\gamma\|$$
إذا وفقط إذا كان $\beta-\alpha\perp F$.
2. إذا كان α من F هو أفضل تقريب للعنصر β بعنصر من F، كان هذا العنصر وحيداً.
3. لنفترض أنّ بُعد F منته، وليكن $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ أساساً متعامداً نظامياً فيه. عندئذ يكون العنصر $\alpha=\sum_{k=1}^{n}\langle e_k,\beta\rangle e_k$ هو أفضل تقريب للعنصر β بعنصر من F.
4. إذا كان الفضاء F فضاء هِلبرت، وُجِدَ في F عنصر α يكون أفضل تقريب للعنصر β بعنصر من F.

الإثبات

سنعرض الإثبات في حالة $\mathbb{K}=\mathbb{C}$، لأنّ حالة $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ أبسط ونترك تفاصيلها للقارئ.

1. ليكن γ عنصراً من F. عندئذ يكون لدينا

$$\|\beta-\gamma\|^2=\|\beta-\alpha\|^2+\|\alpha-\gamma\|^2+2\operatorname{Re}\langle\beta-\alpha,\underbrace{\alpha-\gamma}_{\in F}\rangle \qquad (*)$$

فإذا كان $F \perp (\beta-\alpha)$ كان $\langle\beta-\alpha,\alpha-\gamma\rangle=0$، وكان من ثَمّ

$$\|\beta-\gamma\|\geq\|\beta-\alpha\|$$

أي إنّ α هو أفضل تقريب للعنصر β بعنصر من F.

وبالعكس، إذا كان $\forall\gamma\in F, \|\beta-\alpha\|\leq\|\beta-\gamma\|$، كان لدينا، بناءً على $(*)$،

$$\forall\gamma\in F,\quad \|\alpha-\gamma\|^2+2\operatorname{Re}\langle\beta-\alpha,\alpha-\gamma\rangle\geq 0$$

أو

$$\forall\delta\in F,\quad \|\delta\|^2+2\operatorname{Re}\langle\beta-\alpha,\delta\rangle\geq 0$$

ومن ثَمّ

$$\forall\delta\in F,\forall(r,t)\in\mathbb{R}^2,\quad r^2\|\delta\|^2+2r\operatorname{Re}\langle\beta-\alpha,e^{\mathrm{i}t}\delta\rangle\geq 0$$

وهذا يقتضي

$$\forall\delta\in F,\forall t\in\mathbb{R},\quad \operatorname{Re}(e^{\mathrm{i}t}\langle\beta-\alpha,\delta\rangle)=0$$

وأخيراً، لأنّ t عدد كيفيّ، نستنتج أنّ

$$\forall\delta\in F,\quad \langle\beta-\alpha,\delta\rangle=0$$

أو $\beta-\alpha\perp F$.

2. ليكن α أفضل تقريب للعنصر β بعنصر من F، وليكن أيضاً α' أيضاً أفضل تقريب للعنصر β نفسه بعنصر من F. عندئذ يكون $F \perp (\beta-\alpha)$ و $F \perp (\beta-\alpha')$ وذلك استناداً إلى ما سبق. ينتج من ذلك أنّ $F \perp (\alpha'-\alpha)$ لأنّ

$$\alpha'-\alpha=(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha')$$

ومن ثَمّ يكون $\alpha=\alpha'$ لأنّ

$$\|\alpha'-\alpha\|^2=\langle\alpha'-\alpha,\underbrace{\alpha'-\alpha}_{\in F}\rangle=0$$

3. من الواضح أنّ العنصر $\sum_{k=1}^{n}\langle e_k,\beta\rangle e_k = \alpha$ عنصرٌ من F. يكفي إذن أن نتوثّق أنّ $F \perp (\beta-\alpha)$. ولتحقيق ذلك يكفي إثباتُ أنّ $\langle e_k,\beta-\alpha\rangle = 0$، أيّاً كانت k من $\mathbb{N}_n$. وهذا أمر ميسور نترك تفاصيله البسيطة للقارئ.

4. لنعرّف $d = d(\beta,F) = \inf\{\|\beta-\gamma\| : \gamma\in F\}$، وهي المسافة بين β والفضاء الجزئي F. عندئذ يوجد، أيّاً كان n من $\mathbb{N}^*$، عنصرٌ α_n ينتمي إلى F ويُحقّق

$$\|\beta-\alpha_n\|^2 \le d^2 + \frac{1}{n^2}$$

لتكن (n,m) من $\mathbb{N}^{*2}$، تُحقّق $n<m$، عندئذ يمكننا أن نكتب، بناءً على متطابقة متوازي الأضلاع،

$$\begin{aligned}
\|\alpha_n-\alpha_m\|^2 &= \|(\beta-\alpha_m)-(\beta-\alpha_n)\|^2\\
&= 2\|\beta-\alpha_m\|^2 + 2\|\beta-\alpha_n\|^2 - \|2\beta-\alpha_n-\alpha_m\|^2\\
&= 2\|\beta-\alpha_m\|^2 + 2\|\beta-\alpha_n\|^2 - 4\left\|\beta-\frac{1}{2}(\alpha_n+\alpha_m)\right\|^2
\end{aligned}$$

ولكنّ F فضاء شعاعي، إذن $\frac{1}{2}(\alpha_n+\alpha_m)$ عنصرٌ من F، ومن ثَمّ

$$\|\alpha_n-\alpha_m\|^2 \le 2d^2 + \frac{2}{m^2} + 2d^2 + \frac{2}{n^2} - 4d^2 \le \frac{4}{m^2}$$

وبذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall(n,m)\in\mathbb{N}^{*2},\quad m<n \Rightarrow \|\alpha_n-\alpha_m\| \le \frac{2}{m}$$

فالمتتالية $(\alpha_n)_{n\ge1}$ تُحقّق شرط كوشي في الفضاء التام F. وهي إذن متقاربة من عنصر ينتمي إلى F وليكن $\alpha = \lim_{n\to\infty}\alpha_n$. ولمّا كان

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad d^2 \le \|\beta-\alpha_n\|^2 \le d^2 + \frac{1}{n^2}$$

أمكننا أن نستنتج، بجعل n تسعى إلى $+\infty$، أنّ $d = \|\beta-\alpha\|$. أي

$$\|\beta-\alpha\| = \inf\{\|\beta-\gamma\| : \gamma\in F\}$$

وهذا يُكمِل الإثبات. ❒

3-2. **تعريف**. ليكن $\left(E,\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ فضاء جداء سلّمي، وليكن F فضاءً شعاعيّاً جزئياً من E، وأخيراً ليكن β من E. إذا وُجِدَ في F عنصرٌ α هو أفضل تقريب للعنصر β بعنصر من F، قلنا إنّ α هو **المسقط القائم** للعنصر β على F. وقلنا أيضاً إنّ β يقبلُ مسقطاً قائماً على F.

3-3. **مبرهنة**. ليكن $\left(E,\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ فضاء جداء سلّمي، وليكن F فضاءً شعاعيّاً جزئياً من E، نفترض أنّ كلَّ عنصر من E يقبلُ مسقطاً قائماً على F. عندئذ :

1. إن المجموعة F مجموعة مغلقة في E. (إذ زوِّدَ E بالنظيم الموافق للجداء السلمي).
2. إذا رمزنا بالرمز P_F إلى التطبيق الذي منطلقه E، ومستقره E، ويقرن بكل عنصر من E مسقطَه القائم على F، كان P_F إسقاطاً خطياً يُحقِّق
$$F = \operatorname{Im} P_F \quad \text{و} \quad F^\perp = \ker P_F$$
ويكون من ثَمّ $E = F \oplus F^\perp$.
3. يقبل كلُّ عنصر من E مسقطاً قائماً على $F^\perp$. ويكون $P_{F^\perp} = I - P_F$.

الإثبات

1. لنتأمّل عنصراً x لاصقاً بالمجموعة F، أي $x \in \overline{F}$، ولتكن α من F المسقط القائم للعنصر x على F. عندئذ يكون

$$\|x-\alpha\| = d(x,F) = d(x,\overline{F}) = 0$$

وهذا يبيّن أنّ $x = \alpha \in F$. إذن $F = \overline{F}$ وهذه المجموعة مغلقة.

2. لتكن (x,y) من E^2، ولتكن (λ,μ) من $\mathbb{K}^2$. ولنعرّف $z = \lambda P_F(x) + \mu P_F(y)$ من F. فيكون

$$\lambda x + \mu y - z = \lambda \underbrace{(x - P_F(x))}_{F^\perp \text{ في}} + \mu \underbrace{(y - P_F(y))}_{F^\perp \text{ في}}$$

إذن $F \perp (\lambda x + \mu y - z)$، أي إنّ z هو المسقط القائم للعنصر $\lambda x + \mu y$ على F، أو $P_F(\lambda x + \mu y) = z = \lambda P_F(x) + \mu P_F(y)$. فنكون إذن قد أثبتنا أنّ P_F تطبيق خطي.

من ناحية أخرى، في حالة $x \in F$ ، يكون x نفسه أفضل تقريب للعنصر x بعنصر من F ، ومنه $\forall x \in F,\ P_F(x) = x$ ، وهذا يقتضي أنّ

$$P_F \circ P_F = P_F \quad \text{و} \quad F = \operatorname{Im} P_F \,.$$

وكذلك نلاحظ أنّ

$$x \in \ker P_F \Leftrightarrow P_F(x) = 0 \Leftrightarrow x - 0 \perp F \Leftrightarrow x \in F^{\perp}$$

أي $\ker P_F = F^{\perp}$. وأخيراً لمّا كان P_F إسقاطاً خطياً كان $E = \operatorname{Im} P_F \oplus \ker P_F$.

3. ليكن β من E ، ولنضع $\alpha = \beta - P_F(\beta)$. عندئذ ينتمي العنصر α إلى $F^{\perp}$ ، ويكون $\beta - \alpha \perp F^{\perp}$. إذن α هو المسقط القائم للعنصر β على $F^{\perp}$. أي

$$P_{F^{\perp}}(\beta) = \beta - P_F(\beta)$$

وبذا يتم الإثبات. ❒

3-4. نتيجة. ليكن $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ فضاء جداء سلّمي، وليكن F فضاءً شعاعيّاً جزئياً من E . عندئذ تتحقّق جميع نتائج المبرهنة السابقة إذا كان F فضاء هِلبرت. لاحظ أنّ كل فضاء جداء سلمي منتهي البُعد يكون فضاء هِلبرت. وفي الحالة التي يكون فيها F منتهي البُعد، يمكننا أن نكتب

$$\forall x \in E,\ \ P_F(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle\, e_k$$

حيث $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ هو أساس متعامد نظامي ما للفضاء F .

الإثبات

تنتج هذه الخاصّة مباشرة من المبرهنة 3-1. ❒

3-5. نتيجة – متراجحة Bessel. ليكن $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ فضاء جداء سلّمي، ولتكن $(e_1, \ldots, e_n)$ جملة متعامدة نظاميّة في E . عندئذ يكون

$$\forall x \in E, \quad \sum_{k=1}^{n} |\langle e_k, x \rangle|^2 \le \|x\|^2$$

وتتحقّق المساواة إذا وفقط إذا كان $x \in \operatorname{vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

الإثبات

لنضع $F=\mathrm{vect}((e_1,\ldots,e_n))$، وليكن x من E. لمّا كان الشعاعان $x-P_F(x)$ و $P_F(x)$ متعامدين، أمكننا أن نكتب

$$\|x\|^2=\left\|P_F(x)\right\|^2+\left\|x-P_F(x)\right\|^2$$

ومن ثَمّ تتحقّق المتراجحة $\|x\|^2\geq\left\|P_F(x)\right\|^2$، حيث تقع المساواة فيها إذا، وفقط إذا، كان $x=P_F(x)$ أي إذا انتمى x إلى $\mathrm{vect}(e_1,e_2,\ldots,e_n)$. وأخيراً نلاحظ استناداً إلى النتيجة السابقة أنّ

$$\|P_F(x)\|^2=\sum_{k=1}^{n}|\langle e_k,x\rangle|^2$$

فنكون قد أثبتنا المطلوب. ❐

3-6. مثال. ليكن f تابعاً مستمراً على المجال $[0,2\pi]$ يأخذ قيمه في $\mathbb{C}$. ولنعرّف ثابت فورييه Fourier للتابع f الموافق للدليل n، بأنّه

$$C_n(f)=\int_0^{2\pi}f(t)\,e^{-\mathrm{i}nt}\,\frac{\mathrm{d}\,t}{2\pi}$$

عندئذ يكون

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad\sum_{k=-n}^{n}|C_k(f)|^2\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}\,t$$

في الحقيقة، هذه هي متراجحة Bessel مطبّقة على فضاء التوابع المستمرّة على $[0,2\pi]$، التي تأخذ قيمها في $\mathbb{C}$، بعد تزويده بالجداء السلّمي المتعارف:

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(t)}\,g(t)\,\mathrm{d}\,t$$

وعلى الجملة المتعامدة النظاميّة $(e_k)_{-n\leq k\leq n}$ حيث $e_k(x)=\exp(\mathrm{i}\,kx)$.

3-7. مبرهنة. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي، وليكن F فضاءً شعاعيّاً جزئياً من E. وأخيراً ليكن $(x_1,\ldots,x_n)$ أساساً ما للفضاء F. عندئذ يكون

$$\forall x\in F,\quad d^2(x,F)=\frac{\det\mathrm{Gram}(x,x_1,\ldots,x_n)}{\det\mathrm{Gram}(x_1,\ldots,x_n)}$$

الإثبات

ليكن x من E . نعلم بمقتضى النتيجة 18-1. أنّ

$$\det \operatorname{Gram}(x, x_1, \ldots, x_n) = \det \operatorname{Gram}(x - P_F(x), x_1, \ldots, x_n)$$

وذلك لأن $P_F(x)$ هو عبارة خطية بالأشعة $(x_1, \ldots, x_n)$.

ولكن لمّا كان $x - P_F(x)$ عمودياً على x_k ، وذلك مهما تكن k من $\mathbb{N}_n$ ، أمكننا أن نكتبَ

$$\operatorname{Gram}(x - P_F(x), x_1, \ldots, x_n) = \left[\begin{array}{c|ccc} \|x - P_F(x)\|^2 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \operatorname{Gram}(x_1, \ldots, x_n) & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

ومنه

$$\det \operatorname{Gram}(x, x_1, \ldots, x_n) = \|x - P_F(x)\|^2 \det \operatorname{Gram}(x_1, \ldots, x_n)$$

ونحصل على المطلوب بملاحظة أنّ $d(x, F) = \|x - P_F(x)\|$. ❐

8-3. **مثال** : ليكن $E = \mathbb{R}[X]$ ، ولنزوّده بالجداء السلّمي

$$\forall (P, Q) \in E \times E, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) \,\mathrm{d}\, t$$

وليكن $F_n = \operatorname{vect}(1, X, \ldots, X^{n-1})$. المطلوب هو حساب المقدار $d(X^m, F_n)$ عندما $m \geq n$.

لنضع

$$\mathcal{H} = \operatorname{Gram}(1, X, \ldots, X^{n-1}, X^m)$$

فيكون

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{m+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{m+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{m+n} \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \cdots & \frac{1}{m+n} & \frac{1}{2m+1} \end{bmatrix}$$

لحساب محدّد $\mathcal{H}$ نطرح العمود الأخير من بقيّة الأعمدة فنجد

$$\det \mathcal{H} = \det\begin{bmatrix} \frac{m}{m+1} & \frac{m-1}{2(m+1)} & \cdots & \frac{m-n+1}{n(m+1)} & \frac{1}{m+1} \\ \frac{m}{2(m+2)} & \frac{m-1}{3(m+2)} & \cdots & \frac{m-n+1}{(n+1)(m+2)} & \frac{1}{m+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{m}{n(m+n)} & \frac{m-1}{(n+1)(m+n)} & \cdots & \frac{m-n+1}{(2n-1)(m+n)} & \frac{1}{m+n} \\ \frac{m}{(m+1)(2m+1)} & \frac{m-1}{(m+2)(2m+1)} & \cdots & \frac{m-n+1}{(m+n)(2m+1)} & \frac{1}{2m+1} \end{bmatrix}$$

ومنه

$$\det \mathcal{H} = \frac{(m!)^2}{(m-n)!\cdot(m+n)!\cdot(2m+1)}\det\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} & 1 \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \cdots & \frac{1}{m+n} & 1 \end{bmatrix}$$

وبأسلوب مماثل نجد بعد طرح السطر الأخير من بقية الأسطر

$$\det \mathcal{H} = \frac{(m!)^4}{((m-n)!)^2((m+n)!)^2(2m+1)}\det\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} & 0 \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \cdots & \frac{1}{m+n} & 1 \end{bmatrix}$$

وبنشر هذا المحدّد وفق العمود الأخير نجد

$$\det \mathcal{H} = \frac{(m!)^4}{((m-n)!)^2((m+n)!)^2(2m+1)}\det\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

ولمّا كان

$$\operatorname{Gram}(1, X, \ldots, X^{n-1}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned} d^2(X^m, F_n) &= \frac{\det\operatorname{Gram}(1, X, \ldots, X^{n-1}, X^m)}{\det\operatorname{Gram}(1, X, \ldots, X^{n-1})} \\ &= \frac{(m!)^4}{((m-n)!)^2\,((m+n)!)^2\,(2m+1)} \end{aligned}$$

ومنه

$$d(X^m, F_n) = \frac{(m!)^2}{(m-n)!\cdot(m+n)!\cdot\sqrt{2m+1}}$$

أو

$$d(X^m, \operatorname{vect}(1, X, \ldots, X^{n-1})) = \begin{cases} 0 & : \ m < n \\ \dfrac{C_{2m}^{m-n}}{C_{2m}^{m}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2m+1}} & : \ m \geq n \end{cases}$$

وهي النتيجة المنشودة.

4. الأشكال الخطيّة، والتطبيقات الخطيّة المرافقة

1-4. مبرهنة. ليكن $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ فضاء جداء سلّمي منتهي البُعد. وليكن f شكلاً خطيّاً على E، أي $f \in E^*$. عندئذ يوجد عنصر وحيد β ينتمي إلى E يُحقّق

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle \beta, x \rangle$$

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً متعامداً نظامياً في E . ولنفترض وجود عنصر β ينتمي إلى E يُحقّق المطلوب. عندئذ، أيّاً كان x من E ، كان

$$\begin{aligned}\langle \beta, x \rangle = f(x) &= f\Big(\sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle\, e_k\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle\, f(e_k) = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \overline{f(e_k)} e_k, x \right\rangle\end{aligned}$$

ومن ثَمّ لا بد أن يكون $\beta = \sum_{k=1}^{n} \overline{f(e_k)} e_k$ ، وهذا ما يثبت وحدانية β .

من ناحية أخرى، إذا تأمّلنا العنصر $\beta = \sum_{k=1}^{n} \overline{f(e_k)} e_k$ ، وجدنا

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad f(e_i) = \langle \beta, e_i \rangle$$

وينتج من ذلك أنّ $\forall x \in E, \quad f(x) = \langle \beta, x \rangle$ ، لأنّ الطرفين خطيّان. ❐

4-2. **ملاحظة**. يمكن تعميم المبرهنة السابقة على الوجه التالي : ليكن $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ فضاء هِيلبرت. وليكن f شكلاً خطيّاً مستمراً على H . عندئذ يوجد في H عنصر وحيد β يُحقّق $\forall x \in H, \ \ f(x) = \langle \beta, x \rangle$.

في الحقيقة، الوحدانية أمر بسيط نتركه للقارئ، لنثبت إذن الوجود. يمكننا أن نفترض أنّ $f \neq 0$ ، يوجد حينئذ α ينتمي إلى H يُحقّق $f(\alpha) = 1$. ولمّا كان f مستمراً، كان $F = \ker f$ فضاء شعاعياً جزئياً مغلقاً من H . يمكننا إذن أن نعرّف P_F الإسقاط القائم للفضاء H على F . ثُمّ نعرّف $\tilde{\beta} = \alpha - P_F(\alpha)$ ، فيكون $1 = f(\tilde{\beta})$ و $\tilde{\beta} \perp F$.

أخيراً، أيّاً كانت x من H ، كان $x - f(x) \cdot \tilde{\beta}$ عنصراً من F ، ومن ثَمّ

$$\left\langle \tilde{\beta}, x - f(x) \cdot \tilde{\beta} \right\rangle = 0$$

وهذا يُكافئ، كوْن $f(x) = \langle \beta, x \rangle$ حيث $\beta = \dfrac{1}{\|\tilde{\beta}\|^2} \tilde{\beta}$. ويتم إثبات المطلوب. ❐

3-4. نتيجة. ليكن $\big(E,\langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ فضاء جداء سلّمي منتهي البُعد، ولنزوّده بالنظيم الموافق للجداء السلمي. ولنزوّد E^* فضاء الأشكال الخطيّة على E بنظيم التطبيقات الخطيّة المستمرّة من E إلى $\mathbb{K}$. عندئذ يكون التطبيق

$$\Phi : E \to E^*,\ \beta \mapsto f_\beta \quad \text{حيث} \quad \forall x \in E,\ f_\beta(x) = \langle \beta, x\rangle$$

تقابلاً نصف خطّي[3] محافظاً على النظيم.

الإثبات

إنّ Φ تقابلٌ بناءً على المبرهنة 1-4. ومن ناحية أخرى، ليكن (α,β) من E^2، وليكن (t,s) من $\mathbb{K}^2$، وأخيراً x من E. عندئذ

$$\begin{aligned}
\Phi(t\alpha+s\beta)(x) &= \langle t\alpha+s\beta, x\rangle\\
&= \overline{t}\,\langle \alpha, x\rangle + \overline{s}\,\langle \beta, x\rangle\\
&= \overline{t}\,\Phi(\alpha)(x) + \overline{s}\,\Phi(\beta)(x)\\
&= \big(\overline{t}\,\Phi(\alpha) + \overline{s}\,\Phi(\beta)\big)(x)
\end{aligned}$$

وأخيراً، أيّاً كان β من E، كان

$$\|\Phi(\beta)\| = \left\|f_\beta\right\| = \sup\left\{\left|\langle\beta,x\rangle\right| : \|x\|\leq 1\right\} = \|\beta\|$$

وذلك بناءً على متراجحة شوارتز، وعلى حالة المساواة فيها. ❐

4-4. ملاحظة. يمكن تعميم النتيجة السابقة، باتباع أسلوب الإثبات نفسه والملاحظة 2-4. على الوجه الآتي:

> ليكن $\big(H,\langle\cdot,\cdot\rangle_H\big)$ فضاء هِيلبرت. وليكن H' فضاء الأشكال الخطيّة **المستمرة** على H، مزوّداً بنظيم التطبيقات الخطيّة المستمرّة. عندئذ يكون التطبيق
>
> $$\Phi : H \to H',\quad \beta \mapsto f_\beta \quad \text{إذ} \quad \forall x \in H,\ f_\beta(x) = \langle \beta, x\rangle$$
>
> تقابلاً نصف خطّي محافظاً على النظيم.

---

[3] أي $\forall(\alpha,\beta) \in E^2, \forall(t,s) \in \mathbb{K}^2,\ \Phi(t\alpha+s\beta) = \overline{t}\,\Phi(\alpha) + \overline{s}\,\Phi(\beta)$.

4-5. **مبرهنة وتعريف**. ليكن $\left(E,\langle\cdot,\cdot\rangle_E\right)$ و $\left(H,\langle\cdot,\cdot\rangle_H\right)$ فضاءَي جداء سلّمي منتهيي البعد على الحقل نفسه. وليكن u تطبيقاً خطيّاً من E إلى H، أي $u\in\mathcal{L}(E,H)$. عندئذ **يوجد** تطبيق خطّي **وحيد** $u^*\in\mathcal{L}(H,E)$، نسميّه **مُرافق** التطبيق u، يُحقِّق ما يأتي :

$$\forall(x,y)\in E\times H,\ \ \langle y,u(x)\rangle_H=\langle u^*(y),x\rangle_E$$

وإذا زوّدنا الفضاءات $\mathcal{L}(E,H)$ و $\mathcal{L}(H,E)$ و $\mathcal{L}(E)$ و $\mathcal{L}(H)$ بنظيم التطبيقات الخطيّة المستمرّة، صار لدينا

$$\forall u\in\mathcal{L}(E,H),\quad \|u\|=\|u^*\|=\sqrt{\|u\circ u^*\|}=\sqrt{\|u^*\circ u\|}$$

الإثبات

ليكن y عنصراً من H . لمّا كان التطبيق $x\mapsto\langle y,u(x)\rangle_H$ شكلاً خطيّاً على E، يوجد بمقتضى المبرهنة 4-1. عنصر **وحيد** $u^*(y)$ في E بحيث يكون

$$\forall x\in E,\ \ \langle y,u(x)\rangle_H=\langle u^*(y),x\rangle_E$$

لنثبت إذن أنّ التطبيقَ $u^*:H\to E,\ y\mapsto u^*(y)$ تطبيقٌ خطّي.

في الحقيقة، أيّاً كان (y,z) من H^2، و (t,s) من $\mathbb{K}^2$، و x من E، فإنّ

$$\begin{aligned}\langle u^*(\lambda y+\mu z),x\rangle_E&=\langle\lambda y+\mu z,u(x)\rangle_H\\&=\overline{\lambda}\langle y,u(x)\rangle_H+\overline{\mu}\langle z,u(x)\rangle_H\\&=\overline{\lambda}\langle u^*(y),x\rangle_E+\overline{\mu}\langle u^*(z),x\rangle_E\\&=\langle\lambda u^*(y)+\mu u^*(z),x\rangle_E\end{aligned}$$

ومن ثَمّ $u^*(\lambda y+\mu z)=\lambda u^*(y)+\mu u^*(z)$، وهذا يقتضي $u^*\in\mathcal{L}(H,E)$.

من ناحية أخرى، ليكن u من $\mathcal{L}(E,H)$، ولنعرّف المجموعة الجزئية $\mathcal{A}$ من $\mathbb{R}_+$ بالعلاقة:

$$\mathcal{A}=\left\{\left|\langle y,u(x)\rangle_H\right|:\left(\|x\|_E\le 1\right)\wedge\left(\|y\|_H\le 1\right)\right\}$$

ولنضع $a=\sup\mathcal{A}$. فيكون لدينا استناداً إلى متراجحة شوارتز وحالة المساواة فيها :

$$a=\sup_{\|x\|_E\le 1}\left(\sup_{\|y\|_H\le 1}\left|\langle y,u(x)\rangle_H\right|\right)=\sup_{\|x\|_E\le 1}\|u(x)\|_H=\|u\|$$

وبأسلوب مماثل يكون أيضاً لدينا

$$a = \sup_{\|y\|_H \le 1}\left(\sup_{\|x\|_E \le 1}\left|\langle u^*(y), x\rangle_E\right|\right) = \sup_{\|y\|_H \le 1} \|u^*(y)\|_E = \|u^*\|$$

وهذا ما يثبت أنّ $\|u^*\| = \|u\|$.

من ناحية أخرى، أيّاً كانت x من E فلدينا :

$$\begin{aligned}\|u(x)\|_H^2 &= \langle u(x), u(x)\rangle_H = \langle u^*(u(x)), x\rangle_E \\ &\le \|u^* \circ u(x)\|_E \cdot \|x\|_E \le \|u^* \circ u\| \cdot \|x\|_E^2\end{aligned}$$

ومن ثَمّ يكون $\|u\| \le \sqrt{\|u^* \circ u\|}$. ولكن لدينا أيضاً المتراجحة المعاكسة:

$$\|u^* \circ u\| \le \|u^*\| \cdot \|u\| = \|u\|^2$$

إذن $\|u\| = \sqrt{\|u^* \circ u\|}$. وبتطبيق ما أثبتناه على u^* وملاحظة أنّ $u = (u^*)^*$، نجد

$$\|u^*\| = \sqrt{\|(u^*)^* \circ u^*\|} = \sqrt{\|u \circ u^*\|}$$

وبذلك يُنجز الإثبات. ❒

6-4. مبرهنة. ليكن $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E\right)$ و $\left(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H\right)$ فضاءَي جداء سلّمي منتهيي البعد على الحقل نفسه. وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ و $\mathcal{H} = (h_1, \ldots, h_m)$ أساسين متعامدين نظاميين في E و H على الترتيب. وأخيراً ليكن u تطبيقاً خطيّاً من E إلى H، أي عنصراً من $\mathcal{L}(E,H)$. عندئذ يكون لدينا

$$\operatorname{mat}(u^*, \mathcal{H}, \mathcal{E}) = \left(\operatorname{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{H})\right)^*$$

الإثبات

في الحقيقة، إذا كان $\operatorname{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{H}) = (a_{ij})$ وكان $\operatorname{mat}(u^*, \mathcal{H}, \mathcal{E}) = (b_{ij})$، أمكن أن نعبِّر عن ثوابت هاتين المصفوفتين بدلالة الأساسين المتعامدين النظاميين على الوجه الآتي:

$$b_{ij} = \left\langle e_i, u^*(h_j)\right\rangle_E \quad \text{و} \quad a_{ij} = \left\langle h_i, u(e_j)\right\rangle_H$$

ومن ثَم إذا استعملنا خواص الجداء السلّمي وتعريف المرافق وجدنا

$$\overline{b_{ji}} = \overline{\left\langle e_j, u^*(h_i)\right\rangle_E} = \left\langle u^*(h_i), e_j\right\rangle_E = \left\langle h_i, u(e_j)\right\rangle_H = a_{ij}$$

وهذا هو المطلوب إثباته. ❒

☜ تفيد المبرهنة السابقة في استنتاج خواص بسيطة نلخّصها في المبرهنة الآتية، علماً أننا قد استعملنا بعضاً منها سابقاً.

4-7. **مبرهنة** : لتكن E و F و H ثلاثة فضاءات جداء سلّمي منتهية البُعد على الحقل نفسه. عندئذ:

- ❖ أيّاً كان u و v من $\mathcal{L}(E,F)$ و أيّاً كان λ من $\mathbb{K}$ كان $(\lambda u+v)^* = \overline{\lambda}\, u^* + v^*$.
- ❖ أيّاً كان u من $\mathcal{L}(E,F)$ فلدينا $(u^*)^* = u$.
- ❖ أيّاً كان u من $\mathcal{L}(E,F)$ وأيّاً كان v من $\mathcal{L}(F,H)$ فلدينا $(v\circ u)^* = u^*\circ v^*$.
- ❖ وأخيراً إذا كان u من $\mathcal{L}(E,F)$ قَلوباً كان u^* قَلوباً وكان $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

4-8. **تعريف**. ليكن $\big(E,\langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ فضاء جداء سلّمي منتهي البُعد على الحقل $\mathbb{K}$.

- ➤ في حالة $\mathbb{K}=\mathbb{R}$، نسمّي كل تطبيق خطي u من $\mathcal{L}(E)$ يُحقِّق الشرط $u^* = u$ تطبيقاً خطياً **متناظراً**.
- ➤ في حالة $\mathbb{K}=\mathbb{C}$، نسمّي كل تطبيق خطي u من $\mathcal{L}(E)$ يُحقِّق الشرط $u^* = u$ تطبيقاً خطياً **هرمتياً**.
- ➤ ونقول إنّ التطبيق الخطي u من $\mathcal{L}(E)$ **موجب** إذا وفقط إذا تحقَّق الشرطان
  ① $u^* = u$
  ② $\forall x\in E,\ \ \langle x,u(x)\rangle \in \mathbb{R}_+^*$
- ➤ ونقول إنّ التطبيق الخطي u من $\mathcal{L}(E)$ **معرّف وموجب** إذا وفقط إذا تحقَّق الشرطان
  ① $u^* = u$
  ② $\forall x\in E\backslash\{0\},\ \ \langle x,u(x)\rangle \in \mathbb{R}_+^*$
- ➤ في حالة $\mathbb{K}=\mathbb{R}$، نسمّي كل تطبيق خطي u من $\mathcal{L}(E)$ يُحقِّق الشرط $u^* = u^{-1}$ تطبيقاً خطياً **متعامداً**.
- ➤ في حالة $\mathbb{K}=\mathbb{C}$، نسمّي كل تطبيق خطي u من $\mathcal{L}(E)$ يُحقِّق الشرط $u^* = u^{-1}$ تطبيقاً خطياً **واحدياً**.

4-9. **مثال**. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي منتهي البُعد. وليكن p من $\mathcal{L}(E)$ إسقاطاً قائماً، عندئذ يكون $p = p^*$. في الحقيقة، أيّاً كان (x,y) من E^2 كان

$$\begin{aligned}\langle x, p(y)\rangle &= \langle x - p(x) + p(x), p(y)\rangle \\ &= \underbrace{\langle x - p(x), p(y)\rangle}_{=0} + \langle p(x), p(y)\rangle \\ &= \langle p(x), p(y)\rangle = \langle p(x), y + p(y) - y\rangle \\ &= -\underbrace{\langle p(x), y - p(y)\rangle}_{=0} + \langle p(x), y\rangle \\ &= \langle p(x), y\rangle\end{aligned}$$

إذ استفدنا من كوْن الفضاءين الجزئيين $\operatorname{Im} p$ و $\ker p = \operatorname{Im}(I_E - p)$ متعامدين. وينتج من الحساب السابق

$$\forall(x,y) \in E \times E,\ \langle p^*(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), y\rangle$$

وهذا بالطبع يكافئ $p^* = p$.

سنفترض في كلِّ ما يأتي أنّ الحقل $\mathbb{K}$ هو حقل الأعداد الحقيقيّة.

5. التطبيقات الخطيّة المتعامدة

5-1. **تعريف**. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ و $(F,\langle\cdot,\cdot\rangle_F)$ فضاءَي جداء سلّمي على الحقل $\mathbb{R}$. وليكن u من $\mathcal{L}(E)$. نقول إنّ u **يحافظ على الجداء السلّمي** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

$$\forall(x,y) \in E \times E, \quad \langle u(x), u(y)\rangle_F = \langle x, y\rangle_E$$

وهذا الشرط يُكافئ، بمقتضى المتطابقات القطبيّة، حِفاظ u على النظيم؛ أي

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F = \|x\|_E$$

وأخيراً نقول إنّ u من $\mathcal{L}(E,F)$ **تقابلٌ خطيّ محافظ على المسافة**، إذا كان u تقابلاً خطياً، من جهة أولى، وكان يحافظ على الجداء السلّمي من جهة ثانية. ويلاحظ القارئ بسهولة أنّ كلّ تطبيق خطيّ محافظ على الجداء السلّمي يكون متبايناً.

2-5. مبرهنة. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ و $(F,\langle\cdot,\cdot\rangle_F)$ فضاءَي جداء سلّمي على الحقل $\mathbb{R}$. نفترض أنّهما منتهيي البُعد وأنّ $\dim E = \dim F$، وليكن u من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ تكون الخواص الآتية متكافئة:

1. التطبيق u يحافظ على الجداء السلّمي.
2. التطبيق u تقابلٌ خطيّ محافظ على المسافة.
3. صورة كلّ أساس متعامد نظاميّ في E هي أساس متعامد نظاميّ في F.
4. يوجد أساس متعامد نظاميّ في E بحيث تكون صورته أساساً متعامداً نظاميّاً في F.

الإثبات

إنّ الإثبات أمر ميسور جداً انطلاقاً من التعريف، ونترك تفاصيله للقارئ. ❐

ليكن E فضاءً إقليدياً، أي فضاء جداء سلّمي منتهي البُعد على الحقل $\mathbb{R}$. ينتج من التعريف والمبرهنة السابقين، أنّ تطبيقاً خطياً u من $\mathcal{L}(E)$ يكون متعامداً، أي $u^* = u^{-1}$، إذا وفقط إذا كان محافظاً على الجداء السلّمي.

تكوّن مجموعة التطبيقات الخطية المتعامدة، زمرة بالنسبة إلى تركيب التطبيقات، نرمز إليها بالرمز $\mathcal{O}(E)$، ونسمّيها **الزمرة المتعامدة**.

$$\begin{aligned}\forall u \in \mathcal{L}(E), \quad u \in \mathcal{O}(E) &\Leftrightarrow u^* \circ u = I_E \\ &\Leftrightarrow u \circ u^* = I_E\end{aligned}$$

وتكون الزمرة المتعامدة $(\mathcal{O}(E),\circ)$ زمرة جزئية من الزمرة الخطيّة $(\mathcal{GL}(E),\circ)$. ونشير إلى أنّ التعريف السابق يقتضي وضوحاً :

$$\forall u \in \mathcal{O}(E),\ \ \det u \in \{-1,+1\}$$

ولكنّ العكس خطأ.

ولمّا كان $u \mapsto \det u$ يُعرّف تشاكلاً زمريّاً بين $\mathcal{O}(E)$ و $\{-1,+1\}$، كانت نواة هذا التشاكل أي $\{u \in \mathcal{O}(E) : \det u = 1\}$ زمرة جزئيّة من $\mathcal{O}(E)$ نسمّيها **زمرة الدورانات** ونرمز إليها بالرمز $\mathcal{O}^+(E)$، ونرمز عادة بالرمز $\mathcal{O}^-(E)$ إلى المجموعة $\mathcal{O}^+(E)\backslash\mathcal{O}^-(E)$ وهي بالطبع ليست زمرة.

يمكن إسقاط الملاحظة السابقة على المصفوفات الحقيقية المربّعة، فنرمز بالرمز $\mathcal{O}(n)$ إلى مجموعة المصفوفات A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ التي تُحقّق $A \cdot {}^tA = I_n$ أو الشرط المُكافئ ${}^tAA = I_n$. وهي، مزوّدة بقانون ضرب المصفوفات، تكوّن زمرة جزئيّة من $\mathcal{GL}(n)$ أي زمرة المصفوفات الحقيقية القَلوبة من المرتبة n. ونعرّف بأسلوب مماثل لما سبق $\mathcal{O}^+(n)$، و $\mathcal{O}^-(n)$.

وأخيراً إذا كان E فضاءً إقليدياً، بُعده n، وكان $\mathcal{E} = (e_1,\ldots e_n)$ أساساً متعامداً نظامياً في E، كان التطبيق : $\Phi : \mathcal{O}(E) \to \mathcal{O}(n),\ u \mapsto \mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})$ تشاكلاً تقابلياً زُمرياً.

تفيدنا الدراسة السابقة في تعريف **توجيهٍ لفضاء إقليدي** كما يأتي:

ليكن E فضاءً إقليدياً، بُعده n، ولنرمز بالرمز $\mathcal{BON}(E)$ إلى مجموعة الأسس المتعامدة النظاميّة في الفضاء E. فإذا كان $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ و $\mathcal{E}' = (e'_1,\ldots,e'_n)$ عنصرين من $\mathcal{BON}(E)$، عرّفنا التطبيق الخطّي المتعامد الوحيد $U_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$ بالشرط:

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad U_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(e_k) = e'_k$$

يسمح لنا هذا بتعريف علاقة ثنائيّة $\Re$ على المجموعة $\mathcal{BON}(E)$، على الوجه الآتي :

$$\mathcal{E}\,\Re\,\mathcal{E}' \Leftrightarrow \det U_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = 1 \Leftrightarrow U_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} \in \mathcal{O}^+(E)$$

ونتحقّق بسهولة أنّ $\Re$ علاقة تكافؤ على المجموعة $\mathcal{BON}(E)$:

- فهي انعكاسيّة لأنّ $U_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = I_E$ أيّاً كان $\mathcal{E}$ من $\mathcal{BON}(E)$.
- وهي تناظرية لأنّ $(U_{\mathcal{E},\mathcal{E}'})^{-1} = U_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}$ أيّاً كان $\mathcal{E}$ و $\mathcal{E}'$ من $\mathcal{BON}(E)$.
- وأخيراً هي متعدّية لأنّ $U_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \circ U_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = U_{\mathcal{E},\mathcal{G}}$ أيّاً كانت الأسس $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ من $\mathcal{BON}(E)$.

وأخيراً، إنّ لهذه العلاقة صفّي تكافؤ اثنين فقط. ذلك لأنّه إذا كان $\mathcal{E}^+ = (e_1,\ldots,e_n)$ عنصراً ما من $\mathcal{BON}(E)$، وعرّفنا $\mathcal{E}^- = (-e_1,\ldots,e_n)$، كان

$$\mathcal{BON}(E)/\Re = \{[\mathcal{E}^+],[\mathcal{E}^-]\}$$

في الحقيقة، لمّا كان $\det(U_{\mathcal{E}^+,\mathcal{E}^-}) = -1$ ، كان $[\mathcal{E}^-] \neq [\mathcal{E}^+]$، هذا من جهة أولى. ومن جهة ثانية، إذا كان $\mathcal{F}$ عنصراً ما من $\mathcal{BON}(E)$ ، نتج من العلاقة

$$U_{\mathcal{E}^-,\mathcal{F}} \circ U_{\mathcal{E}^+,\mathcal{E}^-} = U_{\mathcal{E}^+,\mathcal{F}}$$

أنّ $\det(U_{\mathcal{E}^-,\mathcal{F}}) = -\det(U_{\mathcal{E}^+,\mathcal{F}})$. فإمّا $\det(U_{\mathcal{E}^+,\mathcal{F}}) = 1$ ومن ثَمّ $\mathcal{F} \in [\mathcal{E}^+]$، وإمّا $\det(U_{\mathcal{E}^-,\mathcal{F}}) = 1$ ، وهذا يقتضي $\mathcal{F} \in [\mathcal{E}^-]$. أي إنّ $[\mathcal{F}] \in \{[\mathcal{E}^+],[\mathcal{E}^-]\}$.

نسمّي صفّي التكافؤ، في $\mathcal{BON}(E)/\mathfrak{R}$، توجيهين للفضاء الإقليدي E . ويكون توجيه الفضاء الإقليدي E ، هو اختيار أحد التوجيهين السابقين، أي اختيار أساس متعامد نظاميّ $\mathcal{E}$ من $\mathcal{BON}(E)$. فنسمّي $[\mathcal{E}]$ **توجيهاً مباشراً**، ونسمي صفّ التكافؤ الثاني **توجيهاً رجعياً** أو **غير مباشر**. ونسمي عناصر $[\mathcal{E}]$ أسساً متعامدة نظاميّة مباشرة.

3-5. مثال. لندرس الزمرة $\mathcal{O}(2)$.

تكون المصفوفة المربّعة $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ متعامدة إذا وفقط إذا كان $^tM\,M = I_2$، وهذا يُكافئ الشرطين الآتيين:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \qquad ❶$$

$$ac + bd = 0 \qquad ❷$$

ينتج من ❶ أنّه يوجد عددان حقيقيّان (θ, φ) في $\mathbb{R}^2$ يُحقّقان

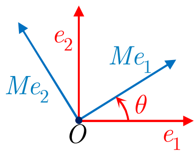
$$(c,d) = (\sin\varphi, \cos\varphi) \quad \text{و} \quad (a,b) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

وينتج من العلاقة ❷ أنّ

$$\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi = \sin(\theta+\varphi) = 0$$

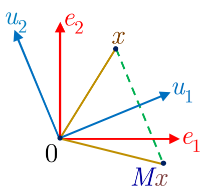
وهذا يُعطي حليّن للمسألة هما $\varphi \in (-\theta + 2\pi\mathbb{Z})$ أو $\varphi \in (\pi - \theta + 2\pi\mathbb{Z})$. إذن تأخذ المصفوفة M أحد الشكلين الآتيين:

$$S_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



إذا كانت $M = R_\theta$ كان $\det M = +1$، فهي إذن مصفوفة دوران أي $M \in \mathcal{O}^+(2)$، وهي تُمثِّل هندسياً الدوران بزاوية θ حول المبدأ 0، أي الذي مركزه 0.

أمّا إذا كانت $M = S_\theta$ كان $\det M = -1$، وكان كثير الحدود المميّز للمصفوفة M هو $X^2 - 1$ ومن ثَمَّ $\operatorname{sp}(M) = \{-1, +1\}$، وكوَّن الشعاعان



$$u_2 = \begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad u_1 = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

أساساً متعامداً نظامياً للفضاء الإقليديّ المألوف $\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$، مؤلّفاً من أشعة ذاتيّة للمصفوفة M. أي $Mu_1 = u_1$، و $Mu_2 = -u_2$. فهي تُمثِّل هندسياً التناظر القائم حول المستقيم الشعاعي الموجّه بالشعاع u_1 أي $\mathbb{R}u_1$.

4-5. مثال. الجداء الخارجي والجداء المختلط في فضاء إقليدي ثلاثيّ البُعد.

ليكن E فضاءً إقليدياً **موجّهاً** بُعده 3. وليكن $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$، و $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ أساسين متعامدين نظاميَّيْن مباشرين في E. لمّا كان بُعد فضاء الأشكال ثلاثيّة الخطيّة المتناوبة هو 1، وجدنا عدداً حقيقيّاً λ، يُحقّق $\det_{\mathcal{E}} = \lambda \det_{\mathcal{F}}$، ومن ثَمّ

$$\lambda = \det_{\mathcal{E}}(f_1, f_2, f_3) = \det U_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = 1$$

نستنتج من ذلك أنّ $\det_{\mathcal{E}} = \det_{\mathcal{F}}$.

تفيد نا الملاحظات السابقة في استنتاج الخاصّة التالية:

> ليكن E فضاءً إقليدياً **موجّهاً** بُعده 3. يوجد شكلٌ ثلاثيُّ الخطيةِ متناوبٌ وحيدٌ δ_E على E يُحقّق $\delta_E = \det_{\mathcal{E}}$ أيّاً كان الأساس المتعامد النظامي المباشر $\mathcal{E}$ للفضاء الإقليدي الموجّه E، نسمّي δ_E **الجداء المختلط** على E.

ونستعمل الرمز $[x_1, x_2, x_3]$ دلالةً على $\delta_E(x_1, x_2, x_3)$. فيكون

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in E^3, \quad [x_1, x_2, x_3] = \det_{\mathcal{E}}(x_1, x_2, x_3) \qquad ❶$$

حيث $\mathcal{E}$ هو أساس متعامد نظامي مباشر **ما** للفضاء E.

ليكن E فضاءً إقليدياً **موجّهاً** بُعده 3 . وليكن v_1 و v_2 شعاعين من E . لمّا كان التطبيق $E \to \mathbb{R},\ x \mapsto [v_1, v_2, x]$ شكلاً خطياً على E ، نعلم أنّه يوجد في E شعاع وحيد، نرمز إليه بالرمز $v_1 \wedge v_2$ ، يُحقّق

$$\forall x \in E, \quad [v_1, v_2, x] = \langle v_1 \wedge v_2, x \rangle \qquad \text{❷}$$

نسمّي الشعاع $v_1 \wedge v_2$ **الجداء الشعاعيّ** للشعاعين v_1 و v_2 بهذا الترتيب.

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ أساساً متعامداً نظامياً مباشراً ما في E . ولنفترض أنّ

$$v_1 = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \zeta_3 e_3$$

و

$$v_2 = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \eta_3 e_3$$

عندئذ، أيّاً كان الشعاع $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ من E ، نجد بنشر المحدّد وفق العمود الأخير:

$$\begin{aligned}[v_1, v_2, x] &= \det\begin{bmatrix} \zeta_1 & \eta_1 & \alpha_1 \\ \zeta_2 & \eta_2 & \alpha_2 \\ \zeta_3 & \eta_3 & \alpha_3 \end{bmatrix} \\ &= \alpha_1 \det\begin{bmatrix} \zeta_2 & \eta_2 \\ \zeta_3 & \eta_3 \end{bmatrix} - \alpha_2 \det\begin{bmatrix} \zeta_1 & \eta_1 \\ \zeta_3 & \eta_3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \det\begin{bmatrix} \zeta_1 & \eta_1 \\ \zeta_2 & \eta_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

وهذا يبيّن أنّ

$$v_1 \wedge v_2 = (\zeta_2\eta_3 - \zeta_3\eta_2) e_1 + (\zeta_3\eta_1 - \zeta_1\eta_3) e_2 + (\zeta_1\eta_2 - \zeta_2\eta_1) e_3$$

ويعطينا طريقة عمليّة لحساب الجداء الشعاعيّ.

نلاحظ من التعريف ❷ أنّ الشعاع $v_1 \wedge v_2$ عمودي على كلٍّ من v_1 و v_2 . ونترك للقارئ أن يتحقّق صحة المتطابقة المهمّة الآتية والمعروفة باسم متطابقة لاغرانج Lagrange:

$$\|v_1 \wedge v_2\|^2 + |\langle v_1, v_2 \rangle|^2 = \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2$$

والتي ينتج منها أنّ

$$\|v_1 \wedge v_2\| = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \sin(\widehat{v_1, v_2})$$

يُحقِّق الجداءان الشعاعي والمختلط الخواص الآتية:

1. $(\lambda a + b) \wedge c = \lambda(a \wedge c) + (b \wedge c)$ $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall (a,b,c) \in E^3,$
2. $a \wedge b = -(b \wedge a)$ $\quad \forall (a,b) \in E^2,$
3. $a \wedge (b \wedge c) = \langle a,c \rangle b - \langle a,b \rangle c$ $\quad \forall (a,b,c) \in E^3,$
4. $a \wedge (b \wedge c) + b \wedge (c \wedge a) + c \wedge (a \wedge b) = 0$ $\quad \forall (a,b,c) \in E^3,$
5. $(a \wedge b) \wedge (a \wedge c) = [a,b,c]a$ $\quad \forall (a,b,c) \in E^3,$
6. $[a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a) = [a,b,c]^2$ $\quad \forall (a,b,c) \in E^3,$

وأخيراً، إذا كان a و b شعاعين من E وكان $a \neq 0$، فإنّ الشرط اللازم والكافي حتى يوجد شعاع x من E يُحقِّق $a \wedge x = b$ هو أن يكون $a \perp b$، وفي هذه الحالة تكون مجموعة حلول المعادلة $a \wedge x = b$ هي : $\left\{ \frac{1}{\|a\|^2} b \wedge a + \lambda a : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

سننهي هذه الفقرة بالمبرهنة التالية، التي تعطي تفريقاً للمصفوفات المربّعة مهمّاً في بعض مسائل التحليل العددي.

5-5. مبرهنة – تفريق إقازاڤا Iwasawa. لتكن M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، مصفوفة **قَلوبة**. عندئذ توجد ثنائية وحيدة (O,T) حيث O مصفوفة متعامدة من المرتبة n، و T مصفوفة مثلّثيّة عليا، وعناصر قطرها الأساسي موجبة تماماً، تُحقّقان $M = OT$.

الإثبات

لنعرّف $G = {}^tM\,M$، فتكون G مصفوفة معرّفة موجبة عملاً بالملاحظة 2-11. إذن نجد استناداً إلى تفريق Cholesky، (انظر المبرهنة 5-10.) مصفوفةً مثلّثيّة عليا T، عناصر قطرها الأساسي موجبة تماماً، وتُحقّق $G = {}^tM\,M = {}^tT\,T$. ومن ثمّ يكون $M = OT$ إذ عرّفنا المصفوفة O بالعلاقة $O = ({}^tM)^{-1}\,{}^tT = {}^t(T\,M^{-1})$.

بقي أن نثبتَ أنّ $O \in \mathcal{O}(n)$، ولكنّه أمر واضح لأنّ المساواة ${}^tM\,M = {}^tT\,T$ تقتضي:

$$O = M\,T^{-1} = (T\,M^{-1})^{-1} = ({}^tO)^{-1}$$

بذلك نكون قد أثبتنا الشق المتعلّق بوجود التفريق من المبرهنة.

لنثبت إذن الوحدانية. لنفترض أنّ $M = OT = O'T'$ ، حيث تُحقّق الثنائيتان (O,T) و (O',T') شروط المبرهنة. عندئذ يكون $TT'^{-1} = {}^tOO'$ ، أي تكون المصفوفة $D = TT'^{-1}$ مصفوفةً مثلّثيّة عليا ثوابت قطرها الأساسي موجبة تماماً، وهي أيضاً مصفوفة متعامدة أي $D \in \mathcal{O}(n)$. وهذا يقتضي بالطبع أن يكون $D = I_n$ ، أي $T = T'$ ، ومن ثَمّ $O = O'$. ❐

6. اختزال التطبيقات الخطيّة المتناظرة

في كامل هذه الفقرة، يمثّل E فضاءً إقليدياً بُعدُه n ينتمي إلى $\mathbb{N}^*$.

6-1. مبرهنة. ليكن u تطبيقاً خطيّاً متناظراً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ تتحقّق الخواص الآتية:

1. إذا كان F فضاءً شعاعيّاً جزئياً من E ، يُحقّق $u(F) \subset F$ ، كان $u(F^\perp) \subset F^\perp$.
2. إذا كانت λ و μ قيمتين ذاتيتين مختلفتين للتطبيق u ، كان الفضاءان الجزئيان الذاتيان $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$ و $E_\mu = \ker(u - \mu I_E)$ متعامدين أي $E_\lambda \perp E_\mu$.
3. إنّ طيف u غير خال أي $\mathrm{sp}(u) \neq \varnothing$ ، أي إنّ للتطبيق الخطيّ u قيمة ذاتية واحدة على الأقل.

الإثبات

1. لتكن x من $F^\perp$. عندئذ، أيّاً كان z من F ، كان

$$\langle u(x), z\rangle = \langle x, u^*(z)\rangle \overset{u=u^*}{=} \langle \underset{F^\perp \lrcorner}{x}, \underset{F \lrcorner}{u(z)} \rangle = 0$$

إذن $u(x) \in F^\perp$. وهذا ما يُثبت أنّ $u(F^\perp) \subset F^\perp$.

2. لتكن (x,y) من $E_\lambda \times E_\mu$. عندئذ

$$\begin{aligned} \lambda\langle x,y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle &\overset{x\in E_\lambda}{=} \langle u(x), y\rangle \\ = \langle x, u^*(y)\rangle &\overset{u=u^*}{=} \langle x, u(y)\rangle \overset{y\in E_\mu}{=} \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x,y\rangle \end{aligned}$$

وهذا يقتضي أنّ $\langle x,y\rangle = 0$ لأنّ $\lambda \neq \mu$.

3. لتكن المجموعة الجزئية $S = \left\{x \in E : \|x\| = 1\right\}$ من E. إنّها مجموعة مغلقة ومحدودة في الفضاء الشعاعيّ المنظّم E، فهي إذن مجموعة متراصّة لأن بُعد E منته. ومن ثمّ فإن استمرار التابع الحقيقي الآتي

$$\varphi : S \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle u(x), x\rangle$$

على هذه المجموعة المتراصّة يجعله يبلغ حدّه الأعلى عليها، أي يوجد في S عنصر x_0 يحقّق

$$\lambda = \varphi(x_0) = \max_{x\in S} \varphi(x)$$

ويكون لدينا، بناءً على تعريف λ،

$$\forall y \in E, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \langle u(x_0 + ty), x_0 + ty\rangle \leq \lambda \|x_0 + ty\|^2$$

لأنّه في حالة $x_0 + ty \neq 0$ يكون الشعاع $z = \dfrac{1}{\|x_0 + ty\|}(x_0 + ty)$ عنصراً من S.

وينتج من نشر المتراجحة السابقة أنه مهما كان y من E ومهما كان العدد الحقيقي t كان

$$t^2(\lambda \|y\|^2 - \langle u(y), y\rangle) + 2t(\lambda\langle x_0, y\rangle - \langle u(x_0), y\rangle) \geq 0$$

وينجم عن ذلك أنّ أمثال t معدومة، أي

$$\forall y \in E, \quad \lambda\langle x_0, y\rangle - \langle u(x_0), y\rangle = \langle \lambda x_0 - u(x_0), y\rangle = 0$$

وهذا يقتضي أن $u(x_0) = \lambda x_0$، ومن ثمّ يكون $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$ لأنّ $x_0 \neq 0$. ❐

2-6. ملاحظة. إذا كان u تطبيقاً خطيّاً متناظراً من $\mathcal{L}(E)$. كان $-u$ تطبيقاً خطيّاً متناظراً أيضاً، وينتج من الإثبات السابق أنّ كلاًّ من العددين

$$\Lambda_{\min} = \min_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle \quad \text{و} \quad \Lambda_{\max} = \max_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$$

عنصر من $\mathrm{sp}(u)$. ومن جهة أخرى، تتحقّق دوماً المتراجحة

$$\forall \mu \in \mathrm{sp}(u), \;\; \Lambda_{\min} \leq \mu \leq \Lambda_{\max}$$

تتيح لنا هذه الملاحظة أن نستنتج أنّ

$$\Lambda_{\max} = \max \mathrm{sp}(u) \;\; \text{و} \;\; \Lambda_{\min} = \min \mathrm{sp}(u)$$

ومنه

$$\min\, \mathrm{sp}(u) = \min_{\|x\|=1}\langle u(x), x\rangle \;\; \text{و} \;\; \max\, \mathrm{sp}(u) = \max_{\|x\|=1}\langle u(x), x\rangle$$

3-6. **مبرهنة - التحليل الطيفي**. ليكن u تطبيقاً خطيّاً متناظراً من $\mathcal{L}(E)$. نرمز، أيّاً كان λ من $\mathrm{sp}(u)$، بالرمز P_λ إلى الإسقاط القائم في E على الفضاء الجزئي الذاتي الموافق للقيمة λ : $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$. عندئذ تتحقّق الخواص التالية :

$$① \quad \forall(\lambda,\mu) \in (\mathrm{sp}(u))^2, \quad \lambda \neq \mu \Rightarrow P_\lambda \circ P_\mu = 0$$

$$② \quad I_E = \sum_{\lambda\in\mathrm{sp}(u)} P_\lambda$$

$$③ \quad u = \sum_{\lambda\in\mathrm{sp}(u)} \lambda \cdot P_\lambda$$

وتسمّى الجماعة $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{sp}(u)}$ **تحليلاً طيفيّاً** للتطبيق u، وهي وحيدة بالمعنى الآتي: إذا كانت Λ مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{R}$، وكانت $(Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ جماعة من الإسقاطات القائمة وغير المعدومة من $\mathcal{L}(E)$، بحيث تتحقّق الخواص :

$$❶ \quad \forall(\lambda,\mu) \in \Lambda^2, \quad \lambda \neq \mu \Rightarrow Q_\lambda \circ Q_\mu = 0$$

$$❷ \quad I_E = \sum_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda$$

$$❸ \quad u = \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda \cdot Q_\lambda$$

عندئذ لا بُدّ أن يكون $\Lambda = \mathrm{sp}(u)$ و $\forall\lambda \in \Lambda, \quad Q_\lambda = P_\lambda$.

وأخيراً، إذا كان λ من $\mathrm{sp}(u)$، وعرّفنا كثير الحدود

$$\ell_\lambda(X) = \prod_{\mu\in\mathrm{sp}(u)\setminus\{\lambda\}} \frac{X-\mu}{\lambda-\mu}$$

من $\mathbb{R}[X]$ كان $P_\lambda = \ell_\lambda(u)$.

الإثبات

لنثبت أولاً أنّ الجماعة $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{sp}(u)}$ تُحقّق الخواص ① و ② و ③.

- لتكن λ و μ عنصرين مختلفين من $\mathrm{sp}(u)$. عندئذ استناداً إلى المبرهنة 6-1، يكون $E_\lambda \perp E_\mu$ ومنه $\mathrm{Im}\, P_\mu = E_\mu \subset E_\lambda^\perp = \ker P_\lambda$. إذن $P_\lambda \circ P_\mu = 0$.
- من ناحية أخرى، لنعرّف $F = \overset{\perp}{\bigoplus}_{\lambda\in\mathrm{sp}(u)} E_\lambda$، فيكون لدينا وضوحاً $u(F) \subset F$، ومن ثَمّ $u(F^\perp) \subset F^\perp$، بناءً على المبرهنة 6-1.

لنفترض جدلاً أنّ $F \neq E$ أي $F^{\perp} \neq \{0\}$ ، ولنتأمّل التطبيق الخطّي

$$v = u_{\|F^{\perp}} : F^{\perp} \to F^{\perp}, \quad x \mapsto u(x)$$

نتحقّق بسهولة أنّ v تطبيق خطيّ متناظر من $\mathcal{L}(F^{\perp})$ ، إذن $\mathrm{sp}(v) \neq \varnothing$. أي يوجد λ_0 ينتمي إلى $\mathrm{sp}(v)$ ويوجد في $F^{\perp}$ عنصر x يكون شعاعاً ذاتياً للتطبيق v موافقاً للقيمة الذاتيّة λ_0 . أي $x \neq 0$ و $u(x) = v(x) = \lambda_0 x$ ، ومنه

$x \in E_{\lambda_0} \cap (F^{\perp}) \subset E_{\lambda_0} \cap (E_{\lambda_0}^{\perp}) = \{0\}$ و $x \neq 0$.

يُثبت هذا التناقض، أنّ $E = F$. أي إنّ $E = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)}} E_{\lambda}$. فإذا كانت x من E ، أمكن كتابتها بطريقة وحيدة بالشكل $x = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} x_{\lambda}$ حيث $x_{\lambda} \in E_{\lambda}$. وتُبيِّن الخاصّة ① أنّ

$$\forall(\lambda,\mu) \in (\mathrm{sp}(u))^2, \ \lambda \neq \mu \Rightarrow P_{\lambda}(x_{\mu}) = P_{\lambda} \circ P_{\mu}(x_{\mu})) = 0$$

وهذا يقتضي، انطلاقاً من المساواة $x = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} x_{\lambda}$ ، أن يكون

$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}(u), \ P_{\lambda}(x) = x_{\lambda}$$

ومن ثَمّ يكون $x = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} P_{\lambda}(x)$. وهذه هي الخاصّة ② .

- وأخيراً، لمّا كان $E_{\lambda} = \ker(u - \lambda I_E)$ ، نتج أنّ

$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}(u), \ u \circ P_{\lambda} = \lambda \cdot P_{\lambda}$$

ومنه

$$u = u \circ I_E = u \circ \left(\sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} P_{\lambda} \right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} u \circ P_{\lambda} = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \lambda \cdot P_{\lambda}$$

وهذه هي الخاصّة ③ .

لنأتِ إلى إثبات الوحدانيّة. نبدأ بتعريف الفضاءات الشعاعية الجزئية $F_{\lambda} = \mathrm{Im}\, Q_{\lambda}$ حيث λ من Λ ، وهي جميعاً غير تافهة، أي لا تساوي $\{0\}$ ، لأنّ $\forall \lambda \in \Lambda, \quad Q_{\lambda} \neq 0$.

ليكن λ من Λ ، وليكن x عنصراً من $F_{\lambda} \cap (\sum\limits_{\mu \in \Lambda \backslash \{\lambda\}} F_{\mu})$ إذن

$$x \in F_{\lambda} \text{ و } x = \sum_{\mu \in \Lambda \backslash \{\lambda\}} x_{\mu} \quad \text{حيث} \quad \forall \mu \in \Lambda \backslash \{\lambda\}, x_{\mu} \in F_{\mu}$$

وبالاعتماد على الخاصّة ❶ يكون

$$x = Q_\lambda(x) = \sum_{\mu\in\Lambda\setminus\{\lambda\}} Q_\lambda(x_\mu) = \sum_{\mu\in\Lambda\setminus\{\lambda\}} Q_\lambda \circ Q_\mu(x_\mu) = 0$$

فنكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall\lambda \in \Lambda,\ \ F_\lambda \cap \Big(\sum_{\mu\in\Lambda\setminus\{\lambda\}} F_\mu\Big) = \{0\}$$

إذن المجموع $\sum_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ مجموع مباشر.

ومن جهة أخرى، تُبيّن الخاصّة ❷ أنّ $E = \sum_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$. إذن $E = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$.

ليكن λ من Λ، نجد اعتماداً على الخاصّتين ❶ و ❷ أنّ $u(x) = \lambda x$ أيّاً كانت x من F_λ، وهذا يقتضي أنّ $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$، و $F_\lambda \supset E_\lambda$. إذن $\Lambda \subset \mathrm{sp}(u)$ وكذلك

$$\forall\lambda \in \Lambda, \quad F_\lambda \subset E_\lambda$$

ومن ثَمّ

$$\dim E = \sum_{\lambda\in\Lambda} \dim F_\lambda \overset{(1)}{\leq} \sum_{\lambda\in\Lambda} \dim E_\lambda \overset{(2)}{\leq} \sum_{\lambda\in\mathrm{sp}(u)} \dim E_\lambda = \dim E$$

نستنتج من ذلك أنّه لا بُدّ أن تكون هنالك مساواة في جميع المتراجحات السابقة : المساواة (2) تقتضي $\Lambda = \mathrm{sp}(u)$، والمساواة (1) تقتضي $F_\lambda = E_\lambda$ أيّاً كانت λ من Λ.

وهذا يُثبت الوحدانيّة.

أخيراً، ينجم عن ① و ③ ما يأتي :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ u^k = \sum_{\lambda\in\mathrm{sp}(u)} \lambda^k \cdot P_\lambda$$

وهذه المساواة صحيحة أيضاً حين يكون $k = 0$ بناءً على ② ومنه نجد

$$\forall S \in \mathbb{R}[X],\ \ S(u) = \sum_{\mu\in\mathrm{sp}(u)} S(\mu) \cdot P_\mu$$

وبوجه خاص نجد بأخذ $S = \ell_\lambda(X)$ أنّ

$$\ell_\lambda(u) = \sum_{\mu\in\mathrm{sp}(u)} \ell_\mu(\lambda) \cdot P_\mu = \sum_{\mu\in\mathrm{sp}(u)} \delta_{\mu,\lambda} \cdot P_\mu = P_\lambda$$

وبهذا يكتمل البرهان. ❐

6-4. **نتيجة**. ليكن u تطبيقاً خطيّاً متناظراً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ يوجد في E أساس متعامد نظاميّ $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ يجعل المصفوفة $\mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ قطرية.

الإثبات

لنتأمّل، أيّاً كانت λ من $\mathrm{sp}(u)$، الفضاء الذاتي $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$. عندئذ يكون لدينا، استناداً إلى المبرهنة السابقة:

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)}^{\perp} E_\lambda$$

ونحصل على الأساس المتعامد النظامي المطلوب بأن نختار، أيّاً كانت λ من $\mathrm{sp}(u)$، أساساً متعامداً نظامياً $\mathcal{E}_\lambda$ في E_λ، ومن ثمّ نضع $\mathcal{E} = \bigcup_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \mathcal{E}_\lambda$. ❑

يمكن ترجمةُ النتيجة السابقة إلى لغة المصفوفات فنحصل على النتيجة الآتية.

6-5. **نتيجة**. لتكن A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة. عندئذ توجد مصفوفة متعامدة O من $\mathcal{O}(n)$، وتوجد مصفوفة قطريّة D من $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$، تُحقّقان

$$A = O\,D\,{}^tO$$

وأخيراً نختتم هذا البحث بالخاصتين الآتيتين تاركين إثباتهما البسيط تمريناً للقارئ.

6-6. **نتيجة**. ليكن u تطبيقاً خطيّاً متناظراً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ يتحقّق التكافؤان التاليان:

- ❖ u موجب $\Leftrightarrow \mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$
- ❖ u معرّف موجب $\Leftrightarrow \mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$

6-7. **نتيجة**. ليكن u تطبيقاً خطيّاً متناظراً من $\mathcal{L}(E)$، ولنزوّد $\mathcal{L}(E)$ بنظيم التطبيقات الخطّية المستمرة. عندئذ يكون

$$\|u\| = \max_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} |\lambda| = \max(-\Lambda_{\min}, \Lambda_{\max})$$

حيث

$$\Lambda_{\max} = \max \mathrm{sp}(u) = \max_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle$$

و

$$\Lambda_{\min} = \min \mathrm{sp}(u) = \min_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle$$

تمرينات

التمرين 1. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي، ولتكن $(e_1,\ldots,e_n)$ جملة من E تُحقق:

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \|e_i\| = 1 \quad ①$$

$$\forall x \in E, \quad \sum_{i=1}^{n} \left|\langle x, e_i\rangle\right|^2 = \|x\|^2 \quad ②$$

أثبت أن الجملة $(e_1,\ldots,e_n)$ أساسٌ متعامدٌ نظامي للفضاء E .

الحل

- لتكن j من $\mathbb{N}_n$. عندئذ نستنتج من ① و ② أنّ

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\langle e_j, e_i\rangle\right|^2 = \|e_j\|^2 = 1$$

ومن ثَمّ

$$\sum_{i \in \mathbb{N}_n \setminus \{j\}} \left|\langle e_j, e_i\rangle\right|^2 = 0$$

وهذا يبرهن على أنّ $e_i \perp e_j$ في حالة $j \neq i$. فالجملة $(e_1,\ldots,e_n)$ جملة متعامدة نظاميّة.

- ليكن x عنصراً من E ، ولنعرّف

$$y = x - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle e_i$$

عندئذ نتيقّن مباشرة أنّ $y \perp e_j$ أيّاً كانت قيمة j من $\mathbb{N}_n$. إذن $y \perp \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle e_i$.

وبالاستفادة من علاقة فيثاغورث يمكننا أن نكتب

$$\|y\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left|\langle e_i, x\rangle\right|^2 = \|x\|^2$$

واستناداً إلى ② نستنتج أنّ $\|y\| = 0$ ؛ أي إنّ

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle e_i$$

فالجملة $(e_1,\ldots,e_n)$ تولّد الفضاء E ، وهي أساس متعامد نظامي فيه. ■

التمرين 2. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي، ولتكن $(x_1,\ldots,x_n)$ جملة أشعة من E.

1. أثبت أنّ $\sum_{i<j}\|x_i-x_j\|^2 = n\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2 - \left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2$.

2. نفترض أنّ $\|x_i\|\le R$ أياً كان i من $\mathbb{N}_n$، وأنّ $\|x_i-x_j\|\ge 2$ في حالة $i\ne j$.
أثبت أنّ $\sqrt{2-\frac{2}{n}}\le R$. هل هذه أفضل نتيجة ممكنة ؟

الحل

1. لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i<j\le n}\|x_i-x_j\|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}\|x_i-x_j\|^2\\
&= \frac{1}{2}\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}\left(\|x_i\|^2+\|x_j\|^2-2\,\mathrm{Re}\langle x_i,x_j\rangle\right)\\
&= n\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2-\mathrm{Re}\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}\langle x_i,x_j\rangle\\
&= n\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2-\mathrm{Re}\left\langle\sum_{i\in\mathbb{N}_n}x_i,\sum_{j\in\mathbb{N}_n}x_j\right\rangle\\
&= n\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2-\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2
\end{aligned}$$

2. نستنتج من المتراجحة السابقة أنّ

$$4\times\frac{(n-1)n}{2}\le n^2R^2-\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2\le n^2R^2$$

وهذه يمكن إصلاحها لنستنتج أنّ

$$\sqrt{\frac{2(n-1)}{n}}\le R.$$

هذه النتيجة تعني أنّه في أي كرة مركزها المبدأ ونصف قطرها أصغر تماماً من $R_n=\sqrt{2-\frac{2}{n}}$ لا يمكننا إيجاد n نقطة المسافات بين أي اثنتين منها أكبر أو تساوي 2. فهل يكون الحد R_n أفضل ما يمكن تحقيقه بوجه عام؟

الجواب هو نعم. ليكن $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ الأساس القانوني في $\mathbb{R}^n$. ولنزوّد هذا الفضاء بالنظيم الإقليدي المألوف. ثُمّ لنتأمّل الأشعة

$$x_k = \sqrt{2}\left(e_k - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e_j\right), \quad k \in \mathbb{N}_n$$

عندئذ تقع جميع هذه الأشعة على سطح الكرة التي مركزها المبدأ ونصف قطرها R_n ونجد وضوحاً أنّ $\|x_i - x_j\| = 2$ في حالة $i \neq j$. ممّا يبرهن على أنّ المتراجحة التي حصلنا عليها أمثليّة. ■

التمرين 3. ليكن $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي. نذكّر بأنّ $\overline{B}(0,r)$ هي الكرة المغلقة التي مركزها 0 ونصف قطرها $r > 0$، وإذا كان (x,y) من E^2 فإنّنا نعرّف

$$[x,y] = \left\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\right\}.$$

ليكن (a,b) من $(\mathbb{R}_+)^2$ أثبت أنّ

$$\left([x,y] \subset \overline{B}(0,a+b) \setminus \overline{B}(0,a)\right) \Rightarrow \|x-y\| < 2\sqrt{b^2 + 2ba}$$

الحل

لنلاحظ أنّ الفرْض $[x,y] \subset \overline{B}(0,a+b) \backslash \overline{B}(0,a)$ يقتضي أنّ الشعاعين x و y ينتميان إلى الكرة $\overline{B}(0,a+b)$ وأنّ $\dfrac{x+y}{2}$ منتصف القطعة $[x,y]$ يقع خارج الكرة $\overline{B}(0,a)$. إذن

$$\|x\| \le a+b \quad \text{و} \quad \|y\| \le a+b \quad \text{و} \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\| > a$$

وعليه نستنتج من مساواة متوازي الأضلاع

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \\ &< 4(a+b)^2 - 4a^2 = 4(b^2 + 2ab)\end{aligned}$$

أو

$$\|x-y\| < 2\sqrt{b^2 + 2ab}$$

وبذا يتمّ إثبات الخاصة المطلوبة. ■

التمرين 4. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ و $(F,\langle\cdot,\cdot\rangle_F)$ فضاءَي جداء سلمي على الحقل $\mathbb{R}$. وليكن $f : E \to F$ تطبيقاً يحقّق الشرطين:

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad \left\|f(x)-f(y)\right\|_F = \left\|x-y\right\|_E \quad \text{و} \quad f(0)=0$$

أثبت أنّ التطبيق f خطّي. **مساعدة**. تأمّل منتصف القطعة $[x,y]$.

الحل

لنلاحظ أوّلاً أنّه في فضاء جداء سلّمي يتحقّق الاقتضاء الآتي:

$$\left(\|a-b\| = \|c-b\| = \frac{1}{2}\|a-c\|\right) \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$$

لأنّه استناداً إلى متطابقة متوازي الأضلاع لدينا

$$\left\|2b-(a+c)\right\|^2 = 2\left\|a-b\right\|^2 + 2\left\|c-b\right\|^2 - \left\|a-c\right\|^2 = 0$$

ليكن x و y عنصرين من E^2، نضع $z = \frac{1}{2}(x+y)$. عندئذ نجد عملاً بالفرْض

$$\left\|f(z)-f(x)\right\|_F = \left\|f(z)-f(y)\right\|_F = \frac{1}{2}\left\|f(x)-f(y)\right\|_F$$

إذن $f(z) = \frac{1}{2}\big(f(x)+f(y)\big)$. فنكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

وبوجه خاصّ، في حالة $y=0$ لدينا

$$\forall x \in E, \quad f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$$

وبالاستفادة من المساواتين السابقتين نستنتج أنّ

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad f(x+y) = f(x)+f(y)$$

وبأسلوب معروف نستنتج من المساواة السابقة أنّ

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \forall x \in E, \quad f(rx) = rf(x)$$

ولمّا كانت المساواة المعطاة في الفرْض تقتضي استمرار التابع f، استنتجنا ممّا سبق أنّ

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

وبذا نكون قد استكملنا إثبات أنّ التابع f تابعٌ خطّي. ■

التمرين 5. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي. أياً كان (x,y) من $E\times E$ نضع

$$d(x,y)=\frac{\|x-y\|}{\sqrt{1+\|x\|^2}\,\sqrt{1+\|y\|^2}}$$

نريد أنّ نثبتَ أنّ $\forall(x,y,z)\in E^3,\ \ d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$.

1. أثبت أنّه في حالة λ و μ من $\mathbb{R}$ و u و v من E لدينا
$$\|u\|=\|v\|=1\ \ \Rightarrow\ \ \|\lambda u-\mu v\|=\|\lambda v-\mu u\|$$.

2. أثبت أنّ : $$\left\|\frac{y}{\|y\|^2}-\frac{x}{\|x\|^2}\right\|=\frac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|},\quad \forall(x,y)\in\big(E\backslash\{0\}\big)^2$$.

3. نتأمّل الفضاء $\tilde{E}=E\times\mathbb{K}$ مزوداً بالجداء السلمي $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\tilde{E}}$ المعرف كما يأتي:
$$\langle(x,\alpha),(y,\beta)\rangle_{\tilde{E}}=\langle x,y\rangle+\bar{\alpha}\beta$$
والتطبيق $f:E\to\tilde{E},x\mapsto(x,1)$. عبّر عن $d(x,y)$ بدلالة $f(x)$ و $f(y)$ ثمّ استنتج إثبات المطلوب.

الحل

1. لتكن λ و μ من $\mathbb{R}$ و u و v من E، ولنفترض أنّ $\|u\|=\|v\|=1$. عندئذ
$$\|\lambda u-\mu v\|^2=\lambda^2+\mu^2-2\lambda\mu\,\mathrm{Re}\big(\langle u,v\rangle\big)$$
$$\|\lambda v-\mu u\|^2=\lambda^2+\mu^2-2\lambda\mu\,\mathrm{Re}\big(\langle v,u\rangle\big)$$
إذن $\|\lambda u-\mu v\|=\|\lambda v-\mu u\|$.

2. ليكن x و y شعاعين من $E\backslash\{0\}$، لنطبّق النتيجة السابقة بعد أخذ
$$u=\frac{x}{\|x\|},\quad v=\frac{y}{\|y\|},\quad \lambda=\frac{1}{\|x\|},\quad \mu=\frac{1}{\|y\|}$$
فنجد أنّ
$$\left\|\frac{y}{\|y\|^2}-\frac{x}{\|x\|^2}\right\|=\frac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|}$$

3. نلاحظ أنّ:
$$d(x,y)=\frac{\|x-y\|}{\sqrt{1+\|x\|^2}\,\sqrt{1+\|y\|^2}}=\frac{\|f(x)-f(y)\|}{\|f(x)\|\|f(y)\|}=\left\|\frac{f(x)}{\|f(x)\|^2}-\frac{f(y)}{\|f(y)\|^2}\right\|$$

وعليه يكون لدينا في حال x و y و z من E ما يأتي :

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \left\| \frac{f(x)}{\|f(x)\|^2} - \frac{f(z)}{\|f(z)\|^2} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{f(x)}{\|f(x)\|^2} - \frac{f(y)}{\|f(y)\|^2} \right\| + \left\| \frac{f(y)}{\|f(y)\|^2} - \frac{f(z)}{\|f(z)\|^2} \right\| \\ &\leq d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

وهذا يثبت المتراجحة المطلوبة. ■

التمرين 6. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء الجداء السلمي $\mathbb{R}[X]$ مزوداً بالجداء السلمي

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}\,t$$

عيّن الإسقاط القائم في E على الفضاء الشعاعي الجزئي F المؤلّف من كثيرات الحدود التي لا تزيد درجتها عن 3 وتقبل 0 و 1 جذوراً لها. ثم احسب مسافة X^n عن F .

الحل

لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} F &= \left\{(aX+b)X(X-1) : (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \operatorname{vect}\left(X(X-\tfrac{1}{2})(X-1), X(X-1)\right) \end{aligned}$$

لنعرّف

$$Q_1 = X(X-\tfrac{1}{2})(X-1) \text{ و } Q_0 = X(X-1)$$

نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} \|Q_0\|^2 &= \int_0^1 x^2(x-1)^2\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{30} \\ \|Q_1\|^2 &= \int_0^1 \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 x^2(x-1)^2\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{840} \\ \langle Q_1,Q_0\rangle &= \int_0^1 \left(x-\tfrac{1}{2}\right)x^2(x-1)^2\,\mathrm{d}\,x = 0 \end{aligned}$$

نستنتج أنّ المسقط القائم لكثير حدودٍ P على F يُعطى بالصيغة

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_F(P) &= \frac{\langle P, Q_0\rangle}{\|Q_0\|^2}Q_0 + \frac{\langle P, Q_1\rangle}{\|Q_1\|^2}Q_1 \\ &= 30\langle P, Q_0\rangle Q_0 + 840\langle P, Q_1\rangle Q_1\end{aligned}$$

وبوجه خاص

$$\mathcal{P}_F(X^n) = 30\langle X^n, Q_0\rangle Q_0 + 840\langle X^n, Q_1\rangle Q_1$$

ولكن

$$\begin{aligned}\langle X^n, Q_0\rangle &= \int_0^1 x^{n+1}(x-1)\,\mathrm{d}\,x = \frac{-1}{(n+2)(n+3)} \\ \langle X^n, Q_1\rangle &= \int_0^1 \left(x - \tfrac{1}{2}\right)x^{n+1}(x-1)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int_0^1 \left(x^{n+3} - \frac{3}{2}x^{n+2} + \frac{1}{2}x^{n+1}\right)\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{-n}{2(n+2)(n+3)(n+4)}\end{aligned}$$

إذن

$$\mathcal{P}_F(X^n) = \frac{-30}{(n+2)(n+3)(n+4)}\big((n+4)Q_0 + 14nQ_1\big)$$

وإذا وضعنا $\Delta_n = d(X^n, F)$ كان لدينا

$$\begin{aligned}\Delta_n^2 &= \|X^n - \mathcal{P}_F(X^n)\|^2 = \|X^n\|^2 - \|\mathcal{P}_F(X^n)\|^2 \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{900}{(n+2)^2(n+3)^2(n+4)^2}\big((n+4)^2\,\|Q_0\|^2 + 196n^2\,\|Q_1\|^2\big) \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{240(n^2+n+2)}{(n+2)^2(n+3)^2(n+4)^2}\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$d(X^n, F) = \sqrt{\frac{1}{2n+1} - \frac{240(n^2+n+2)}{(n+2)^2(n+3)^2(n+4)^2}}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 7. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي، وليكن $(e_1,\ldots,e_n)$ أساساً متعامداً نظامياً في E. ولتكن $(x_1,\ldots,x_n)$ جملة أشعة من E تُحقّق $\sum_{k=1}^{n}\|e_k - x_k\|^2 < 1$. أثبت أن الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ أساس للفضاء E.

الحل

يكفي أن نثبتَ أن الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ جملةٌ حرّة. لنفترض أنّ $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k = 0$ عندئذ نستنتج من المساواة

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(e_k - x_k)$$

أنّ

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2} \leq \left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n}\left|\lambda_k\right| \|e_k - x_k\| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\|e_k - x_k\|^2}$$

ومن ثَمّ

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2}\left(1 - \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\|e_k - x_k\|^2}\right) \leq 0$$

واستناداً إلى الفرْض نجد $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2} \leq 0$، وهذا يقتضي أنّ $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 8. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي على الحقل $\mathbb{R}$، ولتكن $(e_1,\ldots,e_n)$ جملة أشعة من E. نفترض أنّ

- $\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\quad i\neq j \Rightarrow \langle e_i,e_j\rangle < 0$.
- $\exists x\in E,\ \forall i\in\mathbb{N}_n,\quad \langle x,e_i\rangle > 0$.

أثبت أنّ الجملة $(e_1,\ldots,e_n)$ حرة.

الحل

لنفترض أنّ الجملة $(e_1,\ldots,e_n)$ مرتبطة خطيّاً عندئذ توجد أعداد $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}_n}$ ليست جميعها معدومة تُحقّق $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k = 0$. نستنتج من المساواة $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\langle x,e_k\rangle = 0$ ومن كون الأعداد $\left(\langle x,e_k\rangle\right)_{k\in\mathbb{N}_n}$ موجبة تماماً أنّ كلاً من المجموعتين المنفصلتين

$$A_- = \left\{k\in\mathbb{N}_n, \lambda_k < 0\right\} \quad \text{و} \quad A_+ = \left\{k\in\mathbb{N}_n, \lambda_k > 0\right\}$$

مجموعة غير خالية. ولكن عندئذ يمكننا أن نتأمّل الشعاع

$$v = \sum_{k\in A_+}\lambda_k e_k = \sum_{\ell\in A_-}(-\lambda_\ell)e_\ell$$

فنرى أنّ

$$\|v\|^2 = \left\langle \sum_{k\in A_+}\lambda_k e_k, \sum_{\ell\in A_-}(-\lambda_\ell)e_\ell \right\rangle = \sum_{k\in A_+}\sum_{\ell\in A_-}\lambda_k(-\lambda_\ell)\langle e_k,e_\ell\rangle$$

وهذا يقتضي أنّ $\|v\|^2 < 0$ إذا استفدنا من النقطة الأولى، وهو تناقض صارخ. إذن لا بُدّ أن تكون الجملة $(e_1,\ldots,e_n)$ جملة حرّة. ■

التمرين 9. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي. وليكن p إسقاطاً على E، أي تطبيقاً خطياً يحقق $p^2 = p$، أثبت تكافؤ الخواص الآتية:

① التطبيق p هو إسقاط قائم.

② $p^* = p$.

③ $\ker p \subset (\operatorname{Im} p)^\perp$.

④ $\forall x\in E,\ \|p(x)\| \le \|x\|$.

الحل

① ⇐ ② ليكن x و y عنصرين من E . عندئذ

$$\begin{aligned}\langle p(x),y\rangle &= \langle p(x),y-p(y)+p(y)\rangle \\ &= \underbrace{\langle p(x),y-p(y)\rangle}_{0} + \langle p(x),p(y)\rangle && : \operatorname{Im} p \perp \ker p \\ &= \langle p(x),p(y)\rangle \\ &= \langle p(x),p(y)\rangle + \underbrace{\big\langle x-p(x),p(y)\big\rangle}_{0} && : \operatorname{Im} p \perp \ker p \\ &= \langle x,p(y)\rangle\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ $p^* = p$.

② ⇐ ③ ليكن x عنصراً من $\ker p$ ، وليكن y عنصراً من $\operatorname{Im} p$. أي $p(x)=0$ و $y = p(y)$. عندئذ يكون لدينا

$$\langle y,x\rangle = \langle p(y),x\rangle = \langle y,p^*(x)\rangle = \langle y,p(x)\rangle = \langle y,0\rangle = 0$$

ومن ثَمّ $\operatorname{Im} p \perp \ker p$.

③ ⇐ ④ ليكن x عنصراً من E . لمّا كان $x-p(x)$ عنصراً من $\ker p$ ، وكان $p(x)$ عنصراً من $\operatorname{Im} p$ ، استنتجنا أنّ $p(x) \perp \big(x-p(x)\big)$ وعليه

$$\|x\|^2 = \|x-p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$$

ومن ثَمّ $\|p(x)\| \le \|x\|$.

④ ⇐ ① ليكن x عنصراً من $\ker p$ ، وليكن y عنصراً من $\operatorname{Im} p$. أي $p(x)=0$ و $y = p(y)$. عندئذ يكون لدينا في حالة λ من $\mathbb{K}$ ما يأتي:

$$\|y\| = \|p(\lambda x + y)\| \le \|\lambda x + y\|$$

أو

$$\|y\|^2 \le \|\lambda x+y\|^2 = |\lambda|^2\,\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda\langle y,x\rangle) + \|y\|^2$$

فإذا افترضنا أنّ $x \ne 0$ واخترنا $\lambda = -\dfrac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}$ استنتجنا من المتراجحة السابقة أنّ

$$0 \le -\big|\langle x,y\rangle\big|^2$$

وهذا يبرهن أنّ $\langle x,y\rangle = 0$. والاسقاط p إسقاط قائم. ■

التمرين 10. لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة موجبة من المرتبة n . أثبت أنّ

$$\forall (X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})\right)^2, \quad \left|X^*AY\right|^2 \leq (X^*AX)(Y^*AY)$$

واستنتج أنّ $\sup\limits_{1\leq i\leq n} a_{ii} = \sup\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$.

الحل

▫ لتكن λ من $\mathbb{K}$. عندئذ يكون لدينا $(X+\lambda Y)^* A(X+\lambda Y) \geq 0$ ، ومن ثَمّ

$$X^*AX + \bar{\lambda}Y^*AX + \lambda X^*AY + \lambda\bar{\lambda}Y^*AY \geq 0$$

أو

$$X^*AX + 2\,\mathrm{Re}(\lambda X^*AY) + |\lambda|^2 \; Y^*AY \geq 0$$

إذن، مهما تكن θ من $\mathbb{R}$ ، يُحافظ ثلاثي الحدود الآتي على إشارة موجبة

$$t \mapsto X^*AX + 2t\,\mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}\theta}X^*AY) + t^2 Y^*AY$$

فلا بُدّ أن يكون مميِّزه سالباً أي

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \left|\mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}\theta}X^*AY)\right|^2 - (X^*AX)(Y^*AY) \leq 0$$

فإذا اخترنا θ من $-\arg(X^*AY)$ ، في حالة $X^*AY \neq 0$ استنتجنا أنّ

$$|X^*AY|^2 \leq (X^*AX)(Y^*AY)$$

وهي نتيجة صحيحة أيضاً في حالة $X^*AY = 0$.

▫ من الواضح أنّ $\sup\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}| \geq \sup\limits_{1\leq i\leq n} a_{ii}$. ومن جهة أخرى، إذا كان $(e_1,\ldots,e_n)$ الأساس القانوني في $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. واستفدنا من المتراجحة السابقة أمكننا أن نكتب في حالة i و j من $\mathbb{N}_n$ ما يأتي :

$$|a_{ij}|^2 = |e_i^*Ae_j|^2 \leq (e_i^*Ae_i)(e_j^*Ae_j) = a_{ii}a_{jj} \leq \sup_{1\leq k\leq n} a_{kk} \cdot \sup_{1\leq k\leq n} a_{kk}$$

ومنه

$$|a_{ij}| \leq \sup_{1\leq k\leq n} a_{kk}$$

وهذا يثبت صحّة المساواة المطلوبة

$$\sup_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}| = \sup_{1\leq k\leq n} a_{kk}$$

التمرين 11. لتكن A_1 و A_2 مصفوفتين هرمتيَّتين من المرتبة n. أثبت أنّ A_1A_2 هرمتيّة إذا، وفقط إذا، كان $A_2A_1 = A_1A_2$.

الحل

في الحقيقة، لمّا كان $A_2A_1 = A_2^*A_1^* = (A_1A_2)^*$ استنتجنا أنّ

$$(A_1A_2)^* = A_1A_2 \Leftrightarrow A_1A_2 = A_2A_1$$

وهي الخاصّة المطلوبة. ■

التمرين 12. لتكن $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ من $\mathbb{R}^4$. نضع $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_3 + \mathrm{i}\,\lambda_4 \\ \lambda_3 - \mathrm{i}\,\lambda_4 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}$.

أثبت أنه إذا كان $0 < \lambda_1$ و $\det A = 1$ كانت المصفوفة A معرّفة موجبة.

الحل

في الحقيقة، إنّ الشرط اللازم والكافي لتكون A معرّفة موجبة هو أن توجد أعداد a و b و c تُحقّق

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ \overline{b} & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

و a و c موجبان تماماً. وهذا يُكافئ الشروط

$$\begin{aligned} a^2 &= \lambda_1 - \lambda_2 \\ ab &= \lambda_3 + \mathrm{i}\,\lambda_4 \\ c^2 + |b|^2 &= \lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned}$$

وهذا يُكافئ أنّ

$$\lambda_1 > \lambda_2 \text{ و } \lambda_1 + \lambda_2 - \frac{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}{\lambda_1 - \lambda_2} > 0$$

أو

$$\lambda_1 > \lambda_2 \text{ و } \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_4^2 > 0$$

وأخيراً نجد أنّ الشرط اللازم والكافي لتكون A معرّفة موجبة هو $\lambda_1 > \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2}$. فإذا لاحظنا أنّ $\det A = \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_4^2$ استنتجنا أنّ الشرطين $\lambda_1 > 0$ و $\det A = 1$ يقتضيان المتراجحة $\lambda_1 > \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2}$ ويثبتان أنّ A معرّفة موجبة في هذه الحالة. ■

التمرين 13. لتكن $O=(a_{ij})$ مصفوفة متعامدة من المرتبة n . أثبت صحّة المتراجحتين:

$$\left|\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}\right| \le n \quad \text{و} \quad \sum_{1\le i,j\le n} \left|a_{ij}\right| \le n\sqrt{n}$$

الحل

ليكن $(e_1,\ldots,e_n)$ الأساس القانوني في $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. عندئذ

$$\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} = \sum_{1\le i,j\le n} \langle Oe_j, e_i\rangle = \left\langle O\left(\sum_{k=1}^{n} e_k\right), \sum_{k=1}^{n} e_k \right\rangle = \langle O\mathbb{1}, \mathbb{1}\rangle$$

إذ عرّفنا $\sum_{k=1}^{n} e_k = \mathbb{1}$. وعليه

$$\left|\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}\right| \le \left|\langle O\mathbb{1}, \mathbb{1}\rangle\right| \le \|O\mathbb{1}\|\|\mathbb{1}\| = \|\mathbb{1}\|^2 = n$$

ومن جهة ثانية، في حالة j من $\mathbb{N}_n$ ، يكون لدينا

$$\sum_{1\le i\le n} \left|a_{ij}\right| = \sum_{1\le i\le n} \left|\langle Oe_j, e_i\rangle\right| \le \sqrt{\sum_{1\le i\le n} \left|\langle Oe_j, e_i\rangle\right|^2 \times \sum_{1\le i\le n} 1}$$

أو

$$\sum_{1\le i\le n} \left|a_{ij}\right| \le \sqrt{n}\ \|Oe_j\| = \sqrt{n}\ \|e_j\| = \sqrt{n}$$

وبجمع هذه المتراجحات عندما تتحوّل j من $\mathbb{N}_n$ ، نجد

$$\sum_{1\le i,j\le n} \left|a_{ij}\right| \le n\sqrt{n}$$

وبذا يتمّ إثبات المطلوب. ∎

التمرين 14. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي منتهي البُعد، وليكن P إسقاطاً عمودياً على E ، وأخيراً ليكن $(e_1,\ldots,e_n)$ أساساً متعامداً نظاميّاً في E . أثبت أنّ

$$\sum_{k=1}^{n} \left\|P(e_k)\right\|^2 = \mathrm{rg}(P)$$

الحل

ليكن $(f_1,\ldots,f_n)$ أساساً متعامداً نظاميّاً آخر في E . عندئذ

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\|P(e_k)\|^2 &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\langle P(e_k),f_j\rangle\right|^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\langle e_k,P(f_j)\rangle\right|^2\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\langle P(f_j),e_k\rangle\right|^2 = \sum_{j=1}^{n}\|P(f_j)\|^2\end{aligned}$$

ولكن إذا عرّفنا الأساس المتعامد النظامي $(f_1,\ldots,f_n)$ ليكون $(f_1,\ldots,f_r)$ أساس الفضاء الجزئي $\mathrm{Im}\,P$ وليكون $(f_{r+1},\ldots,f_n)$ أساس $\ker P$. كان

$$\sum_{k=1}^{n}\|P(e_k)\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\|P(f_j)\|^2 = \sum_{j=1}^{r}\|f_j\|^2 = r = \dim\,\mathrm{Im}\,P = \mathrm{rg}\,P$$

وهي الخاصّة المطلوبة. ■

التمرين 15. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي منتهي البُعد، وليكن T من $\mathcal{L}(E)$. أثبت أنّ $\ker T^* = (\mathrm{Im}\,T)^\perp$ و أنّ $\mathrm{Im}\,T^* = (\ker T)^\perp$.

الحل

في الحقيقة،

$$\begin{aligned}x\in\ker T^* &\Leftrightarrow T^*(x)=0\\ &\Leftrightarrow \forall y\in E,\ \langle y,T^*(x)\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow \forall y\in E,\ \langle T(y),x\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow \forall z\in \mathrm{Im}\,T,\ \langle z,x\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow x\in(\mathrm{Im}\,T)^\perp\end{aligned}$$

إذن $\ker T^* = (\mathrm{Im}\,T)^\perp$.

وبتطبيق النتيجة السابقة على T^* نستنتج أنّ $\ker T = (\mathrm{Im}\,T^*)^\perp$ ومن ثَمّ

$$(\mathrm{Im}\,T^*)^{\perp\perp} = (\ker T)^\perp$$

ولمّا كان الفضاء E منتهي البُعد استنتجنا أنّ $\mathrm{Im}\,T^* = (\mathrm{Im}\,T^*)^{\perp\perp}$ وهذا يُثبتُ المطلوب. ■

التمرين 16. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاءً إقليدياً.

1. ليكن u من $\mathcal{L}(E)$. أثبت أنّ تطبيق الخطيّ u^*u متناظر وقيمه الذاتية موجبة. سنرمز فيما يلي بالرمز $\lambda_{\min}$ إلى أصغر قيمة ذاتية للتطبيق u^*u، و بالرمز $\lambda_{\max}$ إلى أكبر قيمة ذاتية له.
2. ليكن u من $\mathcal{L}(E)$. أثبت أنّ
$$\forall x \in E, \quad \lambda_{\min}(u)\,\|x\|^2 \leq \|u(x)\|^2 \leq \lambda_{\max}(u)\,\|x\|^2$$
3. ليكن u و v من $\mathcal{L}(E)$. أثبت أنّ
$$\forall \nu \in \mathrm{sp}(u\circ v), \quad \lambda_{\min}(u)\lambda_{\min}(v) \leq |\nu|^2 \leq \lambda_{\max}(u)\lambda_{\max}(v)$$

الحل

1. من الواضح أنّ $u^*u = u^*u^{**} = (u^*u)^*$ فالتطبيق u^*u متناظرٌ، وهو موجبٌ لأنّ
$$\forall x \in E, \quad \langle u^*u(x), x\rangle = \|u(x)\|^2 \geq 0$$
إذن $\mathrm{sp}(u^*u) \subset \mathbb{R}_+$.
2. نعلم، في حالة تطبيق خطّي متناظر S، أنّ
$$\max \mathrm{sp}(S) = \sup\left\{\frac{\langle S(z), x\rangle}{\|x\|^2} : x \in E\backslash\{0\}\right\}$$
$$\min \mathrm{sp}(S) = \min\left\{\frac{\langle S(z), x\rangle}{\|x\|^2} : x \in E\backslash\{0\}\right\}$$
وبتطبيق هذه النتيجة على u^*u نستنتج أنّ
$$\lambda_{\max}(u) = \max \mathrm{sp}(u^*u) = \sup\left\{\frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} : x \in E\backslash\{0\}\right\}$$
$$\lambda_{\min}(u) = \min \mathrm{sp}(u^*u) = \min\left\{\frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} : x \in E\backslash\{0\}\right\}$$
وهذا يثبتُ أنّ
$$\forall x \in E, \quad \lambda_{\min}(u)\|x\|^2 \leq \|x\|^2 \leq \lambda_{\max}(u)\|x\|^2$$
3. بتطبيق المتراجحة السابقة على $v(x)$ نستنتج أنّ
$$\forall x \in E, \quad \lambda_{\min}(u)\|v(x)\|^2 \leq \|u\circ v(x)\|^2 \leq \lambda_{\max}(u)\|v(x)\|^2$$

ومن ثَمّ، أيّاً كان x من E، كان

$$\forall x \in E, \quad \lambda_{\min}(u)\lambda_{\min}(v)\|x\|^2 \leq \|u \circ v(x)\|^2 \leq \lambda_{\max}(u)\lambda_{\max}(v)\|x\|^2$$

فإذا كان ν عنصراً من $\operatorname{sp}(u \circ v)$ واخترنا x شعاعاً ذاتيّاً موافقاً للقيمة ν نظيمه يساوي 1، استنتجنا

$$\lambda_{\min}(u)\lambda_{\min}(v) \leq |\nu|^2 \leq \lambda_{\max}(u)\lambda_{\max}(v)$$

وهذه هي المتراجحة المطلوبة. ■

التمرين 17. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي منتهي البُعد، وليكن u من $\mathcal{L}(E)$. نزوّد $\mathcal{L}(E)$ بنظيم التطبيقات الخطيّة المستمرّة على E.

1. أثبت أنّ $\|u\| = \|u^*\|$.
2. نفترض أنّ $\|u\| \leq 1$.
   ① أثبت أنّ $\ker(I-u) = \ker(I-u^*)$.
   ② نعرّف $F_1 = \ker(I-u)$ و $F_2 = \operatorname{Im}(I-u)$. أثبت أنّ $F_1 = F_2^{\perp}$.
   ③ أياً كان p من $\mathbb{N}^*$، نضع $u_p = \dfrac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u^k$. أثبت أنّ المتتالية $\left(u_p(x)\right)_{p\geq 1}$ تتقارب من المسقط القائم للشعاع x على F_1، وذلك أياً كان x من E.

الحل

1. استناداً إلى متراجحة كوشي شوارتز نعلم أنّه في حالة y من E لدينا

$$\|y\| = \sup_{\|x\|=1} \left|\langle y, x\rangle\right|$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}
\|u\| &= \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| \\
&= \sup_{\|x\|=1}\left(\sup_{\|y\|=1}\left|\langle u(x), y\rangle\right|\right) \\
&= \sup_{\|y\|=1}\left(\sup_{\|x\|=1}\left|\langle x, u^*(y)\rangle\right|\right) \\
&= \sup_{\|y\|=1}\|u^*(y)\| = \|u^*\|
\end{aligned}$$

①.2 ليكن x من $\ker(I-u)$، عندئذ $u(x)=x$ ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\|u^*(x)-x\|^2 &= \|u^*(x)\|^2+\|x\|^2-2\operatorname{Re}(\langle u^*(x),x\rangle)\\ &= \|u^*(x)\|^2+\|x\|^2-2\operatorname{Re}(\langle x,u(x)\rangle)\\ &= \|u^*(x)\|^2+\|x\|^2-2\operatorname{Re}(\langle x,x\rangle)\\ &= \|u^*(x)\|^2-\|x\|^2\leq\|x\|^2-\|x\|^2=0\end{aligned}$$

وعليه نستنتج أنّ $\|u^*(x)-x\|=0$ أو أنّ x ينتمي إلى $\ker(I-u^*)$. فنكون قد أثبتنا أنّ الشرط $\|u\|\leq 1$ يقتضي $\ker(I-u)\subset\ker(I-u^*)$. وبتطبيق هذه النتيجة على u^* الذي يُحقّق الشرط $\|u^*\|=\|u\|\leq 1$ نستنتج أيضاً أنّ

$$\ker(I-u^*)\subset\operatorname{ke}(I-u^{**})=\operatorname{ke}(I-u)$$

إذن $\ker(I-u)=\ker(I-u^*)$.

②.2 نعلم أنّه في حالة v من $\mathcal{L}(E)$ لدينا $\ker v^*=(\operatorname{Im}v)^\perp$ إذن

$$\begin{aligned}F_1 &= \ker(I-u)=\ker(I-u^*)\\ &= \ker\big((I-u)^*\big)=\big(\operatorname{Im}(I-u)\big)^\perp=F_2^\perp\end{aligned}$$

③.2 نستنتج مما سبق أنّ $F_1\overset{\perp}{\oplus}F_2=E$.

- ليكن x_1 من F_1 عندئذ $\forall k\in\mathbb{N},\ u^k(x_1)=x_1$ ومن ثَمّ

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{p-1}u^k\right)(x_1)=x_1$$

ومن ثَمّ $\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{p-1}u^k\right)(x_1)=x_1$.

- ليكن x_2 من F_2 عندئذ يوجد z في E يُحقق $x_2=(I-u)(z)$ ومن ثَمّ، في حالة p من $\mathbb{N}^*$ يكون لدينا

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{p-1}u^k\right)(x_2) &= \frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{p-1}u^k\right)(I-u)(z)\\ &= \frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{p-1}u^k-\sum_{k=1}^{p}u^k\right)(z)=\frac{1}{p}(z-u^p(z))\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\left\|\frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{p-1}u^k\right)(x_2)\right\| = \frac{1}{p}\left\|z-u^p(z)\right\|$$
$$\leq \frac{1}{p}\Big(\left\|z\right\|+\left\|u^p(z)\right\|\Big) \leq \frac{2\left\|z\right\|}{p}$$

إذن $\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{p-1}u^k\right)(x_2)=0$.

▫ ليكن x من E . عندئذ $x = x_1 + x_2$ حيث $x_1 = P_{F_1}(x)$ المسقط القائم للشعاع x على F_1 ، و x_2 هو المسقط القائم للشعاع x على $F_2 = F_1^{\perp}$. عندئذ نستنتج من المساواة

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{p-1}u^k\right)(x)=\frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{p-1}u^k\right)(x_1)+\frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{p-1}u^k\right)(x_2)$$

أنّ

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{p-1}u^k\right)(x)=x_1=P_{F_1}(x)$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 18. لتكن A مصفوفة متناظرة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. أثبت أنّ :

$$\Big(\exists k\in\mathbb{N}^*,\ A^k=I_n\Big)\Rightarrow A^2=I_n$$

الحل

نعلم أنّ $\mathrm{sp}(A)\subset\mathbb{R}$. وإذا كان λ عنصراً من $\mathrm{sp}(A)$ كان $\lambda^k=1$ ، ولأنّ λ حقيقي استنتجنا أنّ $\lambda\in\{-1,1\}$. إذن $\mathrm{sp}\big(A\big)\subset\{-1,1\}$. وعليه توجد مصفوفة O من $\mathcal{O}(n)$ وتوجد مصفوفة قطريّة D عناصر قطرها من المجموعة $\{-1,1\}$ تُحقّقان $A={}^tODO$. وعندئذ لأنّ $D^2=I_n$ نستنتج أنّ $A^2={}^tOD^2O=I_n$. ■

التمرين 19. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاءً إقليدياً بُعده 3 منسوباً إلى جملة متعامدة نظامية مباشرة $\mathcal{E}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. وليكن R الدوران بزاوية قدرها θ حول المحور الموجّه بشعاع واحدة $\vec{\ell}$.

1. اكتب، مصفوفة R بالأساس $\mathcal{E}$. ثم أنجز الحساب في حالة

$$\theta=\frac{\pi}{3} \text{ و } \vec{\ell}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$$

2. أثبت أنّ

$$\forall \vec{x}\in E,\ R(\vec{x})=\cos\theta\,\vec{x}+\sin\theta\,\vec{\ell}\wedge\vec{x}+(1-\cos\theta)\langle\vec{\ell},\vec{x}\rangle\,\vec{\ell}$$

الحل

1. لنفترض أنّ $\vec{\ell}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$ حيث $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$، ولنفترض أنّ $\vec{\ell}\notin\mathbb{R}\vec{k}$. عندئذ نختار شعاع واحدة عمودياً على $\vec{\ell}$ وليكن

$$\vec{m}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\beta\vec{i}-\alpha\vec{j}\right)$$

ثُمّ نتمّم الجملة $(\vec{\ell},\vec{m})$ إلى أساس متعامد نظامي ومباشر للفضاء بوضع $\vec{n}=\vec{\ell}\wedge\vec{m}$، أي

$$\begin{aligned}\vec{n}&=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}\right)\wedge\left(\beta\vec{i}-\alpha\vec{j}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\alpha\gamma\vec{i}+\beta\gamma\vec{j}+(\gamma^2-1)\vec{k}\right)\end{aligned}$$

استناداً إلى تعريف R لدينا

$$\begin{aligned}R(\vec{\ell})&=\vec{\ell}\\R(\vec{m})&=\cos\theta\,\vec{m}+\sin\theta\,\vec{n}\\R(\vec{n})&=-\sin\theta\,\vec{m}+\cos\theta\,\vec{n}\end{aligned}$$

وعندئذ، إذا عرّفنا $\mathcal{B}=(\vec{\ell},\vec{m},\vec{n})$ كان

$$\operatorname{mat}(R,\mathcal{B})=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$$

وإذا كانت $P = \mathrm{mat}(I_3, \mathcal{B}, \mathcal{E})$ أي

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & \beta / \kappa & \alpha\gamma / \kappa \\ \beta & -\alpha / \kappa & \beta\gamma / \kappa \\ \gamma & 0 & (\gamma^2 - 1) / \kappa \end{bmatrix} \quad \text{حيث} \quad \kappa = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

كانت P مصفوفة متعامدة وكان $\mathrm{mat}(R, \mathcal{E}) = P\,\mathrm{mat}(R, \mathcal{B})\,{}^tP$. إذن تُعطى $\mathrm{mat}(R, \mathcal{E})$ بالصيغة

$$\frac{1}{\kappa^2}\begin{bmatrix} \alpha\kappa & \beta & \alpha\gamma \\ \beta\kappa & -\alpha & \beta\gamma \\ \gamma\kappa & 0 & \gamma^2 - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha\kappa & \beta\kappa & \gamma\kappa \\ \beta & -\alpha & 0 \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 - 1 \end{bmatrix}$$

أي

$$\mathrm{mat}(R, \mathcal{E}) = \begin{bmatrix} \cos\theta + \alpha^2(1 - \cos\theta) & \alpha\beta(1 - \cos\theta) - \gamma\sin\theta & \alpha\gamma(1 - \cos\theta) + \beta\sin\theta \\ \alpha\beta(1 - \cos\theta) + \gamma\sin\theta & \cos\theta + \beta^2(1 - \cos\theta) & \beta\gamma(1 - \cos\theta) - \alpha\sin\theta \\ \alpha\gamma(1 - \cos\theta) - \beta\sin\theta & \beta\gamma(1 - \cos\theta) + \alpha\sin\theta & \cos\theta + \gamma^2(1 - \cos\theta) \end{bmatrix}$$

أو

$$✵ \quad \mathrm{mat}\big(R, \mathcal{E}\big) = \cos\theta I_3 + \big(1 - \cos\theta\big)\begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{bmatrix} + \sin\theta\begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

ولنلاحظ أنّ هذه النتيجة تبقى صحيحة في حالة $\vec{\ell} \in \mathbb{R}\vec{k}$. ونجد في حالة

$$\vec{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\vec{i} + \vec{j}\big) \;\text{و}\; \theta = \frac{\pi}{3}$$

أنّ

$$\mathrm{mat}(R, \mathcal{E}) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{bmatrix}$$

2. في الحقيقة، تنتج الصيغة المطلوبة من العبارة المصفوفيّة ✵ مباشرة. ∎

التمرين 20. ليكن E فضاءً إقليدياً بُعده 3 منسوباً إلى جملة متعامدة نظامية مباشرة. عيّن الطبيعة الهندسيّة للتحويلات الخطية على E الممثلة بالمصفوفات التالية :

$$A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}, B = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix}, C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل

▫ لدراسة المصفوفة A نلاحظ أنّ $^tAA = I_3$ و $A = {}^tA$. إذن A مصفوفة تناظر قائم. وأخيراً إذا لاحظنا أنّ $\det A = -1$ استنتجنا أنّ

$$\dim\ker(A + I_3) = 1 \text{ و } \dim\ker(A - I_3) = 2$$

إذن A هي مصفوفة الانعكاس القائم بالنسبة إلى المستوي $E_1 = \ker(A - I_3)$ ، توازياً مع المستقيم $E_{-1} = \ker(A + I_3)$ ، ونتيقّن أنّ $E_{-1} = \mathbb{R}v_1$ و $E_1 = \text{vect}(v_2, v_3)$ حيث

$$v_3 = {}^t[5, 6, -3] \text{ و } v_2 = {}^t[0, 1, 2] \text{ و } v_1 = {}^t[-3, 2, -1]$$

▫ لدراسة المصفوفة B نلاحظ أنّ $^tBB = I_3$ و $\det B = 1$. إذن B مصفوفة دوران. ونلاحظ بحساب بسيط أنّ الشعاع $v_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}\,{}^t[-3, 1, 1]$ يُحقق $Bv_1 = v_1$. إذن $\mathbb{R}v_1$ هو محور الدوران B . لنتأمّل الشعاع $v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\,{}^t[1, 3, 0]$ العمودي على v_1 . ولنعرّف $v_3 = v_1 \wedge v_2$ ، لتكون الجملة (v_1, v_2, v_3) أساساً متعامداً نظامياً مباشراً للفضاء $\mathbb{R}^3$. إذا كانت θ زاوية الدوران B كان

$$\cos\theta v_2 + \sin\theta v_3 = Bv_2$$

ومن ثَمّ $\cos\theta = \langle Bv_2, v_2\rangle$ و $\sin\theta = \langle Bv_2, v_3\rangle$ ومنه

$$\sin\theta = \frac{-5\sqrt{11}}{18} \text{ و } \cos\theta = \frac{7}{18}$$

إذن $\theta = -\arcsin\frac{5\sqrt{11}}{18}$.

▫ لدراسة المصفوفة C نلاحظ أنّ $^{t}CC = I_3$ و $\det(C) = 1$. إذن C مصفوفة دوران. ونلاحظ بحساب بسيط أنّ الشعاع $v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,{}^{t}[-1,1,-1]$ يُحقق $Cv_1 = v_1$. إذن $\mathbb{R}v_1$ هو محور الدوران C . لنتأمّل الشعاع $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,{}^{t}[1,1,0]$ العمودي على v_1 . ولنعرّف $v_3 = v_1 \wedge v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\,{}^{t}[1,-1,-2]$ ، لتكون الجملة (v_1, v_2, v_3) أساساً متعامداً نظامياً مباشراً للفضاء $\mathbb{R}^3$. إذا كانت θ زاوية الدوران C كان $Cv_2 = \cos\theta v_2 + \sin\theta v_3$ ، ومن ثَمّ $\cos\theta = \langle Cv_2, v_2\rangle$ و $\sin\theta = \langle Cv_2, v_3\rangle$ ومنه $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ و $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. إذن $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. ■

التمرين 21. نهدف في هذا المسألة إلى إثبات بعض خواص كثيرات حدود **لَجاندر** Legendre.

- نرمز بالرمز $C([-1,1])$ إلى فضاء التوابع الحقيقية المستمرة على $[-1,1]$، وبالرمز $C^k([-1,1])$، حيث $1 \le k$، إلى الفضاء الجزئي المؤلّف من التوابع الحقيقية التي تقبل الاشتقاق باستمرار k مرة على $[-1,1]$.
- نزوّد الفضاء $C([-1,1])$ بالجداء السلّمي والنظيم الموافق له والمعرفَين بالعلاقتين الآتيتين في حالة f و g من $C([-1,1])$:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{و} \quad \|f\| = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \qquad (1)$$

- أياً كان n من $\mathbb{N}$ ، نرمز بالرمز $\mathbb{R}_n[X]$ إلى فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد درجتها على n ، ونطابق بين كثيرات الحدود هذه وبين التوابع الحدودية في $C([-1,1])$.
- إذا كان f عنصراً من $C^2([-1,1])$ فإننا نعرّف $L(f)$ من $C([-1,1])$ بالعلاقة

$$L(f)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x^2-1)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)$$

- وأخيراً نضع $P_0(X) = U_0(X) = 1$ ، وحين يكون $1 \le n$ نعرّف

$$U_n(X) = (X^2-1)^n \quad \text{و} \quad P_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n U_n(X)}{\mathrm{d}X^n}$$

$\mathcal{I}$

1. a. أثبت أنه أياً كان n من $\mathbb{N}$، و P من $\mathbb{R}_n[X]$ يكُن $L(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. نرمز إذن بالرمز L_n إلى التطبيق الخطّي $L_{\|\mathbb{R}_n[X]}$ ؛ أي التطبيق:

$$L_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], \quad P \mapsto L(P)$$

b. اكتب M_n مصفوفة التطبيق الخطي L_n بالنسبة إلى الأساس القانوني $(1, X, \ldots, X^n)$ في $\mathbb{R}_n[X]$.

c. عيّن القيم الذاتية للتطبيق الخطّي L_n . هل يقبل L_n التمثيل بمصفوفة قطريّة؟

2. a. أثبت أنه مهما تكن n من $\mathbb{N}$، يكن $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.

b. أثبت أنّ $\deg P_n = n$، و إذا كان a_n هو ثابت X^n في P_n، فأثبت أنّ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{n+1}$$

c. أثبت، بالاستفادة من الصيغة $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\Big((X-1)^n(X+1)^n\Big)$، أنّ $P_n(1) = 1$.

d. عيّن كلاً من P_1 و P_2 .

3. تحقق صحة العلاقتين التاليتين في حالة n من $\mathbb{N}$:

$$U'_{n+1}(X) - 2(n+1)\, X\, U_n(X) = 0,$$
$$(X^2-1)U'_n(X) - 2n\, X\, U_n(X) = 0.$$

ثم أثبت باشتقاق كل منهما $n+1$ مرة أنّ

$$P'_{n+1}(X) = XP'_n(X) + (n+1)P_n(X) \tag{2}$$
$$L(P_n) = n(n+1)\, P_n \tag{3}$$

4. عيّن أساساً في $\mathbb{R}_n[X]$ مؤلّفاً من أشعة ذاتية للتطبيق الخطّي L_n .

5. a. أثبت، أياً كانت $n \geq 1$، أنّ التابع

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = (P_n(x))^2 + \frac{1-x^2}{n(n+1)}(P'_n(x))^2$$

تابعٌ متزايدٌ.

b. استنتج أنّ

$$\forall x \in [-1,1],\ \big|P_n(x)\big| \leq 1 \tag{4}$$

II

1. a. أثبت أنه أياً كان n من $\mathbb{N}$، و f من $C^2([-1,1])$ فلدينا

$$\langle L(f), P_n \rangle = \langle f, L(P_n) \rangle = n(n+1)\langle f, P_n \rangle$$

b. أثبت بحساب $\langle L(P_n), P_m \rangle$ و $\langle P_n, L(P_m) \rangle$ أنّ $n \neq m \Rightarrow \langle P_n, P_m \rangle = 0$.

c. أثبت أنّ

$$k \in \{0,1,\ldots,n-1\} \Rightarrow \langle P_n, X^k \rangle = 0 \tag{5}$$

2. a. أثبت أنه، مهما تكن n من $\mathbb{N}$، فلدينا

$$\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(x) P_n(x) \mathrm{d}x = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n} \| P_n \|^2$$

مساعدة. ما درجة كثير الحدود $P'_{n+1}(x) - (n+1)\dfrac{a_{n+1}}{a_n} P_n(x)$ ؟

b. أثبت من ناحية أخرى أنّ $\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(x) P_n(x) \mathrm{d}x = 2$، واستنتج أنّ

$$\| P_n \|^2 = \frac{2}{2n+1}$$

3. أثبت أنّ جماعة كثيرات الحدود $(\tilde{P}_n)_{n \geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة : $\tilde{P}_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}} P_n$ تكوّن جماعة متعامدة نظامية بالنسبة إلى الجداء السلمي الذي عرّفناه على $C([-1,1])$، وأنّ الجماعة $(\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n)$ أساس متعامد نظامي في $\mathbb{R}_n[X]$.

4. أثبت أنّ

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \| L(P) \| \leq n(n+1) \, \| P \| \tag{6}$$

مساعدة. عبّر عن P بدلالة الأساس السابق.

III

1. a. نعرّف، حين يكون $1 \leq n$، ما يلي:

$$Q_n(X) = (n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)\, X \, P_n(X)$$

أثبت أنّ $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$، واحسب $Q_n(1)$، وبيّن: أيكون Q_n فردياً أم زوجياً ؟

.b أثبت باستعمال العلاقة (5) أنّ

$$k \in \{0,1,\ldots,n-2\} \Rightarrow \langle P_n, XP_k \rangle = \langle XP_n, P_k \rangle = 0$$

.c استنتج مما سبق وجود عددٍ حقيقي μ يُحقّق

$$Q_n(X) = \mu P_{n-1}(X)$$

.d استفدْ من نتائج السؤال $a.1$ لتثبت أنّ $\mu = -n$، ومن ثَمّ :

$$(n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)\,X\,P_n(X) + n\,P_{n-1}(X) = 0 \tag{7}$$

.e استنتج أنّ $P_{2n}(0) = (-1)^n \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$.

.2 نضع $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \mathrm{d}\theta$. أثبت أن المتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ متناقصة، ثم أوجد علاقة تدريجيّة بين W_n و W_{n-2} حين يكون $2 \leq n$، واستنتج أنّ $\left(n W_n W_{n-1}\right)_{n\geq 1}$ متتالية ثابتة. وأخيراً احسب W_{2n} واستنتج أنّ

$$\forall n \geq 1, \quad \left|P_{2n}(0)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

.3 تحقَّق أنّ

$$(2n+2)P_{2n+2}(0) + (2n+1)P_{2n}(0) = 0$$ أياً كان $0 \leq n$،

واستنتج باستعمال العلاقة (2) أنّ

$$\left|P'_{2n+1}(0)\right| \leq 2\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}$$

.4 .a ليكن، عندما $1 \leq n$، التابع

$$\alpha_n : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad \alpha_n(x) = \sqrt{1-x^2}\, P_n(x).$$

أثبت أنّه، أياً كان x من $]-1,1[$، كان

$$\alpha'_n(x)\sqrt{1-x^2} + xP_n(x) + (x^2-1)P'_n(x) = 0$$

ثُمّ استفدْ من العلاقة (3) لتثبت أنّ $\alpha''_n(x) + \varphi_n(x)\alpha_n(x) = 0$ حيث

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{1-x^2}\left(n(n+1) + \frac{1}{1-x^2}\right)$$

b. ليكن التابع

$$\beta_n :]-1,+1[\to \mathbb{R} : \beta_n(x) = (\alpha_n(x))^2 + \frac{(\alpha'_n(x))^2}{\varphi_n(x)}$$

أثبت أنّ β_n تابع زوجي ومتناقص على المجال $[0,1[$.

c. استعمل نتائج 2. و 3. لإثبات أنّ $\beta_n(0) \le \dfrac{2}{\pi n}$. ومن ثمَّ استنتج أنّ

$$\forall n \ge 1, \forall x \in]-1,+1[, \quad \left|P_n(x)\right| \le \sqrt{\frac{2}{\pi n(1-x^2)}} \tag{8}$$

$\mathcal{IV}$

ليكن f من $C([-1,1])$، ولتكن $0 \le n$ نعرّف

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\,\tilde{P}_k \quad \text{و} \quad c_n(f) = \left\langle f, \tilde{P}_n \right\rangle$$

1. أثبت أنّ $f - S_n(f)$ عمودي على الفضاء الجزئي $\mathbb{R}_n[X]$ من $C([-1,+1])$، ثم استنتج أنّ $\sum_{k=0}^{n} (c_k(f))^2 \le \|f\|^2$.

2. أثبت تقارب المتسلسلة $\sum_{n\ge 0} (c_n(f))^2$، وعيّن نهاية المتتالية $(c_n(f))_{n\ge 0}$.

3. a. نفترض أنّ f ينتمي إلى $C^2([-1,1])$، و نضع $g = L(f)$. عبّر عن $c_n(g)$ بدلالة $c_n(f)$ ثم استنتج، أنّ $\lim_{n\to\infty} n(n+1)c_n(f) = 0$.

b. أثبت أنّ المتسلسلة $\sum_{n\ge 0} c_n(f)\,\tilde{P}_n$ تتقارب بانتظام على $[-1,+1]$ من تابع مستمر $\tilde{f}$ ينتمي إلى $C([-1,+1])$. استفدْ من (4).

c. أثبت أنّ $\left\langle f - \tilde{f}, \tilde{P}_n \right\rangle = 0$ أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$، واستنتج أنّ $f = \tilde{f}$.

4. أثبت، باستعمال العلاقة (7)، أنّه أيّاً كان (x,y) من $\mathbb{R}^2$، و أيّاً كان $0 \le n$ فإنّ

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) P_k(x) P_k(y)(x-y) = (n+1)\left(P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)\right)$$

نعرّف إذن في حالة (x,y) من $\mathbb{R}^2$، حيث $x \neq y$ المقدار

$$K_n(x,y) = \frac{n+1}{2}\left(\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}\right)$$

5. أثبت أنّ $\int_{-1}^{1} K_n(x,y)\,\mathrm{d}y = 1$.

6. a. نفترض أنّ f ينتمي إلى $C^1([-1,1])$، وأنّ x عنصرٌ من $]-1,+1[$. أثبت أنّ

$$S_n(f)(x) - f(x) = \int_{-1}^{1} K_n(x,y)\big(f(y) - f(x)\big)\,\mathrm{d}y$$

b. نعرف التابع :

$$g_x : [-1,+1] \to \mathbb{R} : g_x(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & : \quad y \neq x \\ f'(x) & : \quad y = x \end{cases}$$

أثبت أنّ g_x ينتمي إلى $C([-1,1])$، وأنّه، أياً كانت $1 \leq n$ ،

$$S_n(f)(x) - f(x) = \frac{n+1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{2n+1}}\,c_n(g_x)P_{n+1}(x) - \sqrt{\frac{2}{2n+3}}\,c_{n+1}(g_x)P_n(x)\right)$$

c. استعمل (8) لتثبت أنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} c_n(f)\,\tilde{P}_n$ تتقارب ببساطة على $]-1,+1[$ من التابع $f|_{]-1,1[}$.

الحل

$\mathcal{I}.1.a$. لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} L(X^n) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left((X^2-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}X^n\right) \\ &= n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(X^{n+1} - X^{n-1}) \\ &= n(n+1)X^n - n(n-1)X^{n-2} \end{aligned}$$

وينتج من ذلك ومن كون التطبيق L خطيّاً أنّ $\deg L(P) \leq \deg P$ أيّاً كان P من $\mathbb{R}[X]$. وهذا يُثبتُ الخاصّة المطلوبة.

.$b.1.\mathcal{I}$ ونجد استناداً إلى ما سبق أنّ مصفوفة L_n بالنسبة إلى الأساس $\mathcal{E} = (1, X, \ldots, X^n)$ هي:

$$\operatorname{mat}(L_n, \mathcal{E}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & & \ddots & \vdots \\ & \ddots & 6 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & n(n-1) \\ & & & \ddots & & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & n(n+1) \end{bmatrix}$$

.$c.1.\mathcal{I}$ ولمّا كانت $\operatorname{mat}\big(L_n, \mathcal{E}\big)$ مصفوفة مثلّثيّة قطرها الرئيسي $\big(0, 2, \ldots, n(n+1)\big)$ استنتجنا أنّ

$$\operatorname{sp}(L_n) = \big\{k(k+1) : k \in \{0, 1, \ldots, n\}\big\}$$

ولمّا كان $\operatorname{card} \operatorname{sp}(L_n) = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ استنتجنا أنّ L_n يقبل التمثيل بمصفوفة قطريّة.

.$a.2.\mathcal{I}$ لما كان U_n زوجيّاً استنتجنا أنّ مشتقّه من المرتبة n فردي في حالة n فردي، وهو زوجي في حالة n زوجي. ومنه $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.

.$b.2.\mathcal{I}$ لمّا كان $\deg U_n = 2n$ استنتجنا أنّ $\deg P_n = n$. في الحقيقة، لمّا كان $U_n = X^{2n} + Q_n$ حيث $\deg Q_n \leq 2n - 2$ استنتجنا أنّ

$$P_n = \frac{1}{2^n (n!)} (U_n)^{(n)} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} X^n + \tilde{Q}_n$$

حيث $\deg \tilde{Q}_n \leq n - 2$. إذن أمثال X^n في P_n هي $\frac{C_{2n}^n}{2^n} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = a_n$. ومنه

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{n+1}$$

$c.2.\mathcal{I}$. بملاحظة أنّ

$$\begin{aligned}(U_n)^{(n)} &= \Big((X-1)^n(X+1)^n\Big)^{(n)}\\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Big((X-1)^n\Big)^{(k)}\Big((X+1)^n\Big)^{(n-k)}\\ &= n!\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k\end{aligned}$$

نستنتج أنّ

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n\,n!}\Big(U_n(X)\Big)^{(n)} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k$$

وبوجه خاص $P_n(1) = 1$.

$d.2.\mathcal{I}$. ونجد بالحساب المباشر أنّ

$$P_2(X) = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad P_1(X) = X \quad \text{و} \quad P_0(X) = 1$$

$3.\mathcal{I}$. من الواضح أنّه مهما تكن n من $\mathbb{N}$ فلدينا

$$\begin{aligned}U'_{n+1}(X) - 2(n+1)\,X\,U_n(X) &= 0,\\ (X^2-1)U'_n(X) - 2n\,X\,U_n(X) &= 0.\end{aligned}$$

وبتطبيق علاقة ليبنتز واشتقاق طرفي العلاقة الأولى $n+1$ نجد

$$U_{n+1}^{(n+2)}(X) - 2(n+1)\Big(XU_n^{(n+1)}(X) + (n+1)U_n^{(n)}(X)\Big) = 0$$

ومنه

$$\begin{aligned}&2^{n+1}(n+1)!\cdot P'_{n+1}(X)\\ &\qquad -2(n+1)\Big(2^n n!\,XP'_n(X) + (n+1)2^n n!\,P_n(X)\Big) = 0\end{aligned}$$

أو

$$P'_{n+1}(X) = XP'_n(X) + (n+1)P_n(X) \tag{2}$$

وبتطبيق علاقة ليبنتز واشتقاق طرفي العلاقة الثانية $n+1$ نجد

$$\begin{aligned}(X^2-1)U_n^{(n+2)}(X)+2(n+1)XU_n^{(n+1)}(X)+(n+1)nU_n^{(n)}(X)\\ =2nXU_n^{(n+1)}(X)+2n(n+1)U_n^{(n)}(X)\end{aligned}$$

ومن ثَمَّ، بعد القسمة على $2^n n!$ نجد

$$(X^2-1)P_n''(X)+2XP_n'(X)=n(n+1)P_n(X)$$

وهذا يُكافئ

$$L(P_n)=n(n+1)\,P_n \tag{3}$$

4.$\mathcal{I}$. نستنتج من العلاقة (3) أنّ الجملة $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ تكوّن أساساً من الأشعّة الذاتيّة للتطبيق الخطّي L_n على $\mathbb{R}_n[X]$.

a.5.$\mathcal{I}$. لنتأمّل في حالة $n\geq 1$ التابع

$$f_n:[0,1]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=(P_n(x))^2+\frac{1-x^2}{n(n+1)}(P_n'(x))^2$$

نلاحظ مباشرة أنّه قابلٌ للاشتقاق وأنّ

$$f_n'(x)=\frac{2P_n'(x)}{n(n+1)}\Big(n(n+1)P_n(x)-xP_n'(x)-(x^2-1)P_n''(x)\Big)$$

وبالاستفادة من (3) نستنتج

$$f_n'(x)=\frac{2x}{n(n+1)}(P_n'(x))^2$$

وهذا يثبتُ تزايد التابع f_n على المجال $[0,1]$.

b.5.$\mathcal{I}$. لمّا كان التابع $x\mapsto(P_n(x))^2+\dfrac{1-x^2}{n(n+1)}(P_n'(x))^2$ زوجياً على $\mathbb{R}$ استنتجنا مما سبق أنّ

$$\sup_{x\in[-1,1]}\left((P_n(x))^2+\frac{1-x^2}{n(n+1)}(P_n'(x))^2\right)=\sup_{x\in[0,1]}f_n(x)=f_n(1)$$

ولمّا كان $f_n(1)=P_n(1)=1$ استنتجنا مما سبق أنّ

$$\forall x\in[-1,+1],\quad \left|P_n(x)\right|\leq 1 \tag{4}$$

.a.1.II لتكن n من $\mathbb{N}$، وليكن f و g من $C^2\left([-1,1]\right)$، عندئذ

$$\begin{aligned}\langle L(f),g\rangle &= \int_{-1}^{1}((x^2-1)f'(x))'g(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= \left[(x^2-1)f'(x)g(x)\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}(1-x^2)f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}\,x = \langle\sqrt{1-x^2}f',\sqrt{1-x^2}g'\rangle\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ $\langle L(f),g\rangle = \langle f,L(g)\rangle$، وأنّ $\langle L(f),f\rangle \geq 0$. فالتطبيق الخطّي L متناظر موجب.

وبوجه خاص، لأنّ $L(P_n) = n(n+1)P_n$، نستنتج أن

$$\langle L(f),P_n\rangle = \langle f,L(P_n)\rangle = n(n+1)\langle f,P_n\rangle$$

.b.1.II في الحقيقة، لأنّ $L(P_n) = n(n+1)P_n$، نستنتج أنّ

$$\langle P_n,L(P_m)\rangle = m(m+1)\langle P_n,P_m\rangle \quad \text{و} \quad \langle L(P_n),P_m\rangle = n(n+1)\langle P_n,P_m\rangle$$

ولمّا كان $\langle L(P_n),P_m\rangle = \langle P_n,L(P_m)\rangle$ استنتجنا أنّ

$$(n-m)(n+m+1)\langle P_n,P_m\rangle = 0$$

وهذا يثبتُ أنّ

$$n \neq m \Rightarrow \langle P_n,P_m\rangle = 0$$

.c.1.II لمّا كان $\mathrm{vect}\left(P_0,P_1,\ldots,P_{n-1}\right) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ استنتجنا مما سبق أنّ $P_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[X]$؛ أي

$$k \in \{0,1,\ldots,n-1\} \Rightarrow \langle P_n,X^k\rangle = 0 \tag{5}$$

.a.2.II لتكن n من $\mathbb{N}$، عندئذ بالاستفادة من كون

$$\deg(P_{n+1} - a_{n+1}X^{n+1}) \leq n-1 \quad \text{و} \quad \deg(P_n - a_nX^n) \leq n-2$$

نستنتج أنّ $\deg(P'_{n+1} - (n+1)a_{n+1}X^n) \leq n-2$ ومن ثَمّ

$$\deg\left(P'_{n+1} - (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}P_n\right) \leq n-2$$

إذن P_n عمودي على $P'_{n+1}-(n+1)\dfrac{a_{n+1}}{a_n}P_n$ ، وهذا يقتضي أنّ

$$\left\langle P'_{n+1}-(n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}P_n, P_n\right\rangle = 0$$

ومنه

$$\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(x)P_n(x)\,\mathrm{d}\,x = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}\left\|P_n\right\|^2$$

$b.2.\mathcal{II}$. ومن جهة أخرى نرى أنّ

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(x)P_n(x)\,\mathrm{d}\,x &= \left[P_{n+1}(x)P_n(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P'_n(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= 1-(-1)^{n+1}(-1)^n - \langle P_{n+1},P'_n\rangle = 2\end{aligned}$$

إذن

$$\left\|P_n\right\|^2 = \frac{2}{n+1}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}$$

$3.\mathcal{II}$. نستنتج أن جماعة كثيرات الحدود $(\tilde{P}_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $\tilde{P}_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n$ تكوّن جماعة متعامدة نظامية بالنسبة إلى الجداء السلمي الذي عرّفناه على $C([-1,1])$ ، وأنّ الجماعة $(\tilde{P}_0,\tilde{P}_1,\ldots,\tilde{P}_n)$ أساس متعامد نظامي في $\mathbb{R}_n[X]$.

$4.\mathcal{II}$. ليكن P من $\mathbb{R}_n[X]$ ، لمّا كانت الجملة $(\tilde{P}_0,\tilde{P}_1,\ldots,\tilde{P}_n)$ أساساً متعامداً نظامياً في $\mathbb{R}_n[X]$ استنتجنا أنّ $P=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tilde{P}_k$ حيث $\alpha_k = \langle P,\tilde{P}_k\rangle$. وعندئذ يكون لدينا

$$L(P) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k L(\tilde{P}_k) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k k(k+1)\tilde{P}_k$$

ومن ثَمّ لدينا

$$\left\|L(P)\right\|^2 = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k^2 k^2(1+k)^2 \leq n^2(n+1)^2\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^2 = n^2(n+1)^2\left\|P\right\|^2$$

فنكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \|L(P)\| \leq n(n+1)\|P\| \tag{6}$$

.a.1.III لنعرّف، حين يكون $1 \leq n$، ما يلي:

$$Q_n(X) = (n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)\,X\,P_n(X)$$

عندئذ نظراً إلى أنّ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{n+1}$ نستنتج مباشرة أنّ $\deg Q_n \leq n-1$، ومنه $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$، وكذلك فإنّ

$$Q_n(1) = (n+1)P_{n+1}(1) - (2n+1)P_n(1) = -n$$

وكذلك $Q_n(-X) = (-1)^{n+1}Q_n(X)$.

.b.1.III من الواضح أنّ $\langle P_n, XP_k\rangle = \langle XP_n, P_k\rangle$. فإذا استفدنا من كون $P_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[X]$ استنتجنا أنّ

$$k \in \{0,1,\ldots,n-2\} \Rightarrow \langle P_n, XP_k\rangle = \langle XP_n, P_k\rangle = 0$$

.c.1.III لمّا كانت الجملة $(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1})$ أساساً متعامداً للفضاء $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ استنتجنا وجود أعداد $(\mu_0, \ldots, \mu_{n-1})$ تُحقّق $Q_n = \sum_{k=0}^{n-1}\mu_k P_k$. ولكن في حالة $k \leq n-2$ لدينا

$$\begin{aligned}\mu_k\|P_k\|^2 &= \langle Q_n, P_k\rangle = \langle (n+1)P_{n+1} - (2n+1)XP_n, P_k\rangle \\ &= (n+1)\langle P_{n+1}, P_k\rangle - (2n+1)\langle XP_n, P_k\rangle = 0\end{aligned}$$

إذن $\mu_k = 0$ في حالة $k \leq n-2$، وبوضع $\mu = \mu_{n-1}$ نستنتج أنّ $Q_n = \mu P_{n-1}$.

.d.1.III وبتعويض $X = 1$ في المساواة $Q_n = \mu P_{n-1}$ نستنتج قيمة العدد μ: $\mu = Q_n(1) = -n$. وعليه $Q_n = -nP_{n-1}$. فنكون قد أثبتنا أنّ

$$(n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X) + nP_{n-1}(X) = 0 \tag{7}$$

$\mathcal{III}.1.e$. في الحقيقة، نستنتج من (7) أنّ

$$(n+1)P_{n+1}(0)+nP_{n-1}(0)=0$$

ومن ثَمَّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad P_{2n}(0)=-\frac{2n-1}{2n}P_{2n-2}(0)$$

وهذا يُثبتُ بالتدريج أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$$

$\mathcal{III}.2$. نضع $W_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta d\theta$. من الواضح أنّ المتتالية $\left(W_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة. كما نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
W_{n-2}-W_n &= \int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin^{n-2}\theta\,d\theta\\
&=\left[\cos\theta\frac{\sin^{n-1}\theta}{n-1}\right]_0^{\pi/2}+\frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,d\theta\\
&=\frac{1}{n-1}W_n
\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ

$$\forall n\geq 2,\quad W_n=\frac{n-1}{n}W_{n-1}$$

وعليه يكون

$$\forall n\geq 2,\quad nW_{n-1}W_n=(n-1)W_{n-2}W_{n-1}$$

فالمتتالية $\left(nW_nW_{n-1}\right)_{n\geq 1}$ متتالية ثابتة. أي

$$\forall n\geq 1,\quad nW_{n-1}W_n=W_0W_1=\frac{\pi}{2}$$

وبوجه خاص نرى أنّ

$$W_{2n}\leq\sqrt{W_{2n-1}W_{2n}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

ولكن نستنتج من المساواة $W_{2n}=\dfrac{2n-1}{2n}W_{2n-2}$ في حالة $n\geq 1$ أنّ

$$\forall n\geq 1,\quad W_{2n}=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}W_0=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

ومن ثَمّ

$$\forall n\geq 1,\quad \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\leq\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

وبالعودة إلى صيغة $P_{2n}(0)$ في $III.1.e$. نجد

$$\forall n\geq 1,\quad \left|P_{2n}(0)\right|\leq\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

$III.3$. بالعودة إلى (7) نستنتج أنّ $(2n+2)P_{2n+2}(0)+(2n+1)P_{2n}(0)$ ومن العلاقة (2) نجد $P'_{2n+1}(0)=(2n+1)P_{2n}(0)$، وهذا يبرهن أنّ

$$\begin{aligned}\left|P'_{2n+1}(0)\right|&=(2n+1)\left|P_{2n}(0)\right|\\&=(2n+2)\left|P_{2n+2}(0)\right|\leq\frac{2n+2}{\sqrt{(n+1)\pi}}\end{aligned}$$

أو

$$\left|P'_{2n+1}(0)\right|\leq 2\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}$$

$III.4.a$. لنتأمّل في حالة $n\geq 1$ التابع

$$\alpha_n:[-1,1]\to\mathbb{R},\quad \alpha_n(x)=\sqrt{1-x^2}P_n(x)$$

عندئذ نجد بالاشتقاق أنّه، مهما تكن x من $]-1,1[$، يكن

$$\alpha'_n(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}P_n(x)+\sqrt{1-x^2}P'_n(x)$$

وهذا يثبتُ أنّ

$$\sqrt{1-x^2}\alpha'_n(x)+xP_n(x)+(x^2-1)P'_n(x)=0$$

وبالاشتقاق مرّة ثانية نجد

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\alpha'_n(x)+\sqrt{1-x^2}\alpha''_n(x)+P_n(x)+3xP'_n(x)+(x^2-1)P''_n(x)=0$$

ومن ثَمّ

$$\sqrt{1-x^2}\alpha_n''(x)+\frac{1}{1-x^2}P_n(x)+2xP_n'(x)+(x^2-1)P_n''(x)=0$$

وهذا يُكتبُ، بالاستفادة من (3)، كما يلي :

$$\sqrt{1-x^2}\alpha_n''(x)+\left(\frac{1}{1-x^2}+(n+1)n\right)P_n(x)=0$$

أو $\alpha_n''(x)+\varphi_n(x)\alpha_n(x)=0$ ، حيث

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{1-x^2}\left(n(n+1)+\frac{1}{1-x^2}\right)$$

.b.4.III لنتأمّل التابع

$$\beta_n:]-1,+1[\to\mathbb{R}:\beta_n(x)=(\alpha_n(x))^2+\frac{(\alpha_n'(x))^2}{\varphi_n(x)}$$

لمّا كان $\alpha_n(-x)=(-1)^n\alpha_n(x)$ ولمّا كان φ_n زوجي استنتجنا أنّ β_n تابعٌ زوجي. ومن جهة أخرى

$$\beta_n'(x)=\alpha_n'(x)\left(2\alpha_n(x)-\frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n^2(x)}\alpha_n'(x)+2\frac{\alpha_n''(x)}{\varphi_n(x)}\right)=-\left(\frac{\alpha_n'(x)}{\varphi_n(x)}\right)^2\varphi_n'(x)$$

ولمّا كان من الواضح أنّ φ_n متزايدٌ تماماً على $[0,1[$ استنتجنا أنّ β_n' سالبٌ تماماً على $[0,1[$، وهذا يُثبتُ أنّ β_n متناقصٌ تماماً على $[0,1[$. وعليه فإنّ $\beta_n(0)$ هو الحدّ الأعلى للتابع β_n على $]-1,1[$.

.c.4.III ولكن

$$\beta_n(0)=(P_n(0))^2+\frac{1}{n(n+1)+1}(P_n'(0))^2$$

ومن ثَمّ، بالاستفادة من .2.III و .3.III نجد

$$\beta_{2n}(0)=(P_{2n}(0))^2\le\frac{1}{\pi n}=\frac{2}{\pi(2n)}$$

$$\beta_{2n+1}(0)\le\frac{(P_{2n+1}'(0))^2}{(2n+1)(2n+2)}\le\frac{2}{\pi(2n+1)}$$

إذن

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_n(0) \leq \frac{2}{\pi n}$$

وبملاحظة أنّ $\forall x \in \,]-1,1[,\ \alpha_n^2(x) \leq \beta_n(x) \leq \beta_n(0)$ نستنتج أنّ

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \,]-1,1[, \quad |P_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n(1-x^2)}} \tag{8}$$

$\mathcal{IV}$.1. من الواضح أنّ $S_n(f)$ هو المسقط القائم للتابع f على $\mathbb{R}_n[X]$، الذي يقبل $(\tilde{P}_k)_{0\leq k\leq n}$ أساساً متعامداً نظاميّاً. وعليه يكون $f - S_n(f)$ عمودياً على $\mathbb{R}_n[X]$. ومن ثَمّ

$$\|S_n(f)\|^2 \leq \|S_n(f)\|^2 + \|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2$$

ولأنّ

$$\|S_n(f)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |c_k(f)|^2$$

نستنتج أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|^2$$

$\mathcal{IV}$.2. وبناءً على هذا، تتقارب المتسلسلة $\sum_{n\geq 0}(c_n(f))^2$ ويكون مجموعها أصغر من $\|f\|^2$.

وبوجه خاص يكون لدينا $\lim_{n\to\infty} c_n(f) = 0$.

$\mathcal{IV}$.3.a. لنفترض أنّ f ينتمي إلى $C^2([-1,1])$، ولنضع $g = L(f)$. عندئذ

$$c_n(g) = \langle L(f), \tilde{P}_n\rangle = \langle f, L(\tilde{P}_n)\rangle = n(n+1)\langle f, \tilde{P}_n\rangle = n(n+1)c_n(f)$$

فإذا استفدنا من $\mathcal{IV}$.2. استنتجنا أنّ $\lim_{n\to\infty} n(n+1)c_n(f) = 0$.

$\mathcal{IV}$.3.b. استناداً إلى (4) لدينا $\forall x \in [-1,1],\ |\tilde{P}_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$، ومن ثَمّ، إذا عرّفنا

$$\mu_n = \sup_{x\in[-1,1]} |c_n(f)\tilde{P}_n(x)|$$

استنتجنا من $a.3.\mathcal{IV}$. أنّ $\mu_n = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ ، فالمتسلسلة $\sum \mu_n$ متقاربة، وهذا يثبت التقارب بالنظيم المنتظم على المجال $[-1,1]$ للمتسلسلة $\sum_{n\geq 0} c_n(f)\tilde{P}_n$ من تابع $\tilde{f}$ ينتمي إلى $C([-1,1])$.

$c.3.\mathcal{IV}$. نستنتج من التقارب المنتظم للمتسلسلة $\sum_{n\geq 0} c_n(f)\tilde{P}_n$ أنّ

$$c_k(\tilde{f}) = \left\langle \sum_{n\geq 0} c_n(f)\tilde{P}_n, \tilde{P}_k \right\rangle = \sum_{n\geq 0} c_n(f)\langle \tilde{P}_n, \tilde{P}_k\rangle = c_k(f)$$

ومنه $\forall k \in \mathbb{N}, \left\langle \tilde{f} - f, \tilde{P}_k \right\rangle = 0$. نستنتج إذن أنّ $\tilde{f} - f$ عمودي على جميع كثيرات الحدود في $C([-1,1])$. فإذا استفدنا من كثافة فضاء كثيرات الحدود في $C([-1,1])$ بالنسبة إلى النظيم المنتظم استنتجنا أنّ $\tilde{f} - f$ عمودي على جميع عناصر الفضاء $C([-1,1])$، وبوجه خاص هو عمودي على نفسه، وهذا ما يقتضي أنّ $\tilde{f} - f = 0$ أو أنّ $\tilde{f} = f$. إذن

في حالة f من $C^2([-1,1])$ ، يتقارب المنشور $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)\tilde{P}_n$ بانتظام على $[-1,1]$ من التابع f .

$4.\mathcal{IV}$. استناداً إلى العلاقة (7) لدينا

$$\begin{aligned}(n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X) + nP_{n-1}(X) &= 0\\ (n+1)P_{n+1}(Y) - (2n+1)YP_n(Y) + nP_{n-1}(Y) &= 0\end{aligned}$$

فإذا ضربنا الأولى بالمقدار $P_n(Y)$ والثانية بالمقدار $P_n(X)$ ، وطرحنا هاتين المعادلتين طرفاً من طرف وجدنا :

$$(2n+1)(X-Y)P_n(X)P_n(Y) = T_{n+1}(X,Y) - T_n(X,Y)$$

حيث

$$T_n(X,Y) = n\big(P_n(X)P_{n-1}(Y) - P_n(Y)P_{n-1}(X)\big)$$

ومن ثَمّ

$$(X-Y)\sum_{k=1}^{n}(2k+1)P_k(X)P_k(Y) = T_{n+1}(X,Y) - T_1(X,Y)$$

ولكن $T_1(X,Y) = X - Y$. إذن

$$(X-Y)\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(X)P_k(Y) = T_{n+1}(X,Y)$$

ومنه

$$\begin{aligned}(X-Y)&\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(X)P_k(Y)\\ &= (n+1)\big(P_{n+1}(X)P_n(Y) - P_{n+1}(Y)P_n(X)\big)\end{aligned}$$

☜ نعرّف إذن في حالة (x,y) من $\mathbb{R}^2$ ، حيث $y \neq x$ المقدار

$$K_n(x,y) = \frac{n+1}{2}\left(\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}\right)$$

$\mathcal{IV}$.5. استناداً إلى ما سبق لدينا

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\tilde{P}_k(x)\tilde{P}_k(y)$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}K_n(x,y)\,\mathrm{d}\,y &= \sqrt{2}\,\langle K_n(x,\bullet),\tilde{P}_0\rangle\\ &= \sqrt{2}\sum_{k=0}^{n}\tilde{P}_k(x)\langle\tilde{P}_k,\tilde{P}_0\rangle\\ &= \sqrt{2}\tilde{P}_0(x)\langle\tilde{P}_0,\tilde{P}_0\rangle = 1\end{aligned}$$

$\mathcal{IV}$.6.a. نفترض أنّ f ينتمي إلى $C^1([-1,1])$ ، وأنّ x عنصرٌ من $]-1,+1[$. عندئذ

$$\begin{aligned}S_n(f)(x) &= \sum_{k=0}^{n}c_k(f)\tilde{P}_k(x) = \sum_{k=0}^{n}\langle f,\tilde{P}_k\rangle\tilde{P}_k(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\int_{-1}^{1}f(y)\tilde{P}_k(y)\,\mathrm{d}\,y\right)\tilde{P}_k(x)\\ &= \int_{-1}^{1}f(y)\left(\sum_{k=0}^{n}\tilde{P}_k(y)\tilde{P}_k(x)\right)\mathrm{d}\,y\end{aligned}$$

ومن ثمّ

$$S_n(f)(x)=\int_{-1}^{1}K_n(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\,y$$

وبالاستفادة من $\mathcal{IV}.5$. نجد

$$S_n(f)(x)-f(x)=\int_{-1}^{1}K_n(x,y)\big(f(y)-f(x)\big)\,\mathrm{d}y$$

$\mathcal{IV}.6.b$. لنتأمّل التابع :

$$g_x:[-1,+1]\to\mathbb{R}:g_x(y)=\begin{cases}\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & : \quad y\neq x\\ f'(x) & : \quad y=x\end{cases}$$

عندئذ نرى وضوحاً أنّ g_x ينتمي إلى $C([-1,1])$. وفي حالة $n\geq 1$ يكون لدينا

$$S_n(f)(x)-f(x)=\frac{n+1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{2n+1}}\,c_n(g_x)P_{n+1}(x)-\sqrt{\frac{2}{2n+3}}\,c_{n+1}(g_x)P_n(x)\right)$$

$\mathcal{IV}.6.c$. باستعمال (8) يمكننا أن نكتب

$$\left|S_n(f)(x)-f(x)\right|\leq\left(\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}\left|c_n(g_x)\right|+\sqrt{\frac{(n+1)^2}{n(2n+3)}}\left|c_{n+1}(g_x)\right|\right)\frac{1}{\sqrt{\pi(1-x^2)}}$$

أو

$$\left|S_n(f)(x)-f(x)\right|\leq\left(\left|c_n(g_x)\right|+\left|c_{n+1}(g_x)\right|\right)\frac{1}{\sqrt{\pi(1-x^2)}}$$

ولأنّ g_x مستمر استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}c_n(g_x)=0$ ومن ثمّ

$$\lim_{n\to\infty}\left|S_n(f)(x)-f(x)\right|=0$$

وهذا يثبت أنّ المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 0}c_n(f)\,\tilde{P}_n$ تتقارب ببساطة على $]-1,1[$ من التابع $f_{|]-1,1[}$. إذن

في حالة f من $C^1\left(\left[-1,1\right]\right)$، يتقارب المنشور $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(f)\tilde{P}_n$ ببساطة على $]-1,1[$ من $f_{|]-1,1[}$.

وبذا يُنجز الحل. ■

التمرين 22. اختزال المصفوفات النظاميّة

I. لتكن $T = (t_{ij})$ مصفوفة **مثلّثيّة عليا** من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، نفترض أنّها تُحقّق الشرط

$$T^* \cdot T = T \cdot T^*$$

1. أثبت في الحالتين الموافقتين للقيمتين $n = 2$ و $n = 3$، أنّ المصفوفة T مصفوفة قطريّة.

2. نأتي إلى الحالة العامّة، ونعرّف:

$$\Delta = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2 : (i < j) \wedge (t_{ij} \neq 0)\right\}$$

لنفترض جدلاً أنّ $\Delta \neq \varnothing$، عندئذ نسمّي

$$i_0 = \min\left\{i \in \mathbb{N}_n : \exists j \in \mathbb{N}_n, (i,j) \in \Delta\right\}$$

احسب العنصر على السطر ذي الدليل i_0 والعمود ذي الدليل i_0 في كلٍّ من المصفوفتين $T^* \cdot T$ و $T \cdot T^*$، ثمّ استنتج من ذلك ما يناقض تعريف i_0.

3. ما هي الخاصّة العامّة التي جرى إثباتها فيما سبق ؟

II. لتكن P مصفوفة قَلوبةً من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. أثبت أنّه توجد مصفوفة مثلّثيّة عليا T من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، تحقّق $P^*P = T^*T$.

2. نعرّف المصفوفة $U = (P^*)^{-1} \cdot T^*$. أثبت أنّ

$$P = U \cdot T \quad \text{و} \quad U^{-1} = U^*$$

III. لتكن M مصفوفة ما من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، تُحقّق الشرط $M^* \cdot M = M \cdot M^*$. نقول في هذه الحالة إنّ M مصفوفة **نظاميّة**.

1. اذكر الشرط اللازم والكافي الذي يجب أن تُحقّقه مصفوفةٌ مربّعة حتّى تُشابه مصفوفة مثلّثيّة.

2. استنتج أنّه توجد مصفوفة مثلثيّة عليا T_1 من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، وتوجد مصفوفة قَلوبةٌ P من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، تُحقّقان $M = P \cdot T_1 \cdot P^{-1}$.

3. استفد من II لتُثْبِتَ وجود مصفوفة مثلّثيّة عليا T من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، ومصفوفة U من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، تُحقّقان الشرطين : $U^{-1} = U^*$ و $M = UTU^*$.

4. استفد من I لتستنتج وجود مصفوفة قطريّة D، ومصفوفة U من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، تُحقّقان: $U^{-1} = U^*$ و $M = UDU^*$.

IV. لتكن M مصفوفة ما من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. أثبت تكافؤ الخاصّتين الآتيتين:

- المصفوفة M تُحقِّق الشرط $M^* \cdot M = M \cdot M^*$.
- توجد مصفوفة قطريّة D، ومصفوفة U من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، تحقّقان $U^{-1} = U^*$ و $M = U \cdot D \cdot U^*$

الحل

I.1. لتكن $T = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ عندئذ نستنتج من الشرط $T^* \cdot T = T \cdot T^*$ أنّ

$$\begin{bmatrix} |a|^2 & \overline{a}b \\ \overline{b}a & |b|^2 + |c|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |a|^2 + |b|^2 & \overline{c}b \\ \overline{b}c & |c|^2 \end{bmatrix}$$

وبوجه خاص $|a|^2 = |a|^2 + |b|^2$ أو $b = 0$. أي إنّ T مصفوفة قطريّة.

وفي حالة $T = \begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$ عندئذ نستنتج من الشرط $T^* \cdot T = T \cdot T^*$ أي

$$\begin{bmatrix} \overline{a} & 0 & 0 \\ \overline{b} & \overline{c} & 0 \\ \overline{d} & \overline{e} & \overline{f} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{a} & 0 & 0 \\ \overline{b} & \overline{c} & 0 \\ \overline{d} & \overline{e} & \overline{f} \end{bmatrix}$$

أنّ

$$|a|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |d|^2 \quad \text{و} \quad |b|^2 + |c|^2 = |c|^2 + |e|^2$$

وهذا يقتضي أنّ $b = d = e = 0$. أي إنّ T مصفوفة قطريّة أيضاً في هذه الحالة.

I.2. نأتي إلى الحالة العامّة، نفترض أنّ $T^* \cdot T = T \cdot T^*$، ونعرّف كما في :

$$\Delta = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2 : (i < j) \wedge (t_{ij} \neq 0)\right\}$$

لنفترض جدلاً أنّ $\Delta \neq \varnothing$، عندئذ نسمّي

$$i_0 = \min\left\{i \in \mathbb{N}_n : \exists j \in \mathbb{N}_n, (i,j) \in \Delta\right\}$$

ونجد أنّ

$$[TT^*]_{i_0 i_0} = \sum_{k=1}^{n} t_{i_0 k}\overline{t}_{i_0 k} = \sum_{k=i_0}^{n} |t_{i_0 k}|^2$$
$$[T^*T]_{i_0 i_0} = \sum_{k=1}^{n} \overline{t}_{k i_0} t_{k i_0} = \sum_{k=1}^{i_0} |t_{k i_0}|^2 = |t_{i_0 i_0}|^2$$

فلا بُدّ أن يكون $\sum_{k=i_0}^{n} |t_{i_0 k}|^2 = |t_{i_0 i_0}|^2$. أي $n \geq k > i_0 \Rightarrow t_{i_0 k} = 0$ ، وهذا يناقض تعريف i_0 . نستنتج من هذا التناقض أنّ $\Delta = \varnothing$ ، ومن ثَمّ أنّ المصفوفة T مصفوفة قطريّة.

I.3. لقد أثبتنا أنّه إذا كانت T مصفوفة مثلثيّة عليا تُحقّق $T^*T = TT^*$ كانت T مصفوفة قطريّة.

II.1. لتكن P مصفوفة قَلوبةً من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. ولنعرّف $M = P^*P$. عندئذ من الواضح أنّ

$$M^* = M \quad \text{و} \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}^*)\backslash\{0\}, \quad \langle MX, X\rangle = \|PX\|^2 > 0$$

فالمصفوفة M مصفوفة معرّفة موجبة. واستناداً إلى تفريق Choleski توجد مصفوفة مثلثيّة عليا T ، عناصر قطرها الرئيسي موجبة تماماً، وتحقّق $M = T^*T$ أو

$$P^*P = T^*T$$

II.2. لنعرّف المصفوفة $U = (P^*)^{-1} \cdot T^*$. عندئذ انطلاقاً من المساواة $P^*P = T^*T$ نستنتج مباشرة أنّ $P = U \cdot T$. ومن جهة ثانية نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} UU^* &= (P^*)^{-1}T^*((P^*)^{-1}T^*)^* \\ &= (P^*)^{-1}T^*TP^{-1} \\ &= (P^*)^{-1}P^*PP^{-1} = I_n \end{aligned}$$

وهذا ما يُثبتُ أنّ $U^{-1} = U^*$.

III.1. لتكن M مصفوفة ما من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ، تُحقّق الشرط $M^* \cdot M = M \cdot M^*$. لمّا كان بالإمكان تحليل كلّ كثير حدود غير ثابتٍ في $\mathbb{C}[X]$ إلى جداء ضرب كثيرات حدود من الدرجة الأولى، استنتجنا أنّ كلّ مصفوفة في $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ تشابه مصفوفة مثلثيّة، لأنه يمكن تحليل كثير حدودها المميّز إلى جداء ضرب كثيرات حدود من الدرجة الأولى.

III.2. إذن توجد مصفوفة مثلثيّة عليا T_1 من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، وتوجد مصفوفة قَلوبةٌ P من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، تحقّقان $M = PT_1P^{-1}$.

III.3. وبالاستفادة من II توجد مصفوفة مثلّثيّة عليا T_2 من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، ومصفوفة U من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، تُحقّقان $U^{-1} = U^*$ و $P = U \cdot T_2$، ومنه

$$M = U \underbrace{T_2 T_1 T_2^{-1}}_{T} U^{-1} = UTU^*$$

و $T = T_2T_1T_2^{-1}$ هي مصفوفة مثلّثيّة عليا من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

III.4. استناداً إلى الفرْض لدينا $M^* \cdot M = M \cdot M^*$، وهذا يكافئ

$$UTU^*UT^*U^* = UT^*U^*UTU^*$$

أو $T^*T = TT^*$. وبالاستفادة من I نستنتج أنّ T مصفوفة قطريّة يمكن أن نرمز إليها بالرمز D. وهكذا نكون قد أثبتنا الخاصّة الآتية:

> **كلّ مصفوفة نظاميّة M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، أي تُحقِّق الشرط $M^*M = MM^*$، تُكتب بالشكل $M = UDU^*$ حيث D مصفوفة قطريّة، و U مصفوفة واحديّة، أي تُحقّق $U^{-1} = U^*$.**

IV. من الواضح أنّ العكس صحيح، إذ تُحقّق كلُّ مصفوفة من الصيغة $M = UDU^*$، حيث $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ و $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ المساواة $M^*M = MM^*$. ■

التمرين 23. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاءً شعاعياً **حقيقياً** منتهي البعد مزوّداً بجداء سلّمي. وليكن $\mathcal{L}(E)$ فضاء التطبيقات الخطّية على E مزوداً بنظيم التطبيقات الخطّية المستمرة :

$$\forall T \in \mathcal{L}(E), \quad \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

I. ليكن $p : E \to E$ إسقاطاً قائماً. أثبت أنّ p تطبيق خطّي متناظر، وأنّ $\|p\| \leq 1$.

II. ليكن S من $\mathcal{L}(E)$ تطبيقاً خطّياً **متناظراً**. نريد في هذه الفقرة أن نثبت أنّ $\|S\|$ يحسب كما يأتي : $\|S\| = \sup_{\|x\|=1} \left|\langle S(x), x\rangle\right|$. لنعرّف إذن

$$\forall x \in E, \quad \Phi_S(x) = \langle S(x), x\rangle$$

1. أثبت أنّه $\forall x \in E, \quad \|x\| = 1 \Rightarrow \left|\Phi_S(x)\right| \leq \|S\|$. إذن يمكننا أن نعرّف $\mu(S) = \sup\limits_{\|x\|=1}\left|\langle S(x), x\rangle\right|$ ، فيكون $\mu(S) \leq \|S\|$.

2. لنبرهن إذن المتراجحة المعاكسة:

① أثبت أنّه، في حالة (x, y) من E^2 ، لدينا

$$\langle S(x), y\rangle = \frac{1}{4}\big(\Phi_S(x+y) - \Phi_S(x-y)\big)$$

② أثبت أيضاً صحة المتراجحة $\forall z \in E, \quad \left|\Phi_S(z)\right| \leq \mu(S)\|z\|^2$.

③ استنتج من ذلك أنّه، في حالة (x, y) من E^2 ، لدينا

$$\left|\langle S(x), y\rangle\right| \leq \frac{\mu(S)}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

④ استنتج المساواة المطلوبة.

III. ليكن p و q إسقاطين قائمين من $\mathcal{L}(E)$. أثبت على التوالي الخواص الآتية:

1. $\|p - q\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\left|\langle (p-q)(x), x\rangle\right|$.

2. $\|p - q\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\left|\|p(x)\|^2 - \|q(x)\|^2\right|$.

3. $\|p - q\| \leq 1$.

4. نفترض أنّ $\|p - q\| < 1$. أثبت أنّ

$$\operatorname{Im} p \cap \ker q = \{0\} \text{ و } \operatorname{Im} q \cap \ker p = \{0\} \text{ و } \operatorname{rg}(p) = \operatorname{rg}(q)$$

الحل

I. ليكن $p : E \to E$ إسقاطاً قائماً. عندئذ، مهما يكن x و y من E يكن

$$\begin{aligned}\langle p(x), y\rangle &= \langle p(x), y - p(y) + p(y)\rangle = \underbrace{\langle p(x), y - p(y)\rangle}_{0} + \langle p(x), p(y)\rangle \\ &= \langle p(x) - x + x, p(y)\rangle = \underbrace{\langle p(x) - x, p(y)\rangle}_{0} + \langle x, p(y)\rangle\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$$

فالإسقاط القائم تطبيق متناظر.

ومن جهة أخرى، مهما يكن x من E، نستنتج من تعامد الشعاعين $p(x)$ و $x-p(x)$ أنّ

$$\|p(x)\|^2 + \|x-p(x)\|^2 = \|x\|^2$$

ومن ثَمّ $\|p(x)\| \leq \|x\|$. إذن $\|p\| \leq 1$.

II. ليكن S من $\mathcal{L}(E)$ تطبيقاً خطّياً **متناظراً**. ولنعرّف $\forall x \in E,\ \Phi_S(x) = \langle S(x), x\rangle$.

II.1. من الواضح، أنّه في حالة x من E، لدينا

$$|\Phi_S(x)| = \left|\langle S(x), x\rangle\right| \leq \|S(x)\|\|x\| \leq \|S\|\|x\|^2$$

إذن

$$\forall x \in E,\ \|x\| = 1 \ \Rightarrow\ |\Phi_S(x)| \leq \|S\|$$

وعليه يمكننا أن نعرّف $\mu(S) = \sup_{\|x\|=1} |\langle S(x), x\rangle|$، فيكون $\mu(S) \leq \|S\|$.

II.2. ليكن x و y من E، وليكن ε من $\{-1,1\}$ عندئذ

$$\begin{aligned}
\Phi_S(x+\varepsilon y) &= \langle S(x+\varepsilon y), x+\varepsilon y\rangle \\
&= \langle S(x), x\rangle + \langle S(x), \varepsilon y\rangle + \langle S(\varepsilon y), x\rangle + \langle S(\varepsilon y), \varepsilon y\rangle \\
&= \Phi_S(x) + \varepsilon\big(\langle S(x), y\rangle + \langle S(y), x\rangle\big) + \Phi_S(y) \\
&= \Phi_S(x) + 2\varepsilon\langle S(x), y\rangle + \Phi_S(y)
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\forall (x,y) \in E^2,\quad \langle S(x), y\rangle = \frac{1}{4}\big(\Phi_S(x+y) - \Phi_S(x-y)\big)$$

ولمّا كان من الواضح أنّ $\forall z \in E,\ \left|\Phi_S(z)\right| \leq \mu(S)\|z\|^2$، استنتجنا مما سبق أنّ

$$\forall (x,y) \in E^2,\quad |\langle S(x), y\rangle| \leq \frac{\mu(S)}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$$

ومن ثَمّ

$$\forall (x,y) \in E^2,\quad |\langle S(x), y\rangle| \leq \frac{\mu(S)}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\|S\| = \sup\left\{|\langle S(x), y\rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\right\} \leq \mu(S)$$

فنكون قد أثبتنا أنّ

$$\|S\| = \mu(S)$$

III. ليكن p و q إسقاطين قائمين من $\mathcal{L}(E)$.

III.1. لمّا كان مجموع تطبيقين متناظرين تطبيقاً متناظراً، استنتجنا من كون $p-q$ متناظراً أنّ:

$$\|p-q\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle (p-q)(x), x\rangle|$$

III.2. ولكن

$$\langle (p-q)(x), x\rangle = \langle p(x), x\rangle - \langle q(x), x\rangle = \|p(x)\|^2 - \|q(x)\|^2$$

إذن

$$\|p-q\| = \sup_{\|x\|=1} \left| \|p(x)\|^2 - \|q(x)\|^2 \right|$$

III.3. ولمّا كان الفرق بين عددين من $[0,1]$ هو عددٌ من $[-1,1]$ استنتجنا مما سبق أنّ $\|p-q\| \leq 1$.

III.4. لنفترض أنّ $\|p-q\| < 1$. إذا كان x عنصراً من $\operatorname{Im} p \cap \ker q$ كان $p(x) = x$ وكان $q(x) = 0$. ومن ثَمّ $x = (p-q)(x)$. وهذا يقتضي أن يكون

$$\|x\| = \|(p-q)(x)\| \leq \|p-q\| \|x\|$$

ومن ثَمّ $0 \leq \|x\| \left(1 - \|p-q\|\right)$، إذن $\|x\| \leq 0$ أو $x = 0$. فنكون بذلك قد أثبتنا أنّ

$$\operatorname{Im} p \cap \ker q = \{0\}$$

ولمّا كان الإسقاطان p و q يؤدّيان دورين متناظرين استنتجنا مما سبق أنّ

$$\operatorname{Im} q \cap \ker p = \{0\}$$

- ينتج من $\operatorname{Im} p \cap \ker q = \{0\}$ أنّ

$$\operatorname{rg} p + \dim \ker q \leq \dim E$$

ومن ثَمّ $\operatorname{rg} p \leq \operatorname{rg} q$.

- وينتج من $\operatorname{Im} q \cap \ker p = \{0\}$ أنّ

$$\operatorname{rg} q + \dim \ker p \leq \dim E$$

ومن ثَمّ $\operatorname{rg} q \leq \operatorname{rg} p$. وعليه

$$\left(\|p-q\| < 1\right) \Rightarrow \left(\operatorname{rg} q = \operatorname{rg} p\right)$$

وهو المطلوب.

التمرين 24. ليكن t من $\mathbb{R}$، ولنتأمّل في $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ المصفوفة التالية :

$$M_t = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & 1 & t & t^2 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}$$

1. أثبت أنّ المصفوفة M_t تكون مصفوفة معرّفة موجبة إذا وفقط إذا كان $\left|t\right| < 1$.
2. استنتج أنّ المصفوفة الآتية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة معرّفة موجبة أيضاً.

الحل

1. لنتأمّل الشعاع $X = {}^t[1, -t, 0, 0]$. عندئذ $\langle M_t X, X\rangle = 1 - t^2$، وعليه فإنّ كون المصفوفة M_t معرّفة موجبة يقتضي أنّ $1 - t^2 > 0$ ومن ثَمّ $|t| < 1$.

وبالعكس، لنفترض أنّ $|t| < 1$ عندئذ نتيقّن مباشرة أنّ $M_t = {}^tBB$، حيث

$$B = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & \sqrt{1-t^2} & t\sqrt{1-t^2} & t^2\sqrt{1-t^2} \\ 0 & 0 & \sqrt{1-t^2} & t\sqrt{1-t^2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1-t^2} \end{bmatrix}$$

وهذا يثبتُ أنّ M_t مصفوفة معرّفة موجبة في هذه الحالة.

2. ليكن X شعاعاً غير صفري من $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. عندئذ نعلم أنّ التابع $t \mapsto \langle M_t X, X\rangle$ تابعٌ مستمرٌّ يأخذ قيمه في $\mathbb{R}_+^*$، وذلك بناءً على 1. ومنه نستنتج أنّ

$$\int_0^1 \langle M_t X, X\rangle \,\mathrm{d}\,t > 0$$

ولكن نلاحظ مباشرة أنّ

$$\left\langle\left(\int_0^1 M_t\,\mathrm{d}\,t\right)X,X\right\rangle=\int_0^1\langle M_tX,X\rangle\,\mathrm{d}\,t$$

وأنّ $A=\int_0^1 M_t\,\mathrm{d}\,t$. إذن لا بُدّ أن يكون $\langle AX,X\rangle>0$. فالمصفوفة A معرّفة موجبة. ■

التمرين 25. نظرة جديدة على إجرائيّة Gram-Schmidt

I. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاءً شعاعياً مزوّداً بجداء سلّمي، ولتكن $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ جملة حرّة في E . نعرّف المصفوفة A بأنّها المصفوفة المثلّثيّة العليا التي عناصر قطرها الرئيسي موجبة تماماً والتي تُحقِّق $\mathrm{Gram}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=A^*\cdot A$ ، ثُمّ نعرّف المصفوفة $B=(b_{ij})$ بالعلاقة $B=A^{-1}$ ، وأخيراً نعرّف $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ بالعلاقات:

$$\beta_j=\sum_{i=1}^{j}b_{ij}\alpha_i,\qquad j\in\{1,\ldots,n\}$$

أثبت أنّ الجملة $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ جملة متعامدة نظاميّة، وأنّها الجملة نفسها التي نحصل عليها بتطبيق إجرائية Gram-Schmidt على الجملة $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$.

II. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة $\mathbb{R}[X]$ مزوّداً بالجداء السلّمي:

$$\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^{0}P(t)Q(t)\,\mathrm{d}\,t$$

عيّن الجملة المتعامدة النظاميّة التي نحصل عليها بتطبيق إجرائيّة Gram-Schmidt على $(1,X,X^2,X^3)$.

الحل

I. في الحقيقة، في حالة (i,j) من $\mathbb{N}_n^2$ ، نجد

$$\begin{aligned}\langle\beta_i,\beta_j\rangle&=\left\langle\sum_{\ell=1}^{i}b_{\ell i}\alpha_\ell,\sum_{k=1}^{j}b_{kj}\alpha_k\right\rangle=\sum_{\ell=1}^{i}\sum_{k=1}^{j}\overline{b}_{\ell i}b_{kj}\left\langle\alpha_\ell,\alpha_k\right\rangle\\&=\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[B^*]_{i\ell}\langle\alpha_\ell,\alpha_k\rangle[B]_{kj}=\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[B^*]_{i\ell}[A^*A]_{\ell k}[B]_{kj}\\&=[B^*A^*\underline{AB}]_{ij}=\delta_{ij}\qquad ☞\ B=A^{-1}\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ الجملة $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ جملة متعامدة نظاميّة.

- استناداً إلى التعريف وإلى كون الجملة $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ جملة حرّة لأنها متعامدة نظاميّة، نستنتج أنّه أياً كانت j من $\mathbb{N}_n$ فلدينا $\operatorname{vect}(\alpha_1,\ldots,\alpha_j) = \operatorname{vect}(\beta_1,\ldots,\beta_j)$.
- ونظراً إلى كون الشعاع β_j عمودي على $\operatorname{vect}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1})$ استنتجنا أنّ $\langle\alpha_j,\beta_j\rangle = b_{jj}\|\beta_j\|^2$ ومن ثَمّ $\langle\alpha_j,\beta_j\rangle = a_{jj} \in \mathbb{R}_+^*$.
- وأخيراً الجملة $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ جملة متعامدة نظاميّة.

نستنتج من هذه النقاط أنّ الجملة $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ هي الجملة المتعامدة النظاميّة التي نحصل عليها من تطبيق إجرائية Gram-Schmidt على الجملة $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$.

II. لتكن $\mathcal{G} = (1, X, X^2, X^3)$. لمّا كان

$$\langle X^k, X^\ell\rangle = \int_{-1}^{0} x^{k+\ell}\,\mathrm{d}\,x = \frac{(-1)^{k+\ell}}{k+\ell+1}$$

استنتجنا أنّ

$$G = \operatorname{Gram}(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

لنبحث عن المصفوفة $A = (a_{ij})$ المثلثيّة العليا التي عناصر قطرها الرئيسي موجبة تماماً وتحقّق $G = A^*A$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & & \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{33} & a_{34} \\ & & & a_{44} \end{bmatrix}$$

ومنه نستنتج من جداء ضرب العمود الأوّل من A في أسطر A^* أنّ

$$a_{11} = 1 \text{ و } a_{12} = -\frac{1}{2} \text{ و } a_{13} = \frac{1}{3} \text{ و } a_{14} = -\frac{1}{4}$$

ثُمّ نستنتج من جداء ضرب العمود الثاني من A في أسطر A^* أنّ

$$a_{22} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ و } a_{23} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ و } a_{24} = \frac{3\sqrt{3}}{20}$$

ثُمّ نستنتج من جداء ضرب العمود الثالث من A في أسطر A^* أنّ

$$a_{33} = \frac{1}{6\sqrt{5}} \text{ و } a_{34} = -\frac{1}{4\sqrt{5}}$$

وأخيراً $a_{44} = \dfrac{1}{20\sqrt{7}}$. إذن تُعطى المصفوفة A بالصيغة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{3\sqrt{3}}{20} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6\sqrt{5}} & \frac{-1}{4\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20\sqrt{7}} \end{bmatrix}$$

لحساب $B = A^{-1}$ نكتب ما يأتي:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{3\sqrt{3}}{20} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6\sqrt{5}} & \frac{-1}{4\sqrt{5}} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20\sqrt{7}} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{9}{20} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20\sqrt{7} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 5\sqrt{7} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & -9\sqrt{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 5\sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20\sqrt{7} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & -2\sqrt{5} & -5\sqrt{7} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 3\sqrt{5} & 6\sqrt{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6\sqrt{5} & 30\sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20\sqrt{7} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{3} & 6\sqrt{5} & 12\sqrt{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6\sqrt{5} & 30\sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20\sqrt{7} \end{array}\right]$$

وعليه فإنّ

$$B=\begin{bmatrix}1&\sqrt{3}&\sqrt{5}&\sqrt{7}\\0&2\sqrt{3}&6\sqrt{5}&12\sqrt{7}\\0&0&6\sqrt{5}&30\sqrt{7}\\0&0&0&20\sqrt{7}\end{bmatrix}$$

فالجملة $(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ التي نحصل عليها بتطبيق إجرائيّة Gram-Schmidt على $(1,X,X^2,X^3)$ هي

$$\begin{aligned}\beta_0&=1\\ \beta_1&=\sqrt{3}\left(1+2X\right)\\ \beta_2&=\sqrt{5}\left(1+6X+6X^2\right)\\ \beta_3&=\sqrt{7}\left(1+12X+30X^2+20X^3\right)\end{aligned}$$

وبذا يُنجز الحل. ■

التمرين 26. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ هو فضاء أشعّة الأعمدة $\mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{R})$ مزوّداً بالجداء السلّمي المألوف، ولنتأمّل المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&-1\\-1&0&-2&0\\0&2&0&-2\\1&0&2&0\end{bmatrix}$$

والتطبيق الخطّي الموافق لها : $u:E\to E:X\mapsto AX$.

1. أثبت أنّ $u^*=-u$ ، وأنّه مهما يكن X من E فإنّ $u(X)\perp X$ ، وأخيراً احسب كثير الحدود المميِّز للتطبيق الخطّي u .
2. أوجد أساساً للفضاء $F=\ker u$.
3. أثبت أنّ $u(F^\perp)\subset F^\perp$. وأنّ التطبيق $\varphi:F^\perp\to F^\perp,\ X\mapsto u(X)$ تقابلٌ يُحقّق $\varphi\circ\varphi=\mu I_{F^\perp}$ حيث μ هو ثابت يُطلب تعيينه و $I_{F^\perp}$ هو التطبيق المطابق على $F^\perp$. **مساعدة**. يمكن استعمال $\mathcal{X}_\varphi$.

4. ليكن e شعاعاً غير معدوم من $F^{\perp}$. أثبت أنّ $(e, u(e))$ أساس للفضاء $F^{\perp}$.

5. أثبت أنّه يوجد ثابت $k > 0$ يُطلب تعيينه يحقق

$$\forall X \in F^{\perp}, \ \|u(X)\| = k\|X\|$$

نختار شعاعاً ما من $F^{\perp}$ يُحقّق $\|e_1\| = 1$، ثمّ نُعرّف $e_2 = \frac{1}{k}u(e_1)$. أثبت أنّ (e_1, e_2) أساس متعامد نظامي للفضاء $F^{\perp}$، واكتب مصفوفة φ بالنسبة إلى هذا الأساس.

6. أوجد أساساً متعامداً نظامياً للفضاء E وعدداً α من $\mathbb{R}^+$، لتأخذ مصفوفة u بالنسبة إليه الشكل الآتي :

$$\begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل

1. ليكن $\mathcal{E}$ الأساس القانوني في $E = \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$، وهو أساس متعامد نظامي بالنسبة إلى الجداء السلمي المألوف. ولمّا كانت $A = \mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ استنتجنا من المساواة الواضحة ${}^tA = -A$ أنّ $u^* = -u$. ليكن X من E. عندئذ

$$\begin{aligned} \langle u(X), X\rangle &= \langle X, u^*(X)\rangle \\ &= \langle X, -u(X)\rangle = -\langle u(X), X\rangle \end{aligned}$$

ومن ثَمّ $\langle u(X), X\rangle = 0$، أي

$$\forall X \in E, \ u(X) \perp X.$$

ومن جهة أخرى نجد بحساب مباشر أنّ

$$\mathcal{X}_u(\lambda) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2(\lambda^2 + 10)$$

2. ليكن $F=\ker u$. عندئذ ينتمي $X={}^t[\alpha,\beta,\gamma,\delta]$ إلى F إذا وفقط إذا كان

$$\begin{bmatrix}0&1&0&-1\\-1&0&-2&0\\0&2&0&-2\\1&0&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta-\delta\\-\alpha-2\gamma\\2\beta-2\delta\\\alpha+2\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

ومنه $\beta=\delta$ و $\alpha+2\gamma=0$. فإذا عرّفنا

$$e_4={}^t\left[0,1,0,1\right] \text{ و } e_3={}^t\left[2,0,-1,0\right]$$

كان $F=\operatorname{vect}(e_3,e_4)$.

3. ليكن X عنصراً من $F^\perp$ ، عندئذ

$$\forall Y\in F,\ \langle u(X),Y\rangle=-\langle X,u(Y)\rangle=-\langle X,0\rangle=0$$

وهذا يثبتُ أنّ $u(X)\in F^\perp$. يمكننا إذن أن نعرّف $\varphi=u\|_{F^\perp}$. نعرف من دراستنا لخواص كثيرات الحدود المميِّزة أنّ $\mathcal{X}_\varphi$ هو كثير حدود حقيقي من الدرجة الثانية يقسم $\mathcal{X}_u$. ولمّا كان $\ker\varphi=\{0\}$ استنتجنا أنّ $\mathcal{X}_\varphi(0)\neq 0$. إذن لا بُدّ أن يكون $\mathcal{X}_\varphi(\lambda)=\lambda^2+10$. وهذا يثبتُ، أنّ $\varphi^2=-10I_{F^\perp}$.

4. ليكن e شعاعاً غير صفري من $F^\perp$. لأنّ $u^2(e)=-10e\neq 0$ استنتجنا أنّ $u(e)\neq 0$ ، ويكون $e\perp u(e)$. فالجملة $\big(e,u(e)\big)$ جملة حرّة في $F^\perp$ ، فهي من ثَمّ أساس لهذا الفضاء لأنّ بعده يساوي 2 .

5. ليكن X من $F^\perp$ ، عندئذ

$$\|u(X)\|^2=\langle u(X),u(X)\rangle=\langle X,-u^2(X)\rangle=10\|x\|^2$$

ومنه $\forall X\in F^\perp,\ \|u(X)\|=\sqrt{10}\,\|X\|$.

نختار إذن شعاعاً ما من $F^\perp$ يُحقّق $\|e_1\|=1$ ، ثُمّ نُعرّف $e_2=\frac{1}{\sqrt{10}}u(e_1)$. لقد أثبتنا أنّ (e_1,e_2) أساس متعامد للفضاء $F^\perp$. وإذا لاحظنا أنّ $\|e_2\|=\frac{1}{\sqrt{10}}\|u(e_1)\|=\|e_1\|$ استنتجنا أنّ $\mathcal{E}'=(e_1,e_2)$ هو، في الحقيقة، أساسٌ متعامدٌ نظامي للفضاء $F^\perp$. وأخيراً

$$\operatorname{mat}\big(\varphi,\mathcal{E}',\mathcal{E}'\big)=\begin{bmatrix}0&-\sqrt{10}\\\sqrt{10}&0\end{bmatrix}$$

6. لنعرّف $e_1 = {}^t\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. نلاحظ أنّ $\|e_1\| = 1$ وأنّ $e_1 \perp e_3$ و $e_1 \perp e_4$.
إذن e_1 هو شعاع من $F^\perp$ يُحقّق $\|e_1\| = 1$. ولنضع استناداً إلى 5.

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} u(e_1) = {}^t\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right]$$

عندئذ إذا عرّفنا $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ كان

$$\mathrm{mat}\left(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{10} & 0 & 0 \\ \sqrt{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 27. اختزال تطبيق خطّي

I. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن u **تقابلاً** خطّياً. نعرّف التطبيق الخطّي $v = u + u^{-1}$ ، ونتأمّل x_0 شعاعاً ذاتيّاً للفضاء v موافقاً لقيمة ذاتيّة k . نضع $y_0 = u(x_0)$ ونفترض أنّ الجملة (x_0, y_0) حرّة.

1. احسب $u(y_0)$ و $v(y_0)$ بدلالة (x_0, y_0) . ماذا عن $\dim \ker(v - kI_E)$ ؟

2. ليكن $H = \mathrm{vect}(x_0, y_0)$. أثبت صحة المساواة $u(H) = H$ ، وأنّ كثير الحدود $X^2 - kX + 1$ يقسم $\mathcal{X}_u$ ؛ أي كثير الحدود المميِّز للتطبيق الخطّي u .

II. ليكن $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ هو فضاء أشعّة الأعمدة $\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$ مزوّداً بالجداء السلّمي المألوف. ولنتأمّل المصفوفة

$$M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

والتطبيق الخطّي الموافق لها : $u : E \to E : X \mapsto MX$.

1. أثبت أنّ $u \in \mathcal{O}^+(E)$.
2. عين القيم الذاتيّة للتطبيق الخطّي $v = u + u^{-1}$.
3. أوجد أساساً متعامداً نظامياً $\mathcal{V}$ في E مكوَّناً من أشعة ذاتيّة للتطبيق الخطّي v .
4. اكتب مصفوفة u في الأساس $\mathcal{V}$.

الحل

I.1. نستنتج من المساواة $v(x_0) = kx_0$ أنّ $y_0 + u^{-1}(x_0) = kx_0$ ومن ثمّ يكون

$$u(y_0) = ku(x_0) - x_0 = ky_0 - x_0$$

و

$$v(y_0) = u(y_0) + u^{-1}(y_0) = ky_0 - x_0 + x_0 = ky_0$$

نستنتج إذن أنّ $\mathrm{vect}(x_0, y_0) \subset \ker(v - kI_E)$ ومن ثمّ $\dim\ker(v - kI_E) \geq 2$.

I.2. ليكن $H = \mathrm{vect}(x_0, y_0)$ لمّا كان

$$u(y_0) = ky_0 - x_0 \in H \quad \text{و} \quad u(x_0) = y_0 \in H$$

استنتجنا أنّ $u(H) \subset H$ ، ولأنّ u تقابلٌ استنتجنا أنّ $u(H) = H$. إذن إذا عرّفنا $w = u_{\|H}$ كان كثير الحدود المميِّز $\mathcal{X}_w$ للتطبيق w قاسماً لكثير الحدود المميِّز $\mathcal{X}_u$ للتطبيق u . ولكنّ مصفوفة التطبيق الخطّي w بالنسبة إلى الأساس (x_0, y_0) هي $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{bmatrix}$ إذن $\mathcal{X}_w(X) = X^2 - kX + 1$. وهذا يثبتُ أنّ $X^2 - kX + 1$ يقسم $\mathcal{X}_u$.

II.1. نجد بالحساب المباشر أنّ ${}^tMM = I_4$ و $\det M = +1$. إذن M هي مصفوفة دوران، أي $u \in \mathcal{O}^+(E)$.

II.2. لمّا كان $u^{-1} = u^*$ استنتجنا أنّ $N = M + {}^tM$ هي مصفوفة v في الأساس القانوني. أي

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ومن ثَمّ

$$\mathcal{X}_v(X)=\det\begin{bmatrix}1-X & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1-X & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1-X & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1-X\end{bmatrix}=(X^2-3)^2$$

إذن $\operatorname{sp}(v)=\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}$.

II.3. ونجد بالحساب أنّ الشعاعين

$$v_1=\frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{3}}}\begin{bmatrix}1-\sqrt{3}\\ 1-\sqrt{3}\\ 0\\ 2\end{bmatrix},\quad v_2=\frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{3}}}\begin{bmatrix}1-\sqrt{3}\\ -1+\sqrt{3}\\ 2\\ 0\end{bmatrix}$$

يؤلّفان أساساً متعامداً نظاميّاً للفضاء الذاتي للتطبيق v الموافق للقيمة الذاتيّة $-\sqrt{3}$. وكذلك نجد أنّ

$$v_3=\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{3}}}\begin{bmatrix}1+\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{3}\\ 0\\ 2\end{bmatrix},\quad v_4=\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{3}}}\begin{bmatrix}1+\sqrt{3}\\ -1-\sqrt{3}\\ 2\\ 0\end{bmatrix}$$

يؤلّفان أساساً متعامداً نظاميّاً للفضاء الذاتي للتطبيق v الموافق للقيمة الذاتيّة $\sqrt{3}$. فيكون الأساس $\mathcal{V}=(v_1,v_2,v_3,v_4)$ أساساً متعامداً نظامياً للفضاء E مكوّناً من أشعّة ذاتيّة للتطبيق v .

II.4. إذا كانت P المصفوفة التي أعمدتها الأشعّة v_1 و v_2 و v_3 و v_4 بالترتيب، كان

$$\operatorname{mat}\big(u,\mathcal{V},\mathcal{V}\big)=PM\,{}^tP=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ∎

التمرين 28. ليكن $E=\mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة التي لا تزيد درجتها عن $n \geq 1$. نزوّد E بالجداء السلمي:

$$\langle P,Q\rangle=\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}\,t$$

ونعرّف u من $\mathcal{L}(E)$ بالعلاقة

$$u(P)(x)=\int_0^1 (x+t)^n P(t)\,\mathrm{d}\,t$$

1. أثبت أنّ التطبيق الخطّي u متناظر وأنّه تقابل أيضاً.
2. أثبت أنّه يوجد أساس متعامد نظامي $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ في E وأعداد حقيقيّة $(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ تُحقّق

$$\forall k\in\{0,1,\ldots,n\},\qquad u(P_k)=\lambda_k P_k$$

3. أثبت أنّ

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad (x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k P_k(x)P_k(y)$$

4. احسب $\mathrm{tr}(u)$ و $\mathrm{tr}(u^2)$.

الحل

1. لنلاحظ أنّه في حالة P و Q من E لدينا

$$\langle u(P),Q\rangle=\int_0^1 u(P)(x)Q(x)\,\mathrm{d}\,x$$

ولكن $u(P)(x)=n!\sum_{k+\ell=n}\frac{x^k}{k!}\int_0^1\frac{t^\ell}{\ell!}P(t)\,\mathrm{d}\,t$ إذن

$$\langle u(P),Q\rangle=n!\sum_{k+\ell=n}\left(\int_0^1\frac{t^\ell}{\ell!}P(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\times\left(\int_0^1\frac{x^k}{k!}Q(x)\,\mathrm{d}\,x\right)$$

وهذا يثبت أنّ $\langle u(P),Q\rangle=\langle P,u(Q)\rangle$، والتطبيق الخطّي u متناظر.

نستنتج من عبارة $u(P)$ أنّ المساواة $u(P)=0$ تقتضي

$$\forall k\in\{0,1,\ldots,n\},\ \ \langle P,X^k\rangle=0$$

أي إنّ $P=0$ لأنّه عمودي على جميع عناصر الفضاء E. ومنه $\ker u=\left\{0\right\}$. وهذا يثبتُ أنّ u تقابل.

2. ولمّا كان u تطبيقاً خطّياً متناظراً استنتجنا أنّه يوجد أساس متعامد نظامي $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ في E مكوّنٌ من أشعّة ذاتيّة للتطبيق u، فتوجد أعداد حقيقيّة $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ تُحقّق

$$\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}, \qquad u(P_k) = \lambda_k P_k$$

3. ليكن Q كثير حدود من E عندئذ نستتج من كون الأساس $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ أساساً متعامداً نظامياً أنّ

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{n} \langle Q, P_k \rangle P_k(X)$$

وفي حالة $Q(X) = (X+y)^n$ نستنتج أنّ

$$\left\langle Q, P_k \right\rangle = \int_0^1 (t+y)^n P_k(t)\,\mathrm{d}\,t = u(P_k)(y)$$

ومن ثَمّ

$$(X+y)^n = \sum_{k=0}^{n} u(P_k)(y) P_k(X)$$

ولكن $u(P_k) = \lambda_k P_k$، إذن

$$(X+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(y) P_k(X)$$

وهذا يثبت المتطابقة المرجوّة.

4. لمّا كان $(X+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(y) P_k(X)$، استنتجنا أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2^n x^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (P_k(x))^2$$

ومن ثَمّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2^n \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \int_0^1 (P_k(x))^2 \,\mathrm{d}\,x$$

ولأنّ $\|P_k\|^2 = 1$ استنتجنا ممّا سبق أنّ $\frac{2^n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k = \operatorname{tr} u$.

ومن جهة أخرى، نستنتج من المساواة $(X+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(y) P_k(X)$ أنّ

$$u((X+y)^n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(y) u(P_k(X)) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 P_k(y) P_k(X)$$

أي

$$\int_0^1 (X+t)^n (t+y)^n \,\mathrm{d}\,t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 P_k(y) P_k(X)$$

وهذا يقتضي بعد تعويض $X = y$ أنّ

$$\int_0^1 (t+y)^{2n} \,\mathrm{d}\,t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 (P_k(y))^2$$

أو

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 (P_k(y))^2 = \frac{(1+y)^{2n+1} - y^{2n+1}}{2n+1}$$

وبمكاملة الطرفين على المجال $[0,1]$ والاستفادة من $\| P_k \|^2 = 1$ نجد

$$\operatorname{tr} u^2 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 = \int_0^1 \frac{(y+1)^{2n+1} - y^{2n+1}}{2n+1} \,\mathrm{d}\,y = \frac{2^{2n+1} - 1}{(n+1)(2n+1)}$$

وبذا نصل إلى النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 29. يهدف هذا التّمرين إلى إثبات أنّ طيف أي تطبيق خطيّ متناظر ليس خالياً. لذلك لا يُسمح هنا بالاستفادة من هذه النتيجة ولا النتائج المشتقّة منها. ليكن E فضاءً إقليديّاً، بعده n من $\mathbb{N}^*$، وليكن T من $\mathcal{L}(E)$ تطبيقاً خطياً متناظراً.

I. نتأمّل عددين حقيقيّين α و β يحقّقان $\alpha^2 < 4\beta$. ونضع

$$u = T^2 + \alpha T + \beta I$$

1. أثبت أنّه يوجد ثابتٌ λ يُطلب تعيينه يُحقّق :

$$\forall x \in E,\quad \langle u(x), x\rangle = \left\| T(x) + \frac{\alpha}{2} x \right\|^2 + \lambda \|x\|^2$$

2. استنتج أنّ u قَلوبٌ.

II. نفترض أنّ $\mathrm{sp}(T)=\varnothing$، أي ليس للتطبيق T قيمٌ ذاتيّة، عندئذ يكتب كثير حدوده المميّز $\mathcal{X}_T$ بالشكل

$$\mathcal{X}_T(X)=\prod_{i=1}^{p}(X^2+\alpha_i X+\beta_i)$$

حيث $\alpha_i^2<4\beta_i$ أياً كان i من $\mathbb{N}_p$. أثبت أنّه في هذه الحالة يكون $\mathcal{X}_T(T)$ قَلوباً واستنتج المطلوب.

الحل

I.1. من الواضح أنّ u متناظرٌ. من جهة أخرى، ليكن x من E ، عندئذ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\langle u(x),x\rangle &= \langle T^2(x)+\alpha T(x)+\beta x,x\rangle\\ &= \langle T^2(x),x\rangle+\alpha\langle T(x),x\rangle+\beta\left\|x\right\|^2\\ &= \left\|T(x)\right\|^2+\alpha\big\langle T(x),x\big\rangle+\beta\left\|x\right\|^2\\ &= \left\|T(x)+\frac{\alpha}{2}x\right\|^2+\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)\left\|x\right\|^2\\ &= \left\|T(x)+\frac{\alpha}{2}x\right\|^2+\lambda\left\|x\right\|^2\end{aligned}$$

حيث $\lambda=\beta-\alpha^2/4$.

I.2. وبملاحظ أنّ $\lambda>0$ نستنتج أنّ $\forall x\in E\backslash\{0\},\ \langle u(x),x\rangle>0$ ، فالتطبيق u معرّفٌ موجبٌ، وهو من ثَمّ قَلوبٌ.

II. نفترض أنّ $\mathrm{sp}(T)=\varnothing$، أي ليس للتطبيق T قيمٌ ذاتيّة، عندئذ يكتب كثير حدوده المميّز $\mathcal{X}_T$ بالشكل

$$\mathcal{X}_T(X)=\prod_{i=1}^{p}(X^2+\alpha_i X+\beta_i)$$

حيث $\alpha_i^2<4\beta_i$ أياً كان i من $\mathbb{N}_p$. فإذا عرّفنا $u_i=T^2+\alpha_i T+\beta_i I$ كان u_i قَلوباً، بناءً على نتيجة السؤال السابق، وكان من ثَمّ $\mathcal{X}_T(T)=u_1\circ u_2\circ\cdots\circ u_p$ قلوباً لأنّه تركيب تطبيقات خطيّة قلوبة، وهذا ما يناقض مبرهنة كايلي هاملتون التي تنص على أنّ $\mathcal{X}_T(T)=0$. وعليه يجب أن يكون $\mathrm{sp}(T)\neq\varnothing$ ، وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 30. ليكن $E = \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ ولنعرّف على E الجداء السلّمي الآتي :

$$\forall (A,B)\in E^2,\ \ \langle A,B\rangle = \operatorname{tr}({}^tAB)$$

ولتكن T من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ و U من $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. نعرّف على E التطبيق الخطّي f كما يلي : $\forall X\in E,\quad f(X) = TX - XU$.

1. أوجد شرطاً لازماً وكافياً على T و U كي يكون $f = 0$.
2. احسب f^* التطبيق الخطّي المرافق للتطبيق f.
3. أوجد شرطاً لازماً وكافياً على T و U كي يكون f متناظراً.

الحل

1. ليكن $(E_{st})_{(s,t)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$ الأساس القانوني في E. إذن $[E_{st}]_{ij} = \delta_{is}\delta_{tj}$ حيث δ هو رمز كرونيكر. الشرط $f = 0$ يُكافئ $f(E_{st}) = 0$ أيّاً كان (s,t) من $\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p$.

ليكن إذن (s,t) من $\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p$. عندئذ

$$[TE_{st}]_{k\ell} = \sum_{i=1}^{n}[T]_{ki}[E_{st}]_{i\ell} = \sum_{i=1}^{n}[T]_{ki}\delta_{is}\delta_{t\ell} = \delta_{t\ell}[T]_{ks}$$

$$[E_{st}U]_{k\ell} = \sum_{j=1}^{p}[E_{st}]_{kj}[U]_{j\ell} = \sum_{j=1}^{p}\delta_{ks}\delta_{tj}[U]_{j\ell} = \delta_{ks}[U]_{t\ell}$$

ومن ثَمّ نستنتج من $f(E_{st}) = 0$ أنّ

$$\forall (k,\ell)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p,\quad \delta_{t\ell}[T]_{ks} = \delta_{ks}[U]_{t\ell}$$

ومنه

- في حالة $s\neq k$ نختار $\ell = t$ لنستنتج أنّ $[T]_{ks} = 0$.
- وفي حالة $t\neq\ell$ نختار $k = s$ لنستنتج أنّ $[U]_{t\ell} = 0$.
- وأخيراً في حالة $\ell = t$ و $k = s$ نجد $[T]_{ss} = [U]_{tt}$.

ولمّا كان (s,t) عنصراً كيفيّاً من $\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p$، استنتجنا أنّه يوجد عدد λ من $\mathbb{R}$ يُحقّق $T = \lambda I_n$ و $U = \lambda I_p$. وبالطبع إنّ العكس واضحٌ، أي إنّه في حالة $T = \lambda I_n$ و $U = \lambda I_p$ يكون $f = 0$.

2. لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\left\langle f(X), Y\right\rangle &= \operatorname{tr}({}^t(TX - XU)Y)\\ &= \operatorname{tr}({}^tX\,{}^tTY - {}^tU\,{}^tXY)\\ &= \operatorname{tr}({}^tX\,{}^tTY) - \operatorname{tr}({}^tU\,{}^tXY)\\ &= \langle X, {}^tTY\rangle - \operatorname{tr}({}^tXY\,{}^tU)\\ &= \langle X, {}^tTY\rangle - \langle X, Y\,{}^tU\rangle\\ &= \langle X, {}^tTY - Y\,{}^tU\rangle\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ f^* يُعطى بالعلاقة:

$$\forall Y \in E,\ f^*(Y) = {}^tTY - Y\,{}^tU$$

3. وعلى هذا يكون f متناظراً إذا وفقط إذا كان $f = f^*$ أي

$$\forall X \in E,\ {}^tTX - X\,{}^tU = TX - XU$$

$$\forall X \in E,\quad {}^tTX - X\,{}^tU = TX - XU$$

فإذا عرّفنا $\tilde{T} = {}^tT - T$ و $\tilde{U} = {}^tU - U$ استنتجنا أنّ $f = f^*$ يُكافئ

$$\forall X \in E,\quad \tilde{T}X - X\tilde{U} = 0$$

وهذا يُكافئ، استناداً إلى 1.، أنّه يوجد عدد λ من $\mathbb{R}$ يُحقّق $\tilde{T} = \lambda I_n$ و $\tilde{U} = \lambda I_p$، ولكنّ المصفوفتين $\tilde{T}$ و $\tilde{U}$ متخالفتان، إذن يجب أن يكون $\lambda = 0$ أي $\tilde{T} = 0$ و $\tilde{U} = 0$ وعليه

$$f = f^* \Leftrightarrow ({}^tT = T) \wedge ({}^tU = U)$$

التمرين 31. لتكن المصفوفة المتناظرة $M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. نزوّد فضاء الأعمدة $E = \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ بالجداء السلمّي المألوف $\langle X, Y\rangle = {}^tX \cdot Y$، وبالنظيم الإقليدي الموافق $\|X\|_2 = \sqrt{\langle X, X\rangle}$. أثبت أنّ

$$\sup_{X\neq 0} \frac{\|MX\|_2}{\|X\|_2} = \frac{|a+c|}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}$$

واستنتج قيمة المقدار $\sup_{X\neq 0} \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}$ في حالة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

الحل

■ نعلم أنّه في حالة مصفوفة متناظرة لدينا

$$\|M\| = \sup_{X\neq 0}\frac{\|MX\|_2}{\|X\|_2} = \rho(M) = \max\left\{|\lambda|:\ \lambda\in \operatorname{sp}(M)\right\}$$

القيم الذاتيّة للمصفوفة M هي جذور المعادلة $\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0$ التي تُكافئ $\left(\lambda-\frac{a+c}{2}\right)^2=b^2+\left(\frac{a-c}{2}\right)^2$، ومنه

$$\operatorname{sp}(M)=\left\{\frac{a+c}{2}+\sqrt{b^2+\left(\frac{a-c}{2}\right)^2},\frac{a+c}{2}-\sqrt{b^2+\left(\frac{a-c}{2}\right)^2}\right\}$$

وإذا عرّفنا ε بالمساواة $\frac{a+c}{2}=\varepsilon\left|\frac{a+c}{2}\right|$ استنتجنا أنّ $\varepsilon\in\{-1,1\}$ وأنّ

$$\operatorname{sp}(M)=\left\{\varepsilon\left(\left|\frac{a+c}{2}\right|+\sqrt{b^2+\left(\frac{a-c}{2}\right)^2}\right),\varepsilon\left(\left|\frac{a+c}{2}\right|-\sqrt{b^2+\left(\frac{a-c}{2}\right)^2}\right)\right\}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\rho(M)&=\left|\frac{a+c}{2}\right|+\sqrt{b^2+\left(\frac{a-c}{2}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\left(\left|\operatorname{tr}M\right|+\sqrt{\left(\operatorname{tr}M\right)^2-4\det M}\right)\end{aligned}$$

وهذا يثبت المطلوب.

■ أمّا في حالة مصفوفةٍ ما $A=\begin{bmatrix}\alpha&\gamma\\\beta&\delta\end{bmatrix}$ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$، فنعلم أنّ $\|A\|=\sqrt{\|{}^tAA\|}$

ومن ثَمّ إذا طبّقنا ما سبق على المصفوفة $M={}^tAA$ وجدنا

$$\|A\|=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\sqrt{\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2\right)^2-4\left(\alpha\delta-\gamma\beta\right)^2}}$$

وبوجه خاص $\left\|\begin{bmatrix}2&1\\3&-1\end{bmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{30+10\sqrt{5}}$. ■

التمرين 32. في هذه المسألة يرمز الرمز $\mathcal{P}$ إلى الفضاء المكوّن من كثيرات الحدود الحقيقيّة، ويرمز $\mathcal{P}_n$ إلى عناصر $\mathcal{P}$ التي لا تزيد درجتها على n. ونعرّف

$$\forall (P,Q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P},\ \ \langle P,Q \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}\,t$$

وأخيراً نتأمّل متتالية كثيرات الحدود $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{P}$، المعرّفة بالعلاقات التالية

$$T_0(X) = 1,\ T_1(X) = X$$

$$\forall n \geq 2,\quad T_n(X) = 2XT_{n-1}(X) - T_{n-2}(X)$$

تمهيد

1. علّل تقارب التكامل الذي يعرّف $\langle P,Q \rangle$، وأثبت بعدئذ أنّ $\langle \cdot,\cdot \rangle$ جداء سلّمي على $\mathcal{P}$. نرمز إذن بالرمز $\|\cdot\|$ إلى النظيم الموافق لهذا الجداء السلّمي.
2. أثبت أنّه في حالة (P,Q) من $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$ فإنّ
$$\langle P,Q \rangle = \int_0^{\pi} P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$$
3. احسب المقدار $I_{n,m} = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$ في حالة (n,m) من $\mathbb{N}^2$، مُناقشاً الحالات المختلفة.

الجزء الأوّل

1. أوجد T_2 و T_3.
2. أثبت أنّه مهما تكن n من $\mathbb{N}$ يكن $\deg T_n = n$، واحسب أمثال X^n في T_n عندما تكون $1 \leq n$.
3. لتكن n من $\mathbb{N}$، احسب $T_n(\cos\theta)$ بدلالة $\cos(n\theta)$، وكذلك احسب $T_n(\operatorname{ch} x)$ بدلالة $\operatorname{ch}(nx)$.
4. أثبت أنّ $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$، وذلك مهما تكن n من $\mathbb{N}$، واستنتج أنّه مهما تكن $1 \leq n$، ومهما تكن x من $\mathbb{R}$ فلدينا التكافؤ :
$$|x| > 1 \Leftrightarrow |T_n(x)| > 1$$
5. احسب، في حالة (n,m) من $\mathbb{N}^2$ الجداء السلّمي $\langle T_n, T_m \rangle$. واستنتج أساساً متعامداً نظاميّاً للفضاء $\mathcal{P}_n$.

الجزء الثاني

لتكن n من $\mathbb{N}^*$، وليكن التطبيق الخطّي :

$$\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P} : P \mapsto (X^2-1)\cdot P''(X) + X\cdot P'(X)$$

1. أثبت أنّ $\varphi(\mathcal{P}_n) \subset \mathcal{P}_n$. يسمح لنا هذا بتعريف التطبيق الخطّي $\varphi_n = \varphi_{\|\mathcal{P}_n}$ كما يأتي: $\varphi_n : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n : P \mapsto \varphi(P)$.
2. اكتب مصفوفة φ_n بالنسبة إلى الأساس القانوني $\mathcal{E} = (1, X, \ldots, X^n)$ في $\mathcal{P}_n$.
3. أثبت أنّ φ_n يقبل التمثيل بمصفوفة قطريّة.
4. استنتج أنّه يوجد كثير حدود وحيد Q_n في $\mathcal{P}_n$ أمثال حدّه المسَيْطِر تساوي 1 ويُحقّق $\varphi(Q_n) = n^2 Q_n$. ما هي درجة Q_n؟
5. احسب مشتق $x \mapsto \sqrt{1-x^2}\cdot P'(x)$ في حالة x من $]-1,1[$، واستنتج أنّ
$$\forall (P,Q) \in \mathcal{P}^2,\ \ \langle \varphi(P), Q\rangle = \langle P, \varphi(Q)\rangle$$
6. استنتج من ذلك أنّ
$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\quad n \neq m \Rightarrow \langle Q_n, Q_m\rangle = 0$$
7. استنتج من ذلك أنّ $Q_n \in \mathcal{P}_n \cap \mathcal{P}_{n-1}^{\perp}$، وأنّه يوجد عدد حقيقي λ_n يحقّق $Q_n = \lambda_n T_n$.
8. بيّن أنّ T_n يُحقِّق معادلة تفاضليّة يُطلب تعيينها.
9. استنتج من ذلك الثوابت $(a_0, \ldots, a_n)$ التي تحقّق $T_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

الجزء الثالث

لتكن n من $\mathbb{N}^*$، ولنعرّف $x_k = -\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ في حالة k من $\{0,1,\ldots,n\}$. ثُمّ لنعرّف أيضاً كثيرات الحدود $(\ell_k)_{0\le k\le n}$ من $\mathcal{P}_n$، بالعلاقات :

$$\ell_k(X) = \prod_{0\le j\le n, j\neq k} \left(\frac{X - x_j}{x_k - x_j}\right)$$

1. احسب $T_n(x_k)$ في حالة k من $\{0,1,\ldots,n\}$.
2. أثبت أنّه مهما تكن k من $\{0,1,\ldots,n\}$ يكن :

$$x > 1 \Rightarrow (-1)^{n-k}\ell_k(x) > 0$$

3. برهن على أنّ : $\forall P \in \mathcal{P}_n, \quad P(X) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)\cdot \ell_k(X)$.

الجزء الرابع

ليكن (a,b) من $\mathbb{R}^2$ يُحقّق $a < b$، وليكن $I = [a,b]$. نزوّد $\mathcal{P}_n$ بالنظيم $\|\cdot\|_I$ المعرّف بالعلاقة :

$$\forall P \in \mathcal{P}_n, \quad \|P\|_I = \sup\left\{\left|P(t)\right| : t \in I\right\}$$

ونعرّف في حالة λ من $\mathbb{R}$، الشكل الخطّي :

$$\delta_\lambda : (\mathcal{P}_n, \|\cdot\|_I) \to (\mathbb{R}, |\cdot|),\ P \mapsto P(\lambda)$$

1. في هذا السؤال نفترض أنّ $I = [-1,+1]$.
   ① أثبت أنّ δ_λ مستمر.
   ② أثبت أنّ $\|\delta_{-\lambda}\| = \|\delta_\lambda\|$ وذلك مهما تكن λ من $\mathbb{R}$.
   ③ نفترض أنّ λ ينتمي إلى المجال $[-1,+1]$ احسب $\|\delta_\lambda\|$.
   ④ نفترض أنّ $\lambda > 1$ أثبت أنّ $\|\delta_\lambda\| = T_n(\lambda)$.
   ⑤ استنتج مما سبق أنّ

$$\|\delta_\lambda\| = T_n\left(\frac{|\lambda-1| + |\lambda+1|}{2}\right)$$

2. في هذا السؤال نعود إلى الحالة العامّة أي $I = [a,b]$، أثبت أنّه مهما تكن λ من $\mathbb{R}$ فلدينا :

$$\inf\left\{M \in \mathbb{R} : \forall P \in \mathcal{P}_n, |P(\lambda)| \le M\|P\|_I\right\} = T_n\left(\frac{|\lambda-a| + |\lambda-b|}{b-a}\right)$$

3. نفترض أنّ $\left|xu^3 + yu^2 + zu + t\right| \le 1 \quad \forall u \in [0,1],$، ما هو الحدّ الأعلى للمقدار $|8x + 4y + 2z + t|$؟

الحل

تمهيد

1. إنّ تقارب التكامل الذي يعرّف $\langle P,Q\rangle$ واضح لأنّ

$$\left|\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right) \quad \text{في جوار } 1^-$$

وكذلك

$$\left|\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right) \quad \text{في جوار } (-1)^+$$

ومن الواضح أنّ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ هو جداء سلّمي على $\mathcal{P}$. نرمز إذن بالرمز $\|\cdot\|$ إلى النظيم الموافق لهذا الجداء السلّمي.

2. بإجراء تغيير المتحوّل $t \leftarrow \cos\theta$ نجد أنّه في حالة (P,Q) من $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$ لدينا

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^{\pi} P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$$

3. لتكن (n,m) من $\mathbb{N}^2$. بالاستفادة من المساواة

$$\cos n\theta\cos m\theta = \frac{1}{2}\big(\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta\big)$$

نستنتج أنّ

$$I_{n,m} = \int_0^{\pi} \cos n\theta\cos m\theta\,\mathrm{d}\,\theta = \begin{cases} \pi & : \quad n=m=0 \\ \dfrac{\pi}{2} & : \quad n=m\neq 0 \\ 0 & : \quad n\neq m \end{cases}$$

الجزء الأوّل

1. انطلاقاً من العلاقة التدريجيّة

$$T_n(X) = 2XT_{n-1}(X) - T_{n-2}(X)$$

ومن قيم البدء $T_0(X)=1$ و $T_1(X)=X$ نستنتج أنّ

$$T_2(X) = 2XT_1(X) - T_0(X) = 2X^2-1$$

و

$$T_3(X) = 2XT_2(X) - T_1(X) = 4X^3 - 3X$$

2. تتيح لنا العلاقة التدريجيّة $T_n(X) = 2XT_{n-1}(X) - T_{n-2}(X)$ أن نثبت بالتدريج أنّ $\deg T_n = n$ وأنّ أمثال X^n في T_n تساوي 2^{n-1}، وذلك في حالة n من $\mathbb{N}^*$.

3. المساواة $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ صحيحة وضوحاً في حالة $n \in \{0,1,2\}$. وإذا افترضنا صحّتها في حالة $n-1$ و $n-2$ عندما $n \geq 2$ كان لدينا

$$\begin{aligned} T_n(\cos\theta) &= 2(\cos\theta)T_{n-1}(\cos\theta) - T_{n-2}(\cos\theta) \\ &= 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta \\ &= \big(\cos n\theta + \cos(n-2)\theta\big) - \cos(n-2)\theta = \cos n\theta \end{aligned}$$

فهي إذن صحيحة في حالة n. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall\theta \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

ونبرهن بأسلوب مماثل أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch} n\theta$$

4. لنتأمّل كثير الحدود $Q(X) = T_n(-X) - (-1)^n T_n(X)$ ولنلاحظ أنّه في حالة θ من $\mathbb{R}$ نجد

$$\begin{aligned} Q(\cos\theta) &= T_n(-\cos\theta) - (-1)^n \cos n\theta \\ &= T_n(\cos(\pi+\theta)) - (-1)^n \cos n\theta \\ &= \cos(n\pi + n\theta) - (-1)^n \cos n\theta = 0 \end{aligned}$$

فكثير الحدود Q ينعدم على كامل المجال $[-1,1]$، وهو من ثَمّ معدوم، أي

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$$

لتكن x من $\mathbb{R}$ ولنناقش الحالات التالية :

- إذا كان $x > 1$ عرّفنا $t = \arg\operatorname{ch} x > 0$ وصار لدينا $T_n(x) = \operatorname{ch} nt > 1$.
- إذا كان $x < -1$ عرّفنا $t = \arg\operatorname{ch}(-x) > 0$ وصار لدينا

$$\big|T_n(x)\big| = \big|T_n(-\operatorname{ch} t)\big| = \operatorname{ch} nt > 1$$

- إذا كان x من $[-1,1]$ عرّفنا $t = \arccos x$ وصار لدينا

$$\big|T_n(x)\big| = \big|T_n(\cos t)\big| = \big|\cos nt\big| \leq 1$$

إذن

$$|x|>1 \Leftrightarrow \left|T_n(x)\right|>1$$

5. في حالة (n,m) من $\mathbb{N}^2$ لدينا

$$\langle T_n,T_m\rangle=\int_0^\pi T_n(\cos\theta)T_m(\cos\theta)\,\mathrm{d}\,\theta=\int_0^\pi \cos n\theta\cos m\theta\,\mathrm{d}\,\theta=I_{n,m}$$

فإذا استفدنا مما أثبتناه في التمهيد استنتجنا أنّ الجملة $\left(T_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ جملة متعامدة.

وإذا عرّفنا $\tilde{T}_0=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}T_0$ و $\tilde{T}_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n$ استنتجنا أنّ $\left(\tilde{T}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ هي أساس متعامد نظامي في $\mathcal{P}$.

الجزء الثاني

1. نتأمّل، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، التطبيق الخطّي :

$$\varphi:\mathcal{P}\to\mathcal{P}:P\mapsto (X^2-1)\cdot P''(X)+X\cdot P'(X)$$

من الواضح أنّ $\deg\varphi(P)\leq\deg P$ وذلك مهما يكن P من $\mathcal{P}$، إذن $\varphi\left(\mathcal{P}_n\right)\subset\mathcal{P}_n$.
وهذا ما يتيح لنا تعريف التطبيق الخطّي $\varphi_n=\varphi_{\|\mathcal{P}_n}$ كما يأتي :

$$\varphi_n:\mathcal{P}_n\to\mathcal{P}_n:P\mapsto\varphi(P)$$

2. لنتأمّل الأساس القانوني $\mathcal{E}=(1,X,\ldots,X^n)$ في $\mathcal{P}_n$. لمّا كان

$$\varphi(X^k)=k^2X^k-k(k-1)X^{k-2}$$

استنتجنا أنّ المصفوفة $\Phi_n=\mathrm{mat}\left(\varphi_n,\mathcal{E},\mathcal{E}\right)$ مصفوفة مثلّثية عليا من الصيغة :

$$\Phi_n=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\times 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 2^2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n^2 \end{bmatrix}$$

3. وعليه نرى أنّ $\operatorname{sp}(\varphi_n)=\left\{k^2 : 0\le k\le n\right\}$، وهذا يقتضي أنّ φ_n يقبل التمثيل بمصفوفة قطريّة، لأنّ له $n+1=\dim\mathcal{P}_n$ قيمة ذاتيّة مختلفة.

4. لمّا كان بُعدّ الفضاء الذاتي E_{n^2} الموافق للقيمة الذاتيّة n^2 للتطبيق φ_n يساوي 1 استنتجنا أنّ للمعادلة $\varphi(P)=n^2P$ حلاً واحداً أمثال حدّه المسيطر تساوي 1. نرمز إلى هذا الحل بالرمز Q_n. وإذا كان X^k هو الحدّ المسيطر في Q_n استنتجنا أنّ k^2X^k هو الحدّ المسيطر في $\varphi(Q_n)$ ونستنتج من المساواة $\varphi(Q_n)=n^2Q_n$ أنّ $k^2X^k=n^2X^k$ ومنه $k=n$. إذن $\deg Q_n=n$.

5. لنلاحظ أنّه في حالة x من $]-1,1[$، لدينا

$$\left(\sqrt{1-x^2}\,P'(x)\right)'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}P'(x)+\sqrt{1-x^2}\,P''(x)$$

ومنه

$$\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}\,P'(x)\right)'=-xP'(x)+(1-x^2)P''(x)=-\varphi(P)(x)$$

وعليه، في حالة P و Q من $\mathcal{P}$ نجد

$$\begin{aligned}\langle\varphi(P),Q\rangle&=-\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\,P'(x)\right)'Q(x)\,\mathrm{d}\,x\\&=\left[-\sqrt{1-x^2}\,P'(x)Q(x)\right]_{-1}^{+1}+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

وأخيراً أيّاً كان P و Q من $\mathcal{P}$

$$\langle\varphi(P),Q\rangle=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}\,x=\langle P,\varphi(Q)\rangle$$

6. ليكن n و m عددين طبيعيّين. ولنفترض أنّ $n\ne m$ عندئذ يكون لدينا

$$n^2\langle Q_n,Q_m\rangle=\langle\varphi(Q_n),Q_m\rangle=\langle Q_n,\varphi(Q_m)\rangle=m^2\langle Q_n,Q_m\rangle$$

ومن ثَمّ $(n^2-m^2)\langle Q_n,Q_m\rangle=0$، ولأنّ $n^2\ne m^2$ نستنتج أنّ $\langle Q_n,Q_m\rangle=0$.

7. نستنتج من خاصّة التعامد السابقة، ومن كون $\deg Q_k = k$ أنّ $(Q_0,\ldots,Q_{n-1})$ هي أساس متعامد للفضاء $\mathcal{P}_{n-1}$. كما نستنتج من خاصّة التعامد نفسها أنّ $Q_n \perp \mathcal{P}_{n-1}$. إذن $Q_n \in \mathcal{P}_n \cap \mathcal{P}_{n-1}^{\perp}$.

- من الواضح أنّ $Q_0 = 1 = T_0$.
- لنفترض أنّ n تنتمي إلى $\mathbb{N}^*$، ولنتأمّل $R_n = Q_n - 2^{1-n}T_n$. لمّا كان 2^{n-1} هو ثابتُ الحد المُسيْطِر في T_n استنتجنا أنّ $\deg R_n \leq n-1$ ومن ثَمّ $R_n \in \mathcal{P}_{n-1}$. ولكن نعلم أنّ كلّاً من T_n و Q_n عمودي على $\mathcal{P}_{n-1}$ إذن $R_n \in \mathcal{P}_{n-1} \cap \mathcal{P}_{n-1}^{\perp} = \{0\}$. وهذا يبرهن على أنّ $Q_n = 2^{1-n}T_n$.

8. نستنتج من 7. ومن $\varphi(Q_n) = n^2 Q_n$ أنّ $\varphi(T_n) = n^2 T_n$ أو

$$(X^2-1)T_n''(X) + XT_n'(X) - n^2 T_n(X) = 0$$

وهي المعادلة التفاضليّة المرجوّة.

9. لنكتب $T_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ولنعوّض في المعادلة التفاضليّة فنجد

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_k X^k - \sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)a_{k+2}X^k + \sum_{k=0}^{n} k a_k X^k - n^2 \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = 0$$

أو

$$(2n-1)a_{n-1}X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\Big((n^2-k^2)a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2}\Big)X^k = 0$$

ومنه $a_{n-1} = 0$ وفي حالة $0 \leq k \leq n-2$ لدينا

$$(n^2-k^2)a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2} = 0$$

فإذا عرّفنا $b_k = k!\,a_k$ كان لدينا $b_{n-1} = 0$ وفي حالة $0 \leq k \leq n-2$:

$$b_k = -\frac{1}{(n-k)(n+k)}b_{k+2}$$

ونعلم من جهة أخرى أنّ $b_n = n!\cdot 2^{n-1}$. نستنتج إذن أنّ

$$\begin{aligned} b_{n-2k} &= n(-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!} 2^{n-1-2k} && : 0 \leq k \leq \frac{n}{2} \\ b_{n-2k-1} &= 0 && : 0 \leq k \leq \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} a_{n-2k} &= n(-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} 2^{n-1-2k} && : 0 \leq k \leq \frac{n}{2} \\ a_{n-2k-1} &= 0 && : 0 \leq k \leq \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

ومنه

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k 2^{n-1-2k} X^{n-2k}$$

الجزء الثالث

لتكن n من $\mathbb{N}^*$ ، ولنعرّف $x_k = -\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ في حالة k من $\{n,\ldots,1,0\}$. ثُمّ لنعرّف أيضاً كثيرات الحدود $\left(\ell_k\right)_{0\leq k\leq n}$ من $\mathcal{P}_n$ ، بالعلاقات :

$$\ell_k\left(X\right) = \prod_{0\leq j\leq n, j\neq k} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}$$

1. من الواضح أنّ

$$T_n(x_k) = T_n\left(-\cos\frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^n \cos\left(n\frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^n \cos k\pi = (-1)^{n-k}$$

2. نرى دون صعوبة $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ وذلك بناءً على التناقص التام للتابع $\cos$. وعليه يكون $x_k - x_j > 0$ في حالة $0 \leq j < k$ ، و $x_k - x_j < 0$ في حالة $k < j \leq n$. فإذا استفدنا من كون $x - x_j > 0$ في حالة $0 \leq j \leq n$ و $x > 1$ استنتجنا أنّه، مهما تكن k من $\{0,1,\ldots,n\}$ ، يكن

$$x > 1 \Rightarrow (-1)^{n-k}\ell_k(x) > 0$$

3.ليكن P من $\mathcal{P}_n$، لمّا كان $P(X)-\sum_{k=0}^{n}P(x_k)\cdot\ell_k(X)$ كثير حدود من الدرجة n على الأكثر، وينعدم عند النقاط $\left(x_k\right)_{0\le k\le n}$ استنتجنا أنّه يساوي الصفر. ومنه

$$\forall P\in\mathcal{P}_n,\quad P(X)=\sum_{k=0}^{n}P(x_k)\cdot\ell_k(X)$$

الجزء الرابع

ليكن (a,b) من $\mathbb{R}^2$ يُحقّق $a<b$، وليكن $I=[a,b]$. نزوّد $\mathcal{P}_n$ بالنظيم $\|\cdot\|_I$ المعرّف بالعلاقة :

$$\forall P\in\mathcal{P}_n,\quad \|P\|_I=\sup\left\{|P(t)|:\, t\in I\right\}$$

ونعرّف في حالة λ من $\mathbb{R}$، الشكل الخطّي $\delta_\lambda:(\mathcal{P}_n,\|\cdot\|_I)\to(\mathbb{R},|\cdot|),\ P\mapsto P(\lambda)$.

1. في هذا السؤال نفترض أنّ $I=[-1,1]$.

①.1 إنّ δ_λ مستمر لأنّ $\mathcal{P}_n$ منتهي البُعد.

②.1 لتكن λ من $\mathbb{R}$. عندئذ

$$\forall P\in\mathcal{P}_n,\quad \left|P(\lambda)\right|\le\left\|\delta_\lambda\right\|\cdot\sup_{|t|\le1}\left|P(t)\right|$$

ليكن إذن P من $\mathcal{P}_n$. بتطبيق الخاصّة السابقة على $P(-X)$ نجد

$$\left|P(-\lambda)\right|\le\left\|\delta_\lambda\right\|\cdot\sup_{|t|\le1}\left|P(-t)\right|=\left\|\delta_\lambda\right\|\cdot\sup_{|t|\le1}\left|P(t)\right|$$

وهذا يقتضي أنّ $\left\|\delta_{-\lambda}\right\|\le\left\|\delta_\lambda\right\|$.

وبتطبيق ما أثبتناه على $-\lambda$ نستنتج أنّ $\left\|\delta_\lambda\right\|\le\left\|\delta_{-\lambda}\right\|$، ومنه $\left\|\delta_\lambda\right\|=\left\|\delta_{-\lambda}\right\|$.

③.1 في حالة λ من المجال $\left[-1,+1\right]$ نجد وضوحاً $\left\|\delta_\lambda\right\|=1$.

④.1 نفترض أنّ $\lambda>1$، وليكن P من $\mathcal{P}_n$. عندئذ، استناداً إلى الجزء الثالث، نجد

$$P(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}P(x_k)\cdot\ell_k(\lambda)$$

ومنه

$$\left|P(\lambda)\right| \le \sum_{k=0}^{n}\left|P(x_k)\right|\cdot\left|\ell_k(\lambda)\right| \le \|P\|_I \sum_{k=0}^{n}\left|\ell_k(\lambda)\right|$$

ولكن

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\ell_k(\lambda)\right| = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\ell_k(\lambda) = \sum_{k=0}^{n}T(x_k)\ell_k(\lambda) = T_n(\lambda)$$

إذن

$$\forall P \in \mathcal{P}_n, \quad \left|P(\lambda)\right| \le \|P\|_I\, T_n(\lambda)$$

وتتحقّق المساواة في حالة $P = T_n$ لأنّ $\left\|T_n\right\|_I = 1$. إذن $\left\|\delta_\lambda\right\| = T_n(\lambda)$.

⑤.1 في حالة $\lambda < -1$ لدينا $\left\|\delta_\lambda\right\| = \left\|\delta_{-\lambda}\right\| = T_n(-\lambda)$. فنكون قد أثبتنا أنّ

$$\left\|\delta_\lambda\right\| = T_n\left(\frac{|\lambda-1|+|\lambda+1|}{2}\right)$$

لأنّ

$$\frac{|\lambda-1|+|\lambda+1|}{2} = \begin{cases} \lambda & : \quad 1 < \lambda \\ 1 & : \quad -1 \le \lambda \le 1 \\ -\lambda & : \quad -1 > \lambda \end{cases}$$

.2 في هذا السؤال نعود إلى الحالة العامّة أي $I = [a,b]$. ولتكن λ من $\mathbb{R}$. نضع $\tilde{\lambda} = \dfrac{2\lambda - a - b}{b-a}$، وفي حالة P من $\mathcal{P}_n$ نعرّف $\tilde{P}(X) = P\left(\dfrac{a+b}{2} + X\dfrac{b-a}{2}\right)$.

فيكون لدينا

$$\left|\tilde{P}(\tilde{\lambda})\right| \le T_n\left(\frac{|\tilde{\lambda}-1|+|\tilde{\lambda}+1|}{2}\right)\cdot \sup_{|t|\le 1}\left|\tilde{P}(t)\right|$$

وهذا يُكافئ

$$\left|P(\lambda)\right| \le T_n\left(\frac{|\lambda-a|+|\lambda+b|}{b-a}\right)\cdot \sup_{t\in[a,b]}\left|P(t)\right|$$

وتحدث المساواة في حالة $P(X) = T_n\left(\dfrac{2X-a-b}{b-a}\right)$. إذن

$$\inf\left\{M \in \mathbb{R} : \forall P \in \mathcal{P}_n, |P(\lambda)| \leq M \sup_{[a,b]} |P|\right\} = T_n\left(\frac{|\lambda-a|+|\lambda+b|}{b-a}\right)$$

3. نفترض أنّ

$$\forall u \in [0.1], \quad \left|xu^3 + yu^2 + zu + t\right| \leq 1$$

هذا يعني أنّه إذا عرّفنا كثير الحدود P من $\mathcal{P}_3$ بالصيغة

$$P(X) = xX^3 + yX^2 + zX + t$$

فإنّ $\sup_{[0,1]} |P| \leq 1$. واستناداً إلى ما أثبتناه فإنّ الحدّ الأعلى للمقدار $\left|P(2)\right|$ يساوي

$$T_3\left(\frac{|2-0|+|2-1|}{1-0}\right) = T_3(3) = 99$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 33. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ و $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضائَيْ جداء سلّمي منتهيي البُعد على $\mathbb{K}$.

I. ليكن $T : E \to H$ تطبيقاً خطّياً **متبايناً**.

1. أثبت أن التطبيق T^*T تقابلٌ.
2. نضع $F = \operatorname{Im} T$ ، ونعرّف التطبيق $Q_F = T\left(T^*T\right)^{-1} T^*$. احسب كلّاً من Q_F^* و $Q_F \circ Q_F$.
3. أثبت أنّ Q_F هو الإسقاط القائم للفضاء H على F .

II. ليكن F فضاءً جزئيّاً من H ، وليكن $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ أساساً ما للفضاء الجزئي F . ولنضع $E = \mathbb{K}^m \cong \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$ مزوّداً بالجداء السلميّ المألوف :

$$\langle X, Y \rangle = X^* \cdot Y = {}^t\overline{X} \cdot Y$$

ثُمّ لنتأمّل التطبيق الخطّي

$$\Phi : E \to H, \qquad {}^t[\alpha_1,\ldots,\alpha_m] \mapsto \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$$

1. أثبت أنّ Φ متباينٌ.

2. أثبت أنّ التطبيق Φ^* هو التطبيق التالي :

$$\Phi^* : H \to E, \quad y \mapsto {}^t[\langle x_1, y\rangle, \ldots, \langle x_m, y\rangle]$$

3. أثبت أنّ

$$\forall X \in E, \quad \Phi^* \circ \Phi(X) = GX$$

حيث $G = \operatorname{Gram}(x_1, \ldots, x_m)$.

4. استنتج مما سبق أنّ

$$\forall y \in H, \qquad \min_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in\mathbb{K}^m} \left\| y - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \right\| = \left\| y - \sum_{i=1}^{m} \beta_i(y) x_i \right\|$$

حيث

$$\begin{bmatrix} \beta_1(y) \\ \vdots \\ \beta_m(y) \end{bmatrix} = G^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \langle x_1, y\rangle \\ \vdots \\ \langle x_m, y\rangle \end{bmatrix}$$

تطبيق : احسب $\displaystyle \min_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^3 - \alpha_1 - \alpha_2 t\right)^2 \mathrm{d}t$.

الحل

I.1. ليكن $T : E \to H$ تطبيقاً خطّياً متبايناً. من الواضح أنّ $\ker T \subset \ker T^* T$. وبالعكس،

$$\begin{aligned} x \in \ker T^* T &\Rightarrow T^*T(x) = 0 \quad \Rightarrow \langle T^*T(x), x\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \left\|T(x)\right\| = 0 \quad \Rightarrow T(x) = 0 \\ &\Rightarrow x \in \ker T \end{aligned}$$

إذن $\ker T = \ker T^* T$. ولمّا كان T متبايناً استنتجنا أنّ $T^* T$ تطبيق متباينٌ من $\mathcal{L}(E)$. ولكنّ E فضاء شعاعي منتهي البُعد، إذن $T^* T$ تقابل خطّي؛ أي ينتمي إلى $\mathcal{GL}(E)$.

I.2. لتكن $F = \operatorname{Im} T$، ولنعرّف $Q_F = T(T^*T)^{-1}T^*$. عندئذ نلاحظ أنّ

$$Q_F^* = (T(T^*T)^{-1}T^*)^* = T(T^*T)^{-1}T^* = Q_F$$

وكذلك

$$Q_F \circ Q_F = T(T^*T)^{-1}T^*T(T^*T)^{-1}T^* = T(T^*T)^{-1}T^* = Q_F$$

I.3. نستنتج مما سبق أنّ Q_F هو إسقاطٌ قائم، وأنّ $\operatorname{Im} Q_F \subset \operatorname{Im} T = F$. ونستنتج من المساواة $Q_F \circ T = T$ أنّ $\forall y \in F,\ Q_F(y) = y$. إذن $\operatorname{Im} Q_F = F$ ، و Q_F هو الإسقاط القائم للفضاء H على F .

II. ليكن F فضاءً جزئيّاً من H ، وليكن $\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right)$ أساساً ما للفضاء الجزئي F . ولنضع $E = \mathbb{K}^m \cong \mathcal{M}_{m\times 1}\left(\mathbb{K}\right)$ مزوّداً بالجداء السلميّ المألوف. ثُمّ لنتأمّل التطبيق الخطّي

$$\Phi : E \to H,\ {}^t[\alpha_1, \ldots, \alpha_m] \mapsto \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$$

II.1. إنّ Φ متباينٌ، لأنّ $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ جملة حرّة في H .

II.2. ليكن y من H وليكن $X = {}^t[\alpha_1, \ldots, \alpha_m]$ من E عندئذ

$$\left\langle \Phi(X), y \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k, y \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} \bar{\alpha}_k \langle x_k, y\rangle = \left\langle X, {}^t[\langle x_1, y\rangle, \ldots, \langle x_m, y\rangle] \right\rangle$$

وهذا يثبتُ أنّ التطبيق Φ^* هو التطبيق المعرّف كما يأتي :

$$\Phi^* : H \to E,\ y \mapsto {}^t[\langle x_1, y\rangle, \ldots, \langle x_m, y\rangle]$$

II.3. ليكن $X = {}^t[\alpha_1, \ldots, \alpha_m]$ من E عندئذ نلاحظ أنّ

$$\Phi^* \circ \Phi(X) = \Phi^*\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j\right) = \left(\sum_{k=1}^{m} \langle x_k, x_j\rangle \alpha_j\right)_{k\in\mathbb{N}_m} = GX$$

حيث $G = \operatorname{Gram}(x_1, \ldots, x_m)$.

II.4. ليكن y من H . عندئذ

$$\min_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in\mathbb{K}^m} \left\| y - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \right\| = d(y, F) = \left\| y - Q_F(y) \right\|$$

ولأنّ $F = \operatorname{Im}\Phi$ استنتجنا أنّ

$$Q_F = \Phi(\Phi^*\Phi)^{-1}\Phi^* = \Phi G^{-1} \Phi^* .$$

فإذا عرّفنا

$$\begin{bmatrix} \beta_1(y) \\ \vdots \\ \beta_m(y) \end{bmatrix} = G^{-1}\Phi^*(y) = G^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \langle x_1, y\rangle \\ \vdots \\ \langle x_m, y\rangle \end{bmatrix}$$

كان

$$Q_F(y) = \Phi\Big({}^t[\beta_1(y),\ldots,\beta_m(y)]\Big) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j(y)x_j$$

ومنه

$$\forall y \in H, \qquad \min_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in\mathbb{K}^m} \left\| y - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \right\| = \left\| y - \sum_{i=1}^{m} \beta_i(y) x_i \right\|$$

حيث

$${}^t\Big[\beta_1(y),\ldots,\beta_m(y)\Big] = G^{-1} \cdot {}^t\Big[\langle x_1, y\rangle,\ldots,\langle x_m, y\rangle\Big]$$

تطبيق. لحساب $\Delta^2 = \min\limits_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2} \int\limits_0^1 (t^3 - \alpha_1 - \alpha_2 t)^2 \,\mathrm{d}\,t$ ، نلاحظ أننا ضمن الإطار المبيّن في المسألة حيث

$$F = \mathrm{vect}(1, X) \;\text{ و }\; \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}\,t \;\text{ و }\; H = \big(\mathbb{R}_3[X], \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$$

وعليه فإنّ

$$\Delta^2 = \|X^3 - \beta_1 - \beta_2 X\|^2$$

حيث (β_1, β_2) هو حلّ الجملة

$$\begin{bmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1, X\rangle \\ \langle 1, X\rangle & \langle X, X\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1, X^3\rangle \\ \langle X, X^3\rangle \end{bmatrix}$$

أو

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

ومنه $\beta_1 = -\frac{1}{5}$ و $\beta_2 = \frac{9}{10}$. إذن $-\frac{1}{5} + \frac{9}{10}X$ هو المسقط القائم للعنصر X^3 على F . ويكون

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= \left\| X^3 + \frac{1}{5} - \frac{9}{10}X \right\|^2 \\ &= \left\langle X^3, X^3 + \frac{1}{5} - \frac{9}{10}X \right\rangle \\ &= \int_0^1 \left(x^6 - \frac{9}{10}x^4 + \frac{1}{5}x^3 \right) \mathrm{d}\, x = \frac{9}{700}\end{aligned}$$

وبذا يُنجَز الحل.

التمرين 34. التوابع التخالفيّة

ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاءً إقليدياً بُعده $n \geq 2$. نقول عن تابع $u : E \to E$ إنّه **تخالفي** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

$$(\mathcal{A}) \qquad \forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, u(y) \rangle + \langle u(x), y \rangle = 0$$

ونرمز بالرمز $\mathcal{A}(E)$ إلى مجموعة التوابع التخالفيّة على E .

1. ليكن $u : E \to E$ تابعاً تخالفياً. أثبت، بحساب المقدار $\langle z, u(\alpha x + \beta y) \rangle$ في حالة (x, y, z) من E^3 ، و (α, β) من $\mathbb{R}^2$ ، أنّ u تطبيق خطّي.
2. ليكن $u : E \to E$ تابعاً ما. أثبت **تكافؤ** الخواص الأربع التالية:
   - ① u تطبيق خطّي يُحقِّق $\forall x \in E, \; \langle u(x), x \rangle = 0$.
   - ② $u \in \mathcal{A}(E)$.
   - ③ u تطبيق خطّي، وفي أي أساس متعامد نظامي $\mathcal{E}$ في E ، تُحقِّق المصفوفة $M = \mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ الشرط $^tM = -M$.
   - ④ u تطبيق خطّي، ويوجد أساس متعامد نظامي $\mathcal{E}$ في E ، تُحقِّق عنده المصفوفة $M = \mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ الشرط $^tM = -M$.
3. أثبت أنّ $\mathcal{A}(E)$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ ، واحسب $\dim \mathcal{A}(E)$.

.4 ليكن $u : E \to E$ تابعاً تخالفياً من $\mathcal{A}(E)$.

① لتكن λ من $\mathbb{R}$ قيمة ذاتيّة للتطبيق u، احسب λ. ماذا تستنتج عندما يكون n عدداً فردياً ؟

② أثبت أنّ $\ker u \perp \operatorname{Im} u$.

③ لنضع $F = \operatorname{Im} u$، أثبت أنّ $u(F) \subset F$، ثُمّ بيِّن أنّ التطبيق $v = u_{\| F}$ (أي $(v : F \to F, x \mapsto u(x)$) هو تقابل تخالفي. واستنتج أنّ $\operatorname{rg}(u)$ عددٌ زوجي.

④ أثبت أنّه مهما يكن G فضاءً جزئياً من E يُحقّق $u(G) \subset G$، فلدينا الاحتواء $u(G^\perp) \subset G^\perp$.

.5 ليكن $u : E \to E$ تابعاً تخالفياً من $\mathcal{A}(E)$، نفترض أيضاً أنّ $u^2 = -I_E$.

① بيِّن أنّ $\dim E$ هو عدد زوجي. نعرّف العدد p بالعلاقة $2p = \dim E$.

② لتكن x من $E \backslash \{0\}$. نعرّف $F = \mathbb{R}x$. أثبت أنّ $u(F) \perp F$.

③ لتكن $\mathcal{S}$ مجموعة الفضاءات الجزئيّة F من E التي تُحقِّق $u(F) \perp F$. نضع $\mathcal{N} = \{\dim F : F \in \mathcal{S}\}$. أثبت أنّ $\mathcal{N}$ مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{N}$ محدودة من الأعلى بالعدد p.

④ ليكن $q = \max \mathcal{N}$، وليكن F_0 من $\mathcal{S}$ يُحقّق $\dim F_0 = q$. لنفترض جدلاً أنّ $q < p$. عندئذ أثبت أنّه يوجد في $(F_0 \oplus u(F_0))^\perp$ شعاع x يُحقِّق $x \neq 0$. ثُمّ بيِّن أنّ $F_1 = \mathbb{R}x \oplus F_0$ ينتمي إلى $\mathcal{S}$. استنتج أنّه يوجد فضاء جزئي G من E يُحقّق $u(G) \perp G$ و $E = G \oplus u(G)$.

⑤ ليكن $\mathcal{G} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ أساساً متعامداً نظامياً في G. ولنعرّف الجملة $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_{2p})$ بالعلاقات $f_{2k-1} = e_k$ و $f_{2k} = u(e_k)$ حين يكون $1 \leq k \leq p$. أثبت أنّ الجملة $\mathcal{F}$ أساس متعامد نظامي في E واكتب المصفوفة $U_p = \operatorname{mat}(u, \mathcal{F}, \mathcal{F})$.

6. ليكن $u : E \to E$ تابعاً تخالفياً من $\mathcal{A}(E)$.

① أثبت أنّ u^2 يقبل التمثيل بمصفوفة قطريّة وأنّ $\operatorname{sp}\left(u^2\right) \subset \mathbb{R}_-$.
مساعدة : احسب $(u^2)^*$.

② أثبت أنّ $\ker u = \ker u^2$.

③ بمُقارنة $\mathcal{X}_u(X)$ و $\mathcal{X}_{-u}(X)$ أثبت أنّ

$$(-1)^n \mathcal{X}_{u^2}(X^2) = [\mathcal{X}_u(X)]^2$$

④ لتكن λ قيمة ذاتيّة **غير معدومة** للتطبيق u^2، وليكن الفضاء الذاتي الموافق $E_\lambda = \ker(u^2 - \lambda I_E)$. أثبت أنّ $u(E_\lambda) \subset E_\lambda$، وبيِّن أنّ التطبيق $\overline{u} = \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}\, u_{\|E_\lambda}$ (أي $\overline{u} : E_\lambda \to E_\lambda, \overline{u}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}} u(x)$) تقابلٌ تخالفي، يُحقِّق $\overline{u}^2 = -I_{E_\lambda}$. استنتج أنّه يوجد أساس متعامد نظامي $\mathcal{F}_\lambda$ في الفضاء E_λ تأخذ فيه مصفوفة $u_{\|E_\lambda}$ الشكل $\sqrt{-\lambda}\, U_{p_\lambda}$، وقد عرّفنا p_λ بالعلاقة: $\dim E_\lambda = 2p_\lambda$.

⑤ استنتج أنّه يوجد في E أساس متعامد نظامي يُعطي مصفوفة u بالنسبة إليه شكلاً بسيطاً يُطلبُ وصفُه.

7. ليكن $u : E \to E$ تابعاً تخالفياً من $\mathcal{A}(E)$. وليكن I_E التطبيق المطابق على E.

① أثبت أنّه مهما تكن λ من $\mathbb{R}^*$، يكن $u + \lambda I_E$ تقابلاً خطّياً.

② أثبت أنّه مهما تكن λ من $\mathbb{R}^*$، فإن التطبيق الخطّي w_λ المعطى بالصيغة $w_\lambda = (-u + \lambda I_E) \circ (u + \lambda I_E)^{-1}$ هو دوران لا يقبل العدد -1 قيمةً ذاتيّة، (أي $w_\lambda \in O^+(E)$ و $-1 \notin \operatorname{sp}(w_\lambda)$).
مساعدة : تحقّق أنّ $w_\lambda = (u + \lambda I_E)^{-1} \circ (-u + \lambda I_E)$.

③ وبالعكس نفترض أنّ w ينتمي إلى $O^+(E)$ ويحقِّق $-1 \notin \operatorname{sp}(w_\lambda)$. أثبت أنّه يوجد تطبيق تخالفي u في $\mathcal{A}(E)$ يُحقّق

$$w = (-u + I_E) \circ (u + I_E)^{-1}$$

8. نفترض في هذا السؤال أنّ E هو الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$ مزوداً بالجداء السلمي المألوف وموجّهاً بالأساس القانوني $\mathcal{E} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. وإذا كان z من E رمزنا بالرمز U_z إلى التطبيق $U_z : E \to E, U_z(x) = z \wedge x$.

① نفترض أنّ $z = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}$. اكتب مصفوفة U_z بالأساس $\mathcal{E}$ واستنتج أنّ U_z تخالفي.

② أثبت أنّه إذا كان u تطبيقاً تخالفياً فيوجد z من E يُطلب تعيينه يُحقّق $u = U_z$.

③ نفترض في هذا السؤال أنّ $z = \vec{k}$ وأنّ $\lambda = -\cot(\theta/2)$ إذ تنتمي θ إلى $]2\pi, 0[\setminus\{\pi\}$. احسب w_λ الموافق للتطبيق التخالفي U_z، والمعرّف في السؤال 7. ثُمّ عيِّن محور هذا الدوران وزاويته.

الحل

1. ليكن $u : E \to E$ تابعاً تخالفياً. في حالة (x, y, z) من E^3، و (α, β) من $\mathbb{R}^2$، لدينا

$$\begin{aligned}\langle z, u(\alpha x + \beta y)\rangle &= -\langle u(z), \alpha x + \beta y\rangle \\ &= -\alpha\langle u(z), x\rangle - \beta\langle u(z), y\rangle \\ &= \alpha\langle z, u(x)\rangle + \beta\langle z, u(y)\rangle \\ &= \langle z, \alpha u(x) + \beta u(y)\rangle\end{aligned}$$

و لأنّ z كيفي هذا يثبتُ أنّ

$$u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$$

إذن u تطبيق خطّي.

2. لنتأمّل تابعاً ما $u : E \to E$.

①⇐② ليكن (x, y) من E^2، عندئذ

$$\begin{aligned}0 = \langle u(x+y), x+y\rangle &= \langle u(x) + u(y), x+y\rangle \\ &= \underbrace{\langle u(x), x\rangle}_{0} + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \underbrace{\langle u(y), y\rangle}_{0} \\ &= \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle\end{aligned}$$

ومنه $u \in \mathcal{A}(E)$.

②⇐③ نعلم من الطلب السابق أنّ u تطبيق خطّي. ليكن $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ أساساً متعامداً نظامياً ما في E . ولنعرّف $M=(m_{ij})$ مصفوفة u بالنسبة إلى هذا الأساس. عندئذ

$$m_{ij}=\langle u(e_j),e_i\rangle=-\langle u(e_i),e_j\rangle=-m_{ji}$$

ومنه $^tM=-M$.

③⇐④ هذا اقتضاء تافه.

④⇐① نعلم من الطلب السابق أنّ u تطبيق خطّي. ليكن $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ الأساس المتعامد النظامي في E الذي يجعل $M=(m_{ij})$، مصفوفة u بالنسبة إلى هذا الأساس، تحقّق $^tM=-M$. عندئذ يكون لدينا

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\quad \langle u(e_j),e_i\rangle+\langle u(e_i),e_j\rangle=0$$

فإذا كان $x=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$ ، وضربنا طرفي العلاقة السابقة في العدد $\alpha_i\alpha_j$ ثُمّ جمعنا هذه العلاقات لوجدنا $2\langle u(x),x\rangle=0$ أي

$$\forall x\in E,\quad \langle u(x),x\rangle=0$$

وهذا يُثبت التكافؤ المطلوب.

3. من الواضح أنّ $\mathcal{A}(E)$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{L}(E)$. وأنّه إذا كان $\mathcal{E}$ أساساً متعامداً نظاميّاً في E عرّف التطبيق $u\mapsto \mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})$ تقابلاً خطيّاً بين $\mathcal{A}(E)$ وبين فضاء المصفوفات التخالفيّة $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ الذي بُعده يساوي $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

4. ليكن $u:E\to E$ تابعاً تخالفياً من $\mathcal{A}(E)$.

4.① لتكن λ قيمة ذاتيّة حقيقيّة للتطبيق u، وليكن x شعاعاً ذاتيّاً موافقاً. عندئذ نستنتج من المساواة

$$\lambda\|x\|^2=\lambda\langle x,x\rangle=\langle\lambda x,x\rangle=\langle u(x),y\rangle=0$$

أنّ $\lambda=0$.

فإذا كان $n=\dim E$ عدداً فرديّاً، كان لكثير الحدود المميِّز للتطبيق u جذرٌ حقيقي، وهذا الجذر يساوي 0 استناداً إلى ما سبق. إذن إذا كان n عدداً فرديّاً كان 0 قيمة ذاتيّة للتطبيق u . وكان u غير متباين.

②.4 ليكن y عنصراً من $\operatorname{Im} u$، وليكن x عنصراً من $\ker u$. إذن $u(x)=0$ ويوجد z من E يُحقّق $y=u(z)$. وعليه : $\langle x,y\rangle=\langle x,u(z)\rangle=-\langle u(x),z\rangle=0$. وهذا يثبت أنّ $\ker u\perp \operatorname{Im} u$.

③.4 لنضع $F=\operatorname{Im} u$. من الواضح أنّ $u(F)\subset F$، وهذا ما يتيح لنا تعريف التطبيق $v=u_{\| F}$ أي

$$v: F\rightarrow F, x\mapsto u(x)$$

إنّ التيقّن من كون v تخالفياً أمر يسير ومباشر، أمّا $\ker v$ فتحقّق

$$\ker u\cap F=\ker u\cap \operatorname{Im} u=\{0\}$$

إذن v هو تقابل تخالفي. وهذا يبرهن، بناءً على نتيجة ①.4، أنّ $\dim F$ هو عددٌ زوجي. فنكون قد أثبتنا أنّ $\operatorname{rg} u$ عددٌ زوجي في حالة تطبيق تخالفي u.

④.4 ليكن G فضاءً جزئياً من E يُحقّق $u(G)\subset G$. نتأمّل x من $G^{\perp}$ و y من G عندئذ

$$\langle u(x),y\rangle=-\langle \underbrace{x}_{G^{\perp}},\underbrace{u(y)}_{G}\rangle=0$$

وهذا يثبتُ أنّ $u(G^{\perp})\subset G^{\perp}$.

.5 ليكن $u:E\rightarrow E$ تابعاً تخالفياً من $\mathcal{A}(E)$، نفترض أيضاً أنّ $u^2=-I_E$.

①.5 لمّا كان u تقابلاً استنتجنا، بناءً على ①.4، أنّ $\dim E$ عدد زوجي. نعرّف إذن العدد p بالعلاقة $2p=\dim E$.

②.5 لتكن x من $E\backslash\{0\}$. نعرّف $F=\mathbb{R}x$. لمّا كان $x\perp u(x)$ استنتجنا أنّ $u(F)\perp F$.

③.5 لتكن $\mathcal{S}$ مجموعة الفضاءات الجزئيّة F من E التي تُحقِّق $u(F)\perp F$. لمّا كان $\{0\}$ ينتمي إلى $\mathcal{S}$ استنتجنا أنّ $\mathcal{S}\neq\varnothing$. نعرّف إذن المجموعة الجزئية غير الخالية من $\mathbb{N}$ كما يأتي:

$$\mathcal{N}=\left\{\dim F : F\in\mathcal{S}\right\}$$

إذا كان F عنصراً من $\mathcal{S}$ استنتجنا أنّ $\dim u(F)=\dim F$ لأنّ u تقابلٌ خطّي، واستنتجنا من $F\oplus u(F)\subset E$ أنّ $2\dim F=\dim F+\dim u(F)\leq 2p$ إذن $\dim F\leq p$. وعليه نرى أنّ $\mathcal{N}\subset\{0,1,\ldots,p\}$.

④.5 لنعرّف إذن $q=\max\mathcal{N}$، ولنتأمّل عنصراً F_0 من $\mathcal{S}$ يُحقّق $\dim F_0 = q$. ثُمّ لنفترض جدلاً أنّ $q<p$. عندئذ $\dim(F_0\oplus u(F_0))^{\perp} = 2p-2q\geq 2$ ومن ثَمّ يوجد شعاع غير صفري x ينتمي إلى $(F_0\oplus u(F_0))^{\perp}$.

نعرّف إذن $F_1 = F_0\oplus\mathbb{R}x$. ونتأمّل العنصرين $y+\lambda x$ و $y'+\lambda' x$ من F_1 عندئذ

$$\begin{aligned}\langle u(y+\lambda x), y'+\lambda' x\rangle &= \langle u(y),y'\rangle + \lambda'\langle u(y),x\rangle + \lambda\langle u(x),y'\rangle + \lambda\lambda'\cancel{\langle u(x),x\rangle}\\ &= \langle u(y),y'\rangle + \lambda'\langle u(y),x\rangle - \lambda\langle u(y'),x\rangle\end{aligned}$$

ولكن $\langle u(y),x\rangle = 0$ و $\langle u(y'),x\rangle = 0$ لأنّ $x\perp u(F_0)$، وكذلك $\langle u(y),y'\rangle = 0$ لأنّ $F_0\in\mathcal{S}$.

إذن $\langle u(y+\lambda x), y'+\lambda' x\rangle = 0$. وهذا ما يثبتُ أنّ $F_1\perp u(F_1)$، ومن ثَمّ $F_1\in\mathcal{S}$. ولكنّ هذا يناقض تعريف q إذ إنّ $\dim F_1 = \dim F + 1 = q+1$. وعليه لا بُدّ أن يكون $p=q$، وإذا اخترنا G عنصراً من $\mathcal{S}$ يُحقّق $\dim G = p$ كان $G\perp u(G)$ وكان $E = G\overset{\perp}{\oplus} u(G)$.

⑤.5 ليكن $\mathcal{G}=(e_1,e_2,\ldots,e_p)$ أساساً متعامداً نظامياً في G. ولنعرّف الجملة $\mathcal{F}=(f_1,\ldots,f_{2p})$ بالعلاقات $f_{2k-1}=e_k$ و $f_{2k}=u(e_k)$ حين يكون $1\leq k\leq p$. لنلاحظ أوّلاً أنّه

$$\forall(x,y)\in E^2,\ \ \langle u(x),u(y)\rangle = -\langle x,u^2(y)\rangle = -\langle x,-y\rangle = \langle x,y\rangle$$

وعليه فإنّ الجملة $(f_{2k})_{k\in\mathbb{N}_p}$ جملة متعامدة نظاميّة. ولأنّ $G\perp u(G)$ استنتجنا أنّ كلّ شعاع من $(f_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}_p}$ يكون عمودياً على كلّ شعاع من $(f_{2k})_{k\in\mathbb{N}_p}$. وهذا يثبت أنّ $\mathcal{F}=(f_1,\ldots,f_{2p})$ تعرّف أساساً متعامداً نظامياً في E. ويكون لدينا

$$U_p = \mathrm{mat}(u,\mathcal{F},\mathcal{F}) = \begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{matrix}}\end{bmatrix}$$

6. ليكن $u : E \to E$ تطبيقاً تخالفياً من $\mathcal{A}(E)$.

①.6 لنتأمّل التطبيق $-u^2 = (-u) \circ u = u^* \circ u$. نلاحظ أنّ $-u^2$ تطبيق خطّي متناظر موجب. وهذا يقتضي أنّ $\mathrm{sp}(-u^2) \subset \mathbb{R}_+$ أو $\mathrm{sp}(u^2) \subset \mathbb{R}_-$.

②.6 من الواضح أنّ $\ker u \subset \ker u^2$. وبالعكس فإنّ $u^2(x) = 0$ يقتضي $u^* \circ u(x) = 0$ ومن ثَمّ $\|u(x)\| = 0$ أو $u(x) = 0$. إذن $\ker u = \ker u^2$.

③.6 لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{u^2}(X^2) &= \det(u^2 - X^2 I) = \det(u - XI)\det(u + XI)\\
&= \mathcal{X}_u(X)(-1)^n \det(-u - XI)\\
&= \mathcal{X}_u(X)(-1)^n \det(u^* - XI)\\
&= \mathcal{X}_u(X)(-1)^n \mathcal{X}_{u^*}(X) = (-1)^n(\mathcal{X}_u(X))^2
\end{aligned}$$

④.6 لتكن λ قيمة ذاتيّة غير الصفر للتطبيق u^2. إذن $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$. ولنتأمّل الفضاء الذاتي الموافق $E_\lambda = \ker(u^2 - \lambda I_E)$. إذا كان x عنصراً من E_λ كان $u^2(x) = \lambda x$ ومن ثَمّ $u^2(u(x)) = \lambda u(x)$ إذن $u(x) \in E_\lambda$.

نُعرّف إذن، على E_λ، التطبيق $\overline{u} = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} u_{\|E_\lambda}$ أي

$$\overline{u} : E_\lambda \to E_\lambda, \overline{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} u(x)$$

من الواضح أنّ $\overline{u}$ تابعٌ تخالفي على E_λ. وكذلك فإنّ

$$\overline{u}^2 = -\frac{1}{\lambda}(u^2_{\|E_\lambda}) = -\frac{1}{\lambda}(\lambda I_{E_\lambda}) = -I_{E_\lambda}$$

إذن $\overline{u}$ تقابلٌ تخالفي يُحقّق $\overline{u}^2 = -I_{E_\lambda}$. فإذا استفدنا من نتيجة 5. استنتجنا أنّه يوجد أساسٌ متعامدٌ نظامي $\mathcal{F}_\lambda$ للفضاء E_λ يُحقّق $U_{p_\lambda} = \mathrm{mat}(\overline{u}, \mathcal{F}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$ حيث $\dim E_\lambda = 2p_\lambda$. وهذا يُثبتُ أنّ

$$\sqrt{-\lambda}\, U_{p_\lambda} = \mathrm{mat}(u_{\|E_\lambda}, \mathcal{F}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$$

6.⑤ لمّا كانت الفضاءات الذاتيّة للتطبيق المتناظر $u^2 = -u^* \circ u$ متعامدة مثنى مثنى، فإذا عرّفنا $\mathcal{F}_0$ أساساً متعامداً نظاميّاً للفضاء $\ker u = \ker u^2$ كان الأساس $\mathcal{F}_\lambda \displaystyle\coprod_{\lambda\in \mathrm{sp}(u^2)} = \mathcal{F}$ أساساً متعامداً نظاميّاً للفضاء E وأخذت مصفوفة u بالنسبة إلى الأساس $\mathcal{F}$ شكل مصفوفة قطريّة كتليّاً. وعلى وجه الدقّة، إذا كان $\mathrm{sp}(u^2) = \{0, -\mu_1^2, -\mu_2^2, \ldots, -\mu_q^2\}$ حيث $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}_q}$ من $\mathbb{R}_+^*$، وعرّفنا p_k $\displaystyle p_0 = n - 2\sum_{k=1}^{q} p_k$ إذ رمزنا اختصاراً بالرمز p_k إلى p_{λ_k}. كان

$$\mathrm{mat}(u,\mathcal{F},\mathcal{F}) = \begin{bmatrix} V_1 & & & & \\ & V_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & V_q & \\ & & & & 0_{p_0\times p_0} \end{bmatrix}$$

$$V_k = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -\mu_k \\ \mu_k & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & -\mu_k \\ \mu_k & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -\mu_k \\ \mu_k & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2p_k}(\mathbb{R})$$

7. ليكن $u : E \to E$ تابعاً تخالفياً من $\mathcal{A}(E)$. وليكن I_E التطبيق المطابق على E.

7.① لتكن λ من $\mathbb{R}^*$، نعلم أنّ $-\lambda$ ليست قيمة ذاتيّة للتطبيق u وهذا يثبتُ أنّ $u + \lambda I_E$ تقابلٌ خطّي.

7.② لتكن λ من $\mathbb{R}^*$، يمكننا استناداً إلى ما سبق أن نعرّف التطبيق الخطّي w_λ المعطى بالصيغة

$$w_\lambda = (-u + \lambda I_E) \circ (u + \lambda I_E)^{-1}$$

لمّا كان

$$(-u+\lambda I_E)\circ(u+\lambda I_E)=(u+\lambda I_E)\circ(-u+\lambda I_E)$$

استنتجنا أنّ

$$(u+\lambda I_E)^{-1}\circ(-u+\lambda I_E)=(-u+\lambda I_E)\circ(u+\lambda I_E)^{-1}$$

إذن لدينا أيضاً $w_\lambda=(u+\lambda I_E)^{-1}\circ(-u+\lambda I_E)$. وعليه

$$\begin{aligned} w_\lambda^* &= (-u+\lambda I_E)^*\circ((u+\lambda I_E)^{-1})^* \\ &= (-u^*+\lambda I_E)\circ(u^*+\lambda I_E)^{-1} \\ &= (u+\lambda I_E)\circ(-u+\lambda I_E)^{-1}=w_\lambda^{-1} \end{aligned}$$

ولمّا كان $(u+\lambda I_E)^*=(u^*+\lambda I_E)=-u+\lambda I_E$ استنتجنا أنّ

$$\det(u+\lambda I_E)=\det(-u+\lambda I_E)$$

ومن ثَمّ $\det(w_\lambda)=1$. وبذا نكون قد أثبتنا أنّ $w_\lambda\in\mathcal{O}^+(E)$. وأخيراً إذا افترضنا جدلاً أنّ -1 قيمة ذاتيّة للتطبيق w_λ استنتجنا أنّه يوجد شعاع غير معدوم يُحقّق $w_\lambda(x)=-x$ وهذا يُكافئ

$$(u+\lambda I_E)^{-1}\circ(-u+\lambda I_E)(x)=-x$$

أو $(-u+\lambda I_E)(x)=(u+\lambda I_E)(-x)$ ومنه $2\lambda x=0$، وهذا تناقضٌ لأنّ $x\neq 0$ و $\lambda\neq 0$. وعليه فإنّ $-1\notin\operatorname{sp}(w_\lambda)$.

③.7 وبالعكس نفترض أنّ w ينتمي إلى $O^+(E)$ ويحقّق $-1\notin\operatorname{sp}(w)$. لمّا كان -1 ليس قيمة ذاتيّة للتطبيق الخطّي w استنتجنا أنّ $w+I_E$ قلوبٌ وأمكننا من ثَمّ تعريف التطبيق الخطّي

$$u=(I_E+w)^{-1}\circ(I_E-w)=(I_E-w)\circ(I_E+w)^{-1}$$

عندئذ نلاحظ أنّ

$$u^*=((I_E+w)^{-1})^*\circ(I_E-w)^*=(I_E+w^{-1})^{-1}\circ(I_E-w^{-1})$$

ولكن

$$I_E-w^{-1}=w^{-1}(w-I_E)=-w^{-1}(I_E-w)$$

ولأنّ $I_E+w^{-1}=w^{-1}(w+I_E)$ وجدنا

$$(I_E+w^{-1})^{-1}=(w+I_E)^{-1}w$$

إذن

$$u^* = -(I_E + w)^{-1} \circ (I_E - w) = -u$$

وهذا يُثبتُ أنّ u تطبيق تخالفي من $\mathcal{A}(E)$. ونستنتج مباشرة من التعريف أنّ

$$w = (-u + I_E) \circ (u + I_E)^{-1}$$

8. نفترض هنا أنّ E هو الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$ مزوداً بالجداء السلمي المألوف وموجّهاً بالأساس القانوني $\mathcal{E} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. وإذا كان z من E رمزنا بالرمز U_z إلى التطبيق :

$$U_z : E \to E, U_z(x) = z \wedge x$$

①.8 نفترض أنّ $z = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}$. عندئذ

$$U_z(\vec{i}) = \gamma\vec{j} - \beta\vec{k},\ U_z(\vec{j}) = -\gamma\vec{i} + \alpha\vec{k},\ U_z(\vec{k}) = \beta\vec{i} - \alpha\vec{j}$$

ومن ثَمّ

$$M_z = \operatorname{mat}\left(U_z, \mathcal{E}, \mathcal{E}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

ونلاحظ أنّ ${}^tM_z = -M_z$. إذن U_z تطبيق تخالفي.

②.8 وبالعكس، ليكن u تطبيقاً تخالفياً من $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$ ، ولتكن المصفوفة M مصفوفة u بالنسبة إلى الأساس $\mathcal{E}$. نستنتج من المساواة ${}^tM = -M$ أنّه توجد أعداد p و q و r تُحقّق

$$M = \begin{bmatrix} 0 & r & q \\ -r & 0 & p \\ -q & -p & 0 \end{bmatrix}$$

وعندئذ يكون $u = U_z$ حيث $z = -p\vec{i} + q\vec{j} - r\vec{k}$.

③.8 نفترض في هذا السؤال أنّ $z = \vec{k}$ وأنّ $\lambda = -\cot(\theta/2)$ ، حيث تنتمي θ إلى $]2\pi, 0[\backslash\{\pi\}$. لمّا كان

$$M_z = \operatorname{mat}\left(U_z, \mathcal{E}, \mathcal{E}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

كان

$$W_z = \operatorname{mat}\left(w_\lambda, \mathcal{E}, \mathcal{E}\right) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وهذا يثبتُ أنّ $w_\lambda = R_\theta$ أي الدوران بزاوية θ حول المحور $\mathbb{R}\vec{k}$.

التمرين 35. جملة خطيّة من نوع خاص

مقدّمة

- E هو الفضاء الإقليدي المألوف، أي $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$ مزوداً بالجداء السلمي : $\langle X, Y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ حيث $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ و $Y = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$ من E، وبالنظيم $\|X\| = \sqrt{\langle X, X\rangle}$ الموافق لهذا الجداء.
- $S_n(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المتناظرة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $S_n^+(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات الموجبة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $S_n^{++}(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المعرّفة الموجبة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- نذكّر أنه إذا كانت A من $S_n(\mathbb{R})$ فيوجد أساس متعامد نظامي $(X_1, \ldots, X_n)$ في E، و أعداد حقيقية $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ تحقق $AX_k = \lambda_k X_k$ أياً كان k من $\mathbb{N}_n$.
- في حالة A من $S_n(\mathbb{R})$ نرمز بالرمز $\operatorname{sp}(A)$ إلى طيف المصفوفة A ونعرّف
$$\lambda_-(A) = \min \operatorname{sp}(A) \quad \text{و} \quad \lambda_+(A) = \max \operatorname{sp}(A)$$
- نزوّد $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، فضاء المصفوفات المربعة من المرتبة n، بنظيم التطبيقات الخطيّة المستمرّة من E إلى E، أي $\|A\|_2 = \sup\left\{\|AX\| : X \in E, \|X\| \le 1\right\}$.
- نقول إنّ مصفوفتين A و B من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ تتبادلان إذا كان $AB = BA$.

- نذكّر أنّه في حالة A من $S_n(\mathbb{R})$ لدينا

$$\lambda_-(A) = \inf_{\|X\|=1} \langle AX, X\rangle \text{ و } \lambda_+(A) = \sup_{\|X\|=1} \langle AX, X\rangle$$
$$\text{و } \|A\|_2 = \max\left(-\lambda_-(A), \lambda_+(A)\right)$$

الجزء الأول

لتكن A من $S_n^+(\mathbb{R})$، و r من $\mathbb{R}_+^*$. ولتكن I المصفوفة الواحدية من المرتبة n.

1. أثبت أنّ $\forall X \in E, \langle (rI + A)X, X\rangle \geq r\|X\|^2$ واستنتج أنّ
$$rI + A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$
2. أثبت أنّ $rI + A$ مصفوفة قَلوبة، وأنّ $\left\|(rI + A)^{-1}\right\|_2 \leq 1/r$.

☜ **نعرّف إذن** $\tilde{A}_r = (rI + A)^{-1}(rI - A)$.

3. أثبت أنّ المصفوفتين $rI - A$ و $(rI + A)^{-1}$ تتبادلان. وأنّ $\tilde{A}_r \in S_n(\mathbb{R})$.
4. لتكن λ من $\operatorname{sp}(\tilde{A}_r)$. أثبت أنّ $\dfrac{r-\lambda_+(A)}{r+\lambda_+(A)} \leq \lambda \leq \dfrac{r-\lambda_-(A)}{r+\lambda_-(A)}$.
5. أثبت أنّ $\left\|\tilde{A}_r\right\|_2 = \max\left(\dfrac{\lambda_+(A)-r}{\lambda_+(A)+r}, \dfrac{r-\lambda_-(A)}{r+\lambda_-(A)}\right)$.
6. استنتج أنه مهما تكن A من $S_n^+(\mathbb{R})$ و r من $\mathbb{R}_+^*$، يكن $\left\|\tilde{A}_r\right\|_2 \leq 1$. وأنّه يكون لدينا $\left\|\tilde{A}_r\right\|_2 < 1$ إذا وفقط إذا كانت A من $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

الجزء الثاني

لتكن (A, B) من $S_n^{++}(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$، نهدف في هذا الجزء إلى إثبات ما يلي:
$$\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists! M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad AM + MB = C$$

1. لتكن N من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة تحقق $AN + NB = 0$. أثبت أنه مهما تكن r من $\mathbb{R}_+^*$، فلدينا $N = \tilde{A}_r N \tilde{B}_r$، ثمّ استنتج أنّ $N = 0$.
2. استفدْ من التطبيق : $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto AM + MB$ لتثبت صحة الخاصة المطلوبة.

الجزء الثالث

لتكن (A, B, C) من $S_n^{++}(\mathbb{R}) \times S_n^{+}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ، ولتكن r من $\mathbb{R}_+^*$.

I. أثبت أنّ المعادلة $AM + MB = C$ ذات المجهول M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ تكافئ المعادلة $M = \tilde{A}_r M \tilde{B}_r + D_r$ حيث $D_r = 2r(rI + A)^{-1} C (rI + B)^{-1}$.

II. نعرّف المتتالية $(Z_m)_{m \geq 0}$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ بالعلاقات :

$$\forall m \geq 0, \ Z_{m+1} = \tilde{A}_r Z_m \tilde{B}_r + D_r \text{ و } Z_0 = 0$$

ونرمز بالرمز K_r إلى المقدار $\|\tilde{A}_r\|_2 \|\tilde{B}_r\|_2$. نظراً إلى أنّ r ثابتة في بقية هذا الجزء فإننا سنكتب K و $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و D للدلالة على K_r و $\tilde{A}_r$ و $\tilde{B}_r$ و D_r على التوالي.

1. أثبت أنّ $K < 1$ ، وأنّ

$$\forall m \geq 1, \|Z_{m+1} - Z_m\|_2 \leq K \|Z_m - Z_{m-1}\|_2$$

2. استنتج أنّ $\forall m \geq 0, \|Z_{m+1} - Z_m\|_2 \leq K^m \|Z_1\|_2$.

3. أثبت أنّ المتتالية $(Z_m)_{m \geq 0}$ تتقارب من الحل الوحيد M للمعادلة المصفوفيّة $AM + MB = C$. وأنّ

$$\forall m \geq 0, \ \|Z_m - M\|_2 \leq \frac{2\|C\|_2}{r} \cdot \frac{K^m}{1 - K}$$

4. أثبت كذلك أنّ $\forall m \geq 1, \quad Z_m = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{A}^k D \tilde{B}^k$.

III. نعرّف المتتاليات الثلاث $(U_m)_{m \geq 0}$ و $(V_m)_{m \geq 0}$ و $(W_m)_{m \geq 0}$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ بالعلاقات

$$U_0 = \tilde{A}, \quad \forall m \geq 0, \quad U_{m+1} = U_m^2.$$
$$V_0 = \tilde{B}, \quad \forall m \geq 0, \quad V_{m+1} = V_m^2.$$
$$W_0 = D, \quad \forall m \geq 0, \quad W_{m+1} = U_m W_m V_m + W_m.$$

1. أثبت أنّ $\forall m \geq 0, W_m = Z_{2^m}$. واستنتج تقديراً للخطأ $\|W_m - M\|_2$ بدلالة r و K و $\|C\|_2$.

2. كم عملية ضرب لمصفوفتين يتطلّب حساب W_m انطلاقاً من $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و D.

الجزء الرابع

يتضح من الدراسة السابقة أنّ تقارب المتتالية $(W_m)_{m\geq 0}$ أو $(Z_m)_{m\geq 0}$ من الحل المطلوب M يكون أسرع كلما كان الثابت $K_r = \left\|\tilde{A}_r\right\|_2 \left\|\tilde{B}_r\right\|_2$ صغيراً. نهدف في هذا الجزء إلى تعيين قيمة r التي تجعل المقدار K_r أصغر ما يمكن.

I. لتكن (a,b) من $\mathbb{R}^2$، حيث $0 \leq a \leq b$ و $x > 0$، نعرّف

$$\varphi(a,b,x) = \max\left(\frac{x-a}{x+a}, \frac{b-x}{b+x}\right)$$

1. بيّن أنه يوجد ثابت $\lambda_{a,b}$، يطلب تعيينه بدلالة a و b، يُحقّق

$$\varphi(a,b,x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{x+a} & : \quad \lambda_{a,b} \leq x \\ \dfrac{b-x}{b+x} & : \quad 0 < x \leq \lambda_{a,b} \end{cases}$$

ثُمّ ادرس باختصار تحولات $x \mapsto \varphi(a,b,x)$ على $\mathbb{R}_+^*$، وارسم خطه البياني.

2. استنتج أنه إذا كانت المصفوفة B موجبة دون أن تكون معرّفة موجبة فإنّ K_r يكون أصغر ما يمكن في حالة $r = \sqrt{\lambda_+(A)\lambda_-(A)}$.

II. لنتأمّل (a,b) من $\mathbb{R}^2$، حيث $0 < a \leq b$ و (c,d) من $\mathbb{R}^2$، حيث $0 < c \leq d$، ولنعرّف التابع

$$\psi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* : x \mapsto \varphi(a,b,x)\varphi(c,d,x)$$

1. نفترض أنّ $\lambda_{a,b} \leq \lambda_{c,d}$.

① ادرس اطّراد التابع ψ على كلٍّ من $]0, \lambda_{a,b}[$ و $]\lambda_{a,b}, \lambda_{c,d}[$ و $]\lambda_{c,d}, +\infty[$. واستنتج أنّ

$$\min_{x>0} \psi(x) = \min\left(\psi(\lambda_{a,b}), \psi(\lambda_{c,d})\right)$$

② نعرّف $h(x) = \dfrac{x-a}{x+a} \cdot \dfrac{d-x}{d+x}$. أثبت أنّ $h(\lambda_{a,b}) = \psi(\lambda_{a,b})$ وأنّ $h(\lambda_{c,d}) = \psi(\lambda_{c,d})$. ثم أثبت أنّه في حالة $0 < x < y$، لدينا

$$h(x) < h(y) \Leftrightarrow xy < ad$$

③ استنتج أنّ :

$$\min_{x>0} \psi(x) = \begin{cases} \psi(\lambda_{a,b}) & : \quad cb < ad \\ \psi(\lambda_{c,d}) & : \quad cb \geq ad \end{cases}$$

2. اذكر دون حساب لماذا تبقى النتيجة السابقة صحيحة، دون تغيير إذا لم نضع الشرط $\lambda_{a,b} \leq \lambda_{c,d}$؟

3. لاحظ أنّ $K_r = \varphi(\lambda_-(A), \lambda_+(A), r)\, \varphi(\lambda_-(B), \lambda_+(B), r)$، واستنتج قيمة r التي تجعل K_r أصغر ما يمكن مناقشاً تبعاً لإشارة المقدار

$$\lambda_-(A)\lambda_+(B) - \lambda_+(A)\lambda_-(B)$$

III. **تطبيق عددي**. نتأمّل المصفوفتين $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 45 \end{bmatrix}$ بيّن أنّ كلاًّ من A و B مصفوفة معرّفة موجبة. ثم عيّن قيمة r التي تجعل K_r أصغر ما يمكن، واحسب K_r في هذه الحالة.

الحل

الجزء الأول

لتكن A من $S_n^+(\mathbb{R})$، و r من $\mathbb{R}_+^*$. ولتكن I المصفوفة الواحدية من المرتبة n .

1. لتكن X من E، عندئذ

$$\langle (rI + A)X, X\rangle = r\|X\|^2 + \langle AX, X\rangle \geq r\,\|X\|^2$$

وهذا يثبت أنّ $rI + A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$، لأنّ $rI + A$ مصفوفة متناظرة، وهي معرّفة موجبة بناءً على المتراجحة السابقة.

2. لمّا كانت $rI + A$ مصفوفة معرّفة موجبة استنتجنا أنها قَلوبة. ومن المتراجحة السابقة نجد

$$\forall X \in E, \quad r\,\|X\|^2 \leq \langle (rI + A)X, X\rangle \leq \|(rI + A)X\|\|X\|$$

ومنه

$$\forall X \in E, \quad r\,\|X\| \leq \left\|(rI + A)X\right\|$$

فإذا كان Y من E وطبّقنا المتراجحة السابقة على $X = (rI + A)^{-1}Y$ استنتجنا أنّ

$$\forall Y \in E, \quad \|(rI + A)^{-1}Y\| \le \frac{1}{r}\|Y\|$$

وهذا ما يثبت أنّ $\|(rI + A)^{-1}\|_2 \le 1/r$.

☚ نعرّف إذن $\tilde{A}_r = (rI + A)^{-1}(rI - A)$.

3. من الواضح أنّ

$$(rI - A)(rI + A) = (rI + A)(rI - A)$$

وبضرب طرفي المساواة السابقة ومن الجهتين في المصفوفة $(rI + A)^{-1}$ نجد

$$(rI + A)^{-1}(rI - A) = (rI - A)(rI + A)^{-1}$$

وعليه

$$\begin{aligned}(\tilde{A}_r)^* &= ((rI + A)^{-1}(rI - A))^* = (rI - A^*)(rI + A^*)^{-1}\\ &= (rI - A)(rI + A)^{-1} = \tilde{A}_r\end{aligned}$$

إذن $\tilde{A}_r \in S_n(\mathbb{R})$.

4. لتكن λ من $\mathrm{sp}(\tilde{A}_r)$. عندئذ يوجد شعاع غير معدوم X_0 يُحقّق $\tilde{A}_r X_0 = \lambda X_0$ ومنه

$$(rI + A)^{-1}(rI - A)X_0 = \lambda X_0$$

أو $(rI - A)X_0 = \lambda(rI + A)X_0$ ومنه

$$r(1 - \lambda)X_0 = (\lambda + 1)AX_0$$

إذن $\lambda \ne -1$ وإلاّ كان $2rX_0 = 0$، وهذا خُلفٌ لأنّ $r > 0$ و $X_0 \ne 0$. إذن

$$r\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \in \mathrm{sp}(A)$$

وعليه

$$0 \le \lambda_-(A) \le r\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \le \lambda_+(A)$$

يكون المقدار $\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$ موجباً إذا وفقط إذا كان $-1 < \lambda \le 1$، إذن ينتج من مما سبق أنّ

$$\frac{r - \lambda_+(A)}{r + \lambda_+(A)} \le \lambda \le \frac{r - \lambda_-(A)}{r + \lambda_-(A)}$$

5. وبملاحظة الإثبات السابق، نرى أنّه إذا كان $X\_$ شعاعاً ذاتيّاً للمصفوفة A موافقاً للقيمة الذاتيّة $\lambda\_(A)$ كان $X\_$ نفسه شعاعاً ذاتيّاً للمصفوفة $\tilde{A}_r$ موافقاً للقيمة الذاتيّة $\frac{r-\lambda\_(A)}{r+\lambda\_(A)}$. إذن

$$\lambda_+(\tilde{A}_r) = \frac{r-\lambda\_(A)}{r+\lambda\_(A)}$$

وذلك بسبب المتراجحة السابقة. ونجد بأسلوب مماثل أنّ

$$\lambda\_(\tilde{A}_r) = \frac{r-\lambda_+(A)}{r+\lambda_+(A)}$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\|\tilde{A}_r\|_2 = \max\left(\frac{\lambda_+(A)-r}{\lambda_+(A)+r}, \frac{r-\lambda\_(A)}{r+\lambda\_(A)}\right)$$

6. لنلاحظ أوّلاً أنّ كلّاً من العددين $\frac{r-\lambda\_(A)}{r+\lambda\_(A)}$ و $\frac{\lambda_+(A)-r}{\lambda_+(A)+r}$ أصغر أو يساوي 1، وهذا ما يثبتُ أنّ $\|\tilde{A}_r\|_2 \le 1$. الشرط $\|\tilde{A}_r\|_2 < 1$ يُكافئ أن يكون

$$\frac{\lambda_+(A)-r}{\lambda_+(A)+r} < 1 \quad \text{و} \quad \frac{r-\lambda\_(A)}{r+\lambda\_(A)} < 1$$

وهذا بدوره يُكافئ $0 < \lambda\_(A)$، لأنّ $r > 0$. أي $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \left(\|\tilde{A}_r\|_2 < 1\right)$.

الجزء الثاني

لتكن (A,B) من $S_n^{++}(\mathbb{R}) \times S_n^{+}(\mathbb{R})$، نهدف في هذا الجزء إلى إثبات ما يلي:

$$\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists! M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad AM + MB = C$$

1. لتكن N من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة تحقق $AN + NB = 0$. ولتكن r من $\mathbb{R}_+^*$، عندئذ

$$\tilde{A}_r N \tilde{B}_r = (rI+A)^{-1}(rI-A)N(rI+B)^{-1}(rI-B)$$

ولكن

$$(rI-A)N = rN - AN = rN + NB = N(rI+B)$$

إذن

$$\begin{aligned}\tilde{A}_r N \tilde{B}_r &= (rI+A)^{-1}N(rI+B)(rI+B)^{-1}(rI-B)\\ &= (rI+A)^{-1}N(rI-B)\end{aligned}$$

وكذلك

$$N(rI - B) = rN - NB = rN + AN = (rI + A)N$$

إذن $N = \tilde{A}_r N \tilde{B}_r$. ولكنّ هذا يقتضي أنّ $\|N\|_2 \le \|\tilde{A}_r\|_2 \|N\|_2 \|\tilde{B}_r\|_2$ ومنه

$$\left(1 - \|\tilde{A}_r\|_2 \|\tilde{B}_r\|_2\right) \|N\|_2 \le 0$$

ولكن $\|\tilde{A}_r\|_2 \|\tilde{B}_r\|_2 < 1$ لأنّ $\|\tilde{A}_r\|_2 < 1$ و $\|\tilde{B}_r\| \le 1$. إذن $\|N\|_2 = 0$ ومنه $N = 0$.

2. نستنتج مما سبق أنّ التطبيق الخطّي

$$\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto AM + MB$$

متباينٌ لأنّ $\ker \Phi = \{0\}$. ولأنّ الفضاء $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ منتهي البُعد، استنتجنا أنّ Φ تقابلٌ خطّي. وهذا يُكافئ النتيجة المرجوّة.

الجزء الثالث

لتكن (A, B, C) من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times S_n^{+}(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ ، ولتكن r من $\mathbb{R}_+^*$.

I. لتكن M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ولنعرّف $X = AM + MB$ عندئذ

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_r M \tilde{B}_r &= (rI + A)^{-1}(rI - A)M(rI + B)^{-1}(rI - B) \\
&= (rI + A)^{-1}(rM - AM)(rI + B)^{-1}(rI - B) \\
&= (rI + A)^{-1}(rM + MB - X)(rI + B)^{-1}(rI - B) \\
&= (rI + A)^{-1}M\underline{(rI + B)(rI + B)^{-1}}(rI - B) \\
&\qquad - (rI + A)^{-1}X(rI + B)^{-1}(rI - B) \\
&= (rI + A)^{-1}(rM - MB) - (rI + A)^{-1}X(rI + B)^{-1}(rI - B) \\
&= (rI + A)^{-1}(rM + AM - X) - (rI + A)^{-1}X(rI + B)^{-1}(rI - B) \\
&= \underline{(rI + A)^{-1}(rI + A)}M - (rI + A)^{-1}X(I + (rI + B)^{-1}(rI - B)) \\
&= M - (rI + A)^{-1}X(rI + B)^{-1}\left(rI + B + rI - B\right) \\
&= M - 2r(rI + A)^{-1}X(rI + B)^{-1}
\end{aligned}$$

إذن لقد أثبتنا أنّ

$$\tilde{A}_r M \tilde{B}_r = M - 2r(rI + A)^{-1}(AM + MB)(rI + B)^{-1}$$

وعليه نرى مباشرة أنّ $AM + MB = C$ يُكافئ

$$M = \tilde{A}_r M \tilde{B}_r + D_r$$

حيث $D_r = 2r(rI + A)^{-1}C(rI + B)^{-1}$.

II. نعرّف المتتالية $(Z_m)_{m\geq 0}$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ بالعلاقات :

$$Z_0 = 0 \text{ و } \forall m \geq 0,\ Z_{m+1} = \tilde{A}_r Z_m \tilde{B}_r + D_r$$

ونرمز بالرمز K_r إلى المقدار $\left\|\tilde{A}_r\right\|_2 \left\|\tilde{B}_r\right\|_2$. نظراً إلى أنّ r ثابتة في بقية هذا الجزء فإننا سنكتب K و $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و D للدلالة على K_r و $\tilde{A}_r$ و $\tilde{B}_r$ و D_r على التوالي.

II.1. لمّا كانت المصفوفة A مصفوفة معرّفة موجبة استنتجنا أنّ $\left\|\tilde{A}\right\|_2 < 1$ ولأنّ $\left\|\tilde{B}\right\|_2 \leq 1$ استنتجنا أنّ $K = \left\|\tilde{A}\right\|_2 \left\|\tilde{B}\right\|_2 < 1$. ومن جهة أخرى نستنتج من المساواة

$$\forall m \geq 0,\ Z_{m+1} = \tilde{A} Z_m \tilde{B} + D$$

أنّ

$$\forall m \geq 0,\ Z_{m+1} - Z_m = \tilde{A} Z_m \tilde{B} - \tilde{A} Z_{m-1} \tilde{B} = \tilde{A}(Z_m - Z_{m-1})\tilde{B}$$

ومنه، مهما كان العدد الطبيعي m كان

$$\left\|Z_{m+1} - Z_m\right\|_2 \leq \left\|\tilde{A}\right\|_2 \left\|Z_m - Z_{m-1}\right\|_2 \left\|\tilde{B}\right\|_2 = K \left\|Z_m - Z_{m-1}\right\|_2$$

II.2. وهذا يبرهن، بالتدريج على العدد m، أنّ

$$\forall m \geq 0, \left\|Z_{m+1} - Z_m\right\|_2 \leq K^m \left\|Z_1\right\|_2$$

II.3. نستنتج مما سبق أنّ المتسلسلة $\sum_{m=0}^{\infty}(Z_{m+1} - Z_m)$ متقاربة بالإطلاق، لأنّ الفضاء $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ فضاء تامٌّ. ولكن $Z_m = \sum_{m=0}^{m-1}(Z_{k+1} - Z_k)$، إذن تتقارب $(Z_m)_{m\geq 0}$ في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ من مصفوفة نرمز إليها بالرمز M.

نستنتج من $\forall m \geq 0,\ Z_{m+1} = \tilde{A} Z_m \tilde{B} + D$ بعد جعل M تسعى إلى اللانهاية أنّ

$$M = \tilde{A} M \tilde{B} + D$$

أو أنّ $AM + MB = C$، وذلك عملاً بنتيجة I.

كما نستنتج من المساواة $M - Z_m = \sum_{p=m}^{\infty} (Z_{p+1} - Z_p)$ أنّ

$$\left\| M - Z_m \right\|_2 \leq \sum_{p=m}^{\infty} \left\| Z_{p+1} - Z_p \right\|_2 \leq \left\| Z_1 \right\|_2 \sum_{p=m}^{\infty} K^p = \left\| Z_1 \right\|_2 \frac{K^m}{1-K}$$

ولمّا كان $Z_1 = D = -2r(rI + A)^{-1}C(rI + B)^{-1}$ استنتجنا أنّ

$$\left\| Z_1 \right\|_2 \leq 2r \left\| (rI + A)^{-1} \right\|_2 \left\| (rI + B)^{-1} \right\|_2 \left\| C \right\|_2 \leq \frac{2}{r} \left\| C \right\|_2$$

ومن ثَمّ

$$\forall m \geq 0, \ \left\| Z_m - M \right\|_2 \leq \frac{2 \left\| C \right\|_2}{r} \cdot \frac{K^m}{1-K}$$

II.4. ويمكننا أن نبرهن بالتدريج على العدد m أنّ $\forall m \geq 1, \ Z_m = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{A}^k D \tilde{B}^k$.

III. نعرّف المتتاليات الثلاث $(U_m)_{m\geq 0}$ و $(V_m)_{m\geq 0}$ و $(W_m)_{m\geq 0}$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ بالعلاقات

$$\begin{aligned}
U_0 &= \tilde{A}, & \forall m \geq 0, \quad U_{m+1} &= U_m^2. \\
V_0 &= \tilde{B}, & \forall m \geq 0, \quad V_{m+1} &= V_m^2. \\
W_0 &= D, & \forall m \geq 0, \quad W_{m+1} &= U_m W_m V_m + W_m.
\end{aligned}$$

III.1. في الحقيقة، نلاحظ مباشرة أنّ $U_m = \tilde{A}^{2^m}$، و $V_m = \tilde{B}^{2^m}$، و $W_0 = Z_1$. وإذا افترضنا أنّ $W_m = Z_{2^m}$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}
W_{m+1} &= \tilde{A}^{2^m} \left(\sum_{k=0}^{2^m-1} \tilde{A}^k D \tilde{B}^k \right) \tilde{B}^{2^m} + \sum_{k=0}^{2^m-1} \tilde{A}^k D \tilde{B}^k \\
&= \sum_{k=0}^{2^{m+1}-1} \tilde{A}^k D \tilde{B}^k = Z_{2^{m+1}}
\end{aligned}$$

إذن $\forall m \geq 0, W_m = Z_{2^m}$. وعليه

$$\left\| W_m - M \right\|_2 = \left\| Z_{2^m} - M \right\|_2 \leq \frac{2 \left\| C \right\|_2}{r} \cdot \frac{K^{2^m}}{1-K}$$

III.2. يتطلّب حساب $(U_{m+1}, V_{m+1}, W_{m+1})$ انطلاقاً من (U_m, V_m, W_m) أربع عمليّات ضربٍ لمصفوفات. وعليه فإنّ حساب (U_m, V_m, W_m) انطلاقاً من $\left(\tilde{A}, \tilde{B}, D\right)$ يتطلّب $4m$ عملية ضربٍ لمصفوفات. ولمّا كان من غير الضروري حساب U_m و V_m لحساب W_m، استنتجنا أنّ حساب W_m يتطلّب $4m-2$ عملية ضربٍ لمصفوفات.

الجزء الرابع

يتضح من الدراسة السابقة أنّ تقارب المتتالية $(W_m)_{m\geq 0}$ أو $(Z_m)_{m\geq 0}$ من الحل المطلوب M يكون أسرع كلما كان الثابت $K_r = \|\tilde{A}_r\|_2 \|\tilde{B}_r\|_2$ صغيراً. نهدف في هذا الجزء إلى تعيين قيمة r التي تجعل المقدار K_r أصغر ما يمكن.

I. لتكن (a,b) من $\mathbb{R}^2$، حيث $0 \leq a \leq b$ و $x > 0$، ولنعرّف

$$\varphi(a,b,x) = \max\left(\frac{x-a}{x+a}, \frac{b-x}{b+x}\right)$$

I.1. لنلاحظ أنّ

$$\frac{x-a}{x+a} - \frac{b-x}{b+x} = 2\frac{x^2-ab}{(x+a)(b+x)}$$

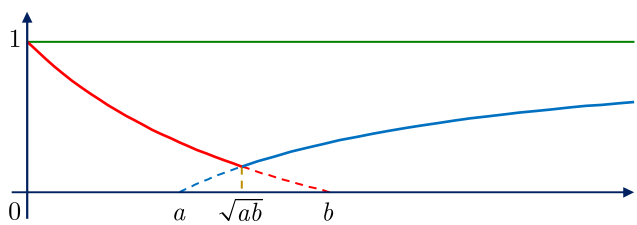
إذن

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{x-a}{x+a} - \frac{b-x}{b+x}\right) = \operatorname{sgn}(x - \sqrt{ab})$$

فإذا عرّفنا $\lambda_{a,b} = \sqrt{ab}$، كان

$$\varphi(a,b,x) = \begin{cases} \frac{x-a}{x+a} & : \quad \lambda_{a,b} \leq x \\ \frac{b-x}{b+x} & : \quad 0 < x \leq \lambda_{a,b} \end{cases}$$

وهكذا نستنتج أنّ $x \mapsto \varphi(a,b,x)$ متناقصٌ على $]0, \lambda_{a,b}]$ ومتزايدٌ على $[\lambda_{a,b}, +\infty[$. وله الرسم البياني الآتي:



ونجد بوجه خاص أنّ

$$\min_{x>0} \varphi(a,b,x) = \varphi\left(a,b,\sqrt{ab}\right) = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$$

I.2. وعليه إذا كانت المصفوفة B موجبة دون أن تكون معرّفة موجبة كان $\|\tilde{B}_r\|_2 = 1$ وكان من ثمّ

$$K_r = \|\tilde{A}_r\|_2 = \varphi(\lambda_-(A), \lambda_+(A), r)$$

وذلك بناءً على نتيجة الجزء الأوّل. وإذا استفدنا من نتيجة I.1. استنتجنا أنّ

$$\min_{r>0} K_r = K_{\sqrt{\lambda_-(A)\lambda_+(A)}} = \frac{\sqrt{\lambda_+(A)}-\sqrt{\lambda_-(A)}}{\sqrt{\lambda_+(A)}+\sqrt{\lambda_-(A)}}$$

II. لنتأمّل (a,b) من $\mathbb{R}^2$، حيث $b \geq a > 0$، و (c,d) من $\mathbb{R}^2$، حيث $d \geq c > 0$، ولنعرّف التابع

$$\psi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* : x \mapsto \varphi(a,b,x)\varphi(c,d,x)$$

II.1. نفترض أنّ $\lambda_{a,b} \leq \lambda_{c,d}$.

II.1.① التابع ψ يساوي جداء ضرب تابعين متناقصين موجبين على $]0, \lambda_{a,b}[$ فهو متناقصٌ على هذا المجال. وكذلك نرى أنّ التابع ψ يساوي جداء ضرب تابعين متزايدين موجبين على $]\lambda_{c,d}, +\infty[$ فهو متزايدٌ على هذا المجال. أمّا على المجال $]\lambda_{a,b}, \lambda_{c,d}[$ فنلاحظ أنّ

$$\forall x \in\,]\lambda_{a,b}, \lambda_{c,d}[, \quad \psi(x) = \frac{(x-a)(d-x)}{(x+a)(d+x)}$$

ولمّا كان

$$\forall x \in\,]\lambda_{a,b}, \lambda_{c,d}[, \quad \psi'(x) = 2\frac{(a+d)(ad-x^2)}{(x+a)^2(d+x)^2}$$

استنتجنا أنّنا أمام واحدة من الحالات الآتية :

- إذا كان $\sqrt{ad} \leq \lambda_{a,b}$ كان ψ متناقصاً على $[\lambda_{a,b}, \lambda_{c,d}]$ ومنه $\min_{x>0} \psi = \psi(\lambda_{c,d})$.
- إذا كان $\sqrt{ad} \geq \lambda_{c,d}$ كان ψ متزايداً على $[\lambda_{a,b}, \lambda_{c,d}]$ إذن $\min_{x>0} \psi = \psi(\lambda_{a,b})$.

▫ إذا كان $\lambda_{a,b} < \sqrt{ad} < \lambda_{c,d}$ كان ψ متزايداً على $[\lambda_{a,b}, \sqrt{ad}]$ ومتناقصاً على $[\sqrt{ad}, \lambda_{c,d}]$ ومن ثَمّ $\min_{x>0} \psi = \min\big(\psi(\lambda_{a,b}), \psi(\lambda_{c,d})\big)$.

والنتيجة، في جميع الأحوال لدينا

$$\min_{x>0} \psi = \min\big(\psi(\lambda_{a,b}), \psi(\lambda_{c,d})\big) = \min\big(h(\lambda_{a,b}), h(\lambda_{c,d})\big)$$

وقد عرّفنا $h(x) = \dfrac{x-a}{x+a} \cdot \dfrac{d-x}{d+x}$.

II.1.② ولكن لنلاحظ، في حالة $0 < x < y$، أنّ

$$h(y) - h(x) = \frac{(a+d)(y-x)(ad-xy)}{(x+a)(d+x)(y+a)(d+y)}$$

إذن ، في حالة $0 < x < y$، لدينا $h(x) < h(y) \Leftrightarrow xy < ad$.

II.1.③ بملاحظة أنّ $\lambda_{a,b}\lambda_{c,d} < ab$ يُكافئ $cb < ad$ نستنتج أنّ

$$\min_{x>0} \psi(x) = \begin{cases} h(\lambda_{a,b}) & : \quad cb < ad \\ h(\lambda_{c,d}) & : \quad cb \geq ad \end{cases}$$

II.2. في الحقيقة، تؤدّي الثنائيّتان (a,b) و (c,d) دورين متناظرين. فإذا افترضنا $\lambda_{c,d} \leq \lambda_{a,b}$ استنتجنا بتطبيق ما سبق أنّ

$$\min_{x>0} \psi(x) = \begin{cases} h(\lambda_{c,d}) & : \quad ad < cb \\ h(\lambda_{a,b}) & : \quad ad \geq cb \end{cases}$$

ولكنّ هذه هي النتيجة السابقة نفسها.

II.3. ولكن إذا لاحظنا أنّ

$$K_r = \varphi(\lambda_-(A), \lambda_+(A), r)\,\varphi(\lambda_-(B), \lambda_+(B), r)$$

استنتجنا أنّ قيمة r التي تجعل K_r أصغر ما يمكن هي $\sqrt{\lambda_-(A)\lambda_+(A)}$ في حالة $\lambda_-(A)\lambda_+(B) > \lambda_+(A)\lambda_-(B)$ وهي تساوي $\sqrt{\lambda_-(B)\lambda_+(B)}$ في حالة $\lambda_-(A)\lambda_+(B) \leq \lambda_+(A)\lambda_-(B)$.

III. **تطبيق عددي** : نتأمّل المصفوفتين المتناظرتين $A=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 8\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}13 & 12\\ 12 & 45\end{bmatrix}$. نجد بحساب بسيط أنّ $\lambda_+(A)=9$ و $\lambda\_(A)=4$، وكذلك $\lambda_+(B)=49$ و $\lambda\_(B)=9$. ولمّا كان من الواضح أنّ $\lambda\_(A)\lambda_+(B)>\lambda_+(A)\lambda\_(B)$ نستنتج أنّ K_r يبلغ أصغر قيمه عند $r=\sqrt{\lambda\_(A)\lambda_+(A)}=6$ وهذه القيمة تساوي $K_6=\dfrac{43}{275}$. ■

التمرين 36. لتكن $n\geq 2$، وليكن E_n الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ مزوداً بالجداء السلمي المألوف. في حالة θ من $]-1,1[$، نقول إنّ جملة الأشعة $(v_0,v_1,\ldots,v_n)$ من E_n تحقّق الخاصة $\mathcal{P}_\theta$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان

① $$\forall k\in\{0,\ldots,n\},\ \|v_k\|=1$$

② $$\forall(k,\ell)\in\{0,\ldots,n\}^2,\ k\neq\ell\Rightarrow\langle v_k,v_\ell\rangle=\theta$$

نهدف في هذه المسألة إلى إثبات أنّ الشرط اللازم والكافي لنجد جملة $(v_0,v_1,\ldots,v_n)$ من E_n تحقق الخاصة $\mathcal{P}_\theta$ هو أن يكون $\theta=-\dfrac{1}{n}$.

1. ليكن u من E_{n+1} عنصراً يحقق $\|u\|=1$، وليكن p_u من $\mathcal{L}(E_{n+1})$ التطبيق المعرّف بالعلاقة :

$$\forall x\in E_{n+1},\ p_u(x)=\langle u,x\rangle u$$

أثبت أنه يوجد أساس متعامد نظامي $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_{n+1})$ للفضاء E_{n+1}، يُحقّق $e_1=u$. اكتب P_u مصفوفة p_u بالنسبة إلى هذا الأساس واستنتج أنّ

$$\det(aI_{n+1}+bp_u)=a^n(a+b)$$

2. لنفترض أنه توجد جملة $(v_0,v_1,\ldots,v_n)$ من E_n تحقق الخاصة $\mathcal{P}_\theta$. نعرّف الشعاع

$$u=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\,{}^t[1,1,\ldots,1] \text{ من } E_{n+1}$$

اكتب P_u مصفوفة p_u بالنسبة إلى الأساس القانوني في E_{n+1}، واستنتج أنّ

$$\operatorname{Gram}(v_0,\ldots,v_n)=(1-\theta)\,I_{n+1}+(n+1)\theta\,P_u$$

احسب $\det(\operatorname{Gram}(v_0,\ldots,v_n))$ واستنتج أنّ $\theta=-\dfrac{1}{n}$.

3. وبالعكس، ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً متعامداً نظامياً للفضاء E_n. نضع $v_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} e_k$ وفي حالة k من $\mathbb{N}_n$ نعرّف $v_k = \alpha e_k - \beta v_0$. أثبت أنه يمكن تعيين α و β لتتحقق الخاصة $\mathcal{P}_{-1/n}$.

الحل

1. من الواضح أنّ p_u هو الإسقاط القائم على $\mathbb{R}u$. وإذا اخترنا أساساً متعامداً نظاميّاً $(e_2, \ldots, e_{n+1})$ للفضاء $\ker p_u = (\mathbb{R}u)^{\perp}$ ووضعنا $e_1 = u$ حصلنا على أساس متعامدٍ نظامي $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_{n+1})$ للفضاء E_{n+1}. وعندئذ تأخذ مصفوفة p_u بالنسبة إلى هذا الأساس الشكل الآتي

$$P_u = \mathrm{mat}(p_u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

وعليه

$$\mathrm{mat}(aI_{n+1} + bp_u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \left[\begin{array}{c|ccc} a+b & 0 & & 0 \\ \hline 0 & a & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & a \end{array}\right]$$

إذن

$$\det(aI_{n+1} + bp_u) = a^n(a+b).$$

2. لنفترض أنّه توجد جملة $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ من E_n تحقق الخاصة $\mathcal{P}_\theta$. نعرّف الشعاع

$$u = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\, {}^t[1, 1, \ldots, 1] \text{ من } E_{n+1}$$

وليكن $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+1})$ الأساس القانوني في E_{n+1} عندئذ نجد مباشرة أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}_{n+1}, \quad p_u(\varepsilon_k) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} u$$

ومنه

$$P_u = \operatorname{mat}(p_u, \mathcal{C}, \mathcal{C}) = \frac{1}{n+1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ومن ثَمّ

$$(1-\theta)I_{n+1} + (n+1)\theta P_u = \begin{bmatrix} 1 & \theta & \cdots & \theta \\ \theta & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \theta \\ \theta & \cdots & \theta & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Gram}\left(v_0, \ldots, v_n\right)$$

وعليه، بالاستناد إلى 1. نجد :

$$\det \operatorname{Gram}\left(v_0, \ldots, v_n\right) = (1-\theta)^n(n\theta + 1)$$

ولأنّ $(v_0, \ldots, v_n)$ جملة مرتبطة خطياً وجب أن يكون $\det \operatorname{Gram}(v_0, \ldots, v_n) = 0$، ولكن θ تنتمي إلى $]-1,1[$ إذن لا بُدّ أن يكون $\theta = -1/n$.

3. وبالعكس، ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً متعامداً نظامياً للفضاء E_n. نضع $v_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} e_k$ وفي حالة k من $\mathbb{N}_n$ نعرّف $v_k = \alpha e_k - \beta v_0$. عندئذ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} \langle v_k, v_\ell \rangle &= \langle \alpha e_k - \beta v_0, \alpha e_\ell - \beta v_0 \rangle \\ &= \alpha^2 \delta_{k\ell} - \alpha\beta\left(\langle e_k, v_0\rangle + \langle e_\ell, v_0\rangle\right) + \beta^2 \left\|v_0\right\|^2 \\ &= \alpha^2\delta_{k\ell} - \frac{2}{\sqrt{n}}\alpha\beta + \beta^2 \end{aligned}$$

نرغب بتعيين α و β ليتحقّق الشرطان :

$$-\frac{2}{\sqrt{n}}\alpha\beta + \beta^2 = -\frac{1}{n} \quad \text{و} \quad \alpha^2 - \frac{2}{\sqrt{n}}\alpha\beta + \beta^2 = 1$$

إذن يمكن أن نأخذ $\alpha = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ و $\beta = \frac{1+\sqrt{n+1}}{n}$ فتحقّق الجملة $(v_0, \ldots, v_n)$ الخاصة $\mathcal{P}_{-1/n}$. وبذا يتمّ إثبات المطلوب. ■

التمرين 37. لتكن $n \geq 2$، وليكن $\mathbb{R}^n$ الفضاء الإقليدي المألوف. نتأمّل $A_n = \left(a_{ij}\right)$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، إذ $a_{ij} = 1$ في حالة $|i-j| = 1$ أو $i = j = n$ و $a_{ij} = 0$ في بقية الحالات:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. أثبت أنه يوجد أساس متعامد نظامي $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ في $\mathbb{R}^n$ مكوّن من أشعة ذاتية للمصفوفة A_n.
2. لتكن θ من $]0, \pi[$، ولنضع $V(\theta) = {}^t[\sin\theta, \sin 2\theta, \ldots, \sin n\theta]$. أثبت أنّ

$$(\lambda = 2\cos\theta) \wedge (\sin(n+1)\theta = \sin n\theta) \Rightarrow A_n V(\theta) = \lambda V(\theta)$$

3. استنتج قيماً θ من $\mathbb{R}$ يكون عندها $V(\theta)$ شعاعاً ذاتياً للمصفوفة A_n.
4. أوجد $\mathrm{sp}(A_n)$، ثم أوجد أساساً متعامداً نظامياً $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ في $\mathbb{R}^n$ مكوّناً من أشعة ذاتية للمصفوفة A_n.
5. لتكن المصفوفة $B_n = 2I_n - A_n$. أثبت أنّ الجملة $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ مكوّنة من أشعة ذاتية للمصفوفة B_n وعيّن $\mathrm{sp}(B_n)$. ثُمّ بيّن أنّ المصفوفة B_n معرّفة موجبة.
6. نتأمّل المصفوفة $J_n = \left(b_{ij}\right)$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ المعرّفة بالصيغة $b_{j+1,j} = 1$ في حالة j من $\mathbb{N}_{n-1}$ و $b_{ij} = 0$ في بقية الحالات:

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ونضع $S_n = I_n - J_n$. أثبت أنّ $B_n = {}^tS_n S_n$، واستنتج، في حالة X من $\mathbb{R}^n$، المتراجحة :

$$2\sin\left(\frac{\pi}{2(2n+1)}\right) \cdot \|X\| \leq \|S_n X\| \leq 2\cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) \cdot \|X\|$$

7. لتكن $(x_k)_{k\geq 1}$ متتالية حقيقية تجعل المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ متقاربة. أثبت أنّ المتسلسلة $x_1^2+\sum_{k=1}^{\infty}(x_{k+1}-x_k)^2$ متقاربة أيضاً، وتتحقق المتراجحة :

$$x_1^2+\sum_{k=1}^{\infty}(x_{k+1}-x_k)^2 \leq 4\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

الحل

1. المصفوفة A_n مصفوفة متناظرة. إذن يوجد أساس متعامد نظامي $\mathcal{V}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ في $\mathbb{R}^n$ مكوّن من أشعة ذاتية للمصفوفة A_n.

2. لتكن θ من $]0,\pi[$، ولنضع $V(\theta)={}^t[\sin\theta,\sin 2\theta,\ldots,\sin n\theta]$. عندئذ تُكافئ المساواة

$$A_nV(\theta)=\lambda V(\theta)$$

جملة المعادلات

$$\begin{aligned}\sin(i-1)\theta+\sin(i+1)\theta &= \lambda\sin i\theta \quad : 1\leq i<n\\ \sin(n-1)\theta+\sin n\theta &= \lambda\sin n\theta\end{aligned}$$

وبملاحظة أنّ $\sin(i-1)\theta+\sin(i+1)\theta=2\sin i\theta\cos\theta$، نحصل على الجملة المُكافئة

$$\begin{aligned}(\lambda-2\cos\theta)\sin i\theta &= 0 \qquad : 1\leq i<n\\ (\lambda-2\cos\theta)\sin n\theta &= \sin n\theta-\sin(n+1)\theta\end{aligned}$$

وعليه

$$(\lambda=2\cos\theta)\wedge(\sin(n+1)\theta=\sin n\theta)\Rightarrow A_nV(\theta)=\lambda V(\theta)$$

3. وهكذا نرى أنّ $\lambda_k=2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}\right)$، في حالة k من $\mathbb{N}_n$، هي قيمة ذاتيّة للمصفوفة A_n وأنّ $V_k=V\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}\right)$ هو شعاع ذاتي للمصفوفة A_n موافق لهذه القيمة.

4. ولأنّ القيم الذاتيّة $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}_n}$ مختلفة مثنى مثنى استنتجنا أنّ $\mathrm{sp}(A_n)=\{\lambda_k : k\in\mathbb{N}_n\}$، وأنّ الجملة $(V_1,V_2,\ldots,V_n)$ تكوّن أساساً من الأشعّة الذاتيّة للمصفوفة A_n. ونستنتج من كون A_n متناظرة أنّ الجملة $(V_1,V_2,\ldots,V_n)$ متعامدة.

ولكن لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\left\|V(\theta)\right\|^2 &= \sum_{k=1}^{n}\sin^2 k\theta = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta \\ &= \frac{2n+1}{4} - \frac{1}{4}\sum_{k=-n}^{n} e^{2k\,\mathrm{i}\,\theta} \\ &= \frac{2n+1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{(2n+1)\,\mathrm{i}\,\theta} - e^{-(2n+1)\,\mathrm{i}\,\theta}}{e^{\mathrm{i}\,\theta} - e^{-\mathrm{i}\,\theta}} \\ &= \frac{2n+1}{4} - \frac{\sin(2n+1)\theta}{4\sin\theta}\end{aligned}$$

ومن ثَمّ في حالة $\theta = \theta_k = \frac{2k-1}{2n+1}\pi$ لدينا $\dfrac{\sin(2n+1)\theta_k}{\sin\theta_k} = 0$ إذن

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad \left\|V_k\right\|^2 = \frac{2n+1}{4}$$

فإذا عرّفنا $v_k = \dfrac{2}{\sqrt{2n+1}}V_k$ كانت الجملة $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ أساساً متعامداً نظاميّاً في $\mathbb{R}^n$ مكوّناً من أشعة ذاتية للمصفوفة A_n.

5. لتكن المصفوفة $B_n = 2I_n - A_n$. عندئذ ينتج من كون $\mathrm{sp}(A_n) = \{\lambda_k : k \in \mathbb{N}_n\}$ أنّ

$$\begin{aligned}\mathrm{sp}(B_n) &= \left\{2 - \lambda_k : k \in \mathbb{N}_n\right\} \\ &= \left\{2 - 2\cos\left(\tfrac{(2k-1)\pi}{2n+1}\right) : k \in \mathbb{N}_n\right\} \\ &= \left\{4\sin^2\left(\tfrac{2k-1}{2n+1}\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) : k \in \mathbb{N}_n\right\}\end{aligned}$$

وأنّ الجملة $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ هي أيضاً أساس مكوّن من الأشعة الذاتية للمصفوفة المتناظرة B_n. كما نستنتج من كون $\mathrm{sp}(B_n) \subset \mathbb{R}_+^*$ أنّ المصفوفة B_n معرّفة موجبة.

6. نتأمّل المصفوفة $J_n = (b_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ المعرّفة بالصيغة $b_{j+1,j} = 1$ في حالة $j \in \mathbb{N}_{n-1}$ و $b_{ij} = 0$ في بقية الحالات:

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ونضع $S_n = I_n - J_n$، عندئذ نتحقّق دون عناء أنّ $B_n = {}^tS_nS_n$. ولأنّ

$$\max \mathrm{sp}(B_n) = 4\sin^2\left(\tfrac{2n-1}{2n+1}\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) = 4\cos^2\left(\tfrac{\pi}{2n+1}\right)$$
$$\min \mathrm{sp}(B_n) = 4\sin^2\left(\tfrac{\pi}{2(2n+1)}\right)$$

وفي حالة X من $\mathbb{R}^n$ لدينا $\left\langle B_nX, X\right\rangle = \left\|S_nX\right\|^2$، وعليه مهما تكن X من $\mathbb{R}^n$ يكن

$$2\sin\frac{\pi}{2(2n+1)}\cdot\left\|X\right\| \le \left\|S_nX\right\| \le 2\cos\frac{\pi}{2n+1}\cdot\left\|X\right\|$$

وبوجه خاص لقد أثبتنا أنّ

$$\left\|S_n^{-1}\right\| = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{2(2n+1)}\right)} \quad \text{و} \quad \left\|S_n\right\| = 2\cos\frac{\pi}{2n+1}$$

.7 بتطبيق ما سبق على الشعاع $X = {}^t\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]$ والاستفادة من المتراجحة اليمنى ومن كون $\cos\frac{\pi}{2n+1} \le 1$ نجد

$$x_1^2 + \sum_{j=1}^{n-1}(x_{j+1} - x_j)^2 \le 4\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$$

ومنه إذا كانت المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ متقاربة، كانت كذلك المتسلسلة $x_1^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(x_{k+1} - x_k\right)^2$ وتحقّقت المتراجحة

$$x_1^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(x_{k+1} - x_k)^2 \le 4\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

وبذا يتمّ إثبات المطلوب. ∎

دليل مفردات الجزء الثاني

يشير الرقم إلى الصفحة التي يظهر فيها المفهوم المشار إليه ظهوراً معنوياً

مَسْرد المصطلحات العلميّة

Français	English	العربيّة

الألف

preuve par récurrence	proof by induction	الإثبات بالتدريج
trace	trace	أثر (تطبيق خطّي)
réunion	union	اجتماع (المجموعات)
base	basis	أساس
base duale	dual basis	الأساس الثنوي
projection	projection	إسقاط
projection orthogonale	orthogonal projection	إسقاط عمودي
minimum	minimum	أصغر عنصر
nombres réels	real numbers	الأعداد الحقيقيّة
nombres entiers relatifs	integers	الأعداد الصحيحة
nombres entiers naturels	natural integers	الأعداد الطبيعيّة
nombres rationnels	rational numbers	الأعداد العاديّة
nombres complexes	complex numbers	الأعداد العقديّة
maximum	maximum	أكبر عنصر

الباء

rest	remainder	باقي القسمة
dimension	dimension	بُعد (فضاء شعاعي)
structure algébrique	algebraic structure	بنية جبريّة
graphe	graph	بيان (علاقة)

Français	English	العربيّة

التاء

fonction polynomiale	polynomial function	تابع حدوديّ
fonction symétrique	symmetric function	تابع متناظر
permutation	permutation	تبديل
partition d'un ensemble	partition of a set	تجزئة مجموعة
homomorphisme	homomorphism	تشاكل
isomorphisme	isomorphism	تشاكل تقابلي
application	mapping	تطبيق
application linéaire	linear transformation	تطبيق خطّي
application surjective	surjective mapping	تطبيق غامر
application injective	injective mapping	تطبيق متباين
application croissante	non-decreasing mapping	تطبيق متزايد
application strictement croissante	increasing mapping	تطبيق متزايد تماماً
application décroissante	non-increasing mapping	تطبيق متناقص
application strictement décroissante	decreasing mapping	تطبيق متناقص تماماً
application monotone	monotonic mapping	تطبيق مطّرد
bijection	bijective mapping	تقابل
intersection	intersection	تقاطع
codimension	co-dimension	تمام البعد
extension de corps	field extension	توسيع حقل
extension simple de degré n	simple extension of degree n	توسيع بسيط من الدرجة n

الجيم

algèbre	Algebra	جبر
produit cartésien	Cartesian product	جداء ديكارتي
produit scalaire	inner product	جداء سلّمي

Français	English	العربيّة

الجيم

table de vérité	truth table	جدول الحقيقة
racine	root	جذر (كثير حدود)
racine multiple	multiple root	جذر مضاعف
partie imaginaire	imaginary part	الجزء التخيّلي (لعدد عقدي)
partie réelle	real part	الجزء الحقيقي (لعدد عقدي)
partie polaire	polar part	الجزء القطبيّ (لكسر عادي)
famille	family	جماعة
famille libre	linearly independent family	جماعة حرّة
famille génératrice	generating family	جماعة مولّدة
sytème linéaire	linear system	جملة معادلات خطيّة

الحاء

borne inférieure	greatest lower bound	الحد الأدنى
borne supérieure	least upper bound	الحد الأعلى
corps	division ring	حقل
corps commutatif	field	حقل تبديليّ
le corps des fractions rationnelles	the field of rational fractions	حقل الكسور العاديّة
corps fini	finite field	حقل منته
anneau	ring	حلقة
anneau commutatif	commutative ring	حلقة تبديليّة
anneau intègre	entire ring	حلقة تامّة
anneau principal	principal ideal ring	حلقة رئيسيّة
anneau euclidien	Euclidean ring	حلقة إقليديّة

الخاء

algorithme	algorithm	خوارزميّة

Français	English	العربيّة

الدال

degré	degree	درجة (كثير حدود)
k −cycle	k −cycle	دورة من المرتبة k

الراء

cardinal d'un ensemble	cardinality of a set	رئيس مجموعة
connecteur logique	logical connective	رابطة منطقيّة
connecteur d'implication	implication connective	رابطة الاقتضاء ($\Rightarrow$)
connecteur d'équivalence logique	logical equivalence connective	رابطة التكافؤ المنطقي ($\Leftrightarrow$)
connecteur disjonctif	disjunctive connective	رابطة الفصل ($\vee$)
connecteur de négation	negation connective	رابطة النفي ($\neg$)
connecteur conjonctif	conjunctive connective	رابطة الوصل ($\wedge$)
résidu	residue	راسب (قطب)
ordre d'un élément	order of an element	رتبة عنصر
ordre d'un groupe	order of a group	رتبة زمرة
rang	rank	رتبة (مصفوفة، تطبيق خطي)

الزاي

argument	argument	زاوية(عدد عقدي)
groupe	group	زمرة
groupe abelien	abelian group	زمرة تبديليّة
sous-groupe	subgroup	زمرة جزئيّة
groupe quotient	quotient group	زمرة خارج القسمة
groupe cyclique	cyclic group	زمرة دوّارة
groupe symétrique	symmetric group	الزمرة المتناظرة
groupe monogène	cyclic group	زمرة وحيدة التوليد

Français	English	العربيّة

الشين

vecteur	vector	شعاع
vecteur propre	eigenvector	شعاع ذاتي
vecteur orthogonaux	orthogonal vectors	أشعة متعامدة

الصاد

classe d'équivalence	equivalence class	صف تكافؤ
zéro d'un polynôme	zero of a polynomial	صفر كثير حدود
image directe	direct image	الصورة المباشرة
image réciproque	inverse image	الصورة العكسيّة

الطاء

analyse combinatoire	combinatorics	طرائق العدّ
module	module	طويلة (عدد عقديّ)
spectre	spectrum	طيف (تطبيق خطّي)

العين

nombre premier	prime number	عدد أوّلي
caracteristique	characteristic	العدد المميِّز
relation réflexive	reflexive relation	علاقة انعكاسيّة
relation antisymétrique	antisymmetric relation	علاقة تخالفيّة
relation d'ordre	partial order relation	علاقة ترتيب
relation d'ordre totale	total order relation	علاقة ترتيب كلّي
relation d'équivalence	equivalence relation	علاقة تكافؤ
relation symétrique	symmetric relation	علاقة تناظريّة
relation binaire	binary relation	علاقة ثنائيّة
élément	element	عنصر
deux éléments premiers entre eux	two coprime elements	عنصران أوليّان فيما بينهما
élément minimal	minimal element	عنصر أصغري

Français	English	العربيّة

العين

élément maximal	maximal element	عنصر أعظمي
élément neutre	unit element	عنصر حياديّ
élément irréductible	irreducible element	عنصر غير خزول
majorant	upper bound	عنصر راجح
minorant	lower bound	عنصر قاصر

الفاء

différence	difference	فرق (المجموعات)
différence symétrique	symmetric difference	الفرق التناظري
espace dual	dual space	الفضاء الثنوي
espace vectoriel muni d'un produit scalaire	inner product space	فضاء جداء سلّمي
espace vectoriel quotient	quotient vector space	فضاء خارج القسمة
sous espace propre	Eigen subspace	فضاء ذاتي
espace vectoriel	vector space	فضاء شعاعي
sous espace vectoriel	vector subspace	فضاء شعاعي جزئي

القاف

divisibilité	divisibility	قابليّة القسمة
diviseur plus grand commun	greatest common divisor	القاسم المشترك الأعظم
loi commutative	commutative law	قانون تبديلي
loi associative	associative law	قانون تجميعي
loi de composition	law of composition	قانون تشكيل
loi distributive	distributive law	قانون توزيعي
assertion logique	logical proposition	قضيّة منطقيّة
prédicat	predicate	قضيّة مفتوحة
pôle	pole	قطب (كسر عادي)

Français	English	العربيّة

الكاف

polynôme	polynomial	كثير حدود
polynôme caractéristique	characteristic polynomial	كثير حدود مميِّز
polynôme normalisé	normalized polynomial	كثير حدود نظامي
fraction rationnelle	rational fraction	كسر عادي

الميم

idéal	ideal	مثالي
idéal maximal	maximal ideal	مثالي أعظمي
idéal premier	prime ideal	مثالي أوّلي
idéal principal	principal ideal	مثالي رئيسي
somme directe	direct sum	مجموع مباشر
ensemble	set	مجموعة
sous-ensemble	subset	مجموعة جزئيّة
ensemble vide	empty set	المجموعة الخالية
ensemble ordonné	ordered set	مجموعة مرتّبة
ensemble totalement ordonné	totally ordered set	مجموعة مرتّبة كلّياً
ensemble infini	infinite set	مجموعة غير منتهية
ensemble fini	finite set	مجموعة منتهية
determinant	determinant	محدّد
conjugué	conjugate	مرافق(عدد عقدي)
ensemble d'arrivé	domain of arrival	مستقر
plan	plan	مستو
hyperplan	hyperplan	مستوي فوقي
matrice	matrix	مصفوفة

Français	English	العربيّة

الميم

matrice antisymétrique	antisymmetric matrix	مصفوفة تخالفيّة
matrice diagonale	diagonal matrix	مصفوفة قطريّة
matrice symétrique	symmetric matrix	مصفوفة متناظرة
matrice triangulaire supérieure	upper triangular matrix	مصفوفة مثلثيّة عليا
matrice triangulaire inférieure	lower triangular matrix	مصفوفة مثلثيّة سفلى
plus petit commun multiple	least common multiple	مضاعف مشترك أصغر
inverse	inverse	مقلوب
quantificateur universel	universal quantifier	مكمّم الشمول
quantificateur existentiel	existential quantifier	مكمّم الوجود
transposition	transposition	مناقلة
logic mathématique	mathematical logic	المنطق الرياضي
ensemble de départ	domain of departure	منطلق
transposé	transpose	منقول

النون

symétrique d'un élément	symmetric of an element	نظير عنصر

مراجع الكتاب

1. “*Cours de Mathématiques Spéciales, I,II.*”,
   E. RAMIS & C. DESCHAMPS & J. ODOUX, Masson, 1979.

2. “*Cours de Mathématiques du Premier Cycle*”,
   J. DIXIMIER, Gautier-Villars, 1977.

3. “*Cours de Mathématiques, Algèbre*”,
   J.M. ARNQUDIES, H. FRQYSSE, Dunod Université, 1986.

4. “*Analyse Linéaire dans les espaces de dimension finie*”,
   I. GLAZMAN, Y. LIUBITCH, Mir Publishers, Moscow 1974.

5. “*Algebra*”,
   S. LANG, Addison Wesley, 1971.

6. “*Modern Applied Algebra*”,
   G. BIRKHOFF & T. C. BARTEE, McGraw-Hill, 1970.

7. “*Introduction to Finite Fields and Their Applications*”,
   R. LIDL & H. NIEDERREITER, Revised edition, Cambridge University Press, 1994.

8. “*Error-Correcting Codes*”,
   W. W. PETERSON & E. J. WELDON, JR., Second edition, MIT Press, 1972.

احتلَّ الدكتور عمران قوبا المركز الثاني في مسابقة انتقاء أساتذة التعليم العالي على مستوى الجمهورية الفرنسية "أغرغاسيون" في عام 1985، وحصل على شهادة الدكتوراه في الرياضيات البحتة في اختصاص التحليل التابعي من جامعة بيير وماري كوري في باريس عام 1990.

يدرّس الدكتور قوبا الرياضيات في المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا منذ عام 1990. وقد وضع في هذه السلسلة من الكتب العلميّة أغلب الموضوعات التي درّسها في المعهد العالي في مجالات الجبر العام، والجبر الخطّي، والتحليل، والمعادلات التفاضلية، والتحليل العقدي، والتحويلات التكامليَّة وغيرها، وقد أغنى السلسلة بالعديد من الأمثلة والتطبيقات والمسائل والتمرينات.

تمثّل هذه السلسلة أداة مهمّة لكلِّ الراغبين في دراسة الرياضيّات بصفتها علماً وفنّاً قائمَيْن بذاتهما، أو لأولئك الراغبين في استعمال الرياضيّات بصفتها أداة مهمّة ومفيدة في جميع العلوم الحديثة.

في هذا الجزء الثاني من سلسلة الجبر، يتابع القارئ ما بدأه في الجزء الأوّل فيدرس الفضاءات الشعاعيّة، والتطبيقات الخطيّة، والمصفوفات، والمحدِّدات، وجمل المعادلات الخطيّة، واختزال التطبيقات الخطيّة وفضاءات الجداء السلمي.

ISBN 978-9933-9228-1-8
9 789933 922818
المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا
Higher Institute for Applied Sciences and Technology
www.hiast.edu.sy