

الدكتور موفق دعبول

استاذ في كلية العلوم
جامعة دمشق

نظريّة المعادلات

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لجامعة دمشق

المقدّمة

إن هذا الكتاب هو نتيجة للمحاضرات التي أقيمت في مقرر نظرية المعادلات على طلاب السنة الرابعة في كلية العلوم بجامعة دمشق خلال السنوات الخمس الأخيرة ، وقد تم اعداده بحيث يكون منسجماً مع منهاج هذا المقرر كما أقره مجلس التعليم العالي في مطلع عام ١٩٨٤ .

إن الموضوع الرئيسي في هذا الكتاب هو نظرية المعادلات التفاضلية العادية ، لذلك فهو يعتبر تمة لكتابي المعادلات التفاضلية المقررين لطلاب السنة الثانية في كلية العلوم .

يفترض في القارئ هذا الكتاب أن يكون مطلعاً على مبادئ التحليل الرياضي وعلى نظرية الدوال العقدية (وبشكل خاص على الابحاث المتعلقة بالتابع المولومورفية والنقط الشاذة والتمديد التحليلي) ، إضافة الى المعلومات الأساسية في مكامه المعادلات التفاضلية العادية .

ولما كانت أحدث الطرق في اثبات نظريات الوجود والوحدانية تعتمد على نظرية النقطة الثابتة في التحليل الدالي ، فإني وجدت من المناسب تصدير الفصل

الأول بمحدث موجز حول فضاء باناخ وصولاً إلى هذه النظرية الهامة من نظريات التحليل الدالي .

ونلاحظ في دراسة المعادلات التفاضلية الخطية في الفصل الثاني أن المتفسير والدالة عقديان ، رغم أن المعادلات التفاضلية التي نصادفها في التطبيقات تعالج دوالاً حقيقية بمتغيرات حقيقية . إن سبب هذا التوسع هو أن يكون بمقدورنا الاستفادة من العديد من أفكار نظرية الدوال مثل نقط التفرع والتمديد التحليلي والتكاملات الهيظية ، الأمر الذي يجعل الإبراهيم مختصرة ومتطورة .

وكانت تطبيقاتنا في هذا الفصل مناسبة بالدرجة الأولى على المعادلات التفاضلية الهامة في الفيزياء مثل معادلة غوص ومعادلة لوجاندر ومعادلة بسل ، هذه المعادلات التي تخضع لها ظواهر فيزيائية عديدة وهامة .

وحيث أن هذا الكتاب الجامعي قد وضع ليلقى على الطلاب خلال فترة زمنية معينة (أربع محاضرات اسبوعية في فصل دراسي واحد فإن المعالجة في بعض فصوله وخاصة في الفصلين الثالث والأخير جاءت مختصرة . إن معالجة قامة لاجبات هذا الفصل تخرج بنا عن المنهج المقرر ، ومن الصعب جداً تغطيتها في الوقت المخصص له . وما جاء في الفصل الأخير من بحث في المعادلات التكاملية الخطية إنما يهدف فقط إلى تعريف القارئ بهذه المعادلات ومجاولها في حالات بسيطة ، ولا بد من يرغب بمعالجة شاملة للموضوع أن يعود إلى كتب أخرى متخصصة في المعادلات التكاملية .

وأخيراً أود أن أشير إلى أن هذا الكتاب هو محاولتي الأولى في الكتابة

في موضوع نظرية المعادلات ، ولذلك فيأني أكون شديد الامتنان إلى زملائي الأعزاء من اساتذة وطلاب ، الذين يتكرمون بتقديم ملاحظاتهم حول ما جاء فيه . ان هذه الملاحظات ستكون عوناً لي عند اعادة طبعه إذا استمرت الحاجة اليه .

المؤلف

★ ★ ★

منهج مقرر نظرية المعادلات

- ١ - نظرية الوجود والوحدانية للمعادلات التفاضلية .
- ٢ - المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية ، الحل في جوار نقطة منتظمة وفي جوار نقطة ساذة منتظمة ، تمثيل الحلول بتكاملات محيطية ، النشر المقارب ، تطبيقات في المعادلة فوق الهندسية ، معادلة لوجاندر ، معادلة بسل .
- ٣ - النظرية الوصفية للمعادلات التفاضلية غير الخطية .
- ٤ - مسائل القيم الحدية والقيم الذاتية ، استقرار الحلول .
- ٥ - لحة في المعادلات التكاملية ، معادلة فريدهولم ومعادلة فولتيرا

الفصل الأول

مبرهنة وجود العنصر ووحدانيته

١ - مقدمة في التحليل العددي :

ان بعض المفاهيم العامة التي ترد في ابحاث التحليل الدالي ، يمكن أن تساعد في معالجة العديد من مسائل نظرية المعادلات التفاضلية بشكل يوفر الجهد والتعب . وقبل استخدام بعض طرق التحليل الدالي في معالجة مبرهنات الوجود والوحدانية لحلول المعادلات التفاضلية سنتعرض بشكل سريع إلى فضاء باناخ .

(١-١) الفضاء الخطي : نقول عن مجموعة $L = \{ a, b, c, \dots \}$ انها فضاء خطي (أو فضاء متجهي خطي أو فضاء متجهي) إذا عرفنا في L عملية جمع وعملية ضرب بسليات ، يمكن أن تكون أعداداً حقيقية أو عقدية (نعني بهذا اننا نقابل كل زوج a, b من عناصر L بعنصر وحيد $a + b$ من L كما نقابل كل عنصر a من L وعدد λ بعنصر وحيد λa من L أيضاً ، على أن تخضع هاتان العمليتان إلى القواعد التالية :

(١) L هي زمرة تبادلية فيما يتعلق بعملية الجمع . فإذا رمزنا للعنصر الحادي ب θ ولنظير a ب $-a$ فإنه ، مهما كانت العناصر a, b, c من L ، يكون :

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a + b = b + a$$

$$a + \theta = a$$

$$a + (-a) = 0$$

أما الضرب بعمليات فإنه يحقق ، مهما كان العنصران a, b من L ومهما كان العددان λ, μ ، القواعد التالية :

$$\lambda (a+b) = \lambda a + \lambda b$$

$$(\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$$

$$\lambda (\mu a) = (\lambda \mu) a$$

$$1 \cdot a = a$$

ونصف الفضاء الخطي بأنه حقيقي أو عقدي حسبما تكون العمليات λ, μ, \dots من حقل الأعداد الحقيقية أو من حقل الأعداد العقدية .

ونقول عن جزء غير خال من L أنه فضاء جزئي (خطي) من L فيما إذا شكل (مع عمليتي الجمع والضرب بعمليات) فضاء خطياً كذلك .

(١-٢) الفضاء المنظم : ليكن L فضاء خطياً حقيقياً أو عقدياً . نقول عن L أنه فضاء خطي منظم إذا ارفقنا بكل عنصر a من L عدداً حقيقياً غير سالب $\|a\|$ ، نسميه نظيم a ، بحيث يتحقق مايلي .

$$\|a\| = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$$

$$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad (\text{متباينة المثلث})$$

ويقال أحياناً أن الفضاء L منظم بـ $\|\cdot\|$.

سنحتاج فيما بعد إلى النتيجتين البسيطتين التاليتين :

$$\|x_1 + \dots + x_n\| \leq \|x_1\| + \dots + \|x_n\| \quad (1)$$

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \quad (2)$$

التي يمكن استخراجها بسهولة من متباينة المثلث .

لذلك ان النظم يعرف مسافة $\rho(x, y) = \|x - y\|$ بالخصائص التالية :

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) > 0 \quad x \neq y$$

$$\rho(x, x) = 0$$

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \text{متباينة المثلث}$$

وهكذا نرى أن كل فضاء منظم هو أيضاً فضاء ممتري . وعلى هذا يمكننا أن ننقل بسهولة من الفضاءات المترية إلى الفضاءات المنظمة تلك المصطلحات مثل : جوار ، نقطة داخلية ، نقطة محيطة ، مجموعة مغلقة ، مجموعة مفتوحة ...

(١-٣) أمثلة (أ) الفضاء الاقليدي \mathbb{R}^n . نفهم من ذلك مجموعة العناصر :

$$a = (a_1, \dots, a_n) = (a_i) \quad a_i \in \mathbb{R}$$

التي نعرف عليها عملية الجمع والضرب بسلمية حقيقية λ :-

$$a + b = (a_i + b_i) \quad \lambda a = (\lambda a_i)$$

يمكن تنظيم \mathbb{R}^n بأشكال مختلفة مثل :

$$|a|_2 = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \quad \text{مسافة اقليدس}$$

$$|a|_1 = |a_1| + \dots + |a_n|$$

$$|a|_\infty = \max |a_i|$$

منشير الى عناصر \mathbb{R}^n فيما يلي بخط غامق والى نظائهم \mathbb{R}^n بخطي القيمة المطلقة فقط .

(ب) الفضاء العقدي، ذي البعد n ، \mathbb{C}^n . ونعرفه كما عرفنا \mathbb{R}^n على أن تكون a_1 و λ عقديّة . ومسافة اقليدس تأخذ الشكل :

$$\|a\|_2 = \sqrt{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2}$$

(ج) ليكن G جزءاً متراصاً من \mathbb{R}^n ، وليكن $C(G)$ مجموعة جميع الدوال المستمرة على G التي تأخذ قيمها في \mathbb{R} : $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$. ولنعرف الجمع $h = f + g$ بالشكل :

$$h(x) = f(x) + g(x) \quad \forall f, g \in C(G)$$

والضرب بسلمية حقيقية λ بالشكل :

$$k(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall f \in C(G)$$

وأما التنظيم فيمكننا أن نختاره على النحو :

$$\|f\|_0 = \max \{ |f(x)| : x \in G \} \quad \text{نظيم القيمة العظمى}$$

أو على النحو :

$$\|f\|_1 = \sup \{ |f(x)| p(x) : x \in G \} \quad \text{نظيم القيمة العظمى المهيئة}$$

يفرض أن $p(x)$ دالة معينة مفروضة وأن $0 < \alpha \leq p(x) \leq \beta < \infty$

(د) يستخدم المثال الأخير في دراسة المعادلات التفاضلية في العقدية . فإذا كانت G

منطقة في المستوى العقدي \mathbb{C} وكانت $H_0(G)$ مجموعة الدوال التحليلية على G

والحدودة $u(z) : G \rightarrow \mathbb{C}$. وإذا فرضنا $p(z)$ دالة معرفة على G وذات قيم

حقيقية وأن $0 < \alpha \leq p(z) \leq \beta$ حيث يكون α و β ثابتين موجبين مناسبين ،

فإن :

$$\|u\| = \sup |u(z)| p(z)$$

هو نظيم في $H_0(G)$.

يمكن في جميع هذه الأمثلة التحقق من صحة شروط النظيم بسهولة .

(١-٤) فضاء باناخ: فضاء باناخ هو فضاء خطي منظم تام ، فهو إذن مجموعة مع الخصائص الواردة في (١-١ ، ٢) ، مضافاً لذلك : كل متتالية كوشية من عناصر L هي متتالية متقاربة في L (وذلك بفرض أن المسافة معرفة بالنظيم ، ولذلك فإن هذا التقارب يوصف بأنه تقارب نظيمي) .

ان المثالين الواردان في (آ) و (ح) من (١-٣) يعطياننا مثالين لفضاهي باناخ حقيقيين ، أما المثالان الواردان في (ب) و (د) فيقدمان فضاهي باناخ عقديين . وخاصة التام في المثالين الأول والثاني فتنشأ عن كون كل من فضاء الأعداد الحقيقية وفضاء الأعداد العقدية تاماً .

أما إذا أخذنا في المثال الثالث نظيم القيمة العظمى $\|f\|_0$ فعندئذ يكون التقارب النظيمي لا يختلف عن التقارب المنتظم في G . وفي الواقع إذا كانت (f_n) متتالية كوشية فإن $\|f_n - f_m\|_0 < \epsilon$ عندما $m, n \geq n_0$ لا تختلف عن :

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad m, n \geq n_0, \quad \forall x \in G \quad (*)$$

وعندئذ ينتج التام من المبرهنة المشهورة وهي أن نهاية متتالية متقاربة بانتظام لدوال مستمرة هي مجد ذاتها دالة مستمرة وعلى هذا فهناك دالة f مستمرة على G بحيث يكون $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ بانتظام في G وإذا تركنا x و n ثابتين وجعلنا في $(*)$ $m \rightarrow \infty$ فإننا نجد :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad n \geq n_0 \quad x \in G$$

ومنه $\|f_n - f\|_0 < \epsilon$ عندما $n \geq n_0$. وهذا نجد أن $f_n \rightarrow f$ نظيمياً ، وهذا يعني أن $C(G)$ تام .

وبهذا الاسلوب نجد ان النتيجة تبقى صحيحة في حالة النظم $\|f\|$. وذلك
لأنه إذا كان $0 < \alpha \leq p(x) \leq \beta$ فإن :

$$\alpha \|f\|_0 \leq \|f\|_1 \leq \beta \|f\|_0$$

فالنظمان اذن متكافئان . وهذا يعني أن التقارب وفق نظم القيمة العظمى
يحدث إذا وإذا فقط حدث التقارب وفق النظم $\| \cdot \|_0$.

ويمكن أيضاً بشكل مماثل اثبات التام في المثال (د) انما باستخدام البرهنة التي
تقول ان نهاية متتالية الدوال التحليلية المتقاربة بانتظام هي دالة تحليلية أيضاً .

(١ - ٥) المؤثرات والعاليات ، الاستمرار وشرط ليبشتر :

ليكن E, F فضاءين منظمين حقيقيين أو عقديين وليكن D جزءاً من E
ولتكن $T : D \rightarrow F$ دالة . لقد جرت العادة على تسمية مثل هذه الدالة مؤثراً .
وإذا كان $F = \mathbb{C}$ أو $F = \mathbb{R}$ فلقد جرت العادة على تسمية مثل هذا المؤثر دالياً .

ونقول عن مؤثر $T : D \rightarrow F$ انه خطي فيما إذا كان D فضاء خطياً جزئياً
من E وكان $T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$ وذلك مهما كان x, y من
 D ومهما كان λ, μ من \mathbb{R} أو من \mathbb{C} .

هذا وكثيراً ما نكتب Tx بدلاً من $T(x)$.

نقول عن المؤثر $T : D \rightarrow F$ انه مستمر في الموضع x_0 من D إذا كان :

$$x_n \in D \quad x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx_0$$

وهذا يكافئ مايلي : مهما كان العدد الموجب ϵ فإنه يوجد عدد موجب δ
بحيث يكون $\|Tx - Tx_0\| < \epsilon$ وذلك عندما يكون $\|x - x_0\| < \delta$ وبفرض
أن x من D .

ونقول عن مؤثر T انه يحقق في D شرط ليشتز فيما إذا وجدت ثابتة k تسمى ثابتة ليشتز بحيث يكون :

$$\|Tx - Ty\| \leq k \|x - y\| \quad x, y \in D \quad (3)$$

ويمكن للمرء أن يلاحظ بسهولة أن مثل هذا المؤثر مستمر في D .
 لنلاحظ أننا استخدمنا في (3) النظمين E و F رغم أننا استخدمنا لهما الرمز ذاته ، وذلك لأننا سنأخذ في تطبيقاتنا $E = F$ على الأغلب .

ملاحظات : إذا حقق T شرط ليشتز فإنه يوجد دائماً ثابتة ليشتز صغرى .
 لأنه إذا كانت k_0 الحد الأدنى لجميع الأعداد k التي تصح لأجلها (3) (وذلك
 مها كان x و y من D) فإن (3) تصح كذلك لأجل x و y ثابتة عندما نضع k_0
 بدلاً من k .

وإذا كان T خطياً فمن الممكن ان يقتصر المرء في (3) على الحالة $y = 0$
 لأنه ينتج من (3) أن :

$$\|Tx\| \leq k \|x\| \quad x \in D \quad (3')$$

وتسمى ثابتة ليشتز الصغرى في هذه الحالة « نظم T » ويرمز لها بـ $\|T\|$.

(٦-١) امثله : (أ) إذا كان $E = F = \mathbb{R}$ فإن المؤثر T هو الدالة الحقيقية

التغير حقيقي .

(ب) ليكن $D = E = C(J)$ وذلك بفرض أن $J = [a, b]$ وأن $F = \mathbb{R}$ وليكن :

$$Tf = \int_a^b f(t) dt$$

ومن الواضح أن T دالي خطي يحقق شرط ليبشتز (3) بثابتة $k = b - a$ ، وذلك عندما نأخذ القيمة المطلقة نظيماً في \mathbb{R} ونأخذ في E نظم القيمة العظمى .

(>) ليكن $D = E = F = C(J)$ وليكن :

$$(Tf)(x) = \int_a^x f(t) dt$$

إن المؤثر T خطي ويحقق شرط ليبشتز (3) بثابتة $k = b - a$ وذلك بفرض أن النظم هو نظم القيمة العظمى . أما إذا كان النظم هو نظم القيمة العظمى الهامة بفرض أن $p(x) = e^{-x}$ فإن $k = 1 - e^{-(b-a)}$.

(د) لننظر في الدالي $Tx = \|x\|$ من E إلى \mathbb{R} . ينتج من (2) مباشرة أن شرط ليبشتز يحقق بفرض أن $k = 1$

وعلى هذا فإننا نرى أن النظم في E هو دالي مستمر ، بل ويحقق شرط ليبشتز بثابتة $k = 1$.

(٧-١) الأسلوب التكراري في فضاءات باناخ : إن العديد من مسائل الوجود في التحليل بما في ذلك ، كما سنرى ، مسألة وجود الحـل للمعادلات التفاضلية العادية ، يمكن أن يوضع في فضاء باناخ B مناسب ، على شكل معادلة من النمط :

$$x = Tx \quad (4)$$

وذلك بفرض أن T مؤثر من D إلى B وحيث أن D جزء من B . نسمي كل حل لـ (4) نقطة ثابتة لـ T . أي أن هذا الحل هو نقطة تبقى بالتعاسة . $x \rightarrow Tx$ ثابتة .

والحصول على نقطة ثابتة نستعمل غالباً أسلوباً تكرارياً نسميه عادة أسلوب

التقريب المتتالي ، نطلق فيه من عنصر x_0 من D ثم نشكل على التتالي العناصر:

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \dots, x_{n+1} = Tx_n, \dots \quad (5)$$

والسؤال الأساسي هو : متى تتقارب هذه المتتالية إلى حل للمعادلة (4) .
إن الجواب على هذا السؤال مجده في المبرهنة التالية :

(1-8) **مبرهنة النقطة الثابتة** : لنكن D مجموعة غير خالية ومغلقة وجزئية من فضاء باناخ B . وليكن المؤثر $T: D \rightarrow D$ ، أي $T(D) \subset D$ ، ولنفرض أن هذا المؤثر يحقق في D شرط ليبشتر بثابتة $k < 1$ أي :

$$\|Tx - Ty\| \leq k \|x - y\| \quad x, y \in D \quad (3)$$

عندئذ يكون للمعادلة (4) حل وحيد \bar{x} في D . وإذا شكل المرء انطلاقاً من عنصر x_0 من D التقريبات المتتالية x_n وفق (5) ، فعندئذ يصح :

$$\|\bar{x} - x_0\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\| \quad (6)$$

وبشكل خاص تتقارب المتتالية (x_n) نحو \bar{x} نظيمياً .

البرهان : إن الطلب الأخير واضح لأن $k^n \rightarrow 0$. كذلك يمكننا أن نثبت بسهولة أن حل المعادلة (4) وحيد اعتماداً على (3) . فإذا فرضنا $x = Tx$ و $y = Ty$ فعندئذ يكون :

$$\|x - y\| \leq k \|x - y\| \quad k < 1$$

ولكن هذه المتباينة لاتصح إلا إذا كان $\|x - y\| = 0$ ، أي إذا كان $x = y$.

لنلاحظ بعد ذلك انه طالما $T(D) \subset D$ فإنه إذا كان $x_n \in D$ فإن $x_{n+1} \in D$ وبالتالي فإنه يمكن انشاء المتتالية (x_n) استناداً إلى (5) . ان هذه المتتالية تقع في D .

لنبرهن بعد ذلك :

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\| \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

إن هذه المتباينة صحيحة لأجل $n=0$. لنفرض انها صحيحة لأجل الدليل n ونثبت صحتها لأجل الدليل $n+1$. نلاحظ في سبيل ذلك وبالإعتماد على (3) أن

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| = \|Tx_{n+1} - Tx_n\| \leq k \|x_{n+1} - x_n\| \leq k^{n+1} \|x_1 - x_0\|$$

وهذا يعني أن (7) صحيحة لأجل الدليل $n+1$.

وبالإعتماد على (7) وعلى متباينة المثلث (1) ، وبفرض أن $p > 0$ نجد :

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \|(x_{n+1} - x_n) + (x_{n+2} - x_{n+1}) + \dots + (x_{n+p} - x_{n+p-1})\|$$

$$\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_{n+2} - x_{n+1}\| + \dots + \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\|$$

$$\leq (k^n + k^{n+1} + \dots + k^{n+p-1}) \|x_1 - x_0\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|$$

إذن :

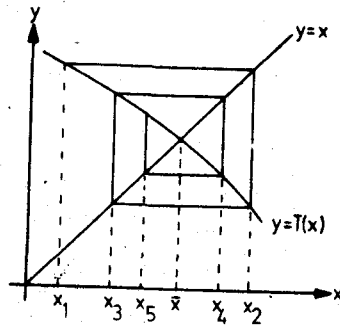
$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq c k^n \quad ; \quad c = \frac{\|x_1 - x_0\|}{1-k} \quad (n, p \geq 0) \quad (8)$$

فالمتتالية (x_n) هي كوشية ولها ، استناداً إلى خاصة التمام في فضاء باناخ ، نهاية \bar{x} في B وبالانتقال إلى النهايات في (8) يجعل n ثابتة و $p \rightarrow \infty$ ، فإننا نحصل ، بعد ملاحظة أن النظم مستمر ، على المتباينة (6) . ولما كانت D مغلقة فإن $\bar{x} \in D$.

واخيراً نرى أن \bar{x} نقطة ثابتة لـ T بملاحظة أن T مستمر . ذلك لأنه من $x_n \rightarrow \bar{x}$ ينتج من جهة أن $Tx_n \rightarrow T\bar{x}$ ، وينتج من جهة أخرى أن $Tx_n - x_{n+1} \rightarrow \bar{x} - T\bar{x}$ أي أن $\bar{x} = T\bar{x}$ وهو المطلوب .

(٩-١) ملاحظات (\bar{A}) في الحالة الخاصة $B = \mathbb{R}$ يكون من السهل تتبع الأسلوب التكراري . لنفرض لأجل ذلك أن T دالة حقيقية لمتغير حقيقي x ، وأنها مثلاً معرفة في فترة $D = [a, b]$. عندئذ يكون استناداً إلى الفرض $T(D) \subset D$ أن $a \leq T(x) \leq b$ مهما كانت x من D . وأما شرط ليبشترز (3) فلا يختلف في هذه الحالة عن :

$$\left| \frac{T(x) - T(y)}{x - y} \right| \leq k < 1$$



الأسلوب التكراري في الحالة $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

فإذا فرضنا أن T مشتقاً مستمراً على D فعندئذ يكون شرط ليبشترز الأخير مكافئاً للشرط $|T'(x)| \leq k$ في D . ويقابل الحل \bar{x} للمعادلة $x = T(x)$ هندسياً فصل نقطة تقاطع المستقيم المعروف بـ $y = x$ مع المنحني المعروف بـ $y = T(x)$. وإذا نظرنا في الحالات $-1 < T'(x) < 1$ و $T'(x) \geq 1$ و $T'(x) \leq -1$ فإننا نلاحظ هندسياً أن أسلوب التقريب المتتالي يتقارب في الحالة

الأولى في حين يتباعد في الحالتين الثانية والثالثة .

(ب) إذا حققت الدالة T شرط ليبشتر (3) بفرض أن $k < 1$ فإن هذا يعني هندسياً أن المسافة بين الصورتين Tx و Ty أصغر من النقطتين x و y . يقال عن مثل هذه الدوال أنها تقاصية وعلى هذا فإن المبرهنة (1-8) تبحث في مبرهنة النقطة الثابتة في التطبيقات التقاصية

تعاريف : (آ) لتكن $M \subset \mathbb{R}^n$ مجموعة كيفية ولتكن $P: M \rightarrow \mathbb{R}$ دالة موجبة ومستمرة ، وليكن $C(M)$ فضاء خطياً حقيقياً أو عقدياً للدوال المستمرة $M \rightarrow \mathbb{R}$ أو $M \rightarrow \mathbb{C}$. أثبت أن المجموعة الجزئية $C(M, P)$ لجميع الدوال $f \in C(M)$ التي يكون فيها :

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)| P(x) \mid x \in M \}$$

منتهاً تشكل مع هذا التنظيم فضاء باناخ حقيقياً أو عقدياً .

ارشاد : ان كل متتالية كوشية بخصوص هذا التنظيم تكون متقاربة بانتظام موضعياً ، أي أنه يوجد لكل نقطة x من M جوار $U(x)$ بحيث يصح في الجوار $U(x) \cap M$ التقارب المنتظم . وعلى المرء أن لايفوته . الاثبات أن $C(M, P)$ فضاء خطي ولاحظ أن هذه المبرهنة لا تكون صحيحة إذا كان ل P مواضع صفرية . انظر (ب) .

(ب) ليكن L فضاء الدوال f لتغير حقيقي x والمستمرة على $0 \leq x \leq 1$ لنفرض أن $\|f\| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$. اثبت أننا بذلك نكون قد عرفنا نظماً ، ولكن L غير تام .

ارشاد : ادرس المتتالية f_n المعرفة ب :

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \quad \frac{1}{n} < x < 1$$

$$f_n(x) = n \quad 0 \leq x < \frac{1}{n}$$

(٥) لتكن $C(M, P)$ فضاء باناخ المعروف بـ (A) ولتكن ϕ, ψ دالتين معرفتين على M بقيم حقيقية وأن $\phi(x) \leq \psi(x)$. اثبت أن مجموعة جميع $f \in C(M, P)$ بحيث يكون $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ منها كان x من M مغلقة.

(د) لتعرف في $C(J)$ ، بفرض أن $J = [0, a]$ ، النظام الثلاثة :

نظم القيمة العظمى $\|f\|_0$ والنظيمين :

$$\|f\|_1 = \max_J |f(x)| e^{-x^2} \quad \|f\|_2 = \max_J |f(x)| e^{-x^2}$$

وليكن المؤثر T المعروف بـ :

$$(Tf)(x) = \int_0^x t f(t) dt$$

احسب لأجل هذا المؤثر النظام $\|T\|_0, \|T\|_1, \|T\|_2$.

(هـ) اثبت أن للمعادلة التكاملية :

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 + \int_0^x t y(t) dt, \quad x \in J = [0, a]$$

حلاً وحيداً فقط وعين هذا الحل بطريقتين : الأولى بالعودة إلى مسألة قيم

ابتدائية والثانية بحساب صريح للتقريب المتتالية وذلك باستخدام (د) مبتدئاً بـ $y_0 = 0$

(و) لتعرف في مجموعة الدوال القابلة للاشتقاق باستمرار مرة واحدة على

J ، بفرض أن $J = [a, b]$ ، نظم القيمة العظمى $\|f\|_0$ و

$\|f\|_1 = \|f\|_0 + \|f'\|_0$. اثبت أن هذا الفضاء مع النظم $\| \cdot \|_0$ هو فضاء باناخ

ولكنه مع التنظيم $\| \cdot \|$ لايشكل فضاء باناخ .

٢- مبرهنة الوجود والوحانية

إن جميع الدوال التي سنصادفها في هذا البند هي دوال بقيم حقيقية . لننظر في مسألة القيم الابتدائية التالية :

$$y' = f(x, y) \quad \text{لأجل} \quad \xi \leq x \leq \xi + a$$

$$y(\xi) = \eta \quad (1)$$

إن من أهم شروط المبرهنة التالية أن تكون f معرفة في شريط S :

$$-\infty < y < \infty, \quad \xi \leq x \leq \xi + a, \quad \text{وتمحقق ، فيما يتعلق بـ } y, \text{ شرط}$$

ليشتز :

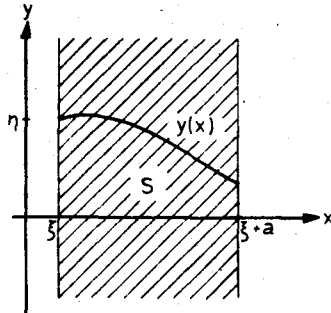
$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L |y - \bar{y}| \quad (L \geq 0) \quad (2)$$

حيث L ثابتة ليشتز الحقيقية L إلى أي قيد .

(١-٢) مبرهنة الوجود والوحانية . لنفرض أن الدالة $f \in C(S)$ تحقق

في S شرط ليشتز (2) . عندئذ يكون لمسألة القيم الحدية (١) حل وحيد

$y(x)$. إن هذا الحل يوجد في كامل الفترة $\xi \leq x \leq \xi + a$.



لايات هذه المبرهنة نجيلها إلى مبرهنة النقطة الثابتة . وعلينا ، في سبيل ذلك ، أن نضع مسألة القيم الابتدائية بتطوير بسيط في الشكل $y = Ty$. لرمز بـ J للفترة $a \leq x \leq \xi$ ، وليكن $y(x)$ حلاً فضولاً في J لمسألة القيم الابتدائية . ولما كان f مستمراً فإن $u(x) = f(x, y(x))$ مستمر في J ، وبالتالي يكون لـ $y(x)$ مشتق مستمر .

وبالاستناد إلى المبرهنة الأساسية في حساب التفاضل والتكامل ينتج .

$$y(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, y(t)) dt \quad (3)$$

وبالعكس فإن كل حل مستمر في J لـ (3) يحقق شرط البدء $y(\xi) = \eta$ ، كما أن للطرف الأيمن من (3) ، وبالتالي لـ $y(x)$ ، مشتقاً مستمراً وأن $y' = f(x, y)$. وهكذا نرى أن مسألة القيم الابتدائية لا تختلف عن المعادلة التكاملية (3) ، والتي نضعها بالشكل :

$$y = T(y) \quad (3')$$

$$(Ty)(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, y(t)) dt$$

إن المؤثر التكاملي T يقرون بكل دالة y من فضاء باناخ $C(J)$ للدوال المستمرة في J ، دالة Ty من الفضاء نفسه .

وعلى هذا فإن حلول مسألة القيم الابتدائية (1) هي أيضاً النقاط الثابتة للمؤثر T ، باعتباره التطبيق $T: B \rightarrow B$ واعتبار $B = C(J)$.

ولذلك إذا أثبتنا أن المؤثر T يحقق شرط ليبشتر (1,3) * بثابتة $k < 1$ فإننا نكون بذلك قد اثبتنا المبرهنة التي نحن بصدها .

(*) يشير الرقم الأيسر من هذه الشناثية إلى البند ويشير الرقم الثاني إلى المعادلة

لنظم الفضاء $C(J)$ بنظم القيمة العظمى $\|y\|_0 = \max \{ |y(x)| : x \in J \}$ ولنفرض $y, z \in C(J)$ ، عندئذ ، امتداداً إلى (2) ، ينتج :

$$|(Ty)(x) - (Tz)(x)| = \left| \int_{\xi}^x \{ f(t, y(t)) - f(t, z(t)) \} dt \right| \quad (4)$$

$$\leq \int_{\xi}^x L |y(t) - z(t)| dt \leq L \|y - z\|_0 (x - \xi)$$

وبالتالي فإن :

$$\|Ty - Tz\|_0 \leq La \|y - z\|_0$$

وعلى هذا فإن T يحقق شرط ليبتز . ولكن ثابتة ليبتز لا تكون أصغر من الواحد إلا إذا كان $a < \frac{1}{L}$. فإذا كان $a \geq \frac{1}{L}$ فعندئذ نختار n بحيث يكون $b = \frac{a}{n} < \frac{1}{L}$ ونبحث عن الحل بالأسلوب السابق ذاته في الفترات التالية :

$$\xi \leq x \leq \xi + b, \xi + b \leq x \leq \xi + 2b, \dots, \xi + (n-1)b \leq x \leq \xi + nb = \xi + a$$

على التوالي (انظر (٢ - ٦) (ب)) .

ويمكن سلوك سبيل انيق آخر باختيار نظم القيمة العظمى المحملة :

$$\|y\| = \max \{ |y(x)| e^{-\alpha x} : x \in J \} \quad \alpha > 0 \quad (5)$$

وبتقويم التكامل الاخير في (4) في هذه الحالة نجد :

$$\int_{\xi}^x L |y(t) - z(t)| dt = L \int_{\xi}^x |y(t) - z(t)| e^{-\alpha t} e^{\alpha t} dt$$

$$\leq L \|y - z\| \int_{\xi}^x e^{\alpha t} dt < L \|y - z\| \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$$

إذن :

$$|(Ty)(x) - (Tz)(x)| e^{-\alpha x} < \frac{L}{\alpha} \|y - z\|$$

وبالتالي :

$$\|Ty - Tz\| < \frac{L}{\alpha} \|y - z\|$$

فإذا اخترنا مثلاً $\alpha = 2L$ فإننا نجد أن T يحقق شرط ليبتشز بناتبة

$$k = \frac{1}{2}$$

إن هذا الإثبات يعطينا الوجود في خطوة واحدة للفترة بأكملها .

(٢-٢) ملاحظات : (أ) تشير المبرهنة الأخيرة إلى أنه انطلاقاً من دالة

$y_0(x)$ مستمرة في J ، يمكن الوصول إلى متتالية التقريبات المتتالية :

$$y_{k+1}(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, y_k(t)) dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6)$$

إن هذه المتتالية من التقريبات متقاربة نظمياً ، وبالتالي بانتظام ، في J نحو حل $y(x)$ لمسألة القيم الابتدائية . ويمكن للمرء أن يستخدم هذا الأسلوب التكراري لتحديد عددي تقريبي لحل المسألة . ومن الطبيعي أن ينطلق من دالة $y_0(x)$ تكون أكثر ملاءمة للحل بقدر الامكان . ولكن إذا لم يكن متوفراً لدينا أية معلومات عن شكل الحل فمن الممكن اختيار $y_0(x) = \eta$.

(ب) يمكن صياغة مبرهنة وجود ووحداية لمسألة قيم ابتدائية تصح في فترة

($a > 0$) $\xi - a \leq x \leq \xi$ على يسار القيمة الابتدائية ، وذلك على النحو التالي :

إذا كانت f مستمرة في الشريط $s_- = J_- \times \mathbb{R}$ وتحقق هناك شرط ليبتشز (2) فعندئذ يكون لمسألة القيم الابتدائية :

$$y' = f(x, y) \quad \text{لأجل} \quad \xi - a < x \leq \xi$$

$$y(\xi) = \eta \quad (1-)$$

حل وحيد في J_- .

ولإثبات هذه المبرهنة نضع :

$$\bar{y}(x) = y(2\xi - x) \quad \bar{f}(x, y) = -f(2\xi - x, y)$$

أي أننا ، بلغة الهندسة ، نجري تناظراً في المستقيم $x = \xi$. وبذلك تتحول المسألة المطروحة إلى مسألة القيم الابتدائية :

$$\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}) \quad \text{لأجل} \quad \xi \leq x < \xi + a$$

$$\bar{y}(\xi) = \eta \quad (1^*)$$

ومن الواضح أن \bar{f} يحقق شروط المبرهنة (٢-١) . وكذلك يرى المرء بسهولة أننا نعرف وفق التطبيق $\varphi(x) \rightarrow \bar{\varphi}(x) = \varphi(2\xi - x)$ تقابلاً بين $C(J_-)$ و $C(J)$ ينقل حلول (1-) إلى حلول (1*) (وبالعكس) وبذلك نصل ، اعتماداً على المبرهنة (٢-١) ، إلى المطلوب .

ونود أن نلفت النظر إلى أنه كان بالإمكان إعادة البرهان الذي قمنا به في المبرهنة على الحالة التي نحن بصدها مستخدمين التنظيم :

$$\|y\| = \max_{x \in J} |y(x)| \quad e^{-ax}$$

سنتقل الآن إلى مبرهنة ثانية نعالج فيها الحالة التي لا تكون فيها f معرفة على شريط كامل بل في جوار نقطة (ξ, η) الأمر الذي نصادفه كثيراً .

(٢-٢) مبرهنة: ليكن $R: \xi \leq x \leq \xi + a, |y - \eta| \leq b$ ($a, b > 0$) مستطيلاً ولنفرض أن $f \in C(R)$ يحقق في R شرط ليبتز (2) . عندئذ يوجد حل وحيد لمسألة القيم الابتدائية (1) يصح ، على الأقل ، في فترة $\xi \leq x \leq \xi + \alpha$ بفرض أن :

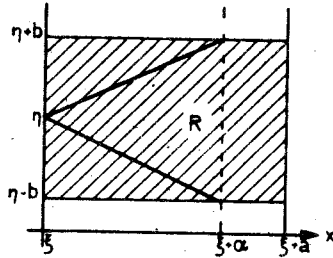
$$\alpha = \min \left(a, \frac{b}{A} \right) \quad A = \max_R |f'|$$

كذلك يصح الأمر نفسه في حالة مستطيل يقع على يسار الموضع (ξ, η) .
لائبات المبرهنة نعرف بمدوداً لـ f على النحو :

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, \eta - b) & (y < \eta - b) \\ f(x, y) & (R \text{ في}) \\ f(x, \eta + b) & (y > \eta + b) \end{cases}$$

إن \bar{f} معرف على الشريط $-\infty < y < \infty, \xi \leq x \leq \xi + a$ وهو مستمر هناك ويحقق شرط ليبتز (2) بثابتة ليبتز لا تختلف عن ثابتة ليبتز لـ f . وإستناداً إلى المبرهنة (٢-١) يوجد حل وحيد $y(x)$ لمسألة القيم الابتدائية المتعلقة بـ \bar{f} . ان جزء هذا الحل الواقع في المستطيل R هو حل لمسألة القيم الابتدائية الأصلية ولما كان $|\bar{f}| \leq A$ فإن $|y'| \leq A$ وهذا يعني أن الحل يقع في الزاوية المحصورة بين المستقيمين المنطلقين من النقطة (ξ, η) ويميلين $\pm A$ (انظر الشكل) وهذا يعني ان هذين المستقيمين يغادران R في الموضع $\xi + \alpha$ بفرض أن α أصغر العددين a و b/A .

كذلك من الممكن هنا أيضاً اجراء البرهان الذي قمنا به في البرهنة (٢-١)



مباشرة . وعندئذ لانحتاج إلى تمديد f . ولكن علينا في هذه الحالة أن ننظر في المؤثر T (كما عرفناه في (٢-١)) على فضاء باناخ B للدوال المستمرة في $[\xi, \xi+\alpha]$ ، وبشكل أدق على تلك المجموعة الجزئية D المكونة من الدوال φ المنتمية إلى B والتي يقع بيانها في R ، أي $|\varphi(x) - \eta| \leq b$ وعلى المرء كي يتمكن من استخدام مبرهنة النقطة الثابتة أن يثبت أن D مغلقة وانها تنتقل ب T إلى D نفسها وتترك اثبات ذلك للقارئ .

(٢-٤) شرط ليبشترز الموضوعي (١) تعريف : نقول عن دالة $f(x, y)$ انها تحقق في جزء D من \mathbb{R}^2 شرط ليبشترز الموضوعي فيما يخص y ، اذا وجد لكل موضع (x_0, y_0) من D جوار $U = U(x_0, y_0)$ وثابت $L = L(x_0, y_0)$ بحيث تحقق f شرط ليبشترز :

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L |y - \bar{y}| \quad (2)$$

في $D \cap U$.

(ب) وائثر : إذا كانت D مفتوحة وكان L لـ f ($f \in C(D)$) مشتق مستمر f ، فعندئذ يحقق f شرط ليبشترز الموضوعي في D .

ولاثبات ذلك نلاحظ أنه إذا كان U جواراً دائرياً للعنصر (x_0, y_0) من D بحيث يكون $\bar{U} \subset D$ فعندئذ يكون f_y مستوداً في U أي $L \leq |f_y|$. واستناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى يكون :

$$f(x, y) - f(x, \bar{y}) = (y - \bar{y}) f_y(x, y^*) \quad y^* \in (y, \bar{y})$$

وذلك مهما كان $(x, y), (x, \bar{y})$ من U . ومن العلاقة الأخيرة نجد (2) .

وبما لاشك فيه أن شرط ليبشتر الموضوعي هو ، بالمقارنة مع شرط ليبشتر الشمولي كما في المبرهنة (٢ - ١) ، شرط ضعيف . فإذا نظرنا مثلاً في الدالة المعروفة بـ $f(x, y) = y^2$ نرى أن :

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| = |y^2 - \bar{y}^2| = |y + \bar{y}| |y - \bar{y}|$$

فهذه الدالة تحقق في \mathbb{R}^2 (أو في أي شريط $J \times \mathbb{R}$) شرط ليبشتر الموضوعي ، ولكنها لا تحقق شرط ليبشتر (الشمولي) .

(ج) الحل الموضوعي : إذا كانت D مفتوحة وإذا حققت الدالة f من $G(D)$ شرط ليبشتر الموضوعي ، فعندئذ تكون مسألة القيم الابتدائية (1) ذات حل وحيد موضعي لأجل (ξ, η) من D . أي أنه يوجد حل وحيد في جوار L ξ .

ان هذه القضية تنتج مباشرة من المبرهنة (٢ - ٣) . وما علينا سوى أن ننشئ مستطيلاً على بين الموضع (ξ, η) من النمط الوارد في (٢ - ٣) . وفي هذا المستطيل ، الذي نختاره صغيراً بقدر كاف ، يتحقق شرط ليبشتر ويمكن بالتالي تطبيق المبرهنة (٢ - ٣) . وإذا أنشأنا المستطيل على اليسار فإننا نسلك سبيلاً مماثلاً .

وهدفنا التالي هو الحصول على معلومات شمولية أوسع مدى حول تمديد هذا الحل .

(٢-٥) تمهيدية : لتكن f دالة معرفة في D ، ولتكن $\Phi = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ($A \neq \emptyset$) مجموعة من حلول مسألة القيم الابتدائية (١) (بفرض أن φ_α هو حل في الفترة J_α) تتمتع بالخاصة التالية :

$$(*) \quad \varphi_\alpha(x) = \varphi_\beta(x) \quad \text{لأجل} \quad x \in J_\alpha \cap J_\beta$$

وذلك مها كان α و β من A . عندئذ يوجد حل وحيد φ في الفترة $J = \bigcup_{\alpha \in A} J_\alpha$ بحيث يكون مقصور φ على J_α هو φ_α مها كانت α من A (ليلاحظ أن $\xi \in J_\alpha$ مها كانت α) .

يمكن لنا الحصول على هذا الحل بان نعين لكل x من J دليلا α من A بحيث يكون $x \in J_\alpha$ ثم نضع $\varphi(x) = \varphi_\alpha(x)$. وإذا كان β دليلا آخر بحيث يكون $x \in J_\beta$ فعندئذ يكون حسب الفرض $\varphi_\alpha(x) = \varphi_\beta(x)$ ، وهذا يعني أن التعريف المذكور لاليس فيه .

وإذا كانت a نقطة كيفية من J فعندئذ يوجد دليل α من A بحيث يكون $a \in J_\alpha$. ويكون أيضاً $a \in J_\beta$ و $\varphi(x) = \varphi_\beta(x)$ في $[\xi, a]$ ينتج من ذلك أن φ هو في الواقع حل لـ (١) في J .

وإذا ما طبقنا هذه التعميمية على مجموعة جميع حلول مسألة القيم الابتدائية فيان (*) لاتعني شيئاً سوى الوجدانية . وعلى هذا فإننا نحصل على النتيجة التالية :

نتيجة : إذا كان لمسألة القيم الابتدائية (١) حل واحد على الأقل ، وإذا صحت قضية الوجدانية (*) لكل حلين ، فعندئذ يوجد حل غير قابل للتمديد لـ (١) . وإن جميع الحلول الأخرى هي مقصورات هذا الحل .

(٢-٦) تمهيدية حول تمديد الحلول : ليكن D جزءاً من \mathbb{R}^2 وليكن $f \in C(D)$

(أ) إذا كان φ حلاً للمعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ في الفترة $\xi \leq x < b$ ،
 يجري باكمل في مجموعة متراسة A جزئية من D ، فعندئذ يمكن تمديد φ لنحصل
 على حل على الفترة المغلقة $[\xi, b]$.

(ب) إذا كان φ حلاً في الفترة $[\xi, b]$ وكان ψ حلاً في الفترة $[b, c]$
 وكان $\varphi(b) = \psi(b)$ فعندئذ تكون الدالة :

$$u(x) = \begin{cases} \varphi(x) & (\text{لأجل } \xi \leq x < b) \\ \psi(x) & (\text{لأجل } b < x \leq c) \end{cases}$$

حلاً في الفترة $[f, c]$.

البرهان : (أ) أن f محدودة على A ، مثلاً $|f| \leq c$. عندئذ يكون
 $|\varphi'| \leq c$ وبالتالي يكون φ مستمراً بانتظام في $[\xi, b]$ ، وعلى هذا فإن
 هناك $\beta = \lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x)$ ويكون $(b, \beta) \in A$. وإذا وضعنا $\beta = \varphi(b)$ ، فعندئذ
 يكون $\varphi(x)$ ، وبالتالي $f(x, \varphi(x))$ ، مستمراً في $[\xi, b]$. ثم ان المادلة :

$$\varphi(x) = \varphi(\xi) + \int_{\xi}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

صحيحة عندما $\xi \leq x < b$. وبالانتقال إلى النهايات $x \rightarrow b-0$ نرى أن هذه
 المعادلة تصح كذلك عندما $x = b$. ينتج عن ذلك أن φ مشتقاً (من اليسار)
 وأن $\varphi'(b) = f(b, \varphi(b))$.

(ب) يكفي أن نتحقق فيما إذا كان u محققاً للمعادلة التفاضلية في الموضع b
 ولكن u مشتقاً عند هذا الموضع من اليسار واليمين ، وهذان المشتقات
 متساويان ، فهما مساويان لـ $f(b, \varphi(b))$. وبهذا نكون قد انهينا البرهان .

وفياً يلي ستقدم البرهنة الأساسية التالية .

(٧-٢) **مبرهنة الوجود والوحدانية** : لنفرض أن الدالة $f \in C(D)$ تحقق في مجموعة مفتوحة D شرط ليبتزش الموضعي ، عندئذ يكون لمسألة القيم الابتدائية

$$y' = f(x,y) \quad y(\xi) = \eta \quad (7)$$

في كل موضع (ξ, η) من D ، حل φ غير قابل للتمديد ، ويقترّب من اليمين من حدود D بالقدر الذي نريد . إن هذا الحل يتعين بشكل وحيد ، بمعنى أن جميع حلول (7) هي مقصورات لـ φ .

ملاحظة : إن القول أن φ تقترّب من اليمين نحو محيط D بالقدر الذي نريد ، يمكن أن نوضّحه على النحو التالي : إذا كانت G غلاقة بيان φ ، وكانت G_+ مجموعة النقاط (x,y) من G التي تحقق $x \geq \xi$ فنعدئذ يكون :

(أ) G_+ ليست جزءاً متراصاً من D .

وبعبارة أخرى : إن φ موجودة إلى اليمين في فترة $b < x \leq \xi$ (يسمح لـ $b = -\infty$) وتكون هناك واحدة من الحالات التالية :

(ب) $b = -\infty$ والحل موجود لأجل جميع $x \geq \xi$

(ج) $b < \infty$ و $\limsup_{x \rightarrow b-0} |\varphi(x)| = \infty$ والحل يصبح لانهائية .

(د) $b < \infty$ و $\liminf_{x \rightarrow b-0} \rho(x, \varphi(x)) = 0$ بفرض أن $\rho(x_0, y_0)$ بعد

النقطة (x_0, y_0) عن محيط D . إن الحل هنا يقترّب من المحيط بالقدر الذي نريد .

وفي الواقع إن (أ) تنص على أنه إما أن تكون G_+ غير محدودة الحالة

(ب) أو (ج) ، أو تكون محدودة وتحتوي على نقط محيطية من D الحالة

(د) .

البرهان : الوحدانية . لنبدأ ببرهان مايلي : إذا كان φ و ψ حلين لمسألة

القيم الابتدائية وكانت J فترة وجود مشتركة لهذين الحلين بحيث يكون $J \in \mathcal{E}$ ،
فعدتد يكون $\psi = \varphi$ في J .

لنفرض أن هذه القضية خاطئة وأنه توجد مثلاً على \mathcal{E} نقطة x من J
يكون عندها $\psi(x) \neq \varphi(x)$. عندها يوجد على \mathcal{E} نقطة أولى x_0 من J
يبدأ عندها الحلان بالاختلاف. عندها يكون x_0 أيضاً العدد الأكبر الذي يتمتع
بالخاصة: $\varphi(x) = \psi(x)$ لأجل $x_0 \leq x \leq \xi$ ($\xi - x_0$ ليست مستثناة).

وإستناداً إلى ما رأيناه في (٢-٤) (٣) فإنه يوجد حل موضعي مار بالنقطة
 $(x_0, \varphi(x_0))$ ، وهذا الحل وحيد. بعبارة أخرى ان $\varphi(x) = \psi(x)$ في جوار
يمين من x_0 ، وهذا يتناقض مع ما افترضناه في x_0 . وبشكل مماثل يمكن
اثبات الوحداية من اليسار.

الوجود: استناداً إلى (٢-٤) (٣) يوجد حل موضعي ل (7)، واستناداً
إلى ما اثبتناه قبل قليل فإن قضية الوحداية (*) التي مرت في (٢-٥) صحيحة.
وعندئذ استناداً إلى النتيجة (٢-٥) يوجد حل غير قابل للتمديد φ . وما علينا
سوى أن نثبت أن هذا الحل يقترب من محيط D من اليمين بالقدر الذي نريد
(يمكن اثبات الاقتراب من المحيط من اليسار بشكل مماثل).

لنفرض أن (آ) خاطئة. عندئذ تكون G_+ جزءاً متراً من D ، وبالتالي
يوجد φ في فترة منتهية $b < x \leq \xi$ أو $\xi \leq x \leq b$. وفي الحالة الأولى تكون
التمهيدية (٢-٦) (آ) قابلة للتطبيق، وبالتالي تكون φ قابلة للتمديد على $[\xi, b]$.
وفي الحالة الثانية يكون $(b, \varphi(b)) \in D$ ويمكن لنا استناداً إلى (٢-٤) (٣)
تعيين حل موضعي ψ يمر بهذه النقطة. واستناداً إلى (٢-٦) (ب) نحصل
أيضاً على تمديد ل φ .

وهكذا نكون قد وصلنا في كل من الحالتين إلى ما يناقض كون φ غير

قابل للتمديد وهذا نكون قد اثبتنا المبرهنة كلياً .

(٨-٢) تعرین: لتكن الدالة $k(x, t, z)$ مستمرة في $-\infty < z < \infty$ -
 $0 \leq t \leq x \leq a$ وتحقق شرط ليبتز في z :

$$|k(x, t, z) - k(x, t, \bar{z})| \leq L |z - \bar{z}|$$

ولتكن الدالة $g(x)$ مستمرة في $0 \leq x \leq a$ اثبت باستخدام مبرهنة النقطة الثابتة أن لمعادلة فولترا التكاملية :

$$u(x) = g(x) + \int_0^x k(x, t, u(t)) dt$$

حلا وحيداً مستمراً في $0 \leq x \leq a$.

(٩-٢) تعرین: إذا حققت دالة $f(x, y)$ شرط ليبتز الموضعي بخصوص y في مجموعة مفتوحة D جزئية من \mathbb{R}^2 ، وإذا كانت A جزءاً متواصلاً من D ، وكان f محدوداً على A فإن f تحقق في A شرط ليبتز (الشمولي) بخصوص y .

(١٠-٢) تعرین: إذا كانت f دالة مستمرة في مجموعة مفتوحة D ، وإذا كان φ حلاً لمسألة القيم الابتدائية :

$$y' = f(x, y) \quad y(\xi) = \eta$$

في فترة (ξ, b) ، $b < \infty$ ، وإذا فرضنا أن هذا الحل يقترب إلى اليمين من محيط D بالقدر الذي نريد ، فنعدتذ تصح احدي الحالتين (وقد تصحان معاً)

$$(أ) \quad \varphi(x) \rightarrow +\infty \quad \text{أو} \quad \varphi(x) \rightarrow -\infty \quad \text{عندما} \quad x \rightarrow b-0$$

$$(ب) \quad \rho(x, \varphi(x)) \rightarrow 0 \quad \text{عندما} \quad x \rightarrow b-0$$

ارشاد : على المرء ان يبين انه إذا كان G_b تقاطع علاقة بيان φ مع
المنسقيم $x = b$ فإن $G_b \subset \partial D$.

(٢-١١) تعرین : لتكن الدالة $f(x, y)$ مستمرة في الشريط $S = J \times \mathbb{R}$
حيث يكون $J = [0, a]$ ، وتحقق الشرط :

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq \frac{k}{x} |y - z| \quad 0 < x \leq a \quad y, z \in \mathbb{R}$$

بفرض أن $k < 1$. اثبت أن لمسألة القيم الابتدائية

$$y' = f(x, y) \quad \text{في } J \quad \text{و } y(0) = \eta$$

حلا وحيداً ، وأن هذا الحل يمكن أن يحسب بطريقة التقريبات المتتالية .

ارشاد : ان المؤثر T :

$$(Tu)(x) = \int_0^x f(t, \eta + u(t)) dt$$

يحقق في فضاء باناخ B لجميع الدوال u المستمرة على J وبنظيم منته :

$$\|u\| = \sup \{ |u(x)| / x : 0 < x \leq a \}$$

شرط ليبشتر (3, 1) . ان النقط الثابتة لـ T هي بعض النظر عن ثابتة ،
حلول لمسألة القيم الابتدائية .

٣- نظرية الوجود لبيانو : لقد اشترطنا في البند السابق أن يحقق $f(x, y)$

شرط ليبشتر كما يكون لمسألة القيم الابتدائية حل وحيد . ولكن هذا الشرط
لا يتحقق في معادلات تفاضلية مثل $y' = \sqrt{|y|}$ ، الأمر الذي يجعلنا نطرح
السؤال التالي :

هل يكفي استمرار $f(x, y)$ لاثبات وجود حل للمعادلة التفاضلية . ان
الجواب على هذا السؤال كان ايجابياً .

(١-٣) مبرهنة الوجود لبيانو : إذا كانت $f(x, y)$ مستمرة في منطقة
 D فعندئذ يمر بكل نقطة (ξ, η) من D حل واحد على الاقل للمعادلة التفاضلية:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

يمكن تمديد كل حل نحو اليمين أو نحو اليسار حتى المحيط (أي أن لكل
حل ممدداً يقترب إلى اليمين وإلى اليسار من محيط D بالقدر الذي نريد) .

قبل اثبات هذه المبرهنة نحتاج إلى بعض التعاريف والمبرهنات المساعدة .

(٢-٣) الاستمرار المتساوي : إذا كانت M مجموعة من الدوال المستمرة
على الفترة $J: a \leq x \leq b$ ، نقول عن هذه المجموعة انها متساوية الاستمرار إذا
استطعنا أن نجد لكل $\epsilon > 0$ عدداً $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ بحيث يكون :

$$|f(x) - f(\bar{x})| < \epsilon \quad (2)$$

مهما كان x و \bar{x} من J شرط أن يكون
($x, \bar{x} \in J$) ، ومهما كان f من M .

المهم في هذا التعريف أن δ هي نفسها لجميع دوال M .

مثال : إذا كانت M مجموعة جميع الدوال f التي تحقق في J شرط ليبتز
بثابتة واحدة L :

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq L |x - \bar{x}| \quad x, \bar{x} \in J$$

ان هذه المجموعة M متساوية الاستمرار ، إذ أننا نستطيع أن نضع
 $\delta(\epsilon) = \epsilon / L$.

(٣-٣) تمهيدية : إذا كانت المتتالية ... $f_2(x), f_3(x), \dots$ متساوية الاستمرار في $J = [a, b]$ ، وإذا تقاربت هذه المتتالية عند جميع قيم x من مجموعة A جزئية من J وكثيفة في J ، فعندئذ تقارب المتتالية عند جميع قيم x من J بانتظام : وتكون نهايتها $f(x)$ مستمرة في J .

(نقول عن مجموعة نقط A انها كثيفة في J ، إذا حوت كل فترة جزئية من J نقطة واحدة على الاقل من A) ان مجموعة الاعداد المنطقية مثلا المنتمية إلى J كثيفة في J .) .

البرهان : بما أن المتتالية متساوية الاستمرار فإننا، لأجل $\epsilon > 0$ ، نستطيع إيجاد $\delta = \delta(\epsilon)$ بحيث تتحقق (2) لأجل جميع الدوال f_n . لنقسم الآن الفترة J إلى p فترة جزئية مغلقة J_1, J_2, \dots, J_p بحيث يكون طول كل فترة أصغر من δ . وفي كل من هذه الفترات يوجد عدد x_1 ينتمي إلى $J_1 \cap A$. وبما أن المتتالية متقاربة ، فرضاً ، عند x_1 فإننا نستطيع أن نجد $n_0 = n_0(\epsilon)$ بحيث يكون :

$$|f_m(x_1) - f_n(x_1)| < \epsilon \quad m, n \geq n_0 \quad i = 1, \dots, p$$

فإذا كانت x نقطة كثيفة من J ، ولنفرض انها تنتمي مثلاً إلى J_q فعندئذ يكون $|x - x_q| < \delta$ ويكون بالتالي استناداً إلى (2) :

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_m(x_q)| + |f_m(x_q) - f_n(x_q)| + |f_n(x_q) - f_n(x)| < 3\epsilon \quad m, n \geq n_0$$

وبذلك نكون قد اثبتنا ان المتتالية $f_n(x)$ متقاربة بانتظام في J .

(٤-٣) مبرهنة اسكولي-ارزيلا : إن كل متتالية من الدوال متساوية الاستمرار f_1, f_2, \dots في فترة $J = [a, b]$ والحقيقة للشرط $|f_n(x)| \leq C$ مهما كانت x من J ومهما كان $n \geq 1$ تحتوي على متتالية جزئية متقاربة بانتظام في J .

البرهان : لتكن $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ مجموعة عدودة كثيفة في J (كأن تكون مثلاً مجموعة جميع الأعداد المنطقية الواقعة في J). إن المتتالية العددية $a_n = f_n(x_1)$ ($n = 1, 2, \dots$) محدودة ، وبالتالي فإننا نجد فيها متتالية جزئية متقاربة ، مثل :

$$f_{p_1}(x_1), f_{p_2}(x_1), f_{p_3}(x_1), \dots$$

وإن المتتالية العددية $b_n = f_{p_n}(x_2)$ محدودة أيضاً ، وبالتالي فإننا نجد فيها متتالية جزئية متقاربة مثل :

$$f_{q_1}(x_2), f_{q_2}(x_2), f_{q_3}(x_2), \dots$$

ولا شك أن المتتالية $\{q_n\}$ جزئية من المتتالية $\{p_n\}$ ، وكذلك نرى أن المتتالية العددية $c_n = f_{q_n}(x_3)$ محدودة وفيها متتالية جزئية متقاربة مثل :

$$f_{r_1}(x_3), f_{r_2}(x_3), f_{r_3}(x_3), \dots$$

وبمطابقة هذا الأسلوب نحصل على متتالية من المتتاليات .

$$\text{مقاربة في } x = x_1 \quad f_{p_1}, f_{p_2}, f_{p_3}, \dots$$

$$\text{مقاربة في } x = x_1, x_2 \quad f_{q_1}, f_{q_2}, f_{q_3}, \dots$$

$$\text{مقاربة في } x = x_1, x_2, x_3 \quad f_{r_1}, f_{r_2}, f_{r_3}, \dots$$

وفي السطر الـ k نجد متتالية جزئية من متتالية السطر $k-1$. وتقارب هذه المتتالية في $x = x_1, \dots, x_k$. ينتج عن هذا أن المتتالية القطرية :

$$f_{p_1}, f_{q_2}, f_{r_3}, \dots$$

مقاربة لها كانت x من A ، وذلك لأنه إذا كان x_k من A فإن هذه

المتتالية بدءاً من الحد k فيما هي متتالية جزئية من السطر الـ k . وهكذا نجد أن شروط التمهيدية (٣-٤) محققة وبالتالي فإن هذه المتتالية القطرية متقاربة بانتظام .

(٣-٥) مبرهنة: لنفرض أن الدالة $f(x, y)$ مستمرة ومحدودة في الشريط $J \times \mathbb{R}$ بفرض أن $J = [\xi, \xi + a]$ وأن $a > 0$ ، عندئذ توجد دالة واحدة ، على الأقل ، $y(x)$ فضولة في J (وبالتالي فضولة باستمرار) وتحقق :

$$y' = f(x, y) \quad \text{في } J \quad \text{و} \quad y(\xi) = \eta \quad (3)$$

البرهان : ان المسألة هي البعث عن دالة $y(x)$ مستمرة في J وتحقق :

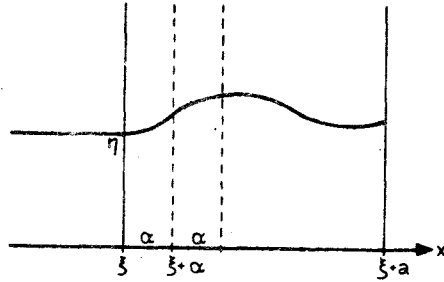
$$y(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, y(t)) dt \quad (4)$$

في J . لنشء في سبيل ذلك لكل $\alpha > 0$ حلاً تقريبياً $z_{\alpha}(x) \in C(J)$ وفق :

$$z_{\alpha}(x) = \begin{cases} \eta & x < \xi \\ \eta + \int_{\xi}^x f(t, z_{\alpha}(t - \alpha)) dt & x \in J \end{cases} \quad (5)$$

ان هذه الصيغة تعرف z_{α} لأجل $x \leq \xi + a$ ، وذلك لأنه اذا كان $\xi \leq x < \xi + a$ فإنه يكون في التكامل الوارد في (5) $t - \alpha \leq \xi$ وعلى هذا فإن $z_{\alpha}(t - \alpha) = \eta$ والتكامل معرف تماماً . وإذا كان $\xi + \alpha \leq x \leq \xi + 2\alpha$ فإن $\xi + \alpha \leq x - \alpha \leq \xi + \alpha$ وبالتالي يكون $z_{\alpha}(t - \alpha)$ معرفاً والتكامل معرفاً تماماً وهكذا . وبهذا نحصل بعد عدد منته من الخطوات على دالة $z_{\alpha}(x)$ مستمرة

$x \leq \xi + a$ ومحققة للمعادلة (5) . إذن المجموعة M المكونة من هذه الدوال $z_\alpha(x)$ المستمرة في J متساوية الاستمرار هناك . ذلك لأنه انطلاقاً من $|f| \leq c$



الحلول التقريبية $z_\alpha(x)$

نري أن $|z'_\alpha(x)| \leq c$ ، وهذا يعني أن z_α تحقق شرط ليبتز :

$$|z_\alpha(x) - z_\alpha(\bar{x})| \leq c|x - \bar{x}|$$

وعلى هذا فإن في المتتالية $z_1(x), z_{1/2}(x), z_{1/3}(x), \dots$ ، استناداً إلى مبرهنة اسكوي - ارزيبلا ، متتالية جزئية $z_{\alpha_n}(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots, \alpha_n \rightarrow 0$) متقاربة بانتظام . سنرمز للاختصار فيما يلي بـ $z_n(x)$ بدلاً من $z_{\alpha_n}(x)$ ويكون استناداً إلى (5) :

$$z_n(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, z_n(t - \alpha_n)) dt \quad (6)$$

ان نهاية هذه المتتالية ، ولكن $y(x)$ ، مستمرة استناداً إلى المبرهنة (3-3) . وينتج من المتباينات .

$$\begin{aligned} |z_n(t - \alpha_n) - y(t)| &\leq |z_n(t - \alpha_n) - z_n(t)| + |z_n(t) - y(t)| \\ &\leq c\alpha_n + |z_n(t) - y(t)| \end{aligned}$$

أن $z_n(t - \alpha_n)$ تتقارب ، أيضاً ، بانتظام إلى $y(t)$ في J ، وبالتالي فإن $f(t, z_n(t - \alpha_n))$ تتقارب بانتظام إلى $f(t, y(t))$. وعلى هذا يكون الانتقال إلى النهايات $n \rightarrow \infty$ تحت رمز التكامل في (6) ممكناً ، الأمر الذي يعطينا المعادلة (4) وهو المطلوب .

(٢-٦) تمرين لدينا المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^3y}{x^2+y^2} & (\text{عندما } x^2+y^2 \neq 0) \\ 0 & (\text{عندما } x=y=0) \end{cases}$$

فأثبت أن $f(x, y)$ مستمرة في x و y ، وإنما لا تحقق شرط ليبتز في أية منطقة تحوي نقطة الأصل . اثبت بعد ذلك أنها تحقق شرط مبرهنة بيانو .

٤ - المعادلات التفاضلية في العقديّة : سنرمز في هذا البند بـ z و w لأعداد عقديّة و بـ $w(z)$ و $f(z, w)$ لدوال ذات قيم عقديّة بتغير عقدي واحد أو بتغيرين عقديين .

نقول عن دالة عقديّة $f(z, w)$ أنها هولومورفية (أو منتظمة أو تحليلية) في منطقة D من الفضاء (z, w) فيما إذا كانت مستمرة هناك وكان لها مشتقان $f_z(z, w)$ و $f_w(z, w)$ مستمران في D . يبرهن في هذه الحالة صحة النشر التالي :

$$f(z, w) = \sum_{i, j=0}^{\infty} c_{ij} (z - z_0)^i (w - w_0)^j$$

في $Z = \{ (z, w) : |z - z_0| \leq a \quad |w - w_0| \leq b \}$ بفرض أن $Z \subset D$. كما يبرهن كذلك أنه إذا كانت الدوال $f(z, w)$ و $h_1(z)$ و $h_2(z)$ تحليلية (على أن نفترض في القيم $(h_1(z), h_2(z))$ أن تكون واقعة في منطقة

تعريف (f) ، وإذا كان $g(z) = f(h_1(z), h_2(z))$ فإن الاشتقاق التالي صحيح .

$$g'(z) = f_z(h_1(z), h_2(z)) h_1'(z) + f_w(h_1(z), h_2(z)) h_2'(z) \quad (1)$$

(1-4) مبرهنة الوجود والوحانية في العقديّة: لتكن الدالة $f(z, w)$ تحليلية في منطقة D جزئية من C^2 تحوي الاسطوانة الثنائية :

$$Z : |z - z_0| \leq a, |w - w_0| < b$$

ولنفرض كذلك أن $|f| \leq M$ في Z

عندئذ يوجد حل تحليلي وحيد $w(z)$ لمسألة القيم الابتدائية :

$$w' = f(z, w(z)) \quad w(z_0) = w_0 \quad (2)$$

يصح في القرص الدائري :

$$K : |z - z_0| < \alpha - \min(a, \frac{b}{M})$$

على الأقل .

المبرهان : نرمز بـ Z_1 للاسطوانة الثنائية :

$$|z - z_0| \leq \alpha, |w - w_0| < b$$

ولیکن $|f_w| \leq L$ على Z_1 . عندئذ يحقق f في Z_1 شرط ليبتز بخصوص w :

$$|f(z, w_1) - f(z, w_2)| \leq L |w_1 - w_2| \quad (3)$$

ان مسألة القيم الابتدائية (2) تكافئ المعادلة التكاملية :

$$w(z) = w_0 + \int_{z_0}^z f(\zeta, w(\zeta)) d\zeta \quad (4)$$

ليكن B فضاء الدوال u التحليلية والمحدودة في K ، ولنعرف على هذا الفضاء النظم :

$$\|u\| = \sup_K |u(z)| e^{-2L|z-z_0|}$$

ان هذا الفضاء تام ، فهو فضاء باناخ .

لنكن D_T مجموعة جميع الدوال u من B التي تحقق الشرط : $|u(z)-w_0| \leq b$. ولنعرف مؤثراً T بـ .

$$Tu = w_0 + \int_{z_0}^z f(\zeta, u(\zeta)) d\zeta \quad u \in D_T$$

فكون حلول مسألة القيم الابتدائية (2) هي بالضبط نقط المؤثر T الثابتة . سنثبت الآن أن :

$$T(D_T) \subset D_T \quad (\bar{A})$$

(ب) T يحقق في D_T شرط ليبشتر بثابتة $\frac{1}{2}$.

لإثبات (\bar{A}) نلاحظ أنه إذا كان $u \in D_T$ فإن :

$$|(Tu)(z)-w_0| = \left| \int_{z_0}^z f(\zeta, u(\zeta)) d\zeta \right| \leq M|z-z_0| \leq \alpha M \leq b \quad (5)$$

وهذا ما يثبت صحة (\bar{A}) .

لإثبات (ب) نكتب :

$$| (Tu)(z) - (Tv)(z) | \leq \left| \int_{z_0}^z \{ f(\zeta, u) - f(\zeta, v) \} d\zeta \right|$$

وبما أن التكامل الوارد هنا مستقل عن طريق المكاملة فإننا نختاره القطعة المستقيمة:

$$\zeta(t) = z_0 + t e^{i\varphi} \quad , \quad \varphi = \arg(z - z_0) \quad , \quad 0 \leq t \leq |z - z_0|$$

فيكون :

$$| (Tu)(z) - (Tv)(z) | \leq L \int_0^{|z-z_0|} | u(\zeta(t)) - v(\zeta(t)) | |\zeta'(t)| dt$$

$$\leq L \int_0^{|z-z_0|} | u(\zeta(t)) - v(\zeta(t)) | e^{-2Lt} e^{2Lt} dt$$

$$\leq L \|u - v\| \int_0^{|z-z_0|} e^{-2Lt} dt \leq \frac{1}{2} e^{2L|z-z_0|} \|u - v\|$$

إذن :

$$\| Tu - Tv \| \leq \frac{1}{2} \|u - v\| \quad u, v \in D_T$$

وهذا ما يثبت صحة (ب). يمكننا الآن استخدام مبرهنة النقطة الثابتة فنجد أن لـ T نقطة ثابتة وحيدة w في D_T . ونحصل على هذه النقطة الثابتة على شكل متتالية (u_n) متقاربة بانتظام في K منطلقين ، مثلاً ، من $u_0(z) = w_0$ و

$$u_{n+1}(z) = w_0 + \int_{z_0}^z f(\zeta, u_n(\zeta)) d\zeta \quad \text{أي} \quad u_{n+1} = Tu_n \quad (6)$$

ولاثبات وحدانية الحل الواردة في هذه المبرهنة يكفي أن نثبت أن كل حل

$w(z)$ لـ (4) يجري في Z_1 عندما $z \in K$ أي أنه يقع في D_T . إن هذا الأمر يتضح من (5) إذا وضعنا فيها $u = w$.

(٤-٢) تعيين الحل بالنشر في متسلسلة قوى: إن الحل الوحيد $w(z)$ لمسألة القيم الابتدائية (2) يتعين كأي دالة تحايلية على شكل متسلسلة قوى:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad |z-z_0| < \alpha \quad (7)$$

وتكون مهمتنا هي في تعيين الأمثال a_n في هذا النشر. ويمكن أن يتم ذلك بإحدى الطريقتين التاليتين:

١- الطريقة الأولى: باستقاقات المطابقة $w'(z) = f(z, w(z))$ يمكن حساب المشتقات من المراتب العليا على التالي:

$$w' = f$$

$$w'' = f_z + w' f_w \quad (8)$$

$$w''' = f_{zz} + 2 w' f_{zw} + w'' f_w + w'^2 f_{ww}$$

.....

نعوض $w = w_0, z = z_0$ فنحصل على الأمثال:

$$a_n = \frac{w^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (9)$$

الطريقة الثانية: نقوم أولاً بنشر الطرف الأيمن من المعادلة:

$$f(z, w) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} (z-z_0)^i (w-w_0)^j$$

فنحصل على المطابقة:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a_i (z-z_0)^{i-1} = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} (z-z_0)^i \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \right)^j \quad (10)$$

وبقارنة الأمثال نحصل على صيغ تدرجية لحساب a_i . إن هذه الطريقة غالباً ما تكون أكثر راحة في الحسابات العددية من سابقتها .

ومن الطبيعي أنه يمكن استخدام هذه الطريقة في المعادلات التفاضلية في الحقيقية على أن تكون الأطراف اليمنى هولومورفية كذلك .

مثال (٣-٤)

$$y' = x^2 + y^2 \quad y(0) = 1$$

لنضع :

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

ف نجد :

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} = x^2 + \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right)^2 = x^2 + \sum_{i=0}^{\infty} x^i \sum_{j=0}^i a_j a_{i-j}$$

أو :

$$(i+1) a_{i+1} = \sum_{j=0}^i a_j a_{i-j} \quad i \neq 2$$

(11)

$$3 a_3 = \sum_{j=0}^2 a_j a_{2-j} + 1$$

وعلى هذا فإن :

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = a_0^2 = 1$$

$$2 a_1 = 2 a_0 a_1 = 1$$

$$3 a_2 = 2 a_0 a_2 + a_1^2 + 1 = 4 \Rightarrow a_2 = \frac{4}{3}$$

$$4 a_4 = 2 a_0 a_4 + 2 a_1 a_2 \Rightarrow a_4 = \frac{7}{6}$$

وبذلك نرى أن الذئب يبدأ بـ :

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{7x^4}{6} + \dots$$

ومن صيغة التدرج نستنتج أن $a_i > 0$ ، وعلى هذا فإن :

$$v(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4x^3}{3} + \dots + a_n x^n < y(x) \quad x > 0 \quad (12)$$

ومن الحدود الأولى نتوقع أنه ليس فقط $a_i > 0$ بل $a_i \geq 1$ ($i \geq 0$) . إن هذه المتباينة صحيحة عندما تكون i صغيرة كما هو واضح . وبلاستقراء الرياضي نستنتج بفرض $a_j \geq 1$ ($j = 0, 1, \dots, i$) أن :

$$(i+1) a_{i+1} = \sum_{j=1}^i a_j a_{i-j} \geq i+1$$

وعلى هذا فإن :

$$y(x) > 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad x > 0 \quad (13)$$

ومن هذا نستنتج أنه لا يمكن تمديد الحل نحو اليمين أبعد من الموضع

. $x = 1$

(٤-٤) تعاريف : (آ) أوجد لمسألة القيم الابتدائية :

$$y' = e^x + x \cos y \quad y(0) = 0$$

الحدود الخمسة الأولى في النشر الذي يعطي حل هذه المسألة . عين حداً أدنى موجياً a لنصف قطر تقارب هذه المتسلسلة مستقيماً ، مثلاً ، من البرهنة (٤-٣) .

(ب) أوجد الحدود الأولى للحل $\sum a_k x^k$ لمسألة القيم الابتدائية .

$$y' = x^3 + y^3 \quad y(0) = 1$$

ثم أوجد الحل $u = \sum b_k x^k$ لمسألة القيم الابتدائية

$$u' = u^3 \quad u(0) = 1$$

ويبرهن أن $a_k \geq b_k$. استنتج من ذلك حداً أعلى للمعد a ، بفرض أن $\Gamma(0, a)$ فترة الوجود الأعظمية للحل y نحو اليمين .

* * *

الفصل الثاني

المعادلات التفاضلية الخطية (في العقديّة)

١ - نحدثنا في البند الرابع من الفصل الأول عن معادلات تفاضلية يكون فيها كل من المتغير والدالة عقدياً . ولكن لماذا نعالج مثل هذه المعادلات ؟ في الحقيقة ان اناط المعادلات التفاضلية التي يمكن إيجاد حلها بعد القيام بعدد منته من العمليات نجرها على دوال ابتدائية ، قليلة جداً . ولذلك فاننا غالباً مانلجأ إلى دراسة الحلول التي يمكن التعبير عنها بعمليات غير منتهية ، كما نفعل مثلاً في التعبير عن الحل على شكل مجموع متسلسلة غير منتهية من الدوال الابتدائية . ولقد حاولنا في (٤-٣) في الفصل السابق تعيين حل معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى على شكل متسلسلة قوى في x :

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

ولما كانت مسائل تقارب متسلسلات القوى في العقديّة والتعامل مع هذه المتسلسلات يتم في العقديّة كما في الحقيقة ، فهل من المناسب توسيع مدى دراستنا للمعادلات التفاضلية والساح للتغير والدالة أن يكونا عقديين ، علماً بأن المعادلات التفاضلية التي نصادفها في الميكانيك أو الفيزياء هي ذات متغيرات حقيقية .

ان سبب أخذنا بهذا التوسيع للمعادلات التفاضلية هو الاستفادة من تلك العلاقة بين الدوال الأسية والمثلثية ، كما أن دراسة المعادلات في العقدية تمكنتنا من الاستفادة من العديد من الأفكار مثل نقط التفرع والنقط الشاذة والتمديد التحليلي والتكامل على محيط .

سنقصر اهتمامنا في هذا الفصل على المعادلات التفاضلية الخطية ، وسيكون اهتمامنا بشكل رئيسي بالمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية .

(٢ ، ١) النقط العادية والشاذة : إذا كانت لدينا المعادلة الخطية :

$$w'' + p(z) w' + q(z) w = 0 \quad (1)$$

نقول عن نقطة $z = z_0$ انها نقطة عادية للمعادلة التفاضلية (١) إذا كان كل من $p(z)$ و $q(z)$ تحليلياً عند تلك النقطة . ونقول عن كل نقطة غير عادية انما نقطة شاذة للمعادلة . فإذا نظرنا مثلاً في المعادلة :

$$w'' + \frac{z+2}{(z-1)} w' + \frac{z}{(z+1)^2} w = 0$$

فاننا نرى ان النقطتين $z = -1$ و $z = 1$ شاذتان لهذه المعادلة ، وكل نقطة غير هاتين النقطتين من المستوي C هي نقطة عادية للمعادلة :

(٣ ، ١) الحل بجوار نقطة عادية : لنفرض فيما يلي أن $p(z)$ و $q(z)$ في المعادلة (1) تحليليان في القرص $D(z_0, R)$ ولنبين أن لمسألة القيم الابتدائية :

$$w'' + p(z) w' + q(z) w = 0 \quad (2)$$

$$w(z_0) = c_0 \quad w'(z_0) = c_1$$

حلاً تحليلياً وحيداً في القرص $D(z_0, R)$. لنضع ، في سبيل ذلك ، $w' = \alpha$ ،

فتتحول المسألة (2) إلى المسألة المكافئة :

$$\begin{aligned} u' &= -p(z)u - q(z)w \\ w' &= u \\ w(z_0) &= c_0 \quad u(z_0) = c_1 \end{aligned} \quad (3)$$

ولكن بدلاً من البحث في المسألة (3) نبحث في مسألة أعم وهي :

$$\begin{aligned} u_1' &= a_{11}(z)u_1 + a_{12}(z)u_2 \\ u_2' &= a_{21}(z)u_1 + a_{22}(z)u_2 \\ u_i(z_0) &= \alpha_i \quad (i = 1,2) \end{aligned} \quad (4)$$

وذلك بفرض أن دوال تحليلية في القرص D .
والمسألة (4) تكافئ المعادلتين التكامليتين التاليتين :

$$u_i = \alpha_i + \int_{z_0}^z (a_{i1}(z)u_1 + a_{i2}(z)u_2) dz \quad (i = 1,2) \quad (5)$$

لنأخذ قرصاً $D'(z_0, R_1)$ ، بفرض أن $0 < R_1 < R$ ، فتكون a_{ij} محدودة على D' ، وبالتالي يوجد عدد موجب M بحيث يكون :

$$|a_{ij}| < M \quad (i, j = 1,2) \quad (6)$$

لتبسيط الكتابة نستخدم الرموز :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (a_{ij})$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

نقول عن u انه تحليلي على منطقة G إذا كان كل من u_1 و u_2 تحليلياً هناك ، ونقول عنه إنه محدود إذا كان كل من $|u_1|$ و $|u_2|$ محدوداً .

انرمز بـ B افضاء جميع المتجهات u التحليلية والمحدودة على D' وإذا عرفنا على هذا الفضاء التنظيم :

$$\|u\| = \sup_{\bar{D}'} |u(z)| e^{-4M|z-z_0|}$$

وذلك بفرض أن :

$$|u(z)| = \max_i |u_i(z)|$$

فإننا نرى أن هذا الفضاء تام ، فهو فضاء باناخ .
إن المعادلة (5) تكتب الآن بالشكل :

$$u = \alpha + \int_{z_0}^z A u dz \quad (7)$$

أو على الشكل :

$$u = T(u)$$

بفرض أن :

$$T u = \alpha + \int_{z_0}^z A u dz \quad (8)$$

وهنا نلاحظ أنه إذا كان u تحليلياً فإن Tu تحليلي كذلك . ثم إن :

$$|T u(z) - T v(z)| \leq \left| \int_{z_0}^z A (u - v)(z) dz \right|$$

وبما أن التكامل الوارد هنا مستقل عن طريق المكاملة فإننا نختاره القطعة المستقيمة :

$$\zeta(t) = z_0 + t e^{i\varphi} \quad \varphi = \arg(z - z_0) \quad 0 < t < |z - z_0|$$

وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned} |T u(t) - T v(t)| &\leq 2M \int_0^{|z-z_0|} |u(\zeta(t)) - v(\zeta(t))| |\zeta'(t)| dt \\ &\leq 2M \int_0^{|z-z_0|} |u - v| e^{-4Mt} e^{4Mt} dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|u - v\| e^{4M|z-z_0|} \end{aligned}$$

إذن :

$$\|T u - T v\| \leq \frac{1}{2} \|u - v\|$$

يمكننا الآن استخدام مبرهنة النقطة الثابتة فنجد أن لـ T نقطة ثابتة وحيدة w . ونحصل على هذه النقطة الثابتة على شكل نهاية متتالية (u_n) متقاربة بانتظام في \bar{D} ، منطلقين مثلاً من $u_0(z) = \alpha$ و :

$$u_{n+1} = T u_n$$

وهكذا نخلص إلى المبرهنة التالية :

(١ - ٤) إذا كانت الدالتان $p(z)$ و $q(z)$ تحليليتين في القرص $D(z_0, R)$ فإن لمسألة القيم الابتدائية (١) حلاً تحليلياً وحيداً في $D(z_0, R)$.

(١ - ٥) مثال . إذا نظرنا إلى المعادلة :

$$w'' - z w = 0$$

فإننا نلاحظ أن $p(z) = 0$ و $q(z) = -z$ وهاتان تحليلتان في C وبالتالي فإن لمآلة القيمة الابتدائية :

$$w'' - z w = 0 \quad w(0) = c_0 \quad w'(0) = c_1$$

حلاً تحليلياً وحيداً في C . وعلى هذا فإنه يمكن لنا وضع الحل بالشكل :

$$w = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

لتعرض في المعادلة ونطابق بين قوى z المختلفة فنجد :

$$a_2 = 0 \quad n(n-1)a_n = a_{n-3} \quad n \geq 3$$

وإذا لاحظنا أن $a_0 = c_0$ و $a_1 = c_1$ فإننا نجد :

$$a_2 = 0 \quad a_1 = c_1 \quad a_3 = \frac{c_0}{2 \cdot 3} \quad a_4 = \frac{c_1}{3 \cdot 4} \quad a_5 = 0$$

$$a_6 = \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} \quad a_7 = \frac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$$

وبالتالي يكون الحل المطلوب :

$$w = c_0 \left(1 + \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \right) + c_1 \left(z + \frac{z^4}{3 \cdot 4} + \frac{z^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right) \quad (9)$$

وإذا افترضنا c_0 و c_1 ثابتين كفيين فإن (9) تعطي الحل العام للمعادلة التفاضلية المقروضة .

كذلك يمكن حل المسألة بطريقة التقريبات المتتالية ، فنضع $w' = u$ لنحصل على مجموعة المعادلتين :

$$w' = u$$

$$u' = z w$$

وبالتالي فإن :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{bmatrix} \quad \dot{\alpha} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

فإذا انطلقنا من :

$$u_0 = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

فإننا نجد :

$$u_1 = T u_0 = \alpha + \int_0^z A u_0 dz$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} + \int_0^z \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 z \\ c_0 \frac{z^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 + c_1 z \\ c_1 + c_0 \frac{z^2}{2} \end{bmatrix}$$

ويكون :

$$u_2 = T u_1 = \alpha + \int_0^z A u_1 dz$$

$$= \begin{bmatrix} c_0 + c_1 z + c_0 \frac{z^3}{2 \cdot 3} \\ c_1 + c_0 \frac{z^2}{2} + c_1 \frac{z^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$u_3 - T u_3 = \begin{bmatrix} c_0 + c_1 z + c_0 \frac{z^3}{2.3} + c_1 \frac{z^4}{3.4} \\ c_1 + c_0 \frac{z^2}{2} + c_1 \frac{z^3}{3} + c_0 \frac{z^5}{2.5} \end{bmatrix}$$

وهذا يعني ان الحل التقريبي الثالث لـ w هو :

$$w = c_0 \left(1 + \frac{z^3}{2.3} \right) + c_1 \left(z + \frac{z^4}{3.4} \right)$$

وإذا تابعنا فإننا نجد الحل التقريبي التالي هو :

$$w = c_0 \left(1 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.5.6} \right) + c_1 \left(z + \frac{z^4}{3.4} \right)$$

(١ - ٦) التمديد التحليلي للحل : لقد وجدنا في البند السابق (١ - ٥) انه إذا كان $p(z)$ و $q(z)$ تحليليين في القرص $D(z_0, R)$ فإن مسألة القيم الابتدائية

$$w'' + p(z) w' + q(z) w = 0$$

$$w(z_0) = a_0 \quad w'(z_0) = b_0$$

حلاً تحليلياً وحيداً في ذلك القرص .

لنفرض فيما يلي أن $p(z)$ و $q(z)$ تحليليان في منطقة G بسيطة الترابط وأن $z_0 \in G$ ، فعندئذ نستطيع إيجاد الحل التحليلي w_1 لمسألة القيم الابتدائية في أوسع قرص D مركزه z_0 ويقع في G .

لتكن نقطة من القرص ، وليكن :

$$w_1(z_1) = a_1 \quad w'(z_1) = b_1$$

ولننظر في مسألة القيم الابتدائية :

$$w'' + p(z) w' + q(z) w = 0$$

$$w(z_1) = a_1 \quad w'(z_1) = b_1$$

إن لهذه المسألة حلاً تحليلياً وحيداً $w_2(z)$ في أوسع قرص D_1 مركزه z_1 ويقع في G . وبسبب وحدانية الحل نرى أن w_2 و w_1 متطابقان في $G \cap D_1 \neq \emptyset$. واستناداً إلى مفهوم التمديد التحليلي نستطيع القول أن w_2 هو الممدد التحليلي لـ w_1 من D_1 إلى D .

نستنتج من ذلك أن الحل w_1 قابل للتمديد تحليلياً على كل منحني في G ينطلق من z_0 . واستناداً إلى مبرهنة الوحدانية في التمديد التحليلي، فإننا نحصل بذلك على حل $w(z)$ تحليلي في G ويحقق مسألة القيم الابتدائية التي انطلقنا منها.

(٧-١) الحل العام للمعادلة التفاضلية: لقد وجدنا في البند (٦-١)

أن للمعادلة:

$$w'' + p(z) w' + q(z) w = 0$$

حلاً تحليلياً وحيداً w_1 في المنطقة G حيث يكون كل من $p(z)$ و $q(z)$ تحليلياً، ويحقق هذا الحل الشروط:

$$w(z_0) = \alpha_1 \quad w'(z_0) = \beta_1$$

وإذا استبدلنا بـ α_1, β_1 ثابتين آخرين α_2, β_2 فإننا نحصل على حل آخر w_2 للمعادلة المذكورة يحقق الشروط الابتدائية:

$$w(z_0) = \alpha_2 \quad w'(z_0) = \beta_2$$

ومن الواضح أنه إذا كان $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$ فإن أي حل تحليلي للمعادلة التفاضلية في G يمكن كتابته على شكل تركيب خطي من w_1 و w_2 ، أي على الشكل:

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2 \quad (10)$$

ولإثبات ذلك ، نفرض أننا نريد الحل التحليلي الذي يحقق الشروط الابتدائية

$$w(z_0) = \alpha \quad w'(z_0) = \beta$$

نضع $z - z_0$ في (10) وفي المعادلة التي تنشأ عنها بالاستقاق بالنسبة لـ z فنجد

$$\alpha = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 \quad \beta = c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2$$

ولما كان $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$ فإن هاتين المعادلتين تعينان لنا قيمتي c_1 و c_2 وبالتالي نجد الحل التحليلي المطلوب .

وهكذا نرى أن (10) تعطي الحل العام التحليلي للمعادلة التفاضلية .

٢- الحل في جوار نقطة شاذة منتظمة :

لنعالج حل المعادلة التفاضلية :

$$w'' + p(z) w' + q(z) w = 0 \quad (1)$$

في جوار نقطة $z = z_0$ ، وذلك عندما تكون هذه النقطة نقطة شاذة لـ $p(z)$ أو لـ $q(z)$ أو لكل من $p(z)$ و $q(z)$ ، ولنطرح أولاً السؤال التالي ، ما هو الشرط الذي ينبغي أن يحققه كل من $p(z)$ و $q(z)$ كيما يكون للمعادلة (1) حلان أساسيان (غير مرتبطين خطياً) من الشكل :

$$w = (z - z_0)^\lambda \sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (2)$$

بصحان في قرص D مركزه z_0 ، ولا يحوي أية نقطة شاذة أخرى لـ $p(z)$ و $q(z)$ ، $z = z_0$.

يمكننا تبسيط الحسابات ودون أن نمس مومية المسألة أن نأخذ $z_0 = 0$ ،
 فيأخذ الحلان (1) الشكل :

$$w_1 = z^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad w_2 = z^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (3)$$

حيث يمكننا أن نفرض أن $a_0 \neq 0$ و $b_0 \neq 0$ (لو كان $a_0 = 0$ مثلا سحبا z مرفوعة لأس مناسب إلى ما قبل اشارة الجمع بحيث يصبح الحد الأول في المتسلسلة يساوي دائما عددا ثابتا غير مساو للصفر) .

للإجابة على السؤال المطروح نلاحظ أن كلا من w_2 و w_1 حل للمعادلة (1) ،
 لذا فإن :

$$w_1'' + p(z) w_1' + q(z) w_1 = 0$$

$$w_2'' + p(z) w_2' + q(z) w_2 = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين بالنسبة ل $p(z)$ و $q(z)$ نجد :

$$p = - \frac{w_1 w_2'' - w_2 w_1''}{w_1 w_2' - w_2 w_1'} \quad q = - \frac{w_1' w_2'' - w_2' w_1''}{w_1 w_2' - w_2 w_1'} \quad (4)$$

وإذا رمزنا ب Δ لـ $w_1 w_2' - w_2 w_1'$ ، فإننا نجد :

$$p = - \frac{\Delta'}{\Delta} \quad , \quad q = - \frac{w_1' w_2'' - w_2' w_1''}{\Delta} \quad (5)$$

ولكن :

$$w_1' = z^{\lambda_1 - 1} [a_0 \lambda_1 + a_1 (\lambda_1 + 1) z + \dots]$$

$$w_2' = z^{\lambda_2 - 1} [b_0 \lambda_2 + b_1 (\lambda_2 + 1) z + \dots]$$

$$\Delta = z^{\lambda_1 + \lambda_2 - 1} [a_0 b_0 (\lambda_2 - \lambda_1) + d_1 z + \dots]$$

$$(d_1 = (\lambda_2 - \lambda_1)(a_2 b_1 + a_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2))$$

$$\Delta' = z^{\lambda_1 + \lambda_2 - 2} [a_2 b_2 (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2 - 1) + d_1 (\lambda_1 + \lambda_2) z + \dots]$$

وبالتالي فإن :

$$p(z) = - \frac{1}{z} \frac{a_2 b_2 (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2 - 1) + d_1 (\lambda_1 + \lambda_2) z + \dots + d_n (\lambda_1 + \lambda_2 + n - 1) z^n + \dots}{a_2 b_2 (\lambda_2 - \lambda_1) + d_1 z + \dots + d_n z^n + \dots}$$

$$= \frac{1}{z} p_1(z)$$

حيث تكون $p_1(z)$ دالة تحليلية في جوار الصفر ، وإن :

$$p_1(0) = -(\lambda_1 + \lambda_2) \text{ عندما } \lambda_2 = \lambda_1 \text{ و } p_1(0) = -(\lambda_2 + \lambda_1 - 1) \text{ عندما } \lambda_2 \neq \lambda_1$$

وفي كل الأحوال نرى أن $z = 0$ هي قطب بسيط لـ $p(z)$ أو نقطة عادية.

ويمكن حساب $q(z)$ بالاعتماد على العلاقة الثانية من (5) أو من :

$$w_1'' + p(z)w_1' + q(z)w_1 = 0$$

ملاحظين أن :

$$w_1'' = z^{\lambda_1 - 2} [a_0 \lambda_1 (\lambda_1 - 1) + a_1 (\lambda_1 + 1) \lambda_1 z + \dots]$$

بالتعويض نجد :

$$q(z) (a_0 + a_1 z + \dots) = \frac{1}{z^2} [-a_0 \lambda_1 (\lambda_1 - 1) - a_1 (\lambda_1 + 1) \lambda_1 z - \dots]$$

$$= \frac{1}{z^2} p_1(z) (a_0 \lambda_1 + a_1 (\lambda_1 + 1) z \dots)$$

$$= \frac{1}{z^2} [-a_0 \lambda_1 (\lambda_1 - 1 + p_1(0)) + \dots]$$

ومنه نجد :

$$q(z) = \frac{1}{z^2} q_1(z)$$

حيث تكون $q_1(z)$ دالة تحليلية في جوار الصفر ويكون :

$$q_1(0) = -\lambda_1(\lambda_1 - 1 + p_1(0))$$

وهكذا نرى أن $z=0$ هي قطب ثانوي لـ $q(z)$ (قد تكون قطباً بسيطاً أو نقطة عادية) . والنتيجة :

يلزم كي يكون للمعادلة (1) حلان من النمط (2) هو أن تكون النقطة $z=z_0$ قطباً بسيطاً (على الأكثر) لـ $p(z)$ وقطباً ثنائياً $q(z)$ (على الأكثر) .
لنطرح بعد ذلك السؤال التالي :

إذا حققت المعادلة (1) الشرط اللازم هذا ، فهل تكون حلولها من الشكل (2) . للإجابة على هذا السؤال نأخذ أيضاً $z_0=0$ ونكتب المعادلة (1) بالشكل :

$$z^2 w'' + z p_1(z) w' + q_1(z) w = 0 \quad (6)$$

ولنفرض أن نشري $p_1(z)$ و $q_1(z)$ بجوار الصفر هما :

$$p_1(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n \quad , \quad q_1(z) = \sum_0^{\infty} b_n z^n$$

قبل حل (6) نجري التحويل :

$$w(z) = z^\lambda u(z)$$

فيكون :

$$w'(z) = \lambda z^{\lambda-1} u(z) + z^\lambda u'(z) ,$$

$$w''(z) = \lambda(\lambda - 1)z^{\lambda-2}u(z) + 2\lambda z^{\lambda-1}u'(z) + z^{\lambda}u''(z)$$

بالتعويض في (6) نجد :

$$z^2u''(z) + (2\lambda + p_1)z u' + [\lambda(\lambda - 1) + \lambda p_1(z) + q_1(z)]u = 0$$

فإذا اخترنا λ أحد حل المعادلة :

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda a_0 + b_0 = 0 \quad (7)$$

فعمدئذ يكون الحد الثابت في أمثال u معدوماً ، وبالتالي يتحول اهتمامنا إلى حل معادلة من الشكل :

$$zu''(z) + p_2(z)u' + q_2(z)u = 0 \quad (8)$$

ولنبعث عن حل لهذه المعادلة من الشكل :

$$u = \sum_0^{\infty} c_n z^n \quad (9)$$

بالتعويض في (8) نجد :

$$\sum_2^{\infty} n(n-1)c_n z^{n-1} + (p_0 + p_1 z + \dots) \sum_1^{\infty} n c_n z^{n-1} + (q_0 + q_1 z + \dots) \sum_0^{\infty} c_n z^n = 0 \quad (10)$$

وذلك بفرض أن :

$$p_2(z) = \sum_0^{\infty} p_n z^n \quad q_2(z) = \sum_0^{\infty} q_n z^n \quad |z| < R$$

$$(p_0 = 2\lambda + a_0)$$

ومن المطابقة (10) نجد أن :

$$p_0 c_1 + q_0 c_0 = 0$$

وبفرض $p_0 \neq 0$ يكون :

$$c_1 = -\frac{q_0}{p_0} c_0$$

$$n(n+1)c_{n+1} + (n+1)c_{n+1}p_0 + nc_n p_1 + \dots + c_1 p_n \\ + q_0 c_n + q_1 c_{n-1} + \dots + q_n c_0 = 0 \quad n \geq 1$$

أو :

$$(n+1)(n+p_0)c_{n+1} + (np_1+q_0)c_n + \dots + (p_n+q_{n-1})c_1 + q_n c_0 = 0$$

$$c_{n+1} = - \frac{\sum_{j=0}^n [p_{j+1}(n-j) + q_j] c_{n-j}}{(n+1)(n+p_0)} \quad (n+p_0 \neq 0)$$

وهنا نلاحظ أن :

$$|c_{n+1}| \leq \frac{\sum_{j=0}^n |p_{j+1}(n-j) + q_j| |c_{n-j}|}{(n+1)|n+p_0|}$$

واستناداً إلى صيغة كوشي نجد بسهولة أن :

$$|p_j| < \frac{M_1}{R_1^j} \quad |q_j| \leq \frac{M_2}{R_1^j} \quad (R_1 < R) \quad j \geq 0$$

وإذا فرضنا أن $M = \max(M_1, M_2)$ ، فإن :

$$|c_{n+1}| < \frac{M}{(n+1)|n+p_0|} \sum_{j=0}^n |(n-j) \frac{1}{R_1^{j+1}} + \frac{1}{R_1^j}| |c_{n-j}| \\ = \frac{M}{(n+1)|n+p_0|} \left[(n+R_1) \frac{|c_n|}{R_1} + \frac{(n-1)+R_1}{R_1^2} |c_{n-1}| \right. \\ \left. + \dots + \frac{(1+R_1)}{R_1^n} |c_1| + \frac{|c_0|}{R_1^n} \right]$$

فإذا اخترنا n كبيرة بقدر كاف (مثلا $n \geq N$) بحيث يكون :

$$\frac{n + R_1}{(n+1)(n+p_0)} < 1$$

فعدنذ يكون :

$$|c_{n+1}| \leq \frac{M}{R_1} |c_n| + \frac{M}{R_1^2} |c_{n-1}| + \dots + \frac{M}{R_1^n} |c_1| + \frac{M}{R_1^{n+1}} |c_0| \quad n \geq N$$

نختار الآن عدداً $p \geq M+1$ بحيث يكون :

$$|c_k| < \left(\frac{p}{R_1}\right)^k \quad k = 0, 1, \dots, N$$

فعدنذ يكون :

$$|c_{N+1}| \leq \frac{M}{R_1^{N+1}} [P^N + P^{N-1} + \dots + 1]$$

$$= \frac{M}{R_1^{N+1}} \frac{P^{N+1} - 1}{P - 1} = \frac{M}{R_1^{N+1}} P^N \frac{1 - P^{-N-1}}{1 - \frac{1}{P}}$$

$$\leq \frac{M}{P-1} \left(\frac{P}{R_1}\right)^{N+1} < \left(\frac{P}{R_1}\right)^{N+1}$$

وبطريقة الاستقراء الرياضي نستطيع أن نجد :

$$|c_k| \leq \left(\frac{P}{R_1}\right)^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

وهكذا فإن المتسلسلة (9) متقاربة في القرص $|z| < \frac{R_1}{P}$

ويمكن بالتمديد التحليلي الحصول على حل تحليلي للمعادلة (8) في كامل

المنطقة حيث يكون $p_2(z)$ و $q_2(z)$ ، وبالتالي $p_1(z)$ و $q_1(z)$ ، تحليليين :

وهكذا نجد أن المعادلة (6) حلا من الشكل :

$$w_1(z) = z^\lambda \sum_0^{\infty} c_n z^n \quad (11)$$

والسؤال الآن هو أنه إذا كان المعادلة (6) حل من الشكل (11) ، فما هو شكل الحل العام للمعادلة (6) . لذلك نجري التحويل .

$$w = w_1 v$$

وبالتعويض في (6) نجد :

$$z^2 w_1 v'' + (2 w_1' z + p(z) w_1) z v' = 0$$

ومنه :

$$\frac{dv'}{v'} = - \frac{2 w_1' z + p(z) w_1}{z w_1} dz$$

$$v' = c e^{-\int \frac{2w_1'}{w_1} dz} e^{-\int \frac{p(z)}{z} dz}$$

$$v = \frac{A}{w_1^2} e^{-\int \frac{p(z)}{z} dz} = \frac{1}{w_1^2} e^{-\int \frac{a_0 + a_1 z + \dots}{z} dz}$$

$$= \frac{A}{w_1^2} z^{-a_0} e^{-a_1 z - \frac{a_2}{2} z^2 \dots}$$

$$= \frac{A}{w_1^2} z^{-a_0} \sum_0^{\infty} c'_n z^n \quad (A \text{ ثابت مكاملة})$$

وإذا رمزنا لجنري المعادلة (7) بـ λ_1 و λ_2 فيكون $a_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$ ، وإذا

كانت λ في (11) هي λ_1 فيكون :

$$v' = A \frac{z^{-2\lambda_1} z^{\lambda_1 + \lambda_2 + 1}}{(\sum_0^{\infty} c_n z^n)^2} \sum_0^{\infty} c'_n z^n$$

$$= A z^{\lambda_2 - \lambda_1 - 1} \sum_0^{\infty} c'_n z^n$$

وبفرض أن $\lambda_2 \neq \lambda_1$ وأن $\lambda_2 - \lambda_1$ ليس عدداً صحيحاً سالباً نجد بالمكاملة

$$v = A z^{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_0^{\infty} c''_n z^n + B \quad (B \text{ ثابت مكاملة})$$

وعلى هذا يكون الحل العام لـ (6) هو :

$$w = B w_1 + A z^{\lambda_2} \sum_0^{\infty} d_n z^n$$

$$w = B z^{\lambda_1} \sum_0^{\infty} c_n z^n + A z^{\lambda_2} \sum_0^{\infty} d_n z^n \quad (12)$$

أما إذا كان $\lambda_2 = \lambda_1$ ، أي إذا كان للمعادلة (7) جنر مضاعف ، فإنه يكون عندئذ :

$$v = A' \lg z + \sum_0^{\infty} c'''_n z^n + B$$

يكون الحل العام لـ (6) هو :

$$w = A' w_1 \lg z + z^{\lambda_1} \sum_0^{\infty} d_n z^n \quad (13)$$

وفي الحالة التي يكون فيها $\lambda_2 = \lambda_1$ عدداً صحيحاً سالباً فنحن نجد يكون لدينا

$$v = A' \lg z + \sum_0^{\infty} c''_n z^n + B$$

أو يكون

$$v = \sum_0^{\infty} c''_n z^n + B$$

ويكون عندئذ

$$w = A' w_1 \lg z + z^{\lambda_1} \sum_0^{\infty} d_n z^n$$

أو يكون

$$w = z^{\lambda_1} \left[\sum_0^{\infty} d_n z^n + B \sum_0^{\infty} c_n z^n \right] \quad (14)$$

ملاحظة (1) لقد اشتربنا عند البحث عن حل للمعادلة (6) من الشكل (11) أن يكون $p_0 \neq -n$ ، ولكن $p_0 = 2\lambda + a_0$ أي

$$p_0 = 2\lambda + 1 - \lambda_1 - \lambda_2$$

ويصبح الشرط هو :

$$2\lambda + 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \neq -n$$

وبما أننا اخترنا λ أحد جنوري المعادلة (7) ، وليكن λ_1 ، فإن الشرط الأخير يأخذ الشكل :

$$\lambda_1 - \lambda_2 \neq -n - 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

أي أنه ينبغي أن لا يكون $\lambda_1 - \lambda_2$ مساوياً لعدد صحيح سالب . ولذلك إذا كان $\lambda_1 - \lambda_2$ عدداً صحيحاً سالباً فإننا نختار ، ونحن نبعث عن حل من الشكل (11) ، $\lambda_2 - \lambda_1$. في هذه الحالة يأخذ الشرط السابق الشكل :

$$\lambda_2 - \lambda_1 \neq -n-1$$

وهذا شرط محقق لأن $\lambda_2 - \lambda_1$ عدد صحيح موجب .

تعريف : نقول عن النقطة $z = z_0$ انها نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (1) إذا كان $z = z_0$ قطب بسيط (على الأكثر) لـ $p(z)$ وقطب ثنائي (على الأكثر) لـ $q(z)$.

ونستنتج من الدراسة السابقة أنه يلزم وبكفي كي يكون للمعادلة (1) حل من الشكل .

$$(z - z_0)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (15)$$

هو أن يكون الموضع $z = z_0$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (1) .

وتكون λ عندئذ جنراً للمعادلة (7) التي نسميها المعادلة الدليلية . وينبغي ، في الحالة التي يكون فيها الفرق بين جنري المعادلة الدليلية عدداً صحيحاً ، أن تكون λ هي ذلك الجذر الذي اذا طرحنا منه الجذر الآخر كان الناتج عدداً صحيحاً موجباً .

ويكون الحل الأساسي الثاني للمعادلة (1) هو من الشكل (15) أيضاً ، شرط أن لا يكون للمعادلة (7) جذر مضاعف أو يكون الفرق بين الجذرين عدداً صحيحاً وتكون λ لهذا الحل الثاني هو الجذر الثاني للمعادلة (7) .

وإذا كان للمعادلة (7) جذر مضاعف فعندئذ يكون الحل الثاني من الشكل :

$$w = A' w_1 \lg(z - z_0) + (z - z_0)^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n \quad (16)$$

وفي الحالة الأخيرة إذا كان الفرق بين الجذرين عدداً صحيحاً فإن الحل الثاني يكون من الشكل (16) ، وقد يكون من الشكل (15) .

(٢-١) تمرين (١) أوجد الحل العام للمعادلة :

$$z^2(1+z)w'' - z(1+2z)w' + (1+2z)w = 0 \quad (17)$$

في جوار $z = 0$

الحل : نلاحظ ، بتقسيم طرفي المعادلة على $z^2(1+z)$ ، أن $z=0$ هو قطب بسيط لأمثال w' وقطب ثنائي لأمثال w ، أي أن $z=0$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة المفروضة . وعلى هذا فإن للمعادلة المفروضة حلاً من الشكل :

$$w = z^\lambda \sum c_n z^n \quad (18)$$

بالتعويض في (17) نجد :

$$(1+z) \sum_0^\infty (\lambda+n)(\lambda+n-1)c_n z^n - (1+2z) \sum_0^\infty (\lambda+n)c_n z^n + (1+2z) \sum_0^\infty c_n z^n = 0$$

وبالمطابقة نجد :

$$\lambda(\lambda-1)c_1 - \lambda c_0 + c_0 = 0 \quad (19)$$

$$(\lambda+n)(\lambda+n-1)c_n + (\lambda+n-1)(\lambda+n-2)c_{n-1} - (\lambda+n)c_n - 2(\lambda+n-1)c_{n-1} + c_n + 2c_{n-1} = 0 \quad n \geq 1$$

ومن المعادلة الأولى نجد المعادلة الدالية :

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

ولهذه المعادلة جنر مضاعف $\lambda = 1$. بتعويض هذه القيمة في المعادلة

الثانية من (19) نجد :

$$n^2 c_n + (n-2)(n-1)c_{n-1} = 0$$

وإذا وضعنا $n = 1$ نجد $c_1 = 0$ ، وعلى هذا يكون $c_2 = c_3 = \dots = 0$

والحل الأول للمعادلة (17) هو :

$$w_1 = z$$

ولإيجاد الحل الثاني نضع

$$w = z u$$

ونعوض في (17) فنجد :

$$z(1+z)u'' + u' = 0$$

وبالتالي :

$$u' = A \frac{1+z}{z}$$

$$u = A \lg z + Az + B$$

والحل العام للمعادلة هو :

$$w = Bz + Az \lg z + Az^2$$

وهذا الحل من الشكل (13) .

(٢-٢) تمرين (٢) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية بجوار $z = 0$.

$$(2z + 4z^2)w'' - w' - 24zw = 0$$

بسهولة نلاحظ أن $z = 0$ نقطة شاذة منتظمة ، ولذلك فالمعادلة حل من

الشكل :

$$w = z^\lambda \sum_0^{\infty} c_n z^n$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد :

$$(2 + 4z^2) \sum_0^{\infty} (n + \lambda)(n + \lambda - 1) c_n z^n -$$

$$- \sum_0^{\infty} c_n (\lambda + n) z^n - 24 \sum_0^{\infty} c_n z^{n+2} = 0$$

وبالمطابقة نجد :

$$2\lambda(\lambda - 1)c_0 - \lambda c_0 = 0$$

$$2(\lambda + 1)(\lambda)c_1 - c_1(\lambda + 1) = 0$$

$$2(n + \lambda)(n + \lambda - 1)c_n + 4(n + \lambda - 2)(n + \lambda - 3)c_{n-2}$$

$$- c_n(\lambda + n) - 24c_{n-2} = 0$$

فالمعادلة الدليلية هي :

$$2\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

وجنرنا هذه المعادلة هما :

$$\lambda = 0 \quad \lambda = \frac{3}{2}$$

ولأجل $\lambda = 0$ نجد $c_1 = 0$ ونجد :

$$2n(n-1)c_n + 4(n-2)(n-3)c_{n-2} - n c_n - 24c_{n-2} = 0$$

$$(2n^2 - 3n)c_n + 4(n^2 - 5n)c_{n-2} = 0$$

أو :

$$c_n = -\frac{4(n-5)}{2n-3} c_{n-2}$$

وهكذا نجد :

$$0 = c_1 - c_3 + c_5 - \dots \quad c_2 = 12 c_0 \dots \quad c_4 = \frac{4}{5} c_2 = \frac{48}{5} c_0 \dots$$

$$c_{2n} = (-1)^n 3 (4)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-5)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)} c_0$$

والحل الأول هو :

$$W_1 = c_0 \left(1 + 12 z^2 + \frac{48}{5} z^4 - \frac{192}{45} z^6 \dots \right)$$

ولأجل $\lambda = \frac{3}{2}$ نجد $c_1 = 0$ ونجد

$$n(2n+3)c_n + (2n-7)(2n+3)c_{n-2} = 0$$

أو :

$$c_n = -\frac{2n-7}{n} c_{n-2}$$

وهكذا نجد :

$$0 = c_1 - c_3 + c_5 - \dots \quad c_2 = \frac{3}{2} c_0 \quad c_4 = -\frac{3}{8} c_0$$

$$c_{2n} = (-1)^{n+1} 3 \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-7)}{2 \cdot 4 \dots 2n} c_0$$

والحل الثاني هو :

$$W_2 = c_0 z^{3/2} \left(1 + \frac{3}{2} z^2 - \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} z^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} z^6 - \dots \right)$$

والحل العام هو :

$$w = A w_1 + B w_2$$

(٢-٣) تمرين (٣): أوجد الحل العام في جوار $z = 1$ للمعادلة :

$$z^2 (1-z)^2 w'' + z(1-z)(1-2z) w' - w = 0$$

الحل : نجري التحويل $z-1=t$ ونلاحظ أن :

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \quad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{d^2w}{dt^2}$$

فناخذ المعادلة التفاضلية الشكل :

$$t^2 (t+1)^2 \frac{d^2w}{dt^2} + t(t+1)(2t+1) \frac{dw}{dt} - w = 0$$

إن النقطة $t=0$ نقطة ساذجة منتظمة لهذه المعادلة ، ولذلك فالمعادلة حل من الشكل :

$$w = t^\lambda \sum_0^{\infty} c_n t^n$$

بالتعويض نجد :

$$(t+1)^2 \sum_0^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) c_n t^n + \\ + (2t^2+3t+1) \sum_0^{\infty} (\lambda+n) c_n t^n - \sum_0^{\infty} c_n t^n = 0$$

وبالمطابقة نجد :

$$[\lambda(\lambda-1) + \lambda - 1] c_0 = 0$$

$$(\lambda+1)\lambda c_1 + 2\lambda(\lambda-1) c_0 + (\lambda+1) c_1 + 3\lambda c_0 - c_1 = 0$$

$$(\lambda+n)(\lambda+n-1) c_n + 2(\lambda+n-1)(\lambda+n-2) c_{n-1} + (\lambda+n-2)(\lambda+n-3) c_{n-2}$$

$$+ (\lambda + n)c_n + 3(\lambda + n - 1)c_{n-1} + 2(\lambda + n - 2)c_{n-2} - c_n = 0 \quad (n \geq 2)$$

والمعادلة الدليلية هي :

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

ولها جذران هما $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = -1$. إن الجذر الأول يعطينا حلا من الشكل المفروض ، في حين قد يخفق الجذر الثاني . ولكن إذا لم يخفق الجذر الثاني فعندئذ يعطينا الحل العام دفعة واحدة . وعلى هذا فائنا نجرب أولاً $\lambda = -1$ فنجد بالتحويض في المعادلات الأخيرة .

$$c_0 - c_1 = 0$$

$$n(n-2)c_n + (n-2)(2n-3)c_{n-1} + (n-2)(n-3)c_{n-2} = 0 \quad n \geq 2$$

فإذا وضعنا في الأخيرة $n = 2$ نجد :

$$0c_2 + 0c_1 + 0c_0 = 0$$

وهذا يعني أن c_2 اختيارية ، وبذلك يكون لدينا ثابتان اختياريان هما c_0 و c_1 وإذا وضعنا $n = 3$ نحصل على :

$$c_3 = -c_2$$

ونجد كذلك :

$$c_4 = c_3 , \quad c_5 = -c_3 , \quad c_6 = c_3 , \dots$$

والحل العام هو :

$$w = t^{-1} [c_0 + c_0 t + c_1 t^2 - c_2 t^3 + c_2 t^4 - c_2 t^5 + \dots]$$

$$= c_0 \frac{1+t}{t} + c_1 t (1 - t + t^2 - t^3 + \dots)$$

$$-c_0 \frac{1+t}{t} + c_2 \frac{t}{1+t} = c_0 \frac{z}{z-1} + c_2 \frac{z-1}{z}$$

(٢-٤) تمارين للحل

١ - اثبت أن الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - \nu^2) w = 0$$

في جوار الصفر هو :

$$w = z^{-\frac{1}{2}} (c_0 \cos z + c_1 \sin z)$$

إذا كان $\nu = \frac{1}{2}$ ، وهو :

$$w = c_0 \left(1 - \frac{z^2}{2^2} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} + \dots \right)$$

$$+ c_1 \left[\left(1 - \frac{z^2}{2^2} + \dots + \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} + \dots \right) \lg z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \Big]$$

إذا كان $\nu = 0$ ، وهو تركيب خطي من :

$$w_1 = z \left\{ 2 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{4^2 \cdot 6} - \frac{z^6}{4^3 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \right\}$$

$$w_2 = -\frac{1}{4} w_1 \lg z + \frac{1}{z} \left(1 + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^4}{2^3 \cdot 4} \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) + \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{1}{6} \right) + \dots \right)$$

إذا كان $\nu = 1$

٢ - أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$z w'' + w' - 4 z w = 0$$

يجوار الصفر .

الجواب :

$$w_1 = \sum_0^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n!)^2}$$

$$w_2 = w_1 \lg z - \left\{ z^2 + \frac{z^4}{(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{z^6}{(3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots \right\}$$

٣ - أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$2(2-z)z^2 w'' - (4-z)z w' + (3-z)w = 0$$

في جوار الصفر .

الجواب :

$$w_1 = \sqrt{z} \quad w_2 = \sqrt{z} \sqrt{1 - \frac{1}{2}z}$$

٤ - أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$z^2(1+z)^2 w'' + z(1-z^2) w' + (1+z+2z^2) w = 0$$

الجواب :

$$w = (1+z)(A \cos \lg z + B \sin \lg z)$$

(٢-٥) الحل في جوار نقطة ساذة :

لتفرض أن $z = a$ نقطة ساذة (منتظمة أو غير منتظمة) للمعادلة التفاضلية :

$$w'' + p(z) w' + q(z) w = 0$$

إن هذه النقطة الساذة نقطة منعزلة ، وعلى هذا فهناك جوار لها لاجبوي أية

$$\Delta = w_1 w_2' - w_2 w_1' = \frac{1}{w_1^2} \frac{d}{dz} \left(\frac{w_2}{w_1} \right)$$

وعلى هذا فإن :

$$\Delta = c e^{-\int_{z_0}^z p(z) dz}$$

وبالتالي فإن :

$$w_1^2 c e^{-\int_{z_0}^z p(z) dz} \frac{d}{dz} \left(\frac{w_2}{w_1} \right) = c$$

وبما أن الطرف الأيمن ثابت فهو يبقى كما هو لدى التمديد التحليلي . فإذا كان w_2, w_1 مرتبطين خطياً فإن النسبة بينهما ثابتة وبالتالي يكون $c = 0$. وعلى هذا سيكون بعد التمديد التحليلي $\frac{d}{dz} \left(\frac{w_2^*}{w_1^*} \right) = 0$ ، والحلان الجديدان مرتبطين خطياً . أما إذا كان الحلان مستقلين خطياً فإن $c \neq 0$ وبالتالي يكون $\frac{d}{dz} \left(\frac{w_2^*}{w_1^*} \right) \neq 0$ ، ومنه النتيجة التالية :

إن التمديد التحليلي لحلين مستقلين خطياً هما حلان مستقلان خطياً كذلك .

ولما كان هذان الحلان الجديدان هما حلان للمعادلة التفاضلية المفروضة فإن كلاً منها تركيب خطي من الحلين w_2, w_1 ، أي أن :

$$w_1^* = c_{11} w_1 + c_{12} w_2$$

(20)

$$w_2^* = c_{21} w_1 + c_{22} w_2$$

ويكون $c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} \neq 0$ ، لأنه لو لم يكن الأمر كذلك ، لكان

w_1^* و w_2^* مرتبطين خطياً .

لنحاول البحث عن تلك الحلول التي لا تختار بمددها عنها بعد دورة واحدة
عول a إلا بضروب ثابت ، أي لنبعث عن الحلول التي تحقق :

$$w^* = \mu w \quad (21)$$

بما أن w حل فهو تركيب خطي للعطين المستقلين خطياً w_1 و w_2 ، أي :

$$w = a_1 w_1 + a_2 w_2$$

وبالتحديد دورة واحدة في الاتجاه الموجب عول a يكون :

$$w^* = a_1 w_1^* + a_2 w_2^*$$

وبالاستفادة من (20) و (21) نجد :

$$a_1(c_{11}w_1 + c_{12}w_2) + a_2(c_{21}w_1 + c_{22}w_2) = \mu (a_1w_1 + a_2w_2)$$

ولما كان w_1 و w_2 مستقلين خطياً فينبغي أن يكون :

$$(c_{11} - \mu) a_1 + c_{21} a_2 = 0$$

(22)

$$c_{12} a_1 + (c_{22} - \mu) a_2 = 0$$

وإذا نظرنا إلى هاتين المعادلتين على انها معادلتان بالمجهولين a_1 و a_2 فاننا نجد
أنه كي يكون لهذه المجموعة حل غير الحل الصفري ينبغي أن يكون :

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \mu & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} - \mu \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في μ . فإذا كان μ_1 حلاً لهذه المعادلة وإذا

عوضاً هذا الحل في (22) فإننا نجد القيمتين اللتين نبحث عنهما لـ a_1 و a_2 ، وبالتالي نحصل على حل w يحقق (21) .

ولإسك اننا لو انطلقنا من حلين مستقلين خطياً للمعادلة مختلفين عن w_1 و w_2 ، فإن التحويل (20) سيغير ولكن جذري (23) لا يتغيران . ويمكن للمرء أن يتحقق من هذا الأمر بإعادة الحسابات منطلقاً من المجموعة الأساسية الجديدة ملاحظاً أن كلا من عنصري هذه المجموعة هو تركيب خطي من عنصري المجموعة الأساسية الأولى w_1 و w_2 غير أننا لا نحتاج لمثل هذه الحسابات الطويلة إذا لاحظنا المعنى المحدد لجذري (23) ، هذا المعنى المستقل عن اختيار الحلول الأساسية .

نفرض الآن أن $\mu = \mu_1$ هو جذر λ (23) وأن w_1 هو الحل الذي يحقق الشرط

$$w_1^* = \mu_1 w_1$$

ولنتظر في التابع h المعروف بـ

$$h(z) = (z - a)^{\lambda_1} \quad \lambda_1 = \frac{1}{2\pi i} \lg \mu_1$$

إن النقطة $z = a$ هي نقطة تفرع لهذا التابع ، وكل فرع من هذه الفروع تحليلي في جوار z_0 . فإذا انطلقنا من أحد هذه الفروع ، وليكن الفرع الرئيسي مثلاً :

$$h(z) = e^{\lambda_1 \text{Lg}(z-a)}$$

وبعد الدوران مرة واحدة حول $z = a$ في الاتجاه الموجب يضاف إلى القيمة المقدار $2\pi i$ ، وبالتالي يكون :

$$h^*(z) = e^{\lambda_1 (\text{Lg}(z-a) + 2\pi i)} = h(z) e^{\text{Lg} \mu_1}$$

$$= \mu_1 h(z)$$

نستنتج من هذا أن التابع المعروف بـ :

$$z \rightarrow \frac{w_1(z)}{h(z)}$$

يعود إلى قيمته التي انطلق منها بعد دورة كاملة في الاتجاه الموجب حول $z=a$ ، فهو تابع منتظم ويمكن تمثيله بتسلسلة لوران في جوار $z=a$ أي أن :

$$\begin{aligned} w_1(z) &= h(z) \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \\ &= (z-a)^{\lambda_1} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \end{aligned} \quad (24)$$

فإذا كان للمعادلة (23) جذران مختلفان فإننا نحصل على حلين من الشكل (24) أما إذا كان للمعادلة (23) جذر مضاعف فإننا لانحصل إلا على حل واحد ، فإذا انطلقنا من هذا الجذر w_1 ، وأجرينا التحويل $w = w_1 u$ كما فعلنا في حالة النقطة الشاذة المضاعفة فإننا نجد الشكل التالي للحل الثاني :

$$w_2 = (z-a)^{\lambda_1} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n + b w_1 \lg(z-a) \quad (25)$$

بفرض أن b ثابت .

وهكذا نصل إلى النتيجة التالية :

إذا كانت $z=a$ نقطة شاذة منعزلة لـ $p(z)$ و $q(z)$ فعندئذ يوجد للمعادلة التفاضلية المفروضة حلان مستقلان خطياً في جوار هذه النقطة يمثلان بالشكل (24) أو (25) ومن الواضح أننا لو رغبتنا الحصول على حل المعادلة بتعويض المتسلسلة (24) في المعادلة أو المتسلسلة (25) والمطابقة لتعيين الأمثال ، فإننا نحصل ،

بوجه عام ، على عدد غير منته من المعادلات بعدد غير منته من الجاهيل .
ولذلك فإن العملية هذه لا تكون ممكنة إلا عندما تحوي النشور في (24) و (25)
عدداً متنياً فقط من الحدود ذات الأسس السالبة ، وهذه هي حالة النقطة الشاذة
المنتظمة .

(٢ - ٦) الحل في جوار نقطة اللانهاية

لدراسة حل المعادلة :

$$w'' + p(z) w' + q(z)w = 0 \quad (26)$$

في جوار $z = \infty$ ، نعري التحويل $z = \frac{1}{t}$ ونبحث عن الحل في جوار الصفر ،
وبعد إيجاد الحل هناك نعود ونضع فيه $t = \frac{1}{z}$ فنحصل على الحل في جوار
اللانهاية .

ولما كان :

$$w' = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = -t^2 \frac{dw}{dt}$$

$$w'' = \frac{d}{dz} w' = \frac{d}{dz} \left(-t^2 \frac{dw}{dt} \right) = -t^2 \left(-2t \frac{dw}{dt} - t^2 \frac{d^2w}{dt^2} \right) \\ = 2t^3 \frac{dw}{dt} + t^4 \frac{d^2w}{dt^2}$$

فإننا نجد بالتعويض في (26) :

$$t^4 \frac{d^2w}{dt^2} + \left(2t^3 - t^2 p \left(\frac{1}{t} \right) \right) \frac{dw}{dt} + q \left(\frac{1}{t} \right) w = 0$$

فإذا كانت النقطة $t = 0$ نقطة شاذة قابلة للإزالة لكن من :

$$\frac{2t^3 - t^2 p\left(\frac{1}{t}\right)}{t^4} = \frac{2t - p\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} = 2z - z^2 p(z) \quad (27)$$

$$\frac{1}{t^4} q\left(\frac{1}{t}\right) = z^4 q(z) \quad (28)$$

فان النقطة $t=0$ ، وبالتالي $z=\infty$ ، نقطة عادية لـ (26) ويكون للمعادلة حلان من الشكل :

$$w = \sum_0^{\infty} c_n t^n = \sum_0^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$$

ومن الواضح انه يشترط كي تكون $t=0$ نقطة شاذة قابلة للإزالة لـ (27) هو أن يكون :

$$p\left(\frac{1}{t}\right) = 2t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + \dots$$

أي :

$$p(z) = \frac{2}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \dots$$

وهذا يعني أن $z=\infty$ هي صفر من المرتبة الأولى وأن $\lim_{z \rightarrow \infty} zp(z) \rightarrow 2$.
ويشترط كي تكون $t=0$ ، نقطة شاذة قابلة للإزالة لـ (28) هو أن يكون :

$$q\left(\frac{1}{t}\right) = b_1 t^4 + b_2 t^5 + \dots = \frac{b_1}{z^4} + \frac{b_2}{z^5} + \dots$$

أي أن $z=\infty$ صفر من المرتبة الرابعة على الأقل .

وإذا كانت النقطة $t=0$ قطباً بسيطاً ، على الأكثر ، لـ (27) ، وقطباً

ثنائياً على الأكثر لـ (28) فإن هذه النقطة وبالتالي النقطة $z = \infty$ هي نقطة شاذة منتظمة. ومن الواضح أن $z = \infty$ تكون عندئذ صفراً من المرتبة الأولى على الأقل لـ $p(z)$ ، و صفراً من المرتبة الثانية على الأقل لـ $q(z)$. ويكون الحل في هذه الحالة من الشكل :

$$w_1 = t^\lambda \sum_0^{\infty} c_n t^n = \frac{1}{z^\lambda} \sum_0^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$$

أو من الشكل :

$$\begin{aligned} w_2 &= t^\lambda \sum_0^{\infty} c_n t^n + b w_1 \lg t \\ &= \frac{1}{z^\lambda} \sum_0^{\infty} \frac{c_n}{z^n} - b w_1 \lg z \end{aligned}$$

(٢ - ٧) أمثلة

(١) إذا نظرنا في المعادلة :

$$w'' + \frac{z-1}{z(z+1)} w' + \frac{2}{(z+1)^2} w = 0$$

فإننا نجد أن $z = \infty$ صفر من المرتبة الأولى لأمثال w' و صفر من المرتبة الثانية لأمثال w فالنقطة هذه نقطة شاذة منتظمة.

(٢) وإذا نظرنا في المعادلة :

$$w'' + \frac{2z-1}{z(z+1)} w' + \frac{2}{(z+1)^2} w = 0$$

فإننا نجد أن $z = \infty$ صفر من المرتبة الأولى لـ $p(z)$ ، وأن $z p(z) \rightarrow 2$
 $z \rightarrow \infty$

وأن $z = \infty$ صفر من المرتبة الرابعة لـ $q(z)$ ، وعلى هذا فإن هذه النقطة نقطة عادية للمعادلة .

٣ - معادلة فوكس

إذا كانت جميع النقاط الشاذة للمعادلة التفاضلية :

$$w'' + p(z) w' + q(z) w = 0 \quad (1)$$

نقطة شاذة منتظمة ، وكانت نقطة اللانهاية هي على الأكثر نقطة شاذة منتظمة فإننا نسمي المعادلة (1) معادلة فوكس .

وعلى سبيل المثال ان المعادلة :

$$z^2 (1 - z)^2 w'' + z (1 - z^2) w' + (1 + z^2) w = 0 \quad (2)$$

هي معادلة فوكس ، لأن النقط الشاذة المنتهية لهذه المعادلة هي $z = 1$ و $z = 0$ وكل من هاتين النقطتين نقطة شاذة منتظمة . أما نقطة اللانهاية فهي صفر من المرتبة الأولى لـ $p(z)$ وصفر من المرتبة الثانية لـ $q(z)$ فهي أيضاً نقطة شاذة منتظمة . لنفرض الآن أن النقط الشاذة المنتظمة المنتهية للمعادلة (1) هي a_1, a_2, \dots, a_m . عندئذ ينبغي أن يكون $p(z)$ و $q(z)$ من الشكل :

$$p(z) \equiv \sum_1^m \frac{A_k}{z - a_k} + p_1(z)$$

$$q(z) \equiv \sum_1^m \frac{B_k}{(z - a_k)} + \sum_1^m \frac{C_k}{(z - a_k)^2} + q_1(z)$$

بفرض أن $p_1(z)$ و $q_1(z)$ تحليليان في C ، فهما تابعان صحيحان .

ولكن بما أنه ينبغي أن تكون $z = \infty$ صفراً من المرتبة الأولى على الأقل لـ $p(z)$ فإنه ينبغي أن يسعى $p_1(z)$ إلى الصفر عندما تسعى z إلى اللانهاية

وبالتالي فإن $p_1(z) = 0$ وكذلك ينبغي أن تكون $z = \infty$ صفراً من المرتبة الثانية على الأقل لـ $q(z)$ فإنه ينبغي أن يكون $q_1(z) = 0$ ، وأن يتحقق كذلك $z q(z) \rightarrow 0$ أي أن يكون :

$$\sum_1^n B_n = 0 \quad (3)$$

وعلى سبيل المثال فإن المعادلة (2) تكتب بالشكل :

$$w'' + \left[\frac{1}{z} + \frac{2}{1-z} \right] w' + \left[\frac{2}{z} - \frac{2}{z-1} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{(z-1)^2} \right] w = 0$$

وهنا نلاحظ أن :

$$B_1 = 2 \quad B_2 = -2 \quad B_1 + B_2 = 0 \quad (4)$$

(٣ - ١) معادلة فوكس ذات نقطة شاذة واحدة :

إذا فرضنا أن للمعادلة (١) ذات نقطة شاذة واحدة a فعندئذ ينبغي أن يكون :

$$p(z) = \frac{A}{z-a} \quad q(z) = \frac{B}{z-a} + \frac{C}{(z-a)^2}$$

واستناداً إلى الشرط (4) نرى أنه ينبغي أن يكون $B = 0$ ، وبالتالي فالمعادلة (١) من الشكل :

$$w'' + \frac{A}{z-a} w' + \frac{C}{(z-a)^2} w = 0 \quad (5)$$

وبما أنه ينبغي أن تكون نقطة اللانهاية نقطة منتظمة فإنه ينبغي أن يتحقق

$z \rightarrow \infty$ عندما $z \rightarrow \infty$ وأن تكون نقطة اللانهاية صفراً من المرتبة الرابعة على الأقل . وعلى هذا فإن $C=0$ و $A=2$ ، والمعادلة تأخذ الشكل :

$$w'' + \frac{2}{z-a} w' = 0$$

وحل هذه المعادلة من الشكل :

$$w = \frac{C_1}{z-a} + C_2$$

(٢ - ٣) معادلة فوكس بنقطتين شاذتين :

من الواضح أننا إذا فرضنا أن النقطتين الشاذتين هما $z=a$ و $z=\infty$ فمعادلة فوكس هي من الشكل (5) ، وهذه هي معادلة أولر . وتتحول هذه المعادلة إلى معادلة ذات أمثال ثابتة بإجراء التحويل $t = \lg(z-a)$.

(٣ - ٣) معادلة فوكس (المعادلة فوق الهندسية) :

تسمى معادلة فوكس بثلاث نقاط شاذة معادلة فوكس أو المعادلة فوق الهندسية . ويمكن بتحويل موبوس نقل هذه النقاط إلى المواضع $0, 1, \infty$. ولذلك سنحاول فيما يلي الوصول إلى هذه المعادلة وإلى حلها فافترض أن النقاط الشاذة المنتظمة هي $0, 1, \infty$. إن مثل هذا الفرض لا يقلل من عمومية المسألة .

ومن الواضح أنه يكون عندئذ :

$$p(z) = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z-1} \quad q(z) = \frac{B_1}{z} - \frac{B_2}{z-1} + \frac{C_1}{z^2} + \frac{C_2}{(z-1)^2}$$

أو :

$$p(z) = \frac{p_0 + p_1 z}{z(1-z)} \quad q(z) = \frac{q_0 + q_1 z + q_2 z^2}{z^2(1-z)^2}$$

بفرض :

$$p_0 = -A_1 \quad p_1 = A_1 + A_2 \quad q_0 = C_1 \quad q_1 = B_1 - 2C_1 \quad q_2 = -B_1 + C_1 + C_2$$

فالشكل العام لمعادلة غنوص هو :

$$z^2(1-z)^2 w'' + z(1-z)(p_0 + p_1 z)w' + (q_0 + q_1 z + q_2 z^2)w = 0$$

ان المعادلة الدليلية للحل بجوار الصفر هي :

$$\lambda(\lambda - 1) + A_1 \lambda + C_1 = 0 \quad (6)$$

والمعادلة الدليلية للحل بجوار $z=1$ هي :

$$\lambda(\lambda - 1) + A_2 \lambda + C_2 = 0 \quad (7)$$

وللوصول إلى المعادلة الدليلية بجوار $z = \infty$ نجري التحويل $z = \frac{1}{t}$ فتأخذ

المعادلة الشكل :

$$t^4 \frac{d^2 w}{dt^2} + (2t^3 - A_1 t^3 - \frac{A_2 t^3}{1-t}) \frac{dw}{dt} + (B_1 t + C_1 t^2 - \frac{B_1 t}{1-t} + \frac{C_2 t^2}{(1-t)^2}) w = 0$$

والمعادلة الدليلية هي :

$$\lambda(\lambda - 1) + (2 - A_1 - A_2) \lambda + (C_1 + C_2 - B_1) = 0 \quad (8)$$

لنرمز لجذري المعادلة (6) بـ α_1, α_2 ولجذري المعادلة (7) بـ β_1, β_2 ولجذري

المعادلة (8) بـ γ_1, γ_2 فيكون :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - A_1 \quad \beta_1 + \beta_2 = 1 - A_2 \quad \gamma_1 + \gamma_2 = A_1 + A_2 - 1 \quad (9)$$

$$\alpha_1 \alpha_2 = C_1 \quad \beta_1 \beta_2 = C_2 \quad \gamma_1 \gamma_2 = C_1 + C_2 - B_1$$

ومن نجد :

$$A_1 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 \quad A_2 = 1 - \beta_1 - \beta_2 \quad C_1 = \alpha_1 \alpha_2 \quad C_2 = \beta_1 \beta_2$$

$$B_1 = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2 \quad (10)$$

ومن (9) نجد أيضاً

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1$$

أي أن مجموع جميع جذور المعادلات الدليلية يساوي الواحد

ولتبسيط شكل معادلة غوص نجري التحويل :

$$w = z^p (1 - z)^q u$$

فلا تتأثر بذلك النقاط الشاذة $0, 1, \infty$ ، ولكن الجذرين α_1, α_2 للمعادلة الدليلية يصبحان $\alpha_1 - p, \alpha_2 - p$ والجذرين β_1, β_2 يصبحان $\beta_1 - q, \beta_2 - q$ فإذا اخترنا p مساوية α_1 و q مساوية β_1 فعندئذ يصبح جذرا المعادلة الدليلية للحل في جوار الصفر هما 0 و $\alpha_2 - \alpha_1$ وجنرا المعادلة الدليلية في جوار $z = 1$ هما 0 و $\beta_2 - \beta_1$.

لنرمز للجذر $\alpha_2 - \alpha_1$ بـ $1 - \gamma$ ولجذري المعادلة الدليلية في جوار اللانهاية بـ α و β فعندئذ يكون الجذر $\beta_2 - \beta_1$ مساوياً بـ $\beta - \alpha - \gamma$ وذلك لأن مجموع جميع جذور المعادلات الدليلية يساوي الواحد ، واستناداً إلى (10) ، نجد :

$$A_1 = \gamma \quad A_2 = 1 - \gamma + \alpha + \beta \quad C_1 = C_2 = 0 \quad B_1 = -\alpha \beta$$

وبالتالي فإن :

$$p(z) = \frac{\gamma}{z} + \frac{1 - \gamma + \alpha + \beta}{z-1} = \frac{-\gamma + (1 + \alpha + \beta)z}{z(z-1)}$$

$$q(z) = \frac{\alpha \beta}{z(z-1)}$$

ومعادلة غوص تكون من الشكل :

$$z(z-1)w'' + (-\gamma + (1 + \alpha + \beta)z)w' + \alpha \beta w = 0 \quad (11)$$

والحصول على الحل العام لهذه المعادلة في جوار الصفر نضع :

$$w = z^\lambda \sum c_n z^n \quad (c_0 \neq 0)$$

ف نجد أن جذري المعادلة الدليلية هما $\lambda - 1 - \gamma$ ، $\lambda - 0$ ، كما نجد :

$$c_{n+1} = \frac{(\lambda + n + \alpha)(\lambda + n + \beta)}{(\lambda + n + 1)(\lambda + n + \gamma)} c_n$$

لأجل $\lambda - 0$ يكون :

$$c_{n+1} = \frac{(n + \alpha)(n + \beta)}{(n + 1)(n + \gamma)} c_n$$

فإذا فرضنا أن γ لا يساوي الصفر أو أي عدد صحيح سالب ، فإن :

$$c_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n \cdot \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} c_0 = \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n}$$

وذلك بفرض :

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$$

وباختيار $c_0 = 1$ نجد الحل التالي الموافق لـ $\lambda - 0$

$$w_1 = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} z + \dots + \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} z^n + \dots$$

ولقد جرت العادة أن نرمز للمتسلسلة في الطرف الأيمن بـ $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ وان يسمى مجموعها الدالة فوق الهندسية. ومن الواضح أن هذه المتسلسلة متقاربة في قرص الوحدة. وهذا ينسجم مع وجود نقطة شاذة للمعادلة في الموضع $z = 1$. ولأجل $\lambda = 1 - \gamma$ نجد:

$$c_{n+1} = \frac{(1 - \gamma + n + \alpha)(1 - \gamma + n + \beta)}{(2 - \gamma + n)(n+1)} c_n$$

وبالتالي فإن:

$$c_n = \frac{(\alpha - \gamma + 1)(\alpha - \gamma + 2) \dots (\alpha - \gamma + n)(\beta - \gamma + 1)(\beta - \gamma + 2) \dots (\beta - \gamma + n)}{(2 - \gamma)(2 - \gamma + 1) \dots (1 - \gamma + n) 1 \cdot 2 \dots n} c_0$$

$$= \frac{(\alpha - \gamma + 1)_n (\beta - \gamma + 1)_n}{n! (2 - \gamma)_n} c_0$$

وعلى هذا فإن الحل الثاني للمعادلة فوق الهندسية، بفرض أن γ لا يساوي أي عدد صحيح موجب أكبر من 2، هو:

$$w_2 = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1; \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; z)$$

والحل العام، بفرض أن γ لا يساوي أي عدد صحيح، هو:

$$w = C_1 F(\alpha, \beta; \gamma; z) + C_2 z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; z)$$

ويمكن الوصول إلى الحل العام في جوار $z = 1$ مباشرة أو بإجراء التحويل

$z - 1 = t$ فنجد:

$$w = C_1 F(\alpha, \beta; 1 + \alpha + \beta - \gamma; 1 - z) +$$

$$+ C_2 (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha; 1+\gamma-\alpha-\beta; 1-z)$$

والحل العام في جوار $z = \infty$ هو :

$$w = C_1 \left(\frac{1}{z}\right)^\alpha F(\alpha, 1+\alpha-\gamma; 1+\alpha-\beta; \frac{1}{z}) +$$

$$+ C_2 \left(\frac{1}{z}\right)^\beta F(\beta, 1+\beta-\gamma; 1+\beta-\alpha; \frac{1}{z})$$

(٣-٤) تمارين

(١) بين أن :

$$(1-z)^{-\alpha} = F(\alpha, \beta; \beta; z) = F(\alpha, 1; 1; z)$$

$$\lg \frac{1}{1-z} = F(1, 1; 2; z)$$

$$e^z = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} F(\alpha, \beta; \beta; \frac{z}{\alpha})$$

$$\text{arc sin } z = z F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right)$$

(٢) برهن أن :

$$\frac{d}{dz} F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z)$$

(٣) بين أن الحل العام للمعادلة :

$$z(1-z) w'' + \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 1)(1-2z)w' - \alpha\beta w = 0$$

الذي يصح في $|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ هو :

$$w = AF\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{\alpha}; \frac{1}{2}; (1-2z)^2\right) + B(1-2z)F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}; \frac{3}{2}; (1-2z)^2\right)$$

بفرض أن A و B ثابتان كفيان .

(٤) بين أن حلول المعادلة :

$$z w'' - (1+z) w' + w = 0$$

منتظمة في جوار الصفر .

(نقول عن كل نقطة شاذة للمعادلة ولكن الحلول في جوارها منتظمة ، أنها نقطة شاذة ظاهرياً . فالنقطة $z = 0$ في المعادلة المذكورة نقطة شاذة ظاهرياً) .

٤ - معادلة لوجاندر التفاضلية

لقد عالجنا في البند السابق حل معادلة غوص بفرض أن الفرق بين جنري المعادلة الدليلية لا يساوي أي عدد صحيح . سندرس في هذا البند معادلة من نمط معادلة غوص لا يتحقق فيها هذا الشرط . هذه المعادلة هي معادلة لوجاندر التفاضلية :

$$(1-z^2) w'' - 2z w' + n(n+1) w = 0 \quad (1)$$

بفرض أن n عدد صحيح .

تبرز هذه المعادلة ذات الأهمية الكبيرة في الفيزياء الرياضية عندما نحاول الحصول على حل لمعادلة لابلاس .

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

على شكل حدودية من الدرجة n في x, y, z . يسمى مثل هذا الحل توافقية

مجسمة من الدرجة n . فإذا ما أجرينا تحويلا في الاحداثيات بالانتقال إلى الاحداثيات الكروية :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta$$

تأخذ معادلة لابلاس السابقة الشكل :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0$$

وحيث أن كل توافقية مجسمة من الدرجة n هي من الشكل $r^n s_n(\theta, \varphi)$ ، بفرض أن $s_n(\theta, \varphi)$ حدودية في $\cos \theta$ ، $\sin \theta$ ، $\sin \varphi$ ، $\cos \varphi$ ، فإن تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial s_n}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 s_n}{\partial \varphi^2} + n(n+1) s_n = 0$$

تسمى $s_n(0, \varphi)$ التوافقيات السطحية الكروية من الدرجة n .

وإذا قصرنا اهتمامنا على حلول هذه المعادلة مستقلة عن φ ، وإذا أجرينا التحويل $\mu = \cos \theta$ فإننا نجد المعادلة :

$$(1-\mu^2) \frac{d^2 s_n}{d\mu^2} - 2\mu \frac{ds_n}{d\mu} + n(n+1) s_n = 0$$

ورغم أن s_n, μ ، في التطبيقات الفيزيائية ، كميات حقيقية وأن $-1 \leq \mu \leq 1$ ، فإننا نحصل على دراسة أفضل فيما إذا افترضنا المتحولات عقدية . لذلك سنضع z بدلاً من μ ونضع w بدلاً من s_n فنحصل على المعادلة (1) .

ان النقاط الشاذة للمعادلة (1) هي $\infty, 1, -1$ وجميعها نقاط شاذة منتظمة .

(٤-١) حدوديات لوجاندر :

من المناسب إيجاد الحل العام للمعادلة (1) في جوار نقطة اللانهاية : ولذلك فإننا نبحث عن الحلول من الشكل :

$$w = \frac{1}{z^\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_r}{z^r} \quad c_0 \neq 0$$

بالتعويض في (1) نجد المعادلة الدالية :

$$-\lambda(\lambda+1) + 2\lambda + n(n+1) = 0$$

وجزأها هما $n+1$ و $-n$. كما نجد :

$$c_r(\lambda+r+n)(\lambda+r-n-1) - c_{r-2}(\lambda+r-1)(\lambda+r-2)$$

لأجل $\lambda = -n$ نجد الحل :

$$w_1 = z^n \left[1 - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} z^{-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 (2n-1)(2n-3)} z^{-4} \dots \right] \quad (2)$$

ولأجل $\lambda = -n+1$ نجد الحل :

$$w_2 = z^{-n-1} \left[1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} z^{-2} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 (2n+3)(2n+5)} z^{-4} + \dots \right] \quad (3)$$

والحل العام هو :

$$w = A w_1 + B w_2$$

وفي الواقع ونحن نبحث عن الحل الموافق لـ $\lambda = -n$ نصل مباشرة إلى الحل العام لأن المعادلة التي يفترض فيها أن تعين c_{2n+1} تتحول إلى مطابقة .

إن الحل w_1 حدودية في z من الدرجة n فهو يحقق معادلة لوجاندر مها

كانت قيمة z ، أما الحل الثاني w_2 فهو متسلسلة غير متتية بقوى متناقصة سالبة . وتتقارب هذه المتسلسلة ، عندما $|z| > 1$.

وإذا اخترنا $A = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$ فمن الممكن كتابة الحل الأول على الشكل
 $w = p_n(z)$ بفرض أن :

$$p_n(z) = \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{2^n r! (n-r)! (n-2r)!} z^{n-2r} \quad (4)$$

بفرض أن p عدد صحيح يوازي $\frac{n}{2}$ أو $\frac{n-1}{2}$ حسبما يكون n زوجياً أو فردياً ندعو $p_n(z)$ حدوديات لوجاندر من المرتبة n . وبسهولة نرى أن :

$$p_0(z) = 1 \quad p_1(z) = z \quad p_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2-1) \quad p_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3-3z)$$

ومن هذا التعريف نستنتج أن :

$$\begin{aligned} p_n(z) &= \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r}{2^n r! (n-r)!} \frac{d^n}{dz^n} (z^{2n-2r}) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r n!}{r! (n-r)!} z^{2n-2r} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r n!}{r! (n-r)!} z^{2n-2r} \end{aligned}$$

وبالتالي فإن :

$$p_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n \quad (5)$$

تسمى هذه الصيغة صيغة رودريج (Rodrigue) .

وباستخدام صيغة كوشي المشتق من المرتبة n للتابع التحليلي نحصل من صيغة رودويج (5) على الصيغة التكاملية التالية :

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{2^n (\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (6)$$

بفرض أن C طريق مغلق يحيط بالنقطة $\zeta = z$.

(٤ - ٢) الدالة المولدة لحدوديات لوجاندر

إذا اخترنا الطريق C في (6) هو الدائرة :

$$|\zeta - z| = \sqrt{|z^2 - 1|}$$

عندئذ يكون :

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - 1} e^{i\theta} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

على أن نأخذ للجذر التربيعي أي فرع من فروعه . وعلى هذا فإننا نجد :

$$\zeta^2 - 1 = 2(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{i\theta} [z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \theta] - 2(\zeta - z) [z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \theta]$$

وبالتالي فإن :

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \theta]^n d\theta$$

وبما أن المكامل زوجي في θ فإن :

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \theta]^n d\theta \quad (7)$$

تسمى هذه الصيغة تكامل لابلاس الأولى لحدودية لوجاندر $P_n(z)$

لنشكل الآن المتسلسلة $\sum h^n p_n(z)$ مستخدمين (7) فنجد :

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} h^n P_n(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h^n [z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos \theta]^n d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_0^{\infty} h^n [z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos \theta]^n d\theta \end{aligned}$$

وذلك بفرض أن المبادلة بين المتكاملة والجمع ممكنة .

لنفرض أن :

$$|h| < \frac{1-\epsilon}{|z| + \sqrt{|z^2-1|}} \quad (0 < \epsilon < 1)$$

فنعدئذ يكون :

$$|h[z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos \theta]| \leq |h| [|z| + |z^2-1|^{\frac{1}{2}}] < 1-\epsilon$$

وبالتالي فإن المتسلسلة :

$$\sum_0^{\infty} h^n [z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos \theta]^n$$

متقاربة اطلاقاً وبانتظام بالنسبة للمتحول الحقيقي θ ، والمبادلة بين المتكاملة والجمع صحيحة وهكذا نجد :

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} h^n p_n(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [1-hz - h(z^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos \theta]^{-1} d\theta \\ &= (1-2hz + h^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

على أن نختار فرع الجذر التربيعي الأخير بحيث يكون هذا الفرع مساوياً

للراحد عندما $h = 0$. وللدالة $(1-2hz + h^2)^{-\frac{1}{2}}$ ، باعتبارها دالة لـ h ، نقطتان شاذتان هما نقطتا التفرع $h = z \pm (z^2-1)^{\frac{1}{2}}$. ولذا فإن هذه الدالة قابلة للنشر وفق تايلور في متسلسلة قوى في h بنصف قطر تقارب هو أصغر القيمتين $|z \pm (z^2-1)^{\frac{1}{2}}|$. ولكننا رأينا أن هذه الدالة قابلة للنشر بالشكل $\sum h^n p_n(z)$ لأجل قيم h الصغيرة بقدر كاف . ولما كان نشر تايلور لدالة تحليلية وحيداً فإننا نكون بذلك قد اثبتنا صحة :

$$(1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n p_n(z) \quad (8)$$

شرط أن يكون $|z \pm (z^2-1)^{\frac{1}{2}}| < |h|$. وبشكل خاص إذا كان z حقيقياً وكان $z \leq 1$ فإن نصف قطر التقارب يساوي الواحد .

٤-٣ الصيغ التكرارية

هدفنا فيما يلي هو الوصول إلى صيغ تربط بين حدوديات لوجاندر بمراتب مختلفة ونستخدم في سبيل ذلك الدالة المولدة :

$$V(z, h) = (1-2hz + h^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (9)$$

ويسهل علينا من (9) أن نثبت مايلي :

$$(1-2hz + h^2) \frac{\partial V}{\partial h} = (z-h)V$$

وبالتالي يكون :

$$(1-2hz + h^2) \sum_{n=0}^{\infty} n h^{n-1} p_n(z) = (z-h) \sum_{n=0}^{\infty} h^n p_n(z)$$

حيث تتقارب المتسلسلتان بالاطلاق عندما :

$$|h| < |z \pm (z^2 - 1)^{1/2}|$$

وبقارنة أمثال h^{n-1} في الطرفين نجد :

$$n p_n(z) - (2n-1) z p_{n-1}(z) + (n-1) p_{n-2}(z) = 0 \quad (10)$$

كذلك ينتج من (9) أن :

$$h \frac{\partial V}{\partial h} = (z-h) \frac{\partial V}{\partial z}$$

ومنها نستنتج أن :

$$z p'_n(z) - p'_{n-1}(z) = n p_n(z) \quad (11)$$

حيث تشير الفتححات إلى الاستقاق بالنسبة إلى z . وإذا استعملنا (10) بالنسبة لـ z نجد :

$$n[p'_n(z) - z p'_{n-1}(z)] - (n-1)[z p'_{n-1}(z) - p'_{n-2}(z)] = (2n-1)p_{n-1}(z)$$

واستناداً إلى المطابقة الأخيرة مع المطابقة (11) (بعد أن نضع فيها $n-1$ محل n) نجد :

$$p'_n(z) - z p'_{n-1}(z) = n p_{n-1}(z) \quad (12)$$

ويسهل علينا أن نستنتج من (10) و (11) و (12) :

$$p'_{n+1}(z) - p'_{n-1}(z) = (2n+1) p_n(z) \quad (13)$$

$$(z^2-1) p'_n(z) = n z p_n(z) - n p_{n-1}(z) \quad (14)$$

$$(z^2-1) p'_n(z) = - (n+1) z p_n(z) + (n+1) p_{n+1}(z); \quad (15)$$

(٤ - ٤) تمارين

١ - استنتج من صيغة رودريج أن اصفلر $p_n(z)$ ، والتي عددها n ، هي
جميعها حقيقية وتقع بين -1 و $+1$.

٢ - برهن أن :

$$p_n(z) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} z^n F\left(-\frac{1}{2}n, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}n; \frac{1}{2} - n; z^{-2}\right)$$

٣ - بين أن :

$$p_n(z) = F\left(n+1, -n; 1; \frac{1}{2}(1-z)\right)$$

٤ - بين أن $p_n(z)$ يساوي :

$$(-1)^{n/2} \frac{n!}{2^n \left[\left(\frac{1}{2}n\right)!\right]^2} F\left(-\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}(n+1); \frac{1}{2}; z^2\right)$$

أو :

$$(-1)^{(n-1)/2} \frac{n!}{2^{n-1} \left[\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right)!\right]^2} z F\left[-\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}n + 1; \frac{3}{2}; z^2\right]$$

حسباً يكون n زوجياً أو فردياً .

٥ - بين باستخدام صيغة رودريج وبالكاملة بالتجزئة أن :

$$\int_{-1}^1 z^k p_n(z) dz = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

وأن :

$$\int_{-1}^1 p_m(z) p_n(z) dz = 0$$

عندما يكون m و n صحيحين غير متساويين .

٦ - بين أن :

$$\int_{-1}^1 z^2 p_n(z) dz = \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

واستنتج من ذلك أن .

$$\int_{-1}^1 [p_n(z)]^2 dz = \frac{2}{2n+1}$$

٧ - بين أنه يمكن كتابة كل حدودية $f(z)$ من الدرجة n بالشكل :

$$f(z) = \sum_{r=0}^n a_r p_r(z)$$

بفرض أن :

$$a_r = \frac{2r+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(z) p_r(z) dz$$

بين بوجه عام أنه إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية يمكن تمثيلها بتسلسلة

من الشكل :

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r p_r(z)$$

تتقارب بانتظام عندما $-1 \leq z \leq 1$ فإن تعطي بالصيغة السابقة .

٨ - برهن أنه إذا كان $m \geq n$ وكان $m-n$ زوجياً فإن :

$$\int_0^1 p_m(z) p_n(z) dz$$

يساوي الصفر أو $1/(2n+1)$ حسبما يكون m أكبر تماماً من n أو مساوياً لـ n

٩ - بين أن :

$$p_n'(z) = (2n-1)p_{n-1}(z) + (2n-5)p_{n-3}(z) + \dots$$

حيث يكون الحد الأخير مساوياً p_1 أو p_0 حسبما يكون n زوجياً أو فردياً . اثبت بالاعتماد على ذلك أو بأية طريقة أخرى أنه إذا كان $m \geq n$ فإن :

$$\int_{-1}^1 p_m'(z) p_n'(z) dz = \begin{cases} n(n+1) & \text{إذا كان } m-n \text{ زوجياً} \\ 0 & \text{إذا كان } m-n \text{ فردياً} \end{cases}$$

١٠ - بين أن قيمة التكامل :

$$\int_{-1}^{+1} z(1-z^2) p_m'(z) p_n'(z) dz$$

تساوي الصفر ما لم يكن $m-n \pm 1$. أوجد قيمة التكامل في هاتين الحالتين المستثنيتين .

٥ - تمثيل الطول بتكاملات

لقد لجأنا في الفقرات السابقة إلى تمثيل حلول المعادلات التفاضلية بتسلسلات قوى وذلك لأنه ليس من الممكن دائماً الوصول إلى حل على شكل تركيب منه

من دوال ابتدائية . وبالإضافة إلى هذه الطريقة هناك طريقة أخرى للقيام بعملية الانتقال إلى النهايات على الدوال الابتدائية هي التكامل بالنسبة لوسيط مثل :

$$\varphi(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

سنحاول في هذا البند الوصول إلى حلول من هذا النمط للمعادلات التفاضلية . ويمكن التصرف بالحل بشكل أفضل إذا كان تكاملاً لدالة حقيقية بالنسبة لتغير حقيقي ، ولكن هناك فوائد عديدة في مناقشة المسألة على القاعدة الأعرض لنظرية الدوال العقدية ، ولذا فإننا سنبحث عن حلول من الشكل :

$$w = \int_C f(z, \zeta) d\zeta$$

بفرض أن C طريق في المستوي ζ .

ونود منذ البداية أن نلفت النظر إلى أنه إذا حوى المكامل على عبارة مثل $(\zeta - a)^*$ فإننا نفهم من ذلك أحد فروعها الذي نختاره من أجل وضع منادب لـ ζ .

(١-٥) معادلة لابلاس التكاملية :

لنبدأ بمعالجة معادلة يسهل تمثيل حلولها بتكاملات عقدية . هذه المعادلة هي :

$$(a_n z + b_n) w^{(n)} + \dots + (a_1 z + b_1) w' + (a_0 z + b_0) w = 0 \quad (1)$$

وهي معادلة من المرتبة n أمثال w فيها وأمثال مشتقات w هي من الدرجة الأولى في z .

سنبحث لهذه المعادلة عن حل من النمط :

$$w = \int_C e^z \zeta P(\zeta) d\zeta \quad (2)$$

بعبارة أخرى لنبحث عن دالة $p(\zeta)$ وطريق C بحيث يكون w حلاً لـ (1). لنفرض أن $P(\zeta)$ و C هي بحيث يمكن الاشتقاق بالنسبة لـ z تحت رمز المسكاملة .

لنعوض (2) في (3) فنجد :

$$\int_C e^z \zeta p(\zeta) [z Q(\zeta) + R(\zeta)] d\zeta = 0 \quad (3)$$

بفرض أن :

$$Q(\zeta) = a_n \zeta^n + \dots + a_1 \zeta + a_0$$

$$R(\zeta) = b_n \zeta^n + \dots + b_1 \zeta + b_0$$

ويكون المسكامل في (3) مشتقاً تاماً :

$$\frac{d}{d\zeta} [e^z \zeta S(\zeta)]$$

إذا كان :

$$S(\zeta) = p(\zeta) Q(\zeta) \quad S'(\zeta) = P(\zeta) R(\zeta)$$

وعلى هذا فإننا نستطيع الحصول على $S(\zeta)$ من :

$$\frac{S'(\zeta)}{S(\zeta)} = \frac{R(\zeta)}{Q(\zeta)} = k_0 + \frac{k_1}{\zeta - \alpha_1} + \dots + \frac{k_n}{\zeta - \alpha_n}$$

بفرض أن $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ جذور $Q(\zeta)$ وأن درجة $Q(\zeta)$ لا تقل عن درجة $R(\zeta)$. وإذا فرضنا أن هذه الجذور مختلفة ، فإننا نجد :

$$S(\zeta) = e^{k_0 \zeta} (\zeta - \alpha_1)^{k_1} \dots (\zeta - \alpha_n)^{k_n}$$

$$P(\zeta) = \frac{1}{b_n} e^{k_0 \zeta} (\zeta - \alpha_1)^{k_1 - 1} \dots (\zeta - \alpha_n)^{k_n - 1}$$

وتأخذ المعادلة (3) الشكل :

$$\int_C \frac{d}{d\zeta} (e^{z\zeta} S(\zeta)) d\zeta - [e^{z\zeta} S(\zeta)]_C$$

وهذا يعني أن (2) تكون حلاً لـ (1) إذا اخترنا C على نحو يكون فيه :

$$[\varphi(\zeta)]_C = [e^{(z+k_0)\zeta} (\zeta - \alpha_1)^{k_1} \dots (\zeta - \alpha_n)^{k_n}]_C = 0$$

وقبل أن نقدم مناقشة عامة حول الطريق C فإننا نجد من المناسب تناول

مثال توضيحي .

مثال :

لتكن لدينا المعادلة :

$$z w'' + (p + q + z) w' + p w = 0 \quad p, q \in \mathbb{R}$$

لنعرض (2) في هذه المعادلة فنحصل على :

$$\int_C e^{z\zeta} P(\zeta) [z Q(\zeta) + R(\zeta)] d\zeta = 0$$

حيث يكون :

$$Q(\zeta) = \zeta^2 + \zeta \quad R(\zeta) = (p+q)\zeta + p$$

ويكون المتكامل متتاماً تماماً :

$$\frac{d}{d\zeta} (e^{z\zeta} S(\zeta))$$

إذا كان :

$$S(\zeta) = (\zeta + 1) P(\zeta) \quad S'(\zeta) = [(p+q)\zeta + p] P(\zeta)$$

وعلى هذا فإن :

$$\frac{S'(\zeta)}{S(\zeta)} = \frac{p}{\zeta} + \frac{q}{\zeta+1}$$

وبالتالي :

$$S(\zeta) = \zeta^p (\zeta+1)^q \quad P(\zeta) = \zeta^{p-1} (\zeta+1)^{q-1}$$

وعلى هذا فإن :

$$\int_0^{\infty} e^{z\zeta} \zeta^{p-1} (\zeta+1)^{q-1} d\zeta$$

حل ، إذا كان :

$$[e^{z\zeta} \zeta^p (\zeta+1)^q]_{\zeta=0}$$

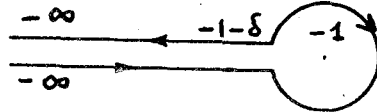
فإذا فرضنا z على المحور الحقيقي وأن $p > 0$ و $q > 0$ فإن المقدار بين القوسين الكبيرين ينعدم عندما $\zeta = 0$ و $\zeta = -1$. وإذا كان $z > 0$ فإن هذا المقدار ينعدم من أجل $-\infty$ ، أما إذا كان $z < 0$ فإنه ينعدم من أجل $-\infty$. وهكذا نصل إلى حلول للمعادلة يمكن أن نختار فيها C فترة من المحور الحقيقي وذلك على النحو التالي :

إذا كان $p > 0$ و $q > 0$ فيمكن اختيار C الفترة $(-1, 0)$.

وإذا كان $p > 0$ و $z > 0$ فمن الممكن اختيار C الفترة $(-\infty, 0)$.

أما إذا كان $p < 0$ و $q < 0$ و $z > 0$ فلا توجد أية قطعة من المحور الحقيقي يمكن اختيارها الطريق C ، ولكننا قد نستطيع اختيار طريق يتكون من جزء من المحور الحقيقي من $-\infty$ إلى $-1-\delta$ يتبعه دائرة نصف قطرها δ ومركزها -1 ثم نعود من $-1-\delta$ إلى $-\infty$.

ان هذه الدراسة ليست تامة ولكنها تصلح تمهيداً لما يلي .

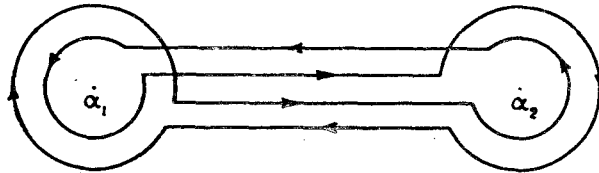


(٢-٥) اختيار الطرق :

يوجد بوجه عام اناط ممكنة عدة للطريق C . قد يكون من الممكن مثلاً أن نختار C طريقاً مغلقاً بحيث تعود $\varphi(z)$ إلى قيمتها الابتدائية ويتحقق بذلك الشرط $[\varphi(z)]_C$. في هذه الحالة يجب أن يقع داخل C احدى النقط α_1 ، لأنه إذا لم يحدث ذلك فانتا سوف لانحصل إلا على الحل للتافه $w = 0$.

وقد يكون من الممكن كذلك اختيار الطريق C بحيث يذهب إلى اللانهاية في منحنى أو أكثر بحيث يسمى $\varphi(z)$ إلى الصفر . وبما أن $\varphi(z)$ يتعلق بـ z فإن هذه المناحي تتعلق عموماً بـ z .

وعندما تدور z حول النقطة α_1 في الاتجاه الموجب فإن $(z - \alpha_1)^{k_1}$ تضرب بعد الدوران بـ $e^{2\pi i k_1}$. ولذلك يمكن اختيار C على شكل عقدة مضاعفة كما في الشكل .

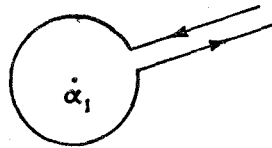


ولقد رسمنا اجزاء الشكل منفصلة بغية التوضيح . ويمكن في الواقع اختيار الشكل بحيث يتألف من دائرتين حول كل من α_1 و α_2 باتجاهين متعاكسين مع قطع مستقيمة نصل بينهما .

وإذا اخذنا عقداً مضاعفة حول α_1 وحول كل من $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ على الترتيب فإننا نحصل بوجه عام على $n-1$ حلاً مستقلاً للمعادلة . وهذه الحلول مزوية وهي انها تصلح مهما كانت z .

ولاثبات الاستقلال الخطي لهذه الحلول ، باستخدام رانز وونسكي مثلاً ، نحتاج إلى حسابات متعبة . ولذلك نكتفي بملاحظة مابلي : إذا كان من الممكن تشويه شكل الطريق C_1 بشكل مستمر إلى طريق آخر C_2 دون أن نمر على أي من النقاط α_1 فإن التكامل على C_1 لا يختلف عن التكامل على C_2 وبالتالي فإننا نحصل على الحل ذاته . اما إذا لم يمكن القيام بمثل هذا التشويه فإن قيمتي "تكامل مختلفتان بوجه عام . ويمكن للقارئ أن يرى استحالة تشويه أي من العقد المضاعفة المعرفة قبل قليل إلى عقدة مضاعفة أخرى دون ان نمر على النقطة α_1 .

ولاختيار الحل الأخير المستقل المعادة نختار المنحى في المستوي γ بحيث يكون القسم الحقيقي لـ $\gamma(z+k)$ سالباً ويمكن عندئذ اختيار طريق المكاملة ذلك الطريق القادم من اللانهاية على ذلك المنحى ، والذي يدور بعد ذلك حول α_1 (دون أن يدور حول أي α_1 أخرى) ثم يعود إلى اللانهاية في الاتجاه ذاته ويمكن اختيار n طريقاً على هذا النحو لنحصل على n حلاً بدلاً من اللجوء إلى العقد المضاعفة .



هذا ويمكن في بعض الاحيان تبسيط العقدة المضاعفة إلى عقدة على شكل 8 تدور حول نقطتين من النقط α_1 باتجاهين معاكسين كما سنرى على ضوء مثال بعد قليل . ولنسال الآن كيف نجد الحلول المستقلة عندما لا تكون النقط α_1 مختلفة . سنكتفي بمعالجة هذه الحالة على ضوء بعض الأمثلة الخاصة .

(٣-٥) امثلة :

١ - لتكن لدينا المعادلة :

$$a_n w^{(n)} + \dots + a_1 w' + a_0 w = 0$$

بأمثال ثابتة .

بسهولة نجد أن :

$$w = \int_C e^{z\zeta} P(\zeta) d\zeta$$

يكون حلاً إذا كان :

$$\int_C e^{z\zeta} P(\zeta) R(\zeta) d\zeta = 0 \quad (5)$$

بفرض أن :

$$R(\zeta) = b_n \zeta^n + \dots + b_1 \zeta + b_0$$

لفرض أن $(\zeta - \alpha)^r$ هو مضروب لـ $R(\zeta)$. عندئذ يكون الشرط (5) محققاً إذا كان :

$$P(\zeta) = \frac{A_r}{(\zeta - \alpha)^r} + \dots + \frac{A_1}{\zeta - \alpha} + p(\zeta)$$

بفرض أن $p(\zeta)$ تحليلي عند $\zeta = \alpha$ ، وأن C طريق يحيط بـ α دون

أي صفر آخر لـ $R(\zeta)$.

وامتداداً إلى صيغة كوشي التكاملية نجد :

$$\int_C e^{z\zeta} p(\zeta) d\zeta = e^{z\alpha} (B_{r-1}z^{r-1} + \dots + B_0) \quad (6)$$

حيث تكون B_0, \dots, B_{r-1} ثوابت . ان (6) تعطينا r حلاً مستقلاً توافق الجذر المضاعف α من المرتبة r .

٢ - أما المعادلة :

$$z w'' + (2v + 1) w' + z w = 0 \quad (v \text{ ثابت})$$

فإنها تقبل الحل :

$$w = \int_C e^{z\zeta} (\zeta^2 + 1)^{v - \frac{1}{2}} d\zeta$$

إذا تحقق :

$$[e^{z\zeta} (\zeta^2 + 1)^{v + \frac{1}{2}}]_C = 0$$

ويكون هذا الشرط محققاً إذا اخترنا C طريقاً على شكل \circ تحيط إحدى عقديه بالنقطة $z = i$ وتحيط الأخرى بالنقطة $z = -i$ وذلك لأن المضروبين $e^{\pm 2\pi i(v + \frac{1}{2})}$ اللذين يوزان بسبب $(\zeta - i)^{v + \frac{1}{2}}$ و $(\zeta + i)^{v + \frac{1}{2}}$ على الترتيب ، يلغي أحدهما الآخر . (نفرض أن v ليست أبياً من القيم $\dots, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ ، وإلا فإن الحل هو $w = 0$.

ويمكن تبسيط النتيجة في هذا المثال فيما إذا وضعنا it بدلاً من ζ وبذلك تتحول النقطتان $\pm i$ إلى ± 1 .

وهكذا نرى أن $w = \int_C e^{izt} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt$ حل للمعادلة المفروضة بالاختيارات التالية للطريق C .

(1) القطعة المستقيمة من -1 إلى $+1$ عندما يكون $\nu > -\frac{1}{2}$

(2) عقدة على شكل 8 حول -1 و $+1$ عندما لا تكون ν أيًا من القيم $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

(3) طريق قادم من اللانهاية موازياً للمحور التخيلي الموجب ، ويدور حول -1 أو $+1$ ثم يعود إلى اللانهاية موازياً للمحور ذاته ، وذلك عندما تكون z حقيقية وموجبة .

3 - سنشرح في هذا المثال حالة طرق تأتي من اللانهاية وفق معنى وتعود إليها وفق معنى آخر :

$$w' = zw$$

ان تعويض :

$$w = \int_C e^z \zeta^p(\zeta) d\zeta$$

في هذه المعادلة يعطي $p(\zeta) = e^{-\frac{1}{2}\zeta^2}$ ، حيث ينبغي أن يحقق C الشرط :

$$[\varphi(\zeta)]_C = [e^z \zeta^{-\frac{1}{2}\zeta^2}]_C = 0$$

وهنا نلاحظ (أنه مهما كانت قيمة z) فإن $\varphi(z) \rightarrow 0$ عندما تسعى z إلى اللانهاية بشرط أن تبقى زاوية z واقعة داخل أي من القطاعات الثلاثة $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{6})$ ، $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$ ، و $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ وعلى هذا من الممكن مثلا اختيار G قادماً من اللانهاية ضمن القطاع الثاني وراجعاً إليها ضمن القطاع الاول أو قادماً من اللانهاية ضمن القطاع الثالث وراجعاً إليها ضمن القطاع الثاني .

(٥ - ٤) تكاملات تشتمل على قوى $(z-z_0)$

ان السمة التي اتصفت بها معادلة لابلاس والتي جعلت من المناسب البحث عن حل على شكل تكاملات تكون فيها « النواة » $z^m e^z$ ، هي الخطية في z لأمثال كل من $w(r)$. ولذلك فلقد كان المكامل الناتج عن التعويض في المعادلة التفاضلية المفروضة هو اشتقاق أول قام لدالة $S(z)$ وكانت المعادلة التفاضلية التي تعين $S(z)$ من المرتبة الأولى . أما إذا كانت أمثال $w(r)$ حدوديات من الدرجة m ، فإن علينا أن نعالج وضع المكامل على شكل مشتق من المرتبة m ، وستكون عندئذ المعادلة التي تعين $S(z)$ من المرتبة m وبالتالي قد يكون حلها أعقد من حل المعادلة التفاضلية المفروضة .

ولذلك فمن الطبيعي أن نبعث عن تكاملات تأخذ فيها النواة شكلاً آخر غير الشكل الأسّي، ولقد اتضح أن أحد هذه الأشكال يعطى بالتكامل :

$$\int_C (\zeta - z)^{\lambda+1} p(\zeta) d\zeta \quad (7)$$

بفرض أن λ ثابت ينبغي تعيينه . ان هذا الشكل مناسب لمعادلة تكون فيها أمثال $w(r)$ حدودية من الدرجة r في z . وسنبين ذلك في حالة معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية :

$$q(z) w'' + l(z) w' + kw = 0 \quad (8)$$

بفرض أن $q(z)$ حدودية في z من الدرجة الثانية و $l(z)$ حدودية من الدرجة الأولى و k ثابت . لنكتب (8) بالشكل . .

$$q(z) w'' - \lambda q'(z) w' + \frac{1}{2} \lambda(\lambda + 1) q''(z) w - r(z) w' + (\lambda + 1) r'(z) w = 0 \quad (9)$$

إن هذا الأمر يمكن لأن مقارنة الأمثال بين (8) و (9) تعين لنا λ والحدودية من الدرجة الأولى $r(z)$ (انظر المثال التالي) .
بتعويض (7) في (9) نجد .

$$\int_C p(\zeta) [\lambda(\lambda+1)(\zeta-z)^{\lambda-1} [q(z) + (\zeta-z)q'(z) + \frac{1}{2}(\zeta-z)^2 q''(z)] d\zeta - 0 \\ + (\lambda+1)(\zeta-z)^\lambda [r(z) + (\zeta-z)r'(z)]$$

أو :

$$\int_C p(\zeta) [\lambda(\zeta-z)^{\lambda-1} q(\zeta) + (\zeta-z)^\lambda r(\zeta)] d\zeta = 0$$

ويكتب المكامل بالشكل :

$$\frac{d}{d\zeta} (S(\zeta) (\zeta-z)^\lambda)$$

إذا كان :

$$S(\zeta) = p(\zeta) q(\zeta)$$

$$S'(\zeta) = p(\zeta) r(\zeta)$$

زطى هذا فإن $S(\zeta)$ تتعين بالمعادلة :

$$\frac{S'(\zeta)}{S(\zeta)} = \frac{r(\zeta)}{q(\zeta)} = \frac{p}{\zeta - \alpha_1} + \frac{q}{\zeta - \alpha_2}$$

بفرض أن α_1, α_2 جذرا $q(\zeta)$. وهكذا نجد أن:

$$w = \int_0^1 (\zeta - \alpha_1)^{p-1} (\zeta - \alpha_2)^{q-1} (\zeta - z)^{\lambda+1} d\zeta$$

شروط أن نختار C بحيث $L = 0$:

$$[(\zeta - \alpha_1)^p (\zeta - \alpha_2)^q (\zeta - z)^{\lambda}]_C = 0$$

وتم اختيار C وفق المبادئ التي تحدثنا عنها في الفقرة السابقة .

(٥ - ٥) مثال

لنستخدم الطريقة الأخيرة على معادلة غروص :

$$z(z-1)w'' + [-\gamma + (\alpha + \beta + 1)z]w' + \alpha\beta w = 0$$

نجد هنا :

$$q(z) = z(z-1)$$

$$\lambda(2z-1) + r(z) = \gamma - (\alpha + \beta + 1)z$$

$$\frac{1}{2} \lambda(\lambda+1)(2) + (\lambda+1)r'(z) - \alpha\beta$$

وبجذب $r(z)$ نجد $\lambda = -\alpha - 1$ أو $\lambda = -\beta - 1$ فإذا أخذنا $\lambda = -\alpha - 1$

نجد $r(z) = (\alpha - \gamma + 1) - (\alpha - \beta + 1)z$ ويكون :

$$\frac{S'(\zeta)}{S(\zeta)} = \frac{r(\zeta)}{q(\zeta)} = \frac{\alpha - \gamma + 1}{\zeta} - \frac{\gamma - \beta}{1 - \zeta}$$

وبالتالي لدينا الحل :

$$w = \int_C \zeta^{\alpha-\gamma} (1-\zeta)^{\gamma-\beta-1} (\zeta-z)^{-\alpha} d\zeta \quad (10)$$

على أن يحقق C الشرط :

$$[\zeta^{\alpha-\gamma+1} (1-\zeta)^{\gamma-\beta} (\zeta-z)^{-\alpha-1}]_C = 0$$

وهنا نلاحظ أنه يمكن اختيار C العقدة المضاعفة حول $\zeta=0$ و $\zeta=1$ أو حول

$\zeta=z$ و $\zeta=0$ ما لم تكن قيم α, β, γ هي بحيث تسمح بطريق من غط أبسط .

أما القيمة الثانية $\lambda = -\beta - 1$ فهي تعطي حلاً آخر نحصل عليه من الأول

بالمبادلة بين α و β .

لنضع أخيراً في (10) $\zeta = \frac{1}{\eta}$ فنحصل على:

$$w = \int_C \eta^{\beta-1} (1-\eta)^{\gamma-\beta-1} (1-z\eta)^{-\alpha} d\eta$$

بفرض أن C طريق مناسب . فإذا كان مثلاً $\text{Re}\gamma > \text{Re}\beta > 0$ فإنه من

الممكن اختيار C القطعة (0,1) من المحور الحقيقي .

(5-6) تمارين للحل

١- أوجد حلاً للمعادلة التفاضلية :

$$w'' - 2z w' + 2k w = 0 \quad (k \geq 0)$$

بالشكل $\int_C e^{2z\zeta} f(\zeta) d\zeta$. أعط اختيارين للطريق C .

برهن أنه إذا كان k صحيحاً موجباً فهناك حل من الشكل :

$$H_k(z) = (-1)^k e^{z^2} \frac{d^k}{dz^k} e^{-z^2}$$

٢ - أوجد حلين لمعادلة التمرين الأول من الشكل :

$$\int e^{z^2} \zeta^{-1-\frac{1}{2}k} (1-\zeta)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k} d\zeta \quad z \int e^{z^2} \zeta^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}k} d\zeta$$

على طريق مناسب .

٣ - أوجد حلول المعادلة التفاضلية :

$$y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0$$

ابحث كذلك عن حلول من الشكل $\int_C e^{2xt} u(t) dt$ بفرض أن C طريق

مناسب . بين بوجه خاص أنه إذا كان $\lambda < 0$ فإن :

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2+2xt} t^{\lambda-1} dt \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2xt} t^{-\lambda-1} dt$$

حلان ، ثم أوجد ثانية الحلول على شكل متسلسلات بدءاً من هذين الحلين .

٤ - بين أنه يمكن للمعادلة التفاضلية :

$$zw'' + 2aw' - zw = 0$$

بفرض أن a ثابت ، يمكن أن تتحقق بـ

$$w = \int_C (t^2-1)^{a-1} e^{tz} dt$$

بفرض أن C طريق مناسب . بين ، بوجه خاص ، أن الطرق التالية ممكنة

(آ) شكل 8 يدور حول النقطتين $t = -1, t = 1$ بالانحافين المتعاكسين

(ب) طريق يأتي من $-\infty$ على المحور الحقيقي ويدور حول $t = -1$

ويعود إلى $-\infty$ على المحور الحقيقي أيضاً وذلك بشرط أن يكون $\text{Re } z > 0$

(ج) المحور الحقيقي من $t = -1$ إلى $t = 1$ شرط أن يكون $a > 0$

(د) المحور الحقيقي من $-\infty$ إلى -1 شرط أن يكون $\text{Re } z > 0$ و $a > 0$

بين أنه إذا تحققت الشروط المذكورة فإن الحل المعطى بـ (ب) هو جدها

ثابت بالحل المعطى بـ (د). بين أنه إذا كان $a = 0$ فإن الطريقتين (آ) و

(ب) يعطيان حلين مستقلين خطياً.

٥ - بين أن للمعادلة :

$$z w'' + c w' - w = 0$$

حلولاً من الشكل :

$$\int e^{z^2 + \frac{1}{z}} z^{c-2} dz \quad z^{1-c} \int e^{z^2 + \frac{1}{z}} z^{-c} dz$$

عين الطرق المناسبة .

٧ - أوجد الحل العام للمعادلة :

$$z w''' + w = 0$$

على شكل تكاملات محيطية .

ابحث في حلول على شكل تكاملات عقدية للمعادلات التالية :

$$4z(1-z)w'' + 2(1-2z)w' + w = 0$$

$$z(1-z)w'' - (1+z)w' + w = 0$$

$$w''' = zw$$

$$z w'' + (2+az)w' + (a+bz)w = 0$$

وإبحث في كل معادلة عن الطرق المناسبة .

٦ - النشر المقارب للحلول :

إذا كان للمعادلة التفاضلية نقطة شاذة (غير منتظمة) في اللانهاية ، وإذا كنا نريد أن نتعرف على طبيعة الحل لأجل z في جوار اللانهاية فإنه من المفيد استخدام النشر المقارب للحل . سنقدم فيما يلي فكرة موجزة عن النشر المقارب ثم عن النشر المقارب للحلول .

(٦ - ١) النشر المقارب : نقول عن متسلسلة من الشكل :

$$A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_n}{z^n} + \dots$$

التي قد تكون متقاربة لأجل القيم الكبيرة لـ $|z|$ ، أو تكون متباعدة منها كانت z ، إنها نشر مقارب لـ $F(z)$ في مدى معين لـ $\arg z$ ، مثلا $\alpha \geq \arg z \geq \beta$ ، فيما إذا سعت العبارة

$$z^n \left\{ F(z) - A_0 - \frac{A_1}{z} - \frac{A_2}{z^2} \dots - \frac{A_n}{z^n} \right\}$$

لأجل كل عدد صحيح غير سالب ثابت n ، إلى الصفر عندما $|z| \rightarrow \infty$ شرط أن تبقى $\arg z$ في المدى المفروض وإذا صح ذلك فإننا نكتب :

$$F(z) \sim A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \quad (1)$$

ويقتضي هذا التعريف ، الذي يعود الفضل فيه إلى بوانكاريه ، أن يكون الفرق بين $F(z)$ وبين مجموع الحدود الـ n الأولى من النشر المقارب من مرتبة الحد الـ $(n+1)$ وذلك عندما يكون $|z|$ كبيراً . إن هذه الحقيقة هي التي جعلت النشر المقارب أكثر ملاءمة للحسابات العددية من المتسلسلات المتقاربة .

وإذا صحت (1) فإن الأمثال A_1 تتعين تدريجياً بالمعادلات :

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} F(z) = A_0 \quad (2)$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z \{F(z) - A_0\} = A_1$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^2 \{F(z) - A_0 - \frac{A_1}{z}\} = A_2 \dots$$

نستنتج من هذا أنه لا يمكن أن يكون لدالة معينة ، في مدى مفروض لـ $\arg z$ ، أكثر من نشر مقارب واحد .

غير أن نشرًا مقاربًا واحدًا قد يكون لأكثر من دالة . فإذا حقق $g(z)$ و $f(z)$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^n \{f(z) - g(z)\} = 0$$

لأجل كل عدد صحيح موجب ثابت n شرط أن تبقى $\arg z$ في المدى المفروض فإن لـ $f(z)$ و $g(z)$ النشر المقارب نفسه .

فإذا لاحظنا ، على سبيل المثال أن $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^n e^{-z} = 0$ لأجل :

$|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ فإن لـ $f(z)$ و $f(z) + e^{-z}$ النشر المقارب نفسه في ذلك المدى لـ $\arg z$.

وقد يحصل أحياناً أن لا يكون لـ $F(z)$ نشر مقارب ، غير أنه توجد دالة $G(z)$ بحيث يكون :

$$\frac{F(z)}{G(z)} \sim A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$

لأجل مدى معين لـ $\arg z$. نكتب في هذه الحالة :

$$F(z) \sim G(z) \left\{ A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \right\}$$

(٦ - ١ - ١) إذا كان $f(z) \sim \sum_0^{\infty} A_m z^{-m}$ و $g(z) \sim \sum_0^{\infty} B_m z^{-m}$ في مدى

مشترك لـ $\arg z$ فإن :

$$f(z)g(z) \sim \sum_0^{\infty} C_m z^{-m}$$

بفرض أن :

$$C_m = A_0 B_m + A_1 B_{m-1} + A_2 B_{m-2} + \dots + A_m B_0$$

ولانبات ذلك نلاحظ بالاعتماد على (٢) أن :

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z)g(z) = A_0 B_0 = C_0$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z \{ f(z)g(z) - C_0 \} =$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z \{ (f(z) - A_0)(g(z) - B_0) + A_0(g(z) - B_0) + B_0(f(z) - A_0) \}$$

$$= A_1 \cdot 0 + A_0 B_1 + B_1 A_0 = C_1$$

ويوجه عام :

$$\begin{aligned}
& \lim_{|z| \rightarrow \infty} z^n \left\{ f(z) g'(z) - C_0 - \frac{C_1}{z} - \frac{C_2}{z^2} \dots - \frac{C_{n-1}}{z^{n-1}} \right\} = \\
& = \lim_{|z| \rightarrow \infty} z^n \left\{ \left(f(z) - A_0 - \frac{A_1}{z} \dots - \frac{A_{n-1}}{z^{n-1}} \right) \left(g(z) - B_0 - \frac{B_1}{z} \dots - \frac{B_{n-1}}{z^{n-1}} \right) \right. \\
& \quad + A_0 \left(g(z) - B_0 - \frac{B_1}{z} \dots - \frac{B_{n-1}}{z^{n-1}} \right) \\
& \quad + \frac{A_1}{z} \left(g(z) - B_0 - \frac{B_1}{z} \dots - \frac{B_{n-1}}{z^{n-1}} \right) \\
& \quad + \frac{A_2}{z^2} \left(g(z) - B_0 - \frac{B_1}{z} \dots - \frac{B_{n-1}}{z^{n-1}} \right) + \dots + \frac{A_{n-1}}{z^{n-1}} \left(g(z) - B_0 \right) \\
& \quad + B_0 \left(f(z) - A_0 - \frac{A_1}{z} \dots - \frac{A_{n-1}}{z^{n-1}} \right) \\
& \quad + \frac{B_1}{z} \left(f(z) - A_0 - \frac{A_1}{z} \dots - \frac{A_{n-1}}{z^{n-1}} \right) \\
& \quad + \frac{B_2}{z^2} \left(f(z) - A_0 - \frac{A_1}{z} \dots - \frac{A_{n-1}}{z^{n-1}} \right) + \dots + \frac{B_{n-1}}{z^{n-1}} \left(f(z) - A_0 \right) \\
& \quad \left. - \left\{ A_1 B_{n-1} + A_2 B_{n-2} + \dots + A_{n-1} B_1 \right\} \frac{1}{z^n} \right\} \\
& = A_n \cdot 0 + A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + \dots + A_{n-1} B_1 + B_0 A_n + B_1 A_{n-1} + \dots + B_{n-1} A_1 \\
& = A_1 B_{n-1} + A_2 B_{n-2} \dots + A_{n-1} B_1 = C_n
\end{aligned}$$

: إذا كان (٢ - ١ - ٦)

$$f(x) \sim \sum_2^{\infty} A_m x^{-m}$$

بفرض أن x موجب ، فإن :

$$\int_x^{\infty} f(x) dx \sim \sum_1^{\infty} \frac{A_{m+1}}{mx^m}$$

ويكفي لإثبات ذلك أن نبين أن :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-1} \left\{ \int_x^{\infty} f(x) dx - \frac{A_2}{x} - \frac{A_3}{2x^2} \dots - \frac{A_n}{(n-1)x^{n-1}} \right\} = 0$$

بما أن :

$$f(x) \sim \frac{A_2}{x^2} + \dots + \frac{A_n}{x^n} + \dots$$

فإنه إذا كان ϵ عدداً موجباً مفروضاً فإننا نستطيع إيجاد x_0 بحيث يكون :

$$x^n [f(x) - \frac{A_2}{x^2} - \dots - \frac{A_n}{x^n}] < \epsilon \quad x \geq x_0$$

وبالتالي فإن :

$$f(x) < \epsilon x^{-n} + \frac{A_2}{x^2} + \dots + \frac{A_n}{x^n}$$

$$\int_x^{\infty} f(x) dx - \frac{A_2}{x} - \frac{A_3}{2x^2} \dots - \frac{A_n}{(n-1)x^{n-1}} < \frac{\epsilon}{(n-1)x^{n-1}}$$

ومنه نجد المطلوب .

(٦-٢) النشر المقارب لحل معادلة لابلاس من الشكل

$$z w'' + (a_0 z + a_1) w' + (b_0 z + b_1) w = 0 \quad (3)$$

نجري أولاً التحويل :

$$w = e^{\alpha z} u$$

ف نجد بعد الاختصار على $e^{\alpha z}$:

$$z u'' + [(a_0 + 2\alpha)z + a_1] u' + [(\alpha^2 + \alpha a_0 + b_0)z + b_1 + \alpha a_1] u = 0 \quad (4)$$

ف نختار α احد الجذرين α_1 و α_2 للمعادلة :

$$\alpha^2 + \alpha a_0 + b_0 = 0 \quad (5)$$

وليكن $\alpha = \alpha_1$ فتأخذ المعادلة (5) الشكل :

$$z u'' + [(a_0 + 2\alpha_1)z + a_1] u' + (b_1 + \alpha_1 a_1) u = 0 \quad (6)$$

لنضع بغية الاختصار :

$$a_0 + 2\alpha_1 = \beta \quad b_1 + \alpha_1 a_1 = b_2$$

فتأخذ (6) الشكل :

$$z u'' + (\beta z + a_1) u' + b_2 u = 0 \quad (7)$$

واستناداً إلى البند الخامس نرى ان لهذه المعادلة حلاً من الشكل :

$$u = \int_c^z e^{\zeta} \zeta^p (\zeta) d\zeta$$

$$= \int_c^z e^{\zeta} \zeta^{p-1} (\zeta + \beta)^{q-1} d\zeta \quad (8)$$

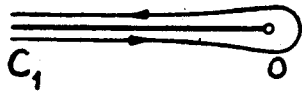
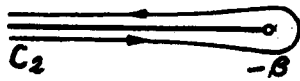
بفرض أن :

$$p = \frac{b_2}{\beta} \quad , \quad q = a_1 - p \quad (9)$$

وأما الطريق C فنختاره بحيث يكون :

$$[e^z \zeta^p (\zeta + \beta)^q]_C = 0$$

فاذا فرضنا أن z حقيقية موجبة فانه يمكن اختيار C أحد المحيطين كما في الشكل :



سنفرض فيما يلي أن $\arg \zeta = 0$ عندما $\zeta > 0$ وأن $\arg (\zeta + \beta) = 0$ عندما $\zeta + \beta > 0$. لننشر $(\zeta + \beta)^{q-1}$ فنجد بفرض أن $|\zeta| < |\beta|$:

$$\begin{aligned} (\zeta + \beta)^{q-1} &= \beta^{q-1} \left(1 + \frac{\zeta}{\beta}\right)^{q-1} = \beta^{q-1} \left[1 + \sum_1^{\infty} \frac{(q-1)(q-2) \dots (q-k)}{k! \beta^k} \zeta^k\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k \end{aligned} \quad (10)$$

حيث رمزنا :

$$c_k = \beta^{q-k-1} \frac{(q-1)(q-2) \dots (q-k)}{k!} \quad k \geq 1 \quad (10)$$

$$c_0 = \beta^{q-1}$$

وإذا كان $|\beta| \geq |\alpha|$ فإننا نكتب :

$$(\zeta + \beta)^{p-1} = c_0 + c_1 \zeta + \dots + c_n \zeta^n + R_n(\zeta) \quad (11)$$

وإذا استخدمنا المحيط C_1 فإننا نجد الحل :

$$u_1 = \sum_{k=0}^n c_k \int_{C_1} e^{z\zeta} \zeta^{p+k-1} d\zeta + \int_{C_1} e^{z\zeta} \zeta^{p-1} R_n(\zeta) d\zeta$$

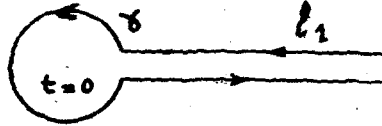
لنأخذ في المجموع الواقع في الطرف الأيمن متحولاً جديداً t :

$$z\zeta = -t = e^{-it}$$

فنجد :

$$\int_{C_1} e^{z\zeta} \zeta^{p+k-1} d\zeta = e^{-\pi i} (-1)^k z^{-p-k} \int_{l_1} e^{-t} t^{p+k-1} dt$$

حيث يكون l_1 كما في الشكل ، وباجراء المكاملة على l_1 :



$$\int_{l_1} e^{-t} t^{p+k-1} dt = \int_{\infty}^0 e^{-t} t^{p+k-1} dt + \int_{\gamma} e^{-t} t^{p+k-1} dt$$

$$+ \int_{\delta} e^{-t} t^{p+k-1} e^{2\pi i(p+k-1)} dt$$

واستناداً إلى تمثيل الدالة Γ التكاملي ، فإننا نجد عندما نجعل δ ، نصف تشر

، γ ، يسى إلى الصفر .

$$\int_{l_1} e^{-t} t^{p+k-1} dt = (e^{2\pi i(p+k)} - 1) \Gamma(p+k)$$

وهكذا نجد :

$$u_1(z) = z^{-p} (e^{2\pi i p} - 1) e^{-\pi p i} \sum_0^n (-1)^k c_k \Gamma(p+k) z^{-k} \\ + \int_{C_1} e^{z\zeta} \zeta^{p-1} R_n(\zeta) d\zeta$$

أو :

$$z^p u_1 = e^{-\pi p i} (e^{2\pi i p} - 1) \sum_0^n (-1)^k c_k \Gamma(p+k) z^{-k} \quad (12)$$

$$+ z^p \int_{C_1} e^{z\zeta} \zeta^{p-1} R_n(\zeta) d\zeta$$

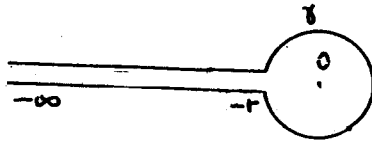
سنثبت فيما يلي أن المتسلسلة :

$$e^{-\pi p i} (e^{2\pi i p} - 1) \sum_0^\infty (-1)^k c_k \Gamma(p+k) z^{-k} \quad (13)$$

تمثل تشراً مقارباً لـ $z^p u_1$ عندما $z > 0$. يكفي لذلك أن نثبت أن

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{n+p} \int_{C_1} e^{z\zeta} \zeta^{p-1} R_n(\zeta) d\zeta = 0 \quad (14)$$

نختار C_1 كما في الشكل ، ونثبت أولاً أن :



$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{n+p} \int_{-\infty}^{-r} e^{z\zeta} \zeta^{p-1} R_n(\zeta) d\zeta = 0 \quad (15)$$

نلاحظ لذلك اعتماداً على (11) أنه يمكن اختيار عدد موجب N كبير بقدر كاف بحيث يسع $\left| \frac{R_n(\zeta)}{\zeta^N} \right|$ إلى الصفر عندما $\zeta \rightarrow -\infty$ ، وبالتالي فإن $\left| \frac{R_n(\zeta)}{\zeta^N} \right|$ يبقى محدوداً على C_1 ، وبالتالي فهناك عدد موجب m بحيث يكون :

$$|R_n(\zeta)| < m |\zeta|^N \quad (-\infty < \zeta \leq -r)$$

وعلى هذا نستطيع أن نكتب :

$$|\zeta^{p-1} R_n(\zeta)| < m' e^{-\epsilon \zeta}$$

بفرض أن m' ثابت موجب وأن ϵ عدد موجب نختاره صغيراً بالقدر الذي نشاء ، وهكذا نجد :

$$\begin{aligned} \left| z^{n+p} \int_{-\infty}^{-r} e^{z\zeta} \zeta^{p-1} R_n(\zeta) d\zeta \right| &< \left| z^{n+p} \right| \int_{-\infty}^{-r} m' e^{(z-\epsilon)\zeta} d\zeta \\ &= \frac{|z^{n+p}|}{|z-\epsilon|} m' e^{-(z-\epsilon)r} \end{aligned}$$

ومنه ينتج صحة (15) . وبالاسلوب نفسه نرى ان الأمر ذاته يصح لأجل التكامل على الحافة السفلى من الشريط . بقي ان نثبت أن :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{n+r} \int_{\gamma} e^{z\zeta} \zeta^{p-1} R_n(\zeta) d\zeta = 0$$

سنعتبر $|\beta| < \frac{1}{2} r$ عندئذ يمكننا أن نستعمل (10) على محيط γ ، ويكون استناداً إلى صيغة كوشي التكاملية :

$$|c_k| < \frac{m'}{(\frac{1}{2}|\beta|)^k}$$

بفرض أن m' ثابت موجب . ولما كان :

$$R_n(\zeta) = c_{n+1}\zeta^{n+1} + c_{n+2}\zeta^{n+2} + \dots$$

فإننا نجد على γ :

$$|R_n(\zeta)| \leq |c_{n+1}| |\zeta|^{n+1} + |c_{n+2}| |\zeta|^{n+2} + \dots < \frac{m' |\zeta|^{n+1}}{[\frac{1}{2}|\beta|]^{n+1} (1-\rho)}$$

بفرض أن :

$$\rho = \frac{r}{\frac{1}{2}|\beta|}$$

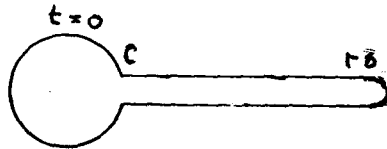
وإذا ادخلنا متحولاً جديداً t بدلاً من ζ وفق الدستور $\zeta = -\gamma$ فنجد :

$$z^{n+p} \int_{\gamma} e^{z\zeta} \zeta^{p-1} R_n(\zeta) d\zeta = (-1)^p z^n \int_{\gamma'} e^{-t} t^{p-1} R_n(-\frac{t}{z}) dt$$

حيث γ' محيط دائري مركزيه $t=0$ ونصف قطره rz .

يمكننا الآن أن نستبدل γ' بمحيط γ'' وفق الشكل بفرض أن c عدد موجب

مثبت مستقل عن z . نفرض أولاً أن p عدد حقيقي فيكون :



$$|(-1)^p z^n \int_{\gamma'} e^{-t} t^{p-1} R_n(-\frac{t}{z}) dt| < \frac{1}{z} \frac{m'}{[\frac{1}{2}|\beta|]^{n+1} (1-\rho)} \int_{\gamma''} |t|^{n+p} e^{-t} |ds|$$

بفرض أن S قوس γ . ان الطرف الأيمن يتكون من جداء $\frac{1}{z}$ بمضروب يبقى محسوداً على الدائرة التي مركزها $t = 0$ ونصف قطرها c . أما التكامل على القطعة (c, rz) فيعطي هذا المضروب الشكل :

$$\frac{m''}{\Gamma(\frac{1}{2}|\beta||^{n+1})(1-\rho)} \int_0^{rz} e^{-t^n + p} dt$$

فإذا ماجعلنا $z \rightarrow \infty$ نرى أن هذا المقدار يسمى إلى نهاية محدودة . وبذلك نصل إلى المطلوب . اما إذا كان p من الشكل $p = p_1 + i p_2$ فيمكن إعادة الحسابات والوصول إلى النتيجة ذاتها بملاحظة أن

$$t^p = e^{(p_1 + i p_2) \log t} \quad |t^p| = |t|^{p_1} e^{-p_2 \log t}$$

وهكذا نرى أن :

$$u_1(z) \sim z^{-p} e^{-\pi p i} (e^{2\pi p i} - 1) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(p+k) c_k}{z^k} \quad (16)$$

ونحصل بشكل مماثل على النشر المقارب للحل الثاني انطلاقاً من التمثيل التكاملي للحل على المحيط C_2 .

لنلاحظ أننا إذا رمزنا لأمثال المتسلسلة في (16) ولاحظنا (10) . فإننا نجد :

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} = - \frac{\Gamma(p+k+1) c_{k+1}}{\Gamma(p+k) c_k} = - \frac{(p+k)(q-k-1)}{\beta(k+1)}$$

أو :

$$(k+1-q)(k+p)A_k \sim (k+1)\beta A_{k+1} \quad (17)$$

ولكننا اذا عدنا إلى (7) وأجرينا فيها التحويل :

$$u = z^{-p} v$$

فإننا نجد :

$$v'' + \left(\beta + \frac{a_1 - 2p}{z} \right) v' + \frac{p(p+1) - a_1 p}{z^2} v = 0 \quad (18)$$

وإذا عوضنا في هذه المعادلة :

$$v = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_k}{z^k} + \dots \quad (19)$$

فإننا نجد :

$$(k(k+1) - k(a_1 - 2p) + p(p+1) - a_1 p) A_k = (k+1) \beta A_{k+1}$$

وإذا لاحظنا أن $q = a_1 - p$ فإن العلاقة الأخيرة تكتب بالشكل :

$$(k+1-q)(k+p) A_k = (k+1) \beta A_{k+1}$$

وهذه لا تختلف عن (17) ، وبالتالي فإننا نصل إلى النتيجة الهامة التالية :

للحصول على النشر المقارب لمعادلة لابلاس (3) نقوم بالخطوات التالية :

(1) نقوم بالتحويل $w = e^{\alpha z} u$ ونختار α بحيث ينعدم الحد الذي يحوي z

في أمثال u فتتحول بذلك المعادلة (3) إلى المعادلة (6) .

٢ - نقوم بالتحويل $u = z^\lambda v$ ونختار λ بحيث تأخذ المعادلة التفاضلية في

v الشكل (18) .

٣ - نعوض في المعادلة الناتجة النشر (19) فتعین أمثال هذا النشر بالدستور

التدرجي (17) ويكون النشر المقارب للحل هو :

$$w_1(z) \sim e^{\alpha z} z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{z^k}$$

(٦-٢-١) مثال : لتكن لدينا المعادلة :

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - n^2) w = 0 \quad (20)$$

والمطلوب الحصول على نشر مقارب لحلول هذه المعادلة .

ان هذه المعادلة ليست من شكل معادلة لابلاس (3) ولكن، إذا أجرينا

التحويل $w = z^n u$ تتحول المعادلة (20) إلى الشكل :

$$z u'' + (2n+1)u' + z u = 0$$

ولهذه المعادلة شكل معادلة (3) . نجري التحويل $u = e^{\alpha z} v$ فنجد :

$$z v'' + [(2n+1) + 2\alpha z] v' + [(\alpha^2+1)z + \alpha(2n+1)] v = 0$$

نختار α بحيث ينعدم α^2+1 فنجد $\alpha_1 = i$ و $\alpha_2 = -i$. لتكن $\alpha = i$ فتأخذ

المعادلة الأخيرة الشكل :

$$z v'' + [(2n+1) + 2iz] v' + i(2n+1)v = 0$$

نجري الآن التحويل $v = z^\lambda u_1$ فنجد :

$$v_1'' + \left(\frac{2\lambda+2n+1}{z} + 2i \right) v_1' + \left[\frac{2i\lambda+i(2n+1)}{z} + \frac{\lambda(\lambda-1)+(2n+1)\lambda}{z^2} \right] v_1 = 0$$

نختار λ بحيث ينعدم $2i\lambda+i(2n+1)$ أي $\lambda = -\frac{2n+1}{2}$ فتأخذ المعادلة الأخيرة

الشكل :

$$v_1'' + 2i v_1' + \frac{1-4n^2}{4z^2} v_1 = 0$$

نعرض في هذه المعادلة النشر :

$$v_1 = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$

ف نجد بعد المطابقة :

$$A_1 = \frac{1-4n^2}{8i} A_0 \quad [k(k+1) + \frac{1-4n^2}{4}] A_k = 2i(k+1)A_{k+1} \quad k=1,2,\dots$$

ومنه نجد :

$$v_1 = A_0 \left[1 + \frac{1^2-4n^2}{8iz} + \frac{(1^2-4n^2)(3^2-4n^2)}{2!(8iz)^2} + \frac{(1^2-4n^2)(3^2-4n^2)(5^2-4n^2)}{3!(8iz)^3} + \dots \right]$$

ويكون النشر المطلوب للحل الاول للمعادلة (20) هو :

وبالأسلوب ذاته نحصل على نشر الحل الثاني

$$w_1 = e^{iz} z^{-\frac{2n+1}{2}} v_1$$

تعاريف

أوجد النشر المقارب لحلول المعادلات التالية :

$$z w'' + w' - 4zw = 0 \quad - 1$$

$$z w'' + (p + q + z)w' + pw = 0 \quad - 2$$

$$z w'' + (2 + az)w' + (a + bz)w = 0 \quad - 3$$

$$z w'' + 2aw' - zw = 0 \quad - 4$$

٧- معادلة بسل التفاضلية

تسمى المعادلة (20) التي مرت معنا في (٦-٢-١) ، وهي :

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - \nu^2) w = 0 \quad (1)$$

بفرض أن ν ثابت ، معادلة بيسل التفاضلية . وهذه المعادلة أهمية كبيرة في الفيزياء ،
 ففي تبرز مثلاً عند تعيين حلول معادلة لابلاس موافقة لشروط حدية معينة . فإذا
 استخدمنا الاحداثيات الاسطوانية (ρ, φ, Z) تأخذ معادلة لابلاس $\Delta V = 0$
 الشكل :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = 0$$

ولهذه المعادلة حل من الشكل :

$$V = e^{kz} w(\rho) \cos(\nu \varphi + \epsilon)$$

بفرض أن k, ν, ϵ ثوابت ، فيما إذا حققت w المعادلة :

$$\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} + (k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}) w = 0$$

وهذه تنقلب إلى المعادلة (1) إذا اجرينا التحويل $z = k\rho$.

$\nu = 1$ توابع بيسل : لمعادلة بيسل نقطتان شاذتان $z = 0$ وهي نقطة شاذة
 منتظمة و $z = \infty$ وهي نقطة شاذة غير منتظمة . سنهتم فيما يلي في الوصول إلى
 الحلول بجوار $z = 0$. ان جذري المعادلة الدليلية هما $\mp \nu$. وإذا لم يكن
 ν عدداً صحيحاً سالباً فإن :

$$w = c_0 z^\nu \left[1 - \frac{(\frac{1}{2}z)^2}{1 \cdot (\nu+1)} + \frac{(\frac{1}{2}z)^4}{1 \cdot 2 \cdot (\nu+1)(\nu+2)} - \dots \right]$$

هو حل لمعادلة بيسل . يسمى هذا الحل ، فيما إذا اخترنا $c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ ، دالة

بيسل من المرتبة ν ويرمز لها بـ $J_\nu(z)$ ، أي :

$$J_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{1}{2}z\right)^{2r}}{r! \Gamma(\nu+r+1)} \quad (2)$$

على أن نأخذ الفرع الرئيسي للدالة متعددة الفروع $\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu$. إن المتسلسلة الواردة في (2) متقاربة مها كانت z .

ان الحلين $J_\nu(z)$ و $J_{-\nu}(z)$ مستقلان خطياً، إذا لم تكن ν عدداً صحيحاً أو صفراً، وبالتالي فإن الحل العام لمعادلة بسل هو :

$$w = A J_\nu(z) + B J_{-\nu}(z) \quad (3)$$

أما إذا كان ν عدداً صحيحاً n فنحن نذ يكون :

$$\begin{aligned} J_{-n}(z) &= \left(\frac{1}{2}z\right)^{-n} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{1}{2}z\right)^{2r}}{r! \Gamma(-n+r+1)} \\ &= \left(\frac{1}{2}z\right)^{-n} \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{1}{2}z\right)^{2r}}{r! \Gamma(-n+r+1)} \end{aligned}$$

(لأن $\frac{1}{\Gamma(t)}$ ينعدم عندما يكون t عدداً صحيحاً سالباً أو صفراً).

$$= \left(\frac{1}{2}z\right)^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} \left(\frac{1}{2}z\right)^{2s}}{\Gamma(n+s+1) s!} = (-1)^n J_n(z)$$

وعلى هذا فإن (3) لاتعطينا حلاً عاماً عندما يكون ν عدداً صحيحاً أو معدوماً. وإيجاد الحل العام يتطلب ماسبق أن ذكرناه في البند الثاني من هذا الفصل.

٧-٢ الصيغ التكرارية :

نلاحظ أولاً أن :

$$\begin{aligned}
J_{v-1}(z) + J_{v+1}(z) &= \left(\frac{1}{2}z\right)^{v-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4}z^2)^r}{r! \Gamma(v+r)} + \left(\frac{1}{2}z\right)^{v+1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4}z^2)^r}{r! \Gamma(v+r+2)} = \\
&= \left(\frac{1}{2}z\right)^{v-1} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4}z^2)^r}{r! \Gamma(v+r)} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4}z^2)^{r+1}}{r! \Gamma(v+r+2)} \right] \\
&= \left(\frac{1}{2}z\right)^{v-1} \left[\frac{1}{\Gamma(v)} + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{r! \Gamma(v+r)} - \frac{1}{(r-1)! \Gamma(v+r+1)} \right\} (-\frac{1}{4}z^2)^r \right] \\
&= v \left(\frac{1}{2}z\right)^{v-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4}z^2)^r}{r! \Gamma(v+r+1)} = \frac{2v}{z} J_v(z)
\end{aligned}$$

وما قمنا به من تغيير ترتيب الحدود في التسلسلتي غير المتتهتين صحيح بسبب التقارب المطلق .

وهكذا نرى أن :

$$J_{v-1}(z) + J_{v+1}(z) = \frac{2v}{z} J_v(z) \quad (4)$$

وباسلوب مماثل نجد :

$$\begin{aligned}
J_{v-1}(z) - J_{v+1}(z) &= \\
&= \left(\frac{1}{2}z\right)^{v-1} \left[\frac{1}{\Gamma(v)} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r! \Gamma(v+r)} + \frac{1}{(r-1)! \Gamma(v+r+1)} \right] \left(-\frac{z^2}{4}\right)^r - \\
&= \left(\frac{1}{2}z\right)^{v-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{v+2r}{r! \Gamma(v+r+1)} \left(-\frac{z^2}{4}\right)^r
\end{aligned}$$

أي :

$$J_{v-1}(z) - J_{v+1}(z) = 2 J'_v(z) \quad (5)$$

ومن (4) و (5) نجد بسهولة :

$$\frac{v}{z} J_v(z) + J_v'(z) = J_{v-1}(z) \quad (6)$$

$$\frac{v}{z} J_v(z) - J_v'(z) = J_{v+1}(z) \quad (7)$$

تمارين

١ - بين أن رونسكي $J_v(z)$ و $J_{-v}(z)$ هو :

$$\Delta(J_v, J_{-v}) = -\frac{2 \sin v\pi}{\pi z}$$

واستنتج من ذلك أن J_v, J_{-v} مستقلان خطياً عندما لا يكون v عدداً صحيحاً أو صفراً .

٢ - اثبت بالاستقراء الرياضي أنه إذا كان m عدداً صحيحاً فإن :

$$\left(\frac{1}{z}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+2n)(m+n-1)!}{n!} J_{m+2n}(z)$$

٣ - بين أنه إذا كان m صحيحاً موجباً فإن :

$$\left(\frac{d}{z dz}\right)^m [z^v J_v(z)] = z^{v-m} J_{v-m}(z)$$

$$\left(\frac{d}{z dz}\right)^m [z^{-v} J_v(z)] = (-1)^m z^{-v-m} J_{v+m}(z)$$

٤ - اثبت أن :

$$J_v(z) J_{1-v}(z) + J_{-v}(z) J_{v-1}(z) = \frac{2 \sin v\pi}{\pi z}$$

٥ - أثبت أن :

$$J_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin z, \quad J_{-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos z$$

واستنتج من ذلك $J_{\pm \frac{3}{2}}(z)$

٦ - برهن أن :

$$[J_0(z)]^2 + 2 \sum_1^{\infty} [J_n(z)]^2 = 1$$

★ ★ ★

الفصل الثالث

النظرية الوصفية للمعادلات التفاضلية غير الخطية

١ - مقدمة : إن معظم الأبحاث التي قدمناها لك في المعادلات التفاضلية حتى الآن تتعلق بطرق حل هذه المعادلات ونظريات وجود الحل . ولقد لاحظت كيف كان بالإمكان الوصول إلى حل بشكل متتالي في بعض اصناف المعادلات من المرتبة الأولى وفي المعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة من مراتب مختلفة ، ولاحظت أيضاً كيف أننا كنا نلجأ إلى الحل بواسطة المتسلسلات عندما كان يصعب أو يتعذر علينا الوصول إلى الحل بواسطة دوال ابتدائية شهيرة .

غير أنه يمكن الاجابة عن عديد من الأسئلة حول حلول المعادلات التفاضلية دون اللجوء إلى حل هذه المعادلات .

سنكتفي في هذا الفصل بدراسة بسيطة لهذا النمط من الأسئلة ، في حالة مجموعة مكونة من معادلتين تفاضليتين من المرتبة الأولى .

٢ - مستوي الطور والنقط الحرجة :

لنبدأ بالنظر في مسألة القيم الابتدائية :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (1)$$

$$t = 0 \text{ عندما } x = x_0, \frac{dx}{dt} = x'_0$$

بفرض أن للدالة f مشتقات جزئية مستمرة من المرتبة الأولى بالنسبة لـ x و x' .

يمكن ، إذا وضعنا $dx/dt = y$ نقل هذه المعادلة مع شروطها الابتدائية ، إلى المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = y \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y)$$

(2)

$$t = 0 \text{ عندما } y = y_0 = (x'_0) \quad x = x_0$$

ومن اللازم أن حل هذه المجموعة يعني الحول على زوج من الدوال الفضولة $x = x(t)$, $y = y(t)$ يحول المعادلات (2) ، في فترة تحوي $t = 0$ ، إلى متطابقتين ، ويحقق بالإضافة لذلك $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

يمكن النظر إلى الدالتين $x = x(t)$, $y = y(t)$ على أنها تمثيل وسيطي لمنحن في المستوي xy يمر بالنقطة (x_0, y_0) . نسمي المستوي xy مستوي الطور للمعادلة (1) أو للمجموعة (2) ، ونسمي المنحني المعطى بالتمثيل الوسيطي مساراً أو مداراً لـ (1) أو لـ (2) . وبفرض وجود تقابل متباين بين قيم الوسيط t ونقط المنحني ، فإننا نسمي الاتجاه على المنحني الموافق للزيادة ، الاتجاه الموجب .

وإذا كانت القيمتان $x = x_0$ و $y = y_0 (= x'_0)$ موافقتين لـ $t = t_0$ بدلاً من $t = 0$ فإننا نحصل على حل مختلف دون أن يتغير المسار ، وذلك لأن المعادلتين :

$$x = x(t) , y = y(t) \quad \alpha < t < \beta$$

تعرفان المنعني ذاته المعين بالمعادلتين :

$$x = x(t - t_0) \quad y = y(t - t_0) \quad \alpha + t_0 < t < \beta + t_0$$

وعلى هذا فإن المصطلحين «حل» و«مسار» ليسا مترادفين .

وإذ حذفنا الوسيط t من المعادلتين $x = x(t)$, $y = y(t)$ فإننا نحصل على معادلة ديكارتية لمنحن يحمل المسار . بعبارة أخرى ان المسار هو هذا المنعني أو هو جزء منه . فإذا حذفنا على سبيل المثال الوسيط t من المعادلتين :

$$x = e^t \quad y = e^{2t} \quad -\infty < t < \infty \quad (3)$$

فإننا نحصل على $y = x^2$. وهذه معادلة قطع مكافئ . إن النصف الأيمن من هذا القطع هو المسار .

يمكن أيضاً الوصول إلى معادلة حامل المسار الذي يمر بـ (x_0, y_0) بحذف t من (2) بتقسيم المعادلة الثانية على الأولى فنحصل على :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$x = x_0 \quad \text{عندما} \quad y = y_0$$

ثم بحل هذه المعادلة

يمكن تعميم ماقلناه على حالة مجموعة من الشكل :

$$\frac{dx}{dt} = g(x, y) \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y) \quad (4)$$

$$t = 0 \quad \text{عندما} \quad x = x_0 , y = y_0$$

بفرض أن لكل من f و g مشتقات جزئية مستمرة من المرتبة الأولى .

مثال ١ - لنحاول إيجاد مسارات المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = 3x + y \quad \frac{dy}{dt} = -x + 3y \quad (5)$$

لنبحث أولاً عن الحلول بالشكل :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^{mt}$$

فنجهد بالتعويض في (5) بعد الاختصار على e^{mt} :

$$(m-3)A - B = 0 \quad -A + (m-3)B = 0$$

وعلى هذا فإن علينا أن نأخذ $m-2$ أو $m-4$ للوصول إلى حل غير الحل

الصفري . فإذا أخذنا $m-2$ فإننا نجد $A = -B$ ويكون الحل :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

أما إذا أخذنا $m-4$ فإننا نجد $A = B$ ويكون الحل :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$$

ويكون الحل العام :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$$

فمسار المجموعة يتعين وسيطاً بالمعادلتين :

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \\ y &= -c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \end{aligned} \quad -\infty < t < \infty \quad (6)$$

وبحذف الوسيط من هاتين المعادلتين نجد :

$$(x-y)^2 = k(x+y) \quad k = 2c_1^2/c_2 \quad (7)$$

فإذا اخترنا $k=0$ نجد المستقيم $y=x$ الموافق لـ $c_1=0$. أما المستقيم $y=-x$ الموافق لـ $c_2=0$ فلا نحصل عليه من المعادلة الديكارتية الاخيرة مالم نسمح لـ k أن يصبح لانهاياً .

يمكن حل المجموعة المفروضة بطريقة اخرى . نقسم المعادلة الثانية على الاولى فنجد :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{3x+y}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة من المرتبة الاولى يمكن حلها بسهولة بأجراء

$$\text{التحويل } y = ux$$

ان المعادلة (7) تعرف جماعة من القطوع المكافئة تمس ، باستثناء واحد منها ، المستقيم $x+y=0$ وتتشرك بالهور $x-y=0$. الاستثناء الوحيد هو القطع المتردي $x-y=0$ الموافق لـ $k=0$.

ان هذه المنحنيات التي حصلنا عليها هي ليست مسارات المجموعة المفروضة بل

حوامل هذه المسارات . فإذا فرضنا ، مثلاً ، $x=-1$ و $y=2$ عندما $t=0$ فاننا نجد بالتعويض في (6) .

$$c_1 + c_2 = -1 \quad -c_1 + c_2 = 2$$

وعلى هذا فإن :

$$x = -\frac{3}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{4t}$$

$$-\infty < t < \infty$$

$$y = \frac{3}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{4t}$$

والمسار الموافق لهاتين المعادلتين هو نصف القطع المكافئ الذي ينطلق من نقطة الاصل (دون أن تكون هذه النقطة من المسار) ماراً بالنقطة $(-1, 2)$. ولما كانت c_1 تظهر في (7) على شكل c_1^2 فإن النصف الاخير من القطع المكافئ $(x-y)^2 = 9(x+y)$ هو المسار :

$$x = \frac{3}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{4t}$$

$$y = -\frac{3}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{4t}$$

وبوجه عام ان كل قطع مكافئ من الجباءة (7) ، بعد أن نحذف منه نقطة الاصل ، هو اتحاد مسارين . والامر نفسه بصح بالنسبة للمستقيمين $y = \pm x$.

وبوجه عام ان المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

التي نحصل عليها من (4) بتقسيم المعادلة الثانية على الاولى تعطينا ميل المسار عند النقطة (x,y) . ولكن إذا انعدم كل من البسط والمقام في النقطة (x_0, y_0) فإننا نسمي هذه النقطة نقطة حرجة أو نقطة توازن للمجموعة (4) . وتعرف النقطة الحرجة بانها منعزلة إذا وجد قرص دائري مجوفاً حولها دون أن يجوي أية نقطة حرجة أخرى .

٣ - النقط الحرجة ومسارات مجموعة خطية : سنعالج في هذا البند الاشكال المختلفة لمسارات المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = ax + by \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + cy$$

بفرض أن a, b, c, e ثوابت حقيقية وأن $ae - bc \neq 0$ أو للمعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + cy}{ax + by} \quad (1')$$

في جوار النقطة الحرجة $(0, 0)$. ولقد وضعنا الشرط $ae - bc \neq 0$ كي تكون النقطة $(0, 0)$ نقطة حرجة منعزلة ، إذ لو كان $ae - bc = 0$ لكانت جميع نقط المستقيم $cx + cy = 0$ تقطاً حرجة .

وحل المجموعة (1) نضع $x = Ae^{mt}$, $y = Be^{mt}$ فنجد معادلة القيم المميزة .

$$\begin{vmatrix} m - a & -b \\ -c & m - e \end{vmatrix} = m^2 - (a+e)m + ae - bc = 0 \quad (2)$$

ان طبيعة حلول المجموعة (1) ترتبط بطبيعة حلول المعادلة (2) . ولذلك علينا أن نميز بين حالات مختلفة حسب قيمة المميز للمعادلة التربيعية (2) في m وقبل البدء بذلك نورد بعض التعاريف .

تعريف : نقول عن مسار T معرف بالمعادلتين $x = x(t)$, $y = y(t)$ انه مقارب للنقطة الحرجة $(0, 0)$ عندما $t \rightarrow +\infty$ إذا كان :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

وانه مقارب للنقطة الحرجة $(0, 0)$ عندما $t \rightarrow -\infty$ إذا كان :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$$

ونقول عن المسار T انه يلحق بالنقطة الحرجة $(0, 0)$ عندما $t \rightarrow \infty$ إذا كان T مقارباً لـ $(0, 0)$ عندما $t \rightarrow +\infty$ وكانت النهاية .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)}$$

موجودة أو كانت مساوية $\pm \infty$. وبشكل مماثل نتحدث عن الحالة التي يلحق فيها T النقطة الحرجة $(0, 0)$ عندما $t \rightarrow -\infty$.

ونقول عن T انه يبتعد إلى اللانهاية عن النقطة الحرجة $(0, 0)$ عندما $t \rightarrow +\infty$ (أو $t \rightarrow -\infty$) فيما إذا سعت إحدى الدالتين $x(t)$ أو $y(t)$ إلى اللانهاية عندما $t \rightarrow +\infty$ (أو $t \rightarrow -\infty$) .

الحالة (1) : لتعالج أولاً المجموعة

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \quad \frac{dy}{dt} = 2\lambda y \quad \lambda \neq 0 \quad (3)$$

إن جذري المعادلة المميزة هما λ و 2λ فهما غير متساويتين ومن إشارة واحدة .
وان حل المعادلة (1') المقابلة لهذه المجموعة هو :

$$y = k x^2 \quad (4)$$

وهذه معادلة جماعة من القطوع المكافئة يمس كل منها المستقيم $y = 0$ في النقطة الحرجة $(0, 0)$ أما إذا قمنا بحل (3) فالتنا نجد :

$$x = Ae^{\lambda t} \quad y = Be^{2\lambda t} \quad (5)$$

ويتضح من (5) أن كل مسار يبتعد إلى اللانهاية عن النقطة الحرجة عندما $t \rightarrow \infty$ إذا كان $\lambda > 0$ ، وتقرب من النقطة الحرجة في اتجاه محدد عندما $\lambda < 0$.

تسمى النقطة الحرجة في مثل هذه الحالة عقدة . وتتميز العقدة بوجود جوار للنقطة الحرجة بحيث جميع المسارات ، في هذا الجوار ، تلتق بالنقطة الحرجة عندما $t \rightarrow +\infty$ أو $t \rightarrow -\infty$.

الحالة (٢) : أما بالنسبة للمجموعة .

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \quad \frac{dy}{dt} = -\lambda y \quad \lambda \neq 0 \quad (6)$$

في هذه الحالة تكون المعادلات الوسيطة للمسارات :

$$x = Ae^{\lambda t} \quad y = Be^{-\lambda t} \quad (7)$$

ومنها نرى أنه ، سواء كانت λ موجبة أو سالبة فإن كل قطع زائد (7) يبتعد عن النقطة الحرجة إلى اللانهاية عندما $t \rightarrow +\infty$ أو $t \rightarrow -\infty$. غير أن المسار المحمول على المستقيم $x = 0$ يلحق عندما $t \rightarrow \infty$ بالنقطة الحرجة إذا كان $\lambda > 0$ و يبتعد عن النقطة الحرجة إلى اللانهاية إذا كان $\lambda < 0$. أما المسار المحمول على المستقيم $y = 0$ فهو يبتعد عندما $t \rightarrow \infty$ عن النقطة الحرجة إلى اللانهاية إذا كان $\lambda > 0$ ويلحق بالنقطة الحرجة إذا كان $\lambda < 0$. تسمى النقطة الحرجة في مثل هذه الحالة نقطة سرجية . وتتميز النقطة السرجية في أن مسارين (على الأقل) من المسارات يلحقان بالنقطة السرجية من جهتين متعاكستين عندما $t \rightarrow +\infty$ ، ومسارين (على الأقل) يلحقان بالنقطة السرجية من الجهتين المتعاكستين عندما

$t \rightarrow -\infty$. أما بقية المسارات الأخرى فتبتعد عن النقطة الحرجة إلى اللانهاية
عندما $t \rightarrow +\infty$ أو $t \rightarrow -\infty$.

الحالة (٣) : وفي حالة المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \quad \frac{dy}{dt} = -\lambda x + \lambda y \quad \lambda \neq 0 \quad (8)$$

ان جذري المعادلة المميزة حقيقيان ومتساويان . وتكون المعادلتان الوسيطيتان
المسارهما :

$$x = Ae^{\lambda t} \quad (9)$$

$$y = Be^{\lambda t} + A\lambda te^{\lambda t}$$

فإذا كان $\lambda > 0$ فإن كل مسار يبتعد عن النقطة الحرجة إلى اللانهاية عندما
 $t \rightarrow +\infty$ ، أما إذا كان $\lambda < 0$ فإن كل مسار يلحق بالنقطة الحرجة عندما
 $t \rightarrow +\infty$. وهكذا نرى أن النقطة الحرجة في هذه الحالة عقدة .

الحالة (٤) : وفي حالة المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \quad \frac{dy}{dt} = \lambda y \quad (10)$$

وهنا يكون أيضاً للمعادلة المميزة جذر مضاف ، وتكون المعادلات
الوسيطيتان المسارهما :

$$x = Ae^{\lambda t} \quad y = Be^{\lambda t} \quad (11)$$

وهنا نلاحظ انه إذا كان $\lambda > 0$ فإن كل مسار يبتعد عن النقطة الحرجة إلى

مالاتها نهاية عندما $t \rightarrow +\infty$ ويلحق بها إذا كان $\lambda < 0$. ان النقطة الحرجة في هذه الحالة هي عقدة ، ولكنها تختلف عن الحالتين الأولى والثالثة في أنه لا يوجد للمنحنيات تماس مشترك عند النقطة الحرجة . تسمى كل عقدة من هذا النمط عقدة من النوع الأول في حين تسمى كل عقدة من النمط الذي رأيناه في الحالتين الأولى والثالثة عقدة من النوع الثاني .

الحالة (٥) : وهي حالة المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda y \quad \frac{dy}{dt} = -\lambda x \quad \lambda \neq 0 \quad (12)$$

إن جنري المعادلة المميزة هي $\pm i\lambda$ وإن المعادلتين الوسيطيتين للمسار

$$x = A \cos \lambda t + B \sin \lambda t \quad (13)$$

$$y = -A \sin \lambda t + B \cos \lambda t$$

وحوامل المسارات هي الدوائر $x^2 + y^2 = r^2$. وإذا جعلنا $t \rightarrow \infty$ فإن المسارات تدور باتجاه عقارب الساعة عندما $\lambda > 0$ وفي الاتجاه الخالف عندما $\lambda < 0$.

تسمى النقطة الحرجة في مثل هذه الحالة مركزاً . ويتميز المركز بوجود جوار للنقطة الحرجة مجوي مجموعة لانهاية من المسارات المغلقة تقع النقطة الحرجة داخل كل منها ، كما أنه مهما كان $\epsilon > 0$ فإنه يوجد مسارات في هذا الجوار بحيث يكون طول أعظم اوتارها طولاً أقل من ϵ .

الحالة (٦) : وهي حالة المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - y \quad \frac{dy}{dt} = x + \lambda y \quad \lambda \neq 0 \quad (14)$$

إن جذري المعادلة المميزة هما $\lambda \pm i$ وإن المعادلتين الوسيطيتين للمسار هما :

$$x = e^{\lambda t} (A \cos t + B \sin t) \quad (15)$$

$$y = e^{\lambda t} (A \sin t + B \cos t)$$

فإذا كان $\lambda > 0$ فإن كل مسار يتعد عن النقطة الحرجة إلى ما لانهاية عندما $t \rightarrow +\infty$ ، أما إذا كان $\lambda < 0$ فإن كل مسار يتقارب من النقطة الحرجة عندما $t \rightarrow +\infty$. تسمى النقطة الحرجة في مثل هذه الحالة نقطة حازونية أو نقطة بؤرية . وتتميز هذه النقطة بوجود جوار لها بحيث يتقارب كل مسار في هذا الجوار من النقطة الحرجة عندما $t \rightarrow +\infty$ أو $t \rightarrow -\infty$ ، وإن كل مسار يتقارب من النقطة الحرجة يدور حولها عدداً غير منته من المرات .

وإذا فحصنا جماعات المسارات التي تحدثنا عنها في الحالات المختلفة يتبين لنا أن الحلول الدورية لا تبرز إلا في حالة الدوران حول مركز . لأنه في هذه الحالة فقط يحتوي المسار على نقطة (x_0, y_0) يعود لها في كل دورة ، واستناداً إلى نظرية الوجود الوحداية ، بعيد المسلك الذي انطلق منه عند هذه النقطة .

أما مسألة الاستقرار التي سنعالجها الآن فلا يمكن الإجابة عنها بفحص جماعات المسارات لأن هذه المسارات ، باستثناء حالة النقطة السرجية ، أما أن تتقارب من النقطة الحرجة أو تبتعد عنها عندما تسعى t إلى ما لانهاية ، الأمر الذي يتوقف على جذور المعادلة المميزة .

ومما يساعدنا في مناقشة الاستقرار هو التمييز بين نقطة حرجة مستقرة ونقطة

حرجة مستقرة مقارنة والوصول إلى ذلك لتكن $C(x_0, y_0)$ نقطة حرجة منعزلة للمجموعة :

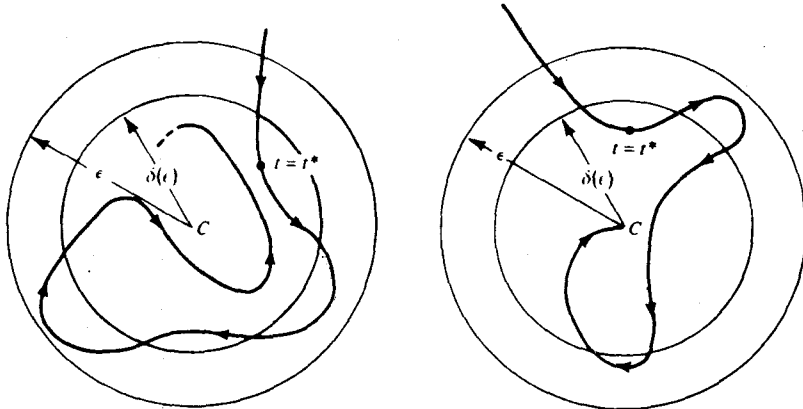
$$\frac{dx}{dt} = g(x, y) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y)$$

وليكن Γ مساراً كيفياً المجموعة تمثله الوسيط $x = x(t)$, $y = y(t)$ وليكن :

$$D(t) = \sqrt{[x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2}$$

بعد نقطة كيفية من Γ عن النقطة الحرجة .

نقول عن النقطة الحرجة C انها مستقرة إذا كان هناك ، لأجل كل عدد موجب مفروض ϵ ، عدد موجب δ بحيث إذا حوى أي مسار نقطة $[x(t^*), y(t^*)]$ بعدها $D(t^*)$ أصغر تماماً من δ فإن البعد $D(t)$ موجود وهو أقل من ϵ لاجل جميع $t \geq t^*$ انظر الشكل .



مسار مستقر

مسار مستقر مقارب

ونقول عن نقطة حرجة منعزلة C إنها مستقرة مقارنة إذا كانت مستقرة من جهة وإذا وجد عدد موجب δ^* بحيث إذا كان $D(t^*) < \delta^*$ فإن :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_0$$

ونقول عن كل نقطة حرجة ليست مستقرة أنها غير مستقرة أو قلقة .

سنعالج مسألة الاستقرار بشكل أكثر تفصيلاً في الفصل التالي .

نلخص خواص الاستقرار لانماط النقط الحرجة التي ناقشناها في الجدول التالي

استقرار النقطة الحرجة	طبيعة النقطة الحرجة	الحالة طبيعة جذور المعادلة المميزة
مستقرة مقارنة إذا كان الجذران سالبين ، وقلقة إذا كانا موجبين	عقدة من النوع الثاني	(١) جذران مختلفان ومن إشارة واحدة
قلقة	نقطة مرجية	(٢) جذران حقيقيان مختلفان ومن إشارتين مختلفتين
مستقرة مقارنة إذا كان الجذران سالبين ، وقلقة إذا كانا موجبين	عقدة (من النوع الأول أو الثاني)	(٣)، (٤) جذر حقيقي مضاعف
مستقرة ولكنها ليست مستقرة مقارنة	مركز	(٥) تخيليان صرفان
مستقرة مقارنة إذا كان الجزء الحقيقي للجذرين سالباً ، وقلقة إذا كان الجزء الحقيقي موجباً	نقطة حلزونية	(٦) عقدبان ولكنها ليسا تخيليين صرفين

(٣-١) تمارين

عين طبيعة النقطة الحرجة (0,0) لكل مجموعة من المجموعات التالية وبين فيما إذا كانت مستقرة ، مستقرة مقاربة أو فلكة :

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 5y \quad \frac{dy}{dt} = -x - 2y \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 5y \quad \frac{dy}{dt} = -x + 5y \quad (2)$$

$$\frac{dx}{dt} = -4x + 3y \quad \frac{dy}{dt} = -2x + y \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y \quad \frac{dy}{dt} = -x + 2y \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dt} = x - 4y \quad \frac{dy}{dt} = x + 5y \quad (5)$$

$$\frac{dx}{dt} = -3x + y \quad \frac{dy}{dt} = -x - 3y \quad (6)$$

٤- النقط الحرجة لمجموعة خطية تقريبا : لنوجه اهتمامنا الآن إلى مجموعة المعادلتين :

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y) \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

ولنفرض ان لهذه المجموعة نقطة حرجة منعزلة ، حيث يمكننا دون أن نؤس عمومية المسألة أن نفترض هذه النقطة الحرجة في نقطة الأصل . وسنفرض في هذا

البند انه يمكن كتابة F و G في جوار لنقطة الاصل بالشكل :

$$F(x, y) = ax + by + f(x, y)$$

(2)

$$G(x, y) = cx + cy + g(x, y)$$

بفرض ان احدى الدالتين f و g على الاقل ليست خطية وأن f و g صغيرتان بالمقارنة مع $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، أي أن :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(x, y)}{r} = 0 \quad , \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{g(x, y)}{r} = 0$$

إن هذه الفروض، بخصوص G و F محققة فيما إذا كان كل من F و G قابلاً للنشر في متسلسلة تايلور تكون فيها الحدود الخطية موجودة . عندئذ يكون :

$$a = \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_{(0,0)} \quad b = \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_{(0,0)} \quad c = \left[\frac{\partial G}{\partial x} \right]_{(0,0)} \quad e = \left[\frac{\partial G}{\partial y} \right]_{(0,0)}$$

لنفرض أن $ac - bc \neq 0$.

ضمن هذه الفروض يكون $f(x, y)$ و $g(x, y)$ همولاً بالمقارنة مع x و y في جوار صغير بقدر كاف لنقطة الأصل . ولهذا السبب يقال عن هذه المجموعة انها خطية تقريباً . إن هذا الأمر يجعلنا نتوقع أن المجموعتين (1) و (2) تتصرفان، على نحو رئيسي ، كالمجموعة التي درسناها في البند السابق . إن هذا التوقع مصيب في بعض الحالات ولكنه خاطيء في حالات أخرى .

وللقيام بهذه الدراسة نفرض :

$$|f| < \epsilon (|x| + |y|) \quad ; \quad |g| < \epsilon (|x| + |y|) \quad (3)$$

بفرض أن $\epsilon(x, y)$ موجب ويسمى بانتظام نحو الصفر مع r . وإذا
أجرينا التحويل :

$$X = y - \alpha_1 x \quad Y = y - \alpha_2 x$$

بفرض أن α_1 و α_2 جدران متوازن للمعادلة : $c + (c - a)\alpha - b\alpha^2 = 0$

فإن المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + ey + g(x, y)}{ax + by + f(x, y)} \quad (4)$$

تأخذ الشكل :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{k_1 Y + \eta_1}{k_2 X + \eta_2} \quad (5)$$

بفرض أن كلاً من η_1 و η_2 يسعيان إلى الصفر . لنستخدم مجدداً x بدلا من

X في (5) و y بدلاً من Y ، فإن (5) تكتب بالشكل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_1 y + \eta_1}{k_2 x + \eta_2} \quad (6)$$

لنقارن هذه المعادلة بالمعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_1 y}{k_2 x} \quad (7)$$

ان حل هذه المعادلة هو :

$$y = c x^{\frac{k_1}{k_2}}$$

فإذا فرضنا أن k_1 و k_2 إشارتين مختلفتين فعندئذ يكون ل (7) نقطة
 مرجية ويكون هناك مساران $y = 0$ و $x = 0$ يمران بنقطة الأصل . أما (6)
 فتعطينا صورة مشابهة حيث نحصل على مسارين منحنيين يمران بنقطة الأصل . أما
 بقية المسارات فلا تفعل ذلك . ولائبات هذه الحقيقة نرمم المنحنيين C_1 و C_2
 المعرفين بـ $k_1 y + \eta_1 = 0$ و $k_2 x + \eta_2 = 0$ على الترتيب . يقارب الأول ،
 عند نقطة الأصل ، المحور ox ويقارب الثاني المحور oy ، ويمر كل منها بنقطة
 الأصل . وليس لهما باستثناء هذه النقطة أية نقطة مشتركة أخرى في جوار لمبدأ
 الاحداثيات . ان C_1 و C_2 يحصران أربع زوايا . لتصور أننا رسمنا من نقطة الأصل
 نصفي المستقيمين $\delta - \frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2} + \delta$ (δ عدد صغير موجب) واخترنا على هذين
 المستقيمين نقطتين A و B تبعدان البعد نفسه عن نقطة الأصل . إن النقطة AB
 توازي oy . يمكن التحكم بموضعي النقطتين A و B بحيث لايجوي المثلث oAB
 أية نقطة من C_2 باستثناء o .

يكون عندئذ $\frac{dy}{dx}$ منتهياً وسالباً في الزاوية الاولى العليا (بفرض أن
 $0 < k_1 < 0 < k_2$) وموجباً في الزاوية الثانية السفلى .

وإذا كانت P نقطة من oA فعندئذ يمكننا أن ننطلق منها على المنحني التكاملي
 المار بها وفي اتجاه x المتزايدة (يوجد مثل هذا المنحني إستناداً إلى نظرية
 الوجود) إلى أن نصل إلى نقطة محيطية Q من المثلث oAB . إن هذه النقطة
 تقع على AB . وبما أن المنحني التكاملي فوق C_1 يهبط فلا يمكن أن يقطع oA
 مرة أخرى . كذلك لا يمكن أن يلاقي oB لانه بعد أن يجتاز C_1 نحو الزاوية
 السفلى يصعد . وبهذا نرى أنه يقابل كل نقطة P من oA نقطة Q من AB .
 وإذا كانت P_1 و P_2 نقطتين من oA و P_2 اقرب من P_1 إلى o فإن Q_2 المقابلة

لـ P_2 أدنى من Q_1 المقابلة لـ P_1 ، لأنه لا يمكن لمنحنين متكاملين للمعادلة (6) أن يتقاطعا . بهذا نرى أن للنقطة Q حداً أدنى R تتقارب منه Q عندما تقترب P من o . ويصح الأمر نفسه بالنسبة للضلع oB ، أي أنه يقابل كل نقطة \bar{P} من oB نقطة \bar{Q} من AB . ويكون لـ \bar{Q} حد أعلى \bar{R} . ومن الواضح أنه لا يمكن لـ \bar{R} أن تكون أعلى من R .

لنبرهن أن R و \bar{R} منطبقان . لما كان AB موازياً للمحور y وكان y' متنهاً فمن الممكن تتبع المنحنين التكاملين انطلاقاً من R و \bar{R} ونحو السينات السالبة . إن هذين المسارين لا بد وأن يصابا في نقطة الأصل ، لأنه لا يمكن لهما أن يتقاطعا مع المنحنيات التكاملية الصادرة عن P_1 و \bar{P}_1 . ليس $y = y(x)$ المنحني التكاملية المار بـ R و $\bar{y} = \bar{y}(x)$ المنحني التكاملية المار بـ \bar{R} ولنبرهن \bar{R} و R . إذا لم يكن $y = \bar{y}$ فإن $y > \bar{y}$ من أجل كل قيمة موجبة لـ x لأنه لا يمكن لهما أن يتقاطعا ومن جهة ثانية ان :

$$\frac{d(y - \bar{y})}{dx} = \frac{k_1 y + \eta_1(x, y)}{k_2 x + \eta_2(x, y)} - \frac{k_1 \bar{y} + \eta_1(x, \bar{y})}{k_2 x + \eta_2(x, \bar{y})}$$

$$\frac{d(y - \bar{y})}{dx} = \frac{k_1 k_2 (y - \bar{y}) x + k_2 x (\eta_1(x, y) - \eta_1(x, \bar{y}))}{(k_2 x + \eta_2(x, y))(k_1 x + \eta_2(x, \bar{y}))}$$

$$\frac{+k_1 y \eta_2(x, \bar{y}) - k_1 \bar{y} \eta_2(x, y) + \eta_2(x, y) \eta_2(x, \bar{y}) - \eta_1(x, \bar{y}) \eta_2(x, y)}{(k_2 x + \eta_2(x, y))(k_1 x + \eta_2(x, \bar{y}))}$$

لنثبت أن البسط معدوم . سنفعل ذلك ضمن فرضية بسيطة (وإن كان من الممكن إثبات الأمر بشروط أضيق) . سنفرض أن η_1 و η_2 تحققان الشرط :

$$| \eta_v(x, y) - \eta_v(x, \bar{y}) | = \epsilon_v (y - \bar{y}) \quad \epsilon_v \rightarrow 0$$

عندئذ يكون (بفرض أن ϵ فيما يأتي هي كمية تسعى إلى الصفر مع x)

$$| k_2 x (\eta_1(x, \eta) - \eta_1(x, \bar{y})) | < \epsilon x (y - \bar{y})$$

$$| k_1 y \eta_2(x, \eta) - k_1 \bar{y} \eta_2(x, y) | = | k_1 (y - \bar{y}) \eta_2(x, \bar{y}) - k_1 \bar{y} (\eta_2(x, \eta) - \eta_2(x, \bar{y})) |$$

$$< \epsilon x (y - \bar{y}) + \epsilon \bar{y} (y - \bar{y}) < \epsilon x (y - \bar{y})$$

ذلك لان $|\bar{y}| < \text{tg}(\frac{\pi}{2} - \delta) \cdot x$. وأخيراً يكون :

$$| \eta_1(x, y) \eta_2(x, \bar{y}) - \eta_1(x, \bar{y}) \eta_2(x, y) | =$$

$$| (\eta_1(x, y) - \eta_1(x, \bar{y})) \eta_2(x, \bar{y}) - \eta_1(x, \bar{y}) (\eta_2(x, y) - \eta_2(x, \bar{y})) |$$

$$< |(\epsilon x + |\bar{y}|)(y - \bar{y}) \epsilon + (\epsilon x + |\bar{y}|)(y - \bar{y}) \epsilon| < \epsilon x (y - \bar{y})$$

ينتج عن هذا ان اشارة البسط هي من إشارة k_1, k_2 أي سالبة . هذا يعني أن $f(x) - y - \bar{y}$ يتناقص مع تزايد x . ولما كان $f(x) \geq 0$ و $f(0) = 0$ فإن هذا تناقض . وعلى هذا فإن $f(x) \equiv 0$.

هذا نكون قد أثبتنا أن منحنيًا تكامليًا واحداً في اتجاه المحور x الموجب ينطلق من 0 . يمكن بشكل مماثل إثبات أن الامر نفسه يصح من أجل الاتجاهات الاحداثية الثلاثة الاخرى . ينتج عن هذا أن صورة النقطة السرجية تبقى تماماً كما هي .

الامر نفسه يصح من أجل العقدة (عندما يكون لـ k_1, k_2 الاشارة نفسها) . يبقى أن نعالج الحالة التي تكون فيها k_1, k_2 عقديتين . في هذه الحالة يكون للمعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + cy}{ax + by}$$

نقطة مركزية أو حلزونية .

ولدراسة هذه الحالة يستحسن استخدام الاحداثيات القطبية في المعادلة (4) .
عندئذ نجد :

$$\frac{r d\theta}{dr} = \frac{c \cos^2 \theta + (e-a) \cos \theta \sin \theta - b \sin^2 \theta + \frac{g}{r} \cos \theta - \frac{f}{r} \sin \theta}{a \cos^2 \theta + (c+b) \cos \theta \sin \theta + e \sin^2 \theta + \frac{g}{r} \sin \theta + \frac{f}{r} \cos \theta}$$

وان :

$$|f| < \epsilon (|x| + |y|) = r\epsilon (|\cos \theta| + |\sin \theta|) < 2r\epsilon_2$$

$$|y| < 2r\epsilon_1$$

$$\epsilon_{1,2} \rightarrow 0$$

وعلى هذا فإن :

$$\frac{r d\theta}{dr} = \frac{c \cos^2 \theta + (e-a) \cos \theta \sin \theta - b \sin^2 \theta + \epsilon_1}{a \cos^2 \theta + (c+b) \cos \theta \sin \theta + e \sin^2 \theta + \epsilon_2} \quad (8)$$

ثم أن $\frac{r d\theta}{dr} = \text{tg } \varphi$ بفرض أن φ الزاوية بين المماس و متجه الموضع (في جهة تزايد x وبالتالي في جهة تزايد r) . إن البسط (بغض النظر عن ϵ_1) لا يغير اشارته لان المميز :

$$(e-a)^2 + 4cb$$

وهو يميز المعادلة (2) ، سالب . وعلى هذا فإن القيمة المطلقة له تبقى اكبر من قيمة معينة مهما كانت θ و r شرط أن تبقى r صغيرة . يتبع عن هذا أن

المنحني ، فيما إذا اقترب من نقطة الاصل ، فإنه يدور حولها عدداً غير منته من المرات . لانه لو بقيت θ بين قيمتين θ_1 و θ_2 ولاحظنا أن :

$$\left| \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} \right| < M$$

ذلك لان القيمة المطلقة للبسط في (8) أكبر من عدد ثابت . كذلك فإن القيمة المطلقة المقام محدودة ، ولو كاملنا بدءاً من نقطة (θ_0, r_0) :

$$\left| \lg \frac{r}{r_0} \right| < M (\theta - \theta_0) < M_1$$

لوجدنا أنه لا يمكن ل r أن تسعى إلى الصفر لان الطرف الايمن محدود . ولما كان r بعد ذلك يحقق استناداً إلى (8) معادلة تفاضلية من الشكل $dr/d\theta = f(r, \theta)$ حيث لا يصبح f أبداً غير منته ، فعندئذ يوجد ، استناداً إلى مبرهنة الوجود ، حل $(r = r(\theta))$ لهذه المعادلة . فإذا تتبعنا مساراً من (r_0, θ_0) في اتجاه تزايد θ (في الاتجاه الموجب) ، فعندئذ يقابل كل قيمة ل θ قيمة ل r . وعلى هذا فإن المسار يدور حتى يعود ثانية إلى نصف القطر المتجه ذاته بقيمة r_1 مختلفة بوجه عام عن الاولى r_0 (ان r_1 تكون مختلفة فعلاً عن r_0 إذا لم يكن للمعادلة $dr/d\theta = 0$ أي جذر حقيقي . عندئذ يكون ل $dr/d\theta$ استناداً إلى (8) إشارة واحدة ، وبالتالي فإن r اما ان تكون متزايدة أو تكون متناقصة) . فإذا كان $r_1 = r_0$ فإن المسار مغلق وإذا كانت جميع المسارات مغلقة فإننا نحصل على نقطة مركزية . اما إذا كانت $r_1 < r_0$ فعندئذ إذا درنا ثانية حول نقطة الاصل فإننا نعود بقيمة جديدة r_2 أصغر من r_1 لان المنحني التكاملي لا ينحرف نفسه . وبهذا نجد القيم $r_0, r_1, r_2, \dots, r_k$ على r على نصف القطر المتجه $(+2k\pi)$. فإذا حصل ان كان $r_0 \rightarrow 0$ فإننا نحصل على حلزون . ان الامر

نفسه يصح من أجل كل نصف قطر متجه آخر θ إذ يكون عندئذ أيضاً $r_0 \rightarrow 0$ لأنه لو حصل $r_0 \rightarrow r^* > 0$ فإن المنحني التكاملي المار من النقطة (r, θ) ، بفرض أن $r < r^*$ ، والذي يدور بالطبع حول نقطة الأصل لابد وان يقطع المنحني التكاملي الاول . وإذا كان أحد المسارات هو حلزون يصب في نقطة الاصل فإن المسارات الاخرى حلزونات تجري في طيات الحلزون الاول . وهكذا يكون لدينا نقطة حلزونية .

أما إذا كانت النهاية $r^* \rightarrow r_0$ على نصف القطر المتجه θ_0 ، غير معدومة فإن هذا الأمر يصح بالنسبة لكل نصف قطر متجه آخر θ . فالمسار يلف حلزونياً على منحني مغلق يسمى دورة حدية . ان هذا المنحني هو مسار ، اعني هو المسار المار بالنقطة (r^*, θ_0) ، ولا يمكن لهذا المسار إلا أن يكون مغلقاً وإلا فإنه باتجاه r المتزايدة سيقطع المنحني التكاملي السابق بعد دورة . إن مثل هذه الدورة الحدية يمكن أن تتكرر ثانية ، بل يمكن أن نجد متتالية غير منتهية منه تقترب من نقطة الاصل . وبين هذه الدورات الحدية يوجد مسارات حلزونية .

والخلاصة : إن مسارات المعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ex + cy + g(x, y)}{ax + by + f(x, y)}$$

بفرض أن $f(x, y) \rightarrow 0$ ، $g(x, y) \rightarrow 0$ (بسرعة كافية) لاختلاف من حيث الشكل عن مسارات المعادلة التفاضلية .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + ey}{ax + by}$$

إلا أنه إذا كان للمعادلة الثانية نقطة حلزونية أو نقطة مركزية فإنه من الممكن أن يكون للأولى دورات حدية الأمر الذي لا يحصل للمعادلة الثانية .

(١ - ٤) امثلة ١ - لتكن لدينا المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + x \cos y$$

$$\frac{dy}{dt} = -y - \sin y$$

إن هذه المجموعة تكتب بالشكل :

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + x \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} \dots \right) = 2x + 2y + \left(-\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} \dots \right) x$$

$$\frac{dy}{dt} = -y - \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \dots \right) = -2y - \left(-\frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} - \dots \right)$$

وهكذا نجد أن :

$$a = 2 \quad b = 2 \quad c = 0 \quad e = -2$$

والمعادلة المميزة للمجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 2y \quad \frac{dy}{dt} = -2y$$

هي : $m^2 - 4 = 0$. إن الجذرين هما $m = \pm 2$ فالنقطة $(0,0)$ هي نقطة سرجية .

وفي الواقع أننا نجد من المجموعة المفروضة أن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y - \sin y}{x + 2y + x \cos y}$$

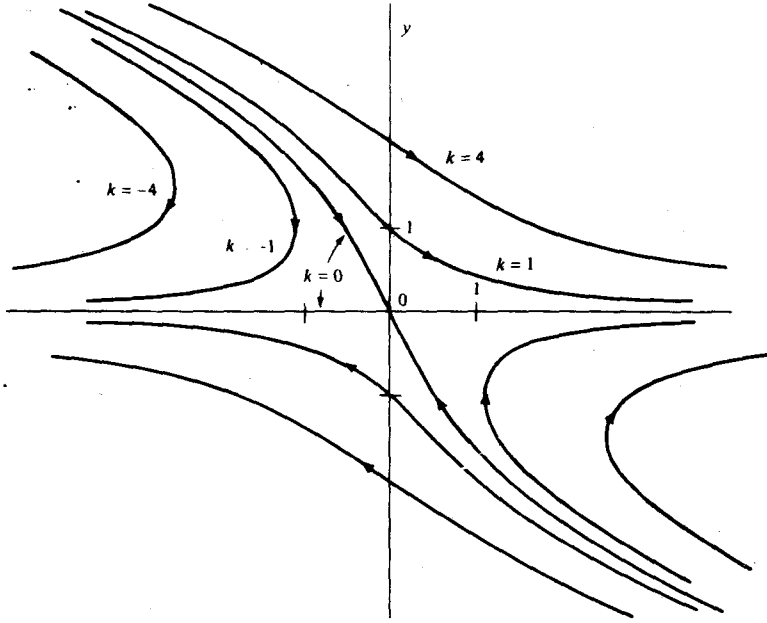
أو :

$$(y + \sin y) dx + (x + 2y + x \cos y) dy = 0$$

وهذه المعادلة تامة ، وتكاملها هو :

$$xy + y^2 + x \sin y = k$$

وفي الشكل نرى مسارات هذه المجموعة لأجل بعض قيم k .



٢ - أما في حالة المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = y \quad \frac{dy}{dt} = -x - y^2$$

فإننا نجد أن المجموعة الخطية الموافقة هي :

$$\frac{dx}{dt} = y \quad \frac{dy}{dt} = -x$$

والمعادلة المميزة هي $m^2 + 1 = 0$ فنقطة الاصل هي نقطة مركزية أو نقطة

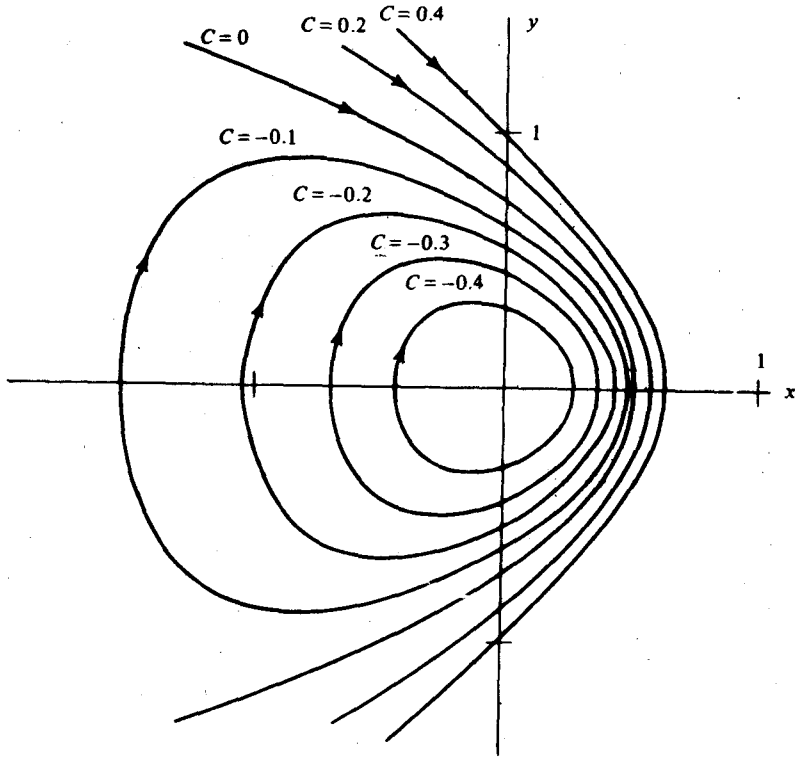
حازونية . غير أننا نجد من المجموعة المفروضة أن :

$$\frac{dy}{dx} + y = -\frac{x}{y}$$

وهذه معادلة برنوي وبجملها نجد :

$$y^2 = -x + \frac{1}{2} + ce^{-2x}$$

لأجل $c = 0$ نجد قطعاً مكافئاً . وإذا كان $c > 0$ فالمسارات منحنيات مفتوحة أما إذا كان $0 < c < \frac{1}{2}$ فالمسارات منحنيات مغلقة حول نقطة الأصل . ولأجل $c = -\frac{1}{2}$ يزول المسار إلى نقطة الاصل ، في حين نرى أنه لا توجد مسارات عندما $c < -\frac{1}{2}$ إن النقطة الحرجة (0, 0) هي نقطة مركزية للمجموعة المفروضة .



٣ - وفي حالة المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = y \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -x - y^3$$

نجد بشكل مماثل ان النقطة الحرجة (0,0) هي نقطة مركزية أو نقطة
حلزونية . ولكننا نجد بمحل المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y^3}{y}$$

أن هذه النقطة الحرجة هي نقطة مركزية .

٤ - ولتوضيح الدورات الحدية ننظر في المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = y + x - x(x^2 + y^2)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y - y(x^2 + y^2)$$

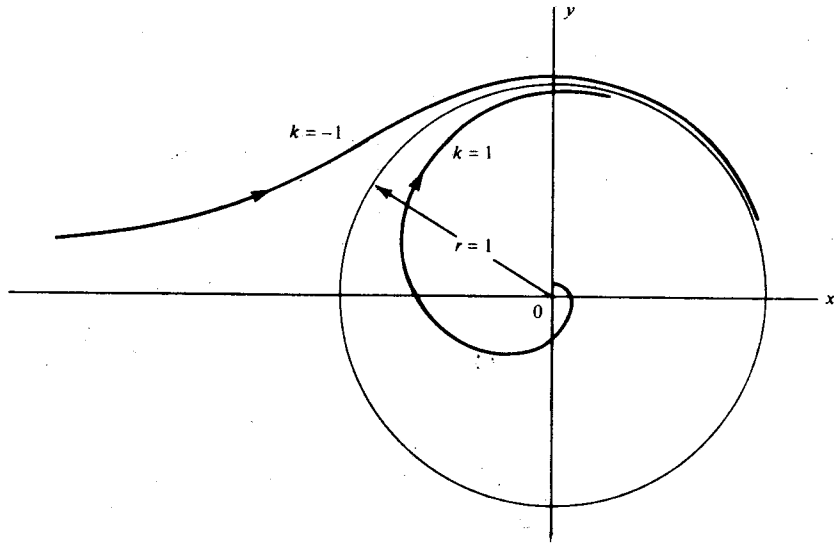
من هذه المجموعة نجد :

$$\frac{dr}{d\theta} = r(r^2 - 1)$$

وبالمكاملة نجد :

$$r^2 = \frac{1}{1 + ke^{-2\theta}}$$

لأجل $k=0$ نجد المسار هو الدائرة $r=1$. وإذا كان $k > 0$ فإن المسارات
حلزونية تدور حول تلك الدائرة . أما إذا كان $k < 0$ فإن المسارات حلزونات
تدور حول نقطة الاصل .



(٤-٢) تمارين . عين طبيعة النقطة الحرجة (٠,٠) لكل من المجموعات التالية :

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 4y + x^2 \quad \frac{dy}{dt} = 4x - 3y - 2xy \quad - ١$$

$$\frac{dx}{dt} = 6x + 10y - x^2 \quad \frac{dy}{dt} = -4x - 6y + 2xy \quad - ٢$$

$$\frac{dx}{dt} = -x - x \cos y \quad \frac{dy}{dt} = y + \sin y \quad - ٣$$

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + 2 \sin y \quad \frac{dy}{dt} = -3y - x e^x \quad - ٤$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 + y - e^{-x} \quad \frac{dy}{dt} = y - \sin x \quad - ٥$$

أوجد الدورات الحدية لكل من المجموعات التالية :

$$\frac{dr}{dt} = r(4 - r^2) \quad \frac{d\theta}{dt} = 1 \quad - 1$$

$$\frac{dr}{dt} = r(r-1)(r-2) \quad \frac{d\theta}{dt} = 1 \quad - 2$$

$$\frac{dr}{dt} = r(r-1)(r-2)^2(r-3) \quad \frac{d\theta}{dt} = -1 \quad - 3$$

٥ - المجموعات التي هي ليست خطية تقريبا :

لا يمكن في حالة مجموعة لا تحقق الشروط الواردة في البند الدابع تطبيق النتائج التي توصلنا إليها هناك . إن مناقشة المسارات حول النقاط الحرجة تتطلب دراسة خاصة . غير أننا سنكتفي فيما يلي بدراسة بعض الأمثلة .

١ - لننظر في المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = y^2 - x^2 \quad \frac{dy}{dt} = 2xy$$

لاشك أن النقطة (0,0) هي نقطة حرجة منعزلة . ومن المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

نجد الحل :

$$y^3 = 3x^2y + k$$

ويرسم المسارات الموافقة للقيم المختلفة لـ k نجد أن النقطة الحرجة هي من نوع النقطة السرجية وهناك ثلاثة خطوط مقارنة يتكون كل واحد منها من مسارين .

٢ - وإذا نظرنا في المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \quad \frac{dy}{dt} = 2y^2 - xy$$

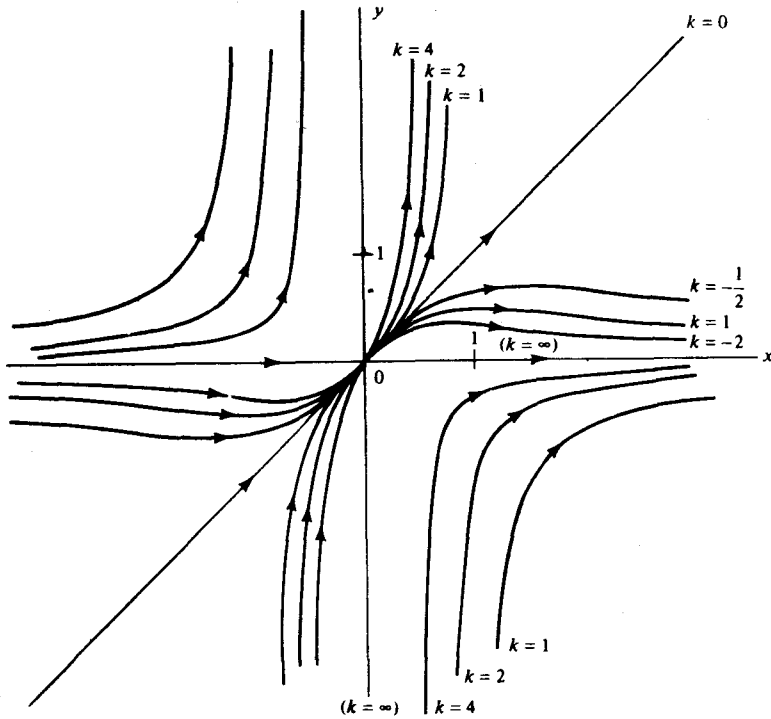
فإننا نجد أن نقطة الاصل هي نقطة حرجة منعزلة . وبجمل المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - xy}{x^2}$$

نجد :

$$y = \frac{x}{1 - kx^2}$$

ويرسم المسارات الموافقة لقيم مختلفة لـ k نجد أن النقطة الحرجة هي مركب عقدة مع نقطة مرجية .



الفصل الرابع

مسائل القيم الحدية والقيم الذاتية ، استقرار الحلول

١ - مسائل القيم الحدية

(١-١) مقدمة : إن مسألة القيم الحدية لمعادلة تفاضلية من المرتبة n .

$$u^{(n)} = f(x, u, \dots, u^{(n-1)})$$

هي تلك المسألة التي نطلب فيها إيجاد حل لهذه المعادلة يحقق شروطاً إضافية لاتتعلق بموضع واحد كما هو الحال في مسائل القيم الابتدائية بل تتعلق بموضعين a و b والحل والذي نبحث عنه ينبغي أن يصح للفترة $a \leq x \leq b$.

وبسبب أهمية مسائل القيم الحدية للمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية .

$$u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = g(x) \quad a \leq x \leq b \quad (1)$$

في التطبيقات الفيزيائية والهندسية فإننا سنوجه اهتماماً خاصاً لها .
ومن أمثلة مسائل القيم الحدية نذكر :

$$u(a) = \eta_1 \quad u(b) = \eta_2 \quad \text{النوع الأول :}$$

$$u'(a) = \eta_1 \quad u'(b) = \eta_2 \quad \text{النوع الثاني :}$$

النوع الثالث : $\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \eta_1$ ، $\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \eta_2$

ومن الواضح أن النوعين الأول والثاني حالتان خاصتان من النوع الثالث ،
يسمى النوع الثالث عادة شرط ستورم الحدي .

كذلك هناك شروط حدية أخرى مثل :

$$u(a) - u(b) = \eta_1 \quad , \quad u'(a) - u'(b) = \eta_2$$

وإذا كان $\eta_1 = \eta_2 = 0$ سمي هذا الشرط «الشرط الحدي الدوري» . وسبب
هذه التسمية هو التالي :

إذا كانت الدوال $u(x)$ و $v(x)$ مستمرة في \mathbb{R} ودورية بدور $l = b - a$ ،
وإذا كان $u(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية فإن $v(x) = u(x + l)$ هو حل كذلك
(يمكن تمديد كل حل إلى \mathbb{R}) . وإذا حقق $u(x)$ الشرط الحدي الدوري
المذكور فإن $v(a) = u(a)$ وان $v'(a) = u'(a)$ ، وبالتالي استناداً إلى نظرية الوجود
لمسألة القيم الابتدائية يكون $v = u$. وهذا يعني أن $u(x)$ دوري .

وعلى خلاف مع مسألة القيم الابتدائية حيث اثبتنا مبرهنة الوجود والوحدانية
للحل ، فإن هناك حالات من مسائل القيم الحدية البسيطة لاتصح فيها وحدانية
الحل بل قد لا يكون للمسألة أي حل . لناخذ على سبيل المثال المعادلة $u'' = 0$.
إن حلول هذه المعادلة هي الدوال الخطية . وعلى هذا فإن مسألة القيم الحدية من
النوع الأول قابلة للحل دائماً . أما إذا كان $\eta_1 \neq \eta_2$ في النوع الثاني فليس للمسألة
حل . وإذا كان $\eta_1 = \eta_2$ فهناك عدد غير منته الحل .

(٢ - ١) مسألة ستورم الحدية : سنعالج فيما يلي مسألة ستورم الحدية التالي :

$$Lu = (p(x) u')' + q(x)u = g(x) \quad (2)$$

في $J = [a, b]$:

$$R_1 u = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a) = \eta_1 \quad (3)$$

$$R_2 u = \beta_1 u(b) + \beta_2 p(b) u'(b) = \eta_2$$

ضمن الفروض التالية والتي سنرمز لها فيما يلي بـ (S) .

p, q, g دوال ذات قيم حقيقية و $P \in C^1(J)$ ، أي أن L مشتقاً مستمراً على J ، و $q, g \in C^0(J)$ ، أي أن q و g مستمرتان على J ، وأن $p(x) > 0$ في J وأن :

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0 \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$$

للاحظ أننا لم نكتب المؤثر التفاضلي الخطي L بالشكل (1) بل بالشكل (2) الذي يوصف بأنه متقارن ذاتياً . وسنرى سبب هذه التسمية بعد قليل . ومن الواضح أنه يمكن نقل المعادلة (1) إلى المعادلة (2) بالضرب بـ $p(x) = e^{\int a_1(x) dx}$. ولندكر أيضاً أن وجود المضروبين $p(a)$ و $p(b)$ في الشرطين الحديين $R_1 u$ و $R_2 u$ يعود لأسباب عملية .

إن مسألة القيم الحدية المتجانسة الموافقة للمسألة المطروحة فهي :

$$L u = 0 \quad R_1 u = R_2 u = 0 \quad (4)$$

وإذا كان $u, v \in C^2(J)$ فإن مطابقة لاغرانج التالية تكون صحيحة .

$$v Lu - u Lv = \{ p(x) (u'v - v'u) \}' \quad (5)$$

ومن هذه المطابقة تنتج العلاقة الهامة التالية :

$$\int_a^b (v L u - u L v) dx = 0 \quad (6)$$

وذلك فيما إذا حقق كل من v و u الشروط الحدية المتجانسة :

$$R_i u - R_i v = 0 \quad (i=1, 2)$$

وتعليل ذلك هو أن العبارة $u'v - v'u$ معدومة عند الطرفين a, b . ففي الحالة $\alpha_2 = 0$ يكون $u(a) = v(a) = 0$ ، أما إذا كان $\alpha_2 \neq 0$ فإن $u'(a) = \delta u(a)$ و $v'(a) = \delta v(a)$ بفرض أن :

$$\delta = - \frac{\alpha_1}{\alpha_2 p(a)}$$

والأمر نفسه يصح عند الموضع $x = b$

سنرمز فيما يلي بـ u, u_1, u_2, \dots لحلول المسألة الحدية المتجانسة و بـ v, v_1, v_2, \dots لحلول المسألة الحدية غير المتجانسة .

من الواضح أن $\sum c_i u_i$ (بفرض أن هذا المجموع متناهية) هو حل للمسألة الحدية المتجانسة وأن $u + v$ هو حل للمسألة غير المتجانسة وأنه يجوز حل المسألة المتجانسة . إن جميع الحلول v تعطى بالشكل :

$$v = v^* + u$$

بفرض أن v^* حل خاص لغير المتجانسة وأن u تجري على جميع حلول المسألة الحدية المتجانسة .

(٣-١) مبرهنة : ليكن $u_1(x), u_2(x)$ مجموعة أساسية للمعادلة التفاضلية المتجانسة $L u = 0$. عندئذ يلزم ويكفي كي يكون المسألة الحدية غير المتجانسة (2) و (3) حل وحيد هو أن يتحقق الشرط :

$$\begin{vmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (7)$$

ويكون للسألة المتجانسة في هذه الحالة الحل الصفري فقط $u = 0$.

البرهان : إذا كان v^* حلاً خاصاً لـ (2) ، فنحن نذ أن يكون الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية هو :

$$v = v^* + c_1 u_1 + c_2 u_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

وعندئذ تعطي الشروط الحدية (3) معادلتين خطيتين في c_1, c_2 .

$$R_i v = R_i v^* + c_1 R_i u_1 + c_2 R_i u_2 = \eta_i \quad (i = 1, 2)$$

ويلازم ويكون v^* هو الحل الوحيد لهذه المجموعة حل وحيد هو أن يتحقق الشرط (7).

$$u'' + u = g(x) \quad 0 \leq x \leq \pi \quad \text{مثال (أ)}$$

$$R_1 u = u(0) + u'(0) = \eta_1 \quad R_2 u = u(\pi) = \eta_2$$

مهما كانت $g(x), \eta_1, \eta_2$ فإن المعين (7) الموافق للمجموعة الأساسية

$$u_1 = \cos x \quad u_2 = \sin x \quad \text{هو :}$$

$$\begin{vmatrix} R_1(\cos x) & R_1(\sin x) \\ R_2(\cos x) & R_2(\sin x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

(ب) إذا وضعنا $g(x) = 1$ في (أ) فنحن نذ أن يكون :

$$v(x) = 1 + c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

هو الحل العام للمعادلة . وإذا فرضنا $\eta_1 = \eta_2 = 0$ فإن :

$$1 + c_1 + c_2 = 0 \quad 1 - c_2 = 0$$

ومنه نجد الحل المطلوب :

$$v(x) = 1 + \cos x - 2 \sin x$$

(٢) أما إذا كانت الشروط الحدية هي :

$$R_1 u - u(0) = \eta_1 \quad R_2 u - u(\pi) = \eta_2$$

فصندئذ ينعدم المعين (7) وعندئذ يكون للمسألة المتجانسة عدد غير منته من

الحلول بالإضافة إلى الحل الصفري ، وهذه الحلول هي $u = C \sin x$

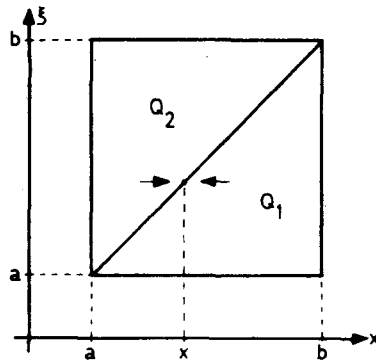
(١-٤) أتقول الأساسية : ليكن $J = [a, b]$ وليكن Q هو المربع

$J \times J$ في المستوى (x, ξ) ، و Q_1 هو المثلث $a \leq \xi < x < b$ و Q_2 هو

المثلث $a < x \leq \xi \leq b$.

نقول عن دالة $\gamma(x, \xi)$ انها حل أسامي للمعادلة المتجانسة الموافقة لـ (2)

إذا حققت الخواص التالية (بفرض أن $p > 0$)



(أ) $\gamma(x, \xi)$ مستمر في Q .

(ب) توجد في كل من المثلثين Q_1, Q_2 المشتقات الجزئية المستمرة γ_x و γ_{xx} (على أن نأخذ على القطر المشتقات من جانب واحد لكل مثلث).

(ج) ان $\gamma(x, \xi)$ ، لأجل كل قيمة ξ من J ، هي دالة في x وتمثل حلاً لـ $L\gamma = 0$ مهما كانت x من $J - \{\xi\}$.

(د) أما على القطر $x = \xi$ فإن المشتق الأول يقفز بالكمية $\frac{1}{p}$ أي :

$$\gamma_x(x+0, x) - \gamma_x(x-0, x) = \frac{1}{p(x)} \quad a < x < b$$

حيث نفهم من $\gamma_x(x+0, x)$ النهاية من اليمين لـ γ_x عندما تقترب من الموضع (x, x) ونفهم من $\gamma_x(x-0, x)$ النهاية من اليسار .

إن الحل الأساسي ليس وحيداً لأنه إذا كان γ حلاً أساسياً فإن :

$\bar{\gamma}(x, \xi) = \gamma(x, \xi) + \alpha(\xi)u(x)$ هو حل أساسي فيما إذا كان $\alpha(\xi)$ مستمراً و $u(x)$ حلاً لـ $Lu = 0$ في J .

وعلى سبيل المثال إذا أخذنا $p(x) = 1$ فإن $\gamma(x, \xi) = \frac{1}{2} |x - \xi|$ هو حل أساسي للمعادلة :

$$u'' = 0$$

وان $\gamma(x, \xi) = \frac{1}{2\lambda} \sin \lambda |x - \xi|$ هو حل أساسي للمعادلة :

$$u'' + \lambda^2 u = 0 \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$$

وبمعادة حل أسامي يمكن الوصول إلى حلول للمعادلة غير المتجانسة ، كما نرى في البرهنة التالية :

(٥-١) مبرهنة ضمن المفروض (S) إذا كان $\gamma(x, \xi)$ حلاً أساسياً فإن الدالة :

$$v(x) = \int_a^b \gamma(x, \xi) g(\xi) d\xi \quad (8)$$

تنتمي إلى $C^2(J)$ وتمثل حلاً للمعادلة غير المتجانسة .

$$L v = g(x)$$

البرهان لنجزىء التكامل (8) إلى تكامل من a إلى x وتكامل من x إلى b ونشتق كل جزء على حده فنحصل على :

$$\begin{aligned} v'(x) &= \gamma(x, x)g(x) + \int_a^x \gamma_x(x, \xi)g(\xi)d\xi - \gamma(x, x)g(x) + \int_x^b \gamma_x(x, \xi)g(\xi)d\xi \\ &= \int_a^b \gamma_x(x, \xi)g(\xi) d\xi \end{aligned}$$

وإذا تابعنا بالأسلوب نفسه واعتمدنا على الخاصة (S) لاجل الأسامي فإننا نجد :

$$\begin{aligned} v''(x) &= \gamma_x(x+0, x)g(x) + \int_a^x \gamma_{xx}(x, \xi)g(\xi)d\xi - \gamma_x(x-0, x)g(x) \\ &+ \int_x^b \gamma_{xx}(x, \xi)g(\xi) d\xi = \int_a^b \gamma_{xx}(x, \xi)g(\xi) d\xi + \frac{g(x)}{p(x)} \end{aligned}$$

وينتج من هذا اعتماداً على الخاصة (٥) :

$$Lv - pv'' + p'v' + qv = \int_a^b L\gamma(x, \xi)g(\xi) d\xi + g(x) - g(x)$$

(٦-١) دالة غرين إن دالة غرين لمسألة ستورم الحدية (4) هي دالة $\Gamma(x, \xi)$ تتصف بما يلي :

(أ) $\Gamma(x, \xi)$ حل أساسي :

$$L\Gamma = 0 \quad \text{في } J^0 = (a, b) \quad \text{(ب)}$$

للوصول إلى دالة غرين نطلق من مجموعة أساسية u_1, u_2 للمعادلة $Lu=0$ ونضع :

$$\Gamma(x, \xi) = \sum_{i=1}^2 \{ a_i(\xi) \pm b_i(\xi) \} u_i(x) \quad (9)$$

حيث نأخذ بالإشارة + من الإشارة المزدوجة \pm في Q_1 وبالإشارة - في Q_2

إن شرطي الاستمرار ل Γ والانتقطاع ل Γ_x على القطر $x = \xi$ يؤديان إلى:

$$\sum b_i(\xi) u_i(\xi) = 0$$

(10)

$$\sum b_i(\xi) u_i'(\xi) = \frac{1}{2p(\xi)}$$

وهاتان المعادلتان تعينان b_1, b_2 لأن معين الامثال لهذه المجموعة الخطية هو معين رونسكي للحلين u_1, u_2 فهو لايساوي الصفر . ولتعين $a_i(\xi)$ ننظر في الشرطين الحديين .

$$R_1 \Gamma = \sum_{i=1}^2 \{ a_i(\xi) - b_i(\xi) \} R_1 u_i = 0$$

$$R_2 \Gamma = \sum_{i=1}^2 \{ a_i(\xi) + b_i(\xi) \} R_2 u_i = 0$$

وهاتان المعادلتان تعطيانا حلاً وحيداً a_1, a_2 إذا صح الشرط (7)

(٧-١) مبرهنة ضمن الفروض (S) توجد دالة غرين وحيدة $\Gamma(x, \xi)$ لمسألة شوروم الحدية (4) فيما إذا كان لهذه المسألة الحل البدعي فقط ، أي إذا تحقق الشرط (7) . إن هذه الدالة متناظرة :

$$F(x, \xi) = F(\xi, x) \quad (11)$$

ويمكن أن تتعين بـ (9) .

إن الحل (الوحيد استناداً إلى (١ ، ٣)) للمسألة الحدية و نصف المتجانسة ،

$$Lv = g(x) \quad R_1 v = R_2 v = 0$$

بفرض أن $g \in C(J)$ هو :

$$v(x) = \int_a^b F(x, \xi) g(\xi) d\xi \quad (12)$$

البرهان إن الدالة v تحقق استناداً إلى (١ - ٥) المعادلة $Lv = g$. ولما كانت F تحقق المسألة الحدية المتجانسة فإن v تحقق أيضاً هذه المعادلة ، وذلك لأنه يمكن عند اشتقاق $v(x)$ مرة أولى تحت رمز التكامل ، أي أنه يمكن مبادلة R_1 مع رمز التكامل في (12) .

ولإثبات وحدانية دالة غرين وتناظرها نفرض مؤقتاً وجود دالتي غرين

Γ_2, Γ_1 ونضع :

$$v(x) = \int_a^b \Gamma_1(x, \xi) g(\xi) d\xi \quad w(x) = \int_a^b \Gamma_2(x, \xi) h(\xi) d\xi$$

بفرض أن h و g دالتان مستمرتان . وتصح بالنسبة لـ w و v ، اللذين يحققان الشروط الحدية المتجانسة ، العلاقة :

$$\int_a^b (v L w - w L v) dx = 0$$

وذلك استناداً إلى (6) .

لنعرض v و w بما يساويها ملاحظين أن $L v = g, L w = h$ فإننا نجد :

$$\int_a^b \int_a^b h(x) \Gamma_1(x, \xi) g(\xi) d\xi - \int_a^b \int_a^b g(x) \Gamma_2(x, \xi) h(\xi) d\xi$$

أو :

$$\int_a^b [\Gamma_1(x, \xi) - \Gamma_2(\xi, x)] g(\xi) h(x) d\xi dx = 0$$

وبما أن h و g كيفيان فإن العلاقة الأخيرة لا تصح إلا إذا كان $\Gamma_1(x, \xi) = \Gamma_2(\xi, x)$

لنضع أولاً $\Gamma_1 = \Gamma_2$ فإننا نحصل على تناظر Γ_1 ، ونحصل بعد ذلك على وحدانية دالة غرين .

مثال : لمسألة القيم الحدية :

$$R_1 u - u(0) = 0 \quad R_2 u - u(1) = 0 \quad \text{و} \quad [0, 1] \text{ في } L u - u'' = 0$$

تكون :

$$\Gamma(x, \xi) = \begin{cases} \xi(x-1) & 0 < \xi \leq x < 1 \\ x(\xi-1) & 0 \leq x \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

دالة غرين . إن هذه الدالة وحيدة لان قيمة المعين (7) للمجموعة الاساسية $u_1 = 1, u_2 = x$ تساوي الواحد .

(٨-١) ملاحظات: (آ) توضح لنا المبرهنة (٧-١) أهمية دالة غرين ، إذ نستطيع إذا عرفناها أن نعطي حلاً صريحاً للمسألة الحدية نصف المتجانسة .

وإذا كان المطلوب حل مسألة القيم الحدية غير المتجانسة (2) و (3) ، فإننا نبحث أولاً عن دالة $(J) \in C^2$ تحقق شرطي الحد $R_i \varphi = \eta_i$ ($i = 1, 2$) . إن هذه الوظيفة ليست صعبة . نضع بعد ذلك للوصول إلى الحل u للمسألة الحدية غير المتجانسة $u = \varphi + v$ فنجد أن v على أن تحقق الشرطين :

$$L u = L \varphi + L v = g \quad R_i u = R_i \varphi + R_i v = \eta_i$$

أي أن v هو حل المسألة الحدية .

$$L v = h \quad R_1 v = R_2 v = 0$$

وذلك بفرض أن $h = g - L \varphi$.

إن هذه المسألة استناداً إلى (٧-١) قابلة للحل .

(ب) يمكن استخدام دالة غرين لحل مسألة غير خطية . فإذا كان المطلوب حل مسألة القيم الحدية :

$$R_1 u = R_2 u = 0 \quad \text{و} \quad L u = f(x, u) \quad \text{في } J \quad (13)$$

وإذا كانت Γ دالة غرين لـ L فعندئذ يلزم ويكفي كي يكون u حلاً

لـ (13) هو أن يكون u مستمراً في J ، وأن يحقق المعادلة التكاملية :

$$u(x) = \int_a^b F(x, \xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi \quad (14)$$

(1-9) تمارين : ١ - إذا حققت الدالة $f(x, y)$ المستمرة في $[0, 1] \times \mathbb{R}$ شرط ليبتز .

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L |y - z|$$

بفرض أن $L < \pi^2$ ، فإن لمسألة القيم الحدية .

$$u(0) - u(1) = 0 \quad \text{و} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{في} \quad u'' = f(x, u)$$

حلا وحيداً .

إن هذه النتيجة غير صحيحة إذا كان $L = \pi^2$ (ولانبات ذلك ننظر في المثالين $f(x, u) = -\pi^2(u+1)$ و $f(x, u) = -\pi^2 u$ في المثال الاول هناك عدد غير منته من الحلول وفي المثال الثاني لا يوجد أي حل) . اثبت ذلك .

اوشاد لزود $C[0, 1]$ بنظم القيمة العظمى . فعندئذ يحقق المؤثر T :

$$(Tu)(x) = \int_0^1 F(x, \xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi$$

شرط ليبتز بثابتة $\frac{L}{8}$. إن مبرهنة النقطة الثابتة تقدم لنا عندئذ المطلوب فيما إذا كان $L < 8$. وكي نحصل على النتيجة في الحالة العامة نختار نظماً آخر مثل :

$$\| u \| = \sup_{0 < x < 1} \frac{|u(x)|}{\epsilon + \sin \pi x} \quad (\epsilon > 0)$$

ولحساب قيمة التكامل الناتج نعود إلى المبرهنة (٧-١) . وينبسط البرهان إذا اخترنا $\epsilon = 0$. ولكننا نعمل عندئذ في فضاء باناخبي آخر (ما هو هذا الفضاء ؟) .

٢ - بين أنه لمسألة ستورم في القيم الحدية (٤) دالة غرين المعرفة بـ :

$$F(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{c} u_1(x) u_2(\xi) & a \leq x \leq \xi \leq b \\ \frac{1}{c} u_1(\xi) u_2(x) & a \leq \xi \leq x \leq b \end{cases}$$

بفرض أن (u_1, u_2) مجموعة أساسية لـ $Lu = 0$ مع

$$R_1 u_1 = 0 \quad R_2 u_2 = 0$$

وأن

$$c = p(u_1 u_2' - u_1' u_2)$$

(c هو ثابت !) .

٣ - حل مسألة القيم الحدية نصف المتجانسة :

$$u'' + u = e^x \quad \text{في } [0, 1] \quad u(0) = u(1) = 0$$

(١آ) بوساطة مجموعة أساسية للمسألة المتجانسة وحل خاص للمعادلة غير

المتجانسة (٢آ) بوساطة دالة غرين .

(ب) عين دالة غرين لمسألة القيم الحدية :

$$u(1) = u(2) = 0 \quad \text{في} \quad [1,2] \quad u'' + \frac{L}{4x^2} u = 0$$

ارشاد : استعن بالتحويل $x = e^t$.

٢ - مسألة شتورم - ليوفيل في القيم الذاتية :

(٢-١) طرح المسألة : إن مسألة شتورم - ليوفيل في القيم الذاتية هي المسألة

$$R_1 u - R_2 u = 0 \quad J = [a, b] \quad \text{في} \quad L u + \lambda r(x) u = 0 \quad (1)$$

بفرض أن L و R_1 و R_2 هي المؤثرات التي عرفناها في البند السابق :

$$L u = (p(x) u')' + q(x) u \quad (2)$$

$$R_1 u = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a) \quad R_2 u = \beta_1 u(b) + \beta_2 p(b) u'(b) \quad (3)$$

فهي إذن مسألة قيم حدية متجانسة للمعادلة التفاضلية .

$$(p u')' + (q + \lambda r) u = 0 \quad (4)$$

التي تتعلق بوسيط حقيقي λ (إن جميع الدوال ذات قيم حقيقية) .

وينصب الاهتمام في مسألة القيم الذاتية على الحالات التي لا يكون فيها L (1) حل وحيد ، أي على الحالات التي يكون فيها بالإضافة إلى الحل البدهي $u=0$ هناك حل آخر $u(x) \neq 0$. إن هذا الأمر لا يتحقق لأجل كل قيمة ل λ بل لأجل قيم معينة لها ندعوها القيم الذاتية للمسألة . فالقيمة الذاتية إذن هي أي عدد λ بحيث يكون للمعادلة (1) حل $u(x)$ غير الحل البدهي . يسمى هذا الحل الدالة الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية λ . ومن الواضح أنه إذا كانت $u(x)$ دالة ذاتية فإن $c u(x)$ ، بفرض أن $c \neq 0$ ، دالة ذاتية أيضاً . وإذا وجد لقيمة ذاتية عدد من الدوال الذاتية المستقلة خطياً (p على الأكثر) فإننا نقول عن

القيمة الذاتية انما مضاعفة p مرة . وعندما يكون $p = 1$ نقول عنها انها قيمة ذاتية بسيطة .

مثال إذا كانت لدينا المسألة :

$$u'' + \lambda u = 0 \quad u(0) = u(\pi) = 0$$

فإننا نجد بسهولة أنه إذا كان $\lambda = 0$ (الحل العام $u = c_1 + c_2 x$) أو كان $\lambda = -\mu^2 < 0$ (الحل العام $u = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}$) فإنه لا يوجد سوى الحل البدهي . أما إذا كان $\lambda = \mu^2 > 0$ فإن $u = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$ هو الحل العام وأن الشروط الحدية تتحقق عندما يكون $c_1 = 0$ و $\sin \mu \pi = 0$ فهناك إذن عدد عدود من القيم الذاتية البسيطة :

$$\lambda_n = n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

وأن الدوال الذاتية المقابلة لها هي :

$$u_n(x) = \sin nx$$

وإذا كانت φ دالة ذات مشتق مستمر في J (يمكن كذلك الاكتفاء بشرط أضعف من هذا الشرط) وكان $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ فإن من الممكن نشر $\varphi(x)$ في متسلسلة من الدوال الذاتية :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

وذلك لأننا لو مددنا $\varphi(x)$ باعتبارها دالة فردية إلى الفترة $-\pi \leq x \leq \pi$ ، وأصبح يمكننا نشرها في متسلسلة فورييه في الفترة $-\pi \leq x \leq \pi$. وهذه المتسلسلة لاحتوي سوى الحدود الجيبية . إن هذا المثال يدفعنا إلى مسألتين أساسيتين حول القيم الذاتية هما :

مسألة القيم الذاتية: ماهي الشروط التي ينبغي أن تتوفر لكي توجد قيم ذاتية ،
وكي يوجد عدد غير منته من القيم الذاتية λ_n ؟

مسألة النشر: ماهي الشروط كي يمكن نشر دالة كيفية في متسلسلة
دوال ذاتية ؟

$$\varphi(x) = \sum a_n u_n(x)$$

إن المبرهنة التالية ستعطي جواباً على هذين السؤالين ضمن الفروض التالية التي
سنرمز لها بـ (SL) .

$$(SL) \quad p(x) \in C^1(J) ; q(x), r(x) \in C^0(J), p(x) > 0, r(x) > 0$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0 \text{ في } J \text{ و}$$

(٢-٢) مبرهنة وجود: إذا تحققت الفروض (SL) فإن لمسألة القيم الذاتية
(١) عدداً غير منته من القيم الذاتية الحقيقية :

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \lambda_n \rightarrow \infty$$

إن للدالة الذاتية $u_n(x)$ الموافقة للقيمة الذاتية λ_n ، n صفراً في الفترة
المفتوحة (a, b) ، وان بين كل صفوين لـ u_n يوجد صفور لـ u_{n+1} .

(٢-٣) مبرهنة نشر: يمكن تنظيم الدوال الذاتية بحيث يكون :

$$\int_a^b r(x) u_n^2(x) dx = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

إن هذه الدوال تشكل عندئذ نظاماً متعامداً منظماً ، أي أنه يكون كذلك:

$$\int_a^b r(x) u_m(x) u_n(x) dx = 0 \quad m \neq n$$

وانه يمكن نشر كل دالة $\varphi(x) \in C^1(J)$ محققة للشروط الحدية المتجانسة في متسلسلة متقاربة اطلاقاً وبانتظام من الدوال الذاتية :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x)$$

وتسمى هذه المتسلسلة متسلسلة فورييه لـ φ (مخصوص u_n) . وان أمثال فورييه c_n هي :

$$c_n = \int_a^b r(x) \varphi(x) u_n(x) dx$$

وفيا يلي سنقدم اثباتاً لهاتين المبرهنتين ينسب إلى بروفر .

(٢-٤) تحويل بروفر : لتعرف دالتين $\rho(x)$ و $\varphi(x)$ على النحو :

$$u(x) = \rho(x) \sin \varphi(x) \quad p(x) u'(x) = \rho(x) \cos \varphi(x) \quad (5)$$

وبفرض أن $\rho(x) > 0$ نجد :

$$\rho(x) = [(u(x))^2 + (p(x) u'(x))^2]^{1/2}, \quad \varphi(x) = \arctg \frac{u(x)}{p(x) u'(x)}$$

إن معرفة بعض النظر عن مضاعف لـ 2π . ولتحديد $\varphi(x)$ نختار قيمة $\varphi(a)$ بحيث تحقق $a \leq \varphi(a) < \pi -$ ثم نختار قيمة $\varphi(a)$ بحيث تكون هذه الدالة مستمرة ويكون لها بالتالي مشتق مستمر .

من الدالة (4) والتحويل (5) نجد :

$$\varphi' = \frac{1}{p} \cos^2 \varphi + (q + \lambda r) \sin^2 \varphi \quad (6)$$

$$\rho' = \left(\frac{1}{p} - q - \lambda r \right) \rho \cos \varphi \sin \varphi \quad (7)$$

والمعادلة (6) هي معادلة في φ من المرتبة الاولى فإذا ما تمكنا من حلها عوضنا في (7) وبالمكامة نحصل على ρ .

(2-5) خواص φ . ليكن $u(x, \lambda)$ حلاً للمعادلة (4) بالقيم الابتدائية .

$$u(a) = \sin \alpha \quad p(a) u'(a) = \cos \alpha \quad (8)$$

بفرض أن α ثابت وأن $0 \leq \alpha < \pi$. إن هذا الحل ، كما يمكن لنا أن نثبت بالطرق التي استخدمناها في الفصل الأول وحيد ومستمر في $(x, \lambda) \in J \times \mathbb{R}$ ، بل وتحليلي في λ . ويقابل هذا الحل وفق تحويل بروفردالة $\frac{u}{p u'}$ $\varphi(x, \lambda) = \arctg \frac{u}{p u'}$ مستمرة أيضاً في (x, λ) وحققة للمعادلة التفاضلية (6) أو للمعادلة :

$$\varphi' = \frac{1}{p} + \left(q - \frac{1}{p} + \lambda r \right) \sin^2 \varphi \quad (9)$$

مع الشرط $\varphi(a, \lambda) = \alpha$. ويتمتع هذا الحل بالخواص التالية :

$$\lambda \in \mathbb{R}, a < x \leq b \quad \text{لأجل} \quad \varphi_1(x, \lambda) > 0 \quad (\text{أ})$$

$$\lambda \rightarrow -\infty \quad \text{عندما} \quad \varphi(b, \lambda) \rightarrow 0 \quad (\text{ب})$$

(ج) توجد ثوابت موجبة δ, D, λ_0 بحيث يكون :

$$\delta \sqrt{\lambda} \leq \varphi(b, \lambda) \leq D \sqrt{\lambda} \quad \lambda \geq \lambda_0$$

(د) ينتج عن $\varphi(x_0, \lambda_0) = k\pi$ (بفرض أن $k \in \mathbb{Z}$) أن $\varphi'(x_0, \lambda_0) > 0$. وبعبارة اخرى ان المنحني $y = \varphi(x, \lambda_0)$ يقطع في المستوي (x, y) المستقيم

و ينتج $y = k\pi$ مرة واحدة على الأكثر وذلك يكون من الأدنى نحو الأعلى . و ينتج بشكل خاص أن $\varphi(x, \lambda) > 0$ لأجل $a < x \leq b$ و $\lambda \in \mathbb{R}$.

ولبرهان هذه الخواص نلاحظ أن (د) تنتج عن (9) مباشرة بسبب كون $p > 0$.

ولاثبات (آ) نشق (9) بالنسبة ل λ فنحصل على المعادلة التفاضلية التالية في φ :

$$\psi' - \psi \left(q - \frac{1}{p} + \lambda r \right) = 2 \sin \varphi \cos \varphi + r \sin^2 \varphi$$

$$\text{مع } \psi(a, \lambda) = 0$$

إن الدالة $y(x) = \psi(x, \lambda_0)$ تحقق معادلة تفاضلية خطية من الشكل :

$$y' = l(x)y + h(x) \quad y(a) = 0 \quad (10)$$

وبحلها نجد :

$$y(x) = \int_a^x e^{L(x)-L(t)} h(t) dt \quad L(x) = \int_a^x l(t) dt$$

ولكن استناداً إلى (د) نرى $h(x) = r(x) \sin^2 \varphi(x, \lambda_0) > 0$ باستثناء عدد من المواضع . وعلى هذا فإن $y > 0$ لأجل $a < x \leq b$.

لايثبات (ب) نرمز للطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية (9) بـ $f(x, \varphi)$ ولنبحث عن دالة w تحقق :

$$w(a) > \alpha \quad \text{و} \quad w' > f(x, w)$$

لتكن دالة خطية تحقق $w(a) = \pi - \epsilon$ و $w(b) = \epsilon$ بفرض أن
 ϵ عدد موجب صغير بحيث يكون $\alpha < w(a)$. عندئذ يكون $\sin^2 \epsilon \geq \sin^2 \alpha$.
 وبما أننا نستطيع أن نكتب $r(x) \geq r_0 > 0$ فإنه يكون لأجل قيم λ
 السالبة :

$$f(x, w) \leq \frac{1}{p} + (q - \frac{1}{p} + \lambda r_0) \sin^2 \epsilon \rightarrow -\infty$$

$$\lambda \rightarrow -\infty$$

ولا وكان w' ثابتاً فإن w تحقق لأجل $\lambda \leq \lambda_0 < 0$ المتراجحة المذكورة
 $w' > f(x, w)$.

تسمى هذه الدالة w دالة عليا . ان $\varphi(x, \lambda) \leq w(x)$ مهما كانت x من
 J . لاثبات ذلك نلاحظ أن $\varphi(a, \lambda) < w(a)$ وبما أن φ و w مستمر
 فإن هناك عدداً $a < \xi$ بحيث يكون $\varphi(x, \lambda) < w(x)$ لأجل $a \leq x < \xi$.
 لنفرض مؤقتاً أن $\varphi(x, \lambda) < w(x)$ ليست صحيحة مهما كانت x من J .
 عندئذ يوجد قيمة أولى x_0 يكون عندها $\varphi(x_0, \lambda) = w(x_0)$. في هذه الحالة
 يكون :

$$\frac{\varphi(x_0, \lambda) - \varphi(x_0 - h, \lambda)}{h} > \frac{w(x_0) - w(x_0 - h)}{h}$$

ومنه يكون $\varphi'(x_0, \lambda) \geq w'(x_0)$ وهذا يتنافى مع كون $w' > f(x, w)$.

وهكذا نرى أن $\varphi(x, \lambda) < w(x)$ وبشكل خاص يكون $\varphi(b, \lambda) < \epsilon$.
 وبذلك نكون قد برهننا (ب) .

لايات (ح) نلاحظ أنه بسبب كون p و r موجبين ، فإنه لأجل قيم
 كبيرة لـ λ يكون :

$$A_0 + B_0 \lambda \sin^2 \varphi \leq \frac{1}{p} + (q - \frac{1}{p} + \lambda r) \sin^2 \varphi \leq A + \lambda B \sin^2 \varphi$$

يفرض أن A_0, B_0, A, B ثوابت موجبة مناسبة ، وعلى هذا يكون :

$$\frac{\varphi'}{A + \lambda B \sin^2 \varphi} \leq 1 < \frac{\varphi'}{A_0 + \lambda B_0 \sin^2 \varphi}$$

وبالمكاملة من a إلى b (بعد إجراء التعويض $s = \varphi(x)$ وحيث كتبنا $\varphi(x)$ بدلاً من $(\varphi(x, \lambda))$ فإننا نجد :

$$\int_a^{\varphi(b)} \frac{ds}{A + \lambda B \sin^2 s} \leq b-a \leq \int_a^{\varphi(b)} \frac{ds}{A_0 + \lambda B_0 \sin^2 s} \quad (11)$$

لكن k عدداً طبيعياً بحيث يكون $k\pi \leq \varphi(b) < (k+1)\pi$. وإذا
كاملنا المتراجعة الأولى من π إلى $k\pi$ فقط فإننا نحصل على :

$$b-a \geq (k-1) \int_0^{\pi} \frac{ds}{A + \lambda B \sin^2 s} \geq (k-1) \int_0^{\pi} \frac{ds}{A + \lambda B s^2} \geq \frac{\gamma(k-1)}{\sqrt{\lambda}}$$

يفرض أن γ ثابت موجب . وهكذا نجد :

$$\frac{\pi}{\gamma} \sqrt{\lambda} (b-a) \geq \pi k - \pi \geq \varphi(b) - 2\pi$$

ومنه ينتج $\varphi(b) \leq D\sqrt{\lambda}$ لأجل قيم كبيرة لـ λ .

وإذا كاملنا المتراجعة الثانية في (11) من 0 إلى $(k+1)\pi$ فإننا نجد :

$$b-a < (k+1) \int_0^{\pi} \frac{ds}{A_0 + \lambda B_0 \sin^2 s} - 2(k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ds}{A_0 + \lambda B_0 \sin^2 s}$$

وبما أن $\frac{1}{2}s \leq \sin s$ فإننا نجد :

$$b - a \leq \frac{2(k+1)}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{A_0 + B_0 \frac{t^2}{4}} = \frac{c(k+1)}{\sqrt{\lambda}}$$

ومنه تنتج المتراجحة الثانية $\varphi(b) \geq \delta \sqrt{\lambda}$

(٢-٦) مسألة القيم النهائية : يمكن إعطاء شرط الحد :

$$R_1 u = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a) = 0$$

معنى هندسياً . ان هذا الشرط يعني أن المتجهين $(u(a), p(a)u'(a))$ و (α_2, α_1) متعامدان . ومن الواضح أن هناك عدداً وحيداً α يحقق :

$$\alpha_1 \sin \alpha + \alpha_2 \cos \alpha = 0 \quad 0 \leq \alpha < \pi$$

إن α هي الزاوية بين الاتجاه الموجب للمحور x والمستقيم العديدي على المتجه (α_2, α_1) والمار بنقطة الأصل . وإذا كان $u(x, \lambda)$ حلاً لمسألة القيم الابتدائية (4) و (8) بهذه القيمة α فإن $R_1 u = 0$ أيضاً . كذلك كل حل لـ (4) مع $R_1 u = 0$ هو مضاعف لـ u .

كذلك ان $R_2 u = 0$ عندما وعندما فقط تقع النقطة $(u(b), p(b)u'(b))$ على المستقيم المار بنقطة الأصل والعمودي على المتجه (β_2, β_1) . وإذا عينا الزاوية β بحيث يكون :

$$\beta_1 \sin \beta + \beta_2 \cos \beta = 0 \quad 0 < \beta \leq \pi$$

فإنه ينتج ان حل مسألة القيم الابتدائية (4) و (8) الخاصة بـ $R_2 u = 0$ إذا وإذا فقط كان $\varphi(b, \lambda) = \beta + n\pi$ بفرض أن n عدد صحيح . وبما أن $\varphi(b, \lambda)$ ،

استناداً إلى (آ) من (٥-٢) ، هو دالة متزايدة تماماً لأجل $\lambda \in \mathbb{R}$ ، وأن مجموعة قيم $\varphi(b, \lambda)$ هي $(0, \infty)$ ، فإن لكل $n \geq 0$ يوجد $\lambda = \lambda_n$ بحيث يكون :

$$\varphi(b, \lambda_n) = \beta + n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

في حين لا يوجد لـ $n < 0$ أي قيمة لـ λ مثل هذه . إن الأعداد λ_n هي القيم الذاتية التي نبحث عنها ، وإن الدوال :

$$u_n(x) = u(x, \lambda_n)$$

الدوال الذاتية المقابلة . واستناداً إلى (ح) من (٥-٢) يكون :

$$\delta^2 \lambda_n \leq (\beta + \pi n)^2 < D^2 \lambda_n$$

ينتج من ذلك أن :

(١) السلوك التقاربي : يوجد ثابتان موجبان c و C بحيث يكون :

$$c_n^{-2} \leq \lambda_n \leq C_n^2$$

لأجل القيم الكبيرة لـ n .

بهذا نكون قد اثبتنا الجزء الأول من المبرهنة (٢-٢) . واعتماداً على (د) من (٥-٢) ينتج أن لـ u_n في (a, b) ، n موضعاً صفرياً تماماً . ذلك انه كمي يكون لـ u_n موضعاً صفرياً يلزم ويكفي أن يكون $\varphi(x, \lambda_n) = k\pi$ ، أو ، إذا رمزنا اختصاراً لـ $\varphi(x, \lambda_n)$ بـ $\varphi_n(x)$ ، $\varphi_n(x) = k\pi$. ولكن :

$$n\pi < \varphi_n(b) = n\pi + \beta \leq (n+1)\pi \quad \text{و} \quad 0 < \varphi_n(a) - \alpha < \pi$$

واستناداً إلى (د) من (٥-٢) نأخذ $\varphi_n(x)$ ، بفرض أن $a < x < b$ ،

القيمة $k\pi$ مرة واحدة تماماً لأجل $k = 1, \dots, n$ ولكنها لاتأخذ هذه القيمة لأجل قيم أخرى k من \mathbb{Z} .

وأما فيما يتعلق بأوضاع المواضع الدورية فإننا نورد البرهنة التالية :

(٧-٢) مبرهنة: لتكن J فترة كيفية وليكن :

$$0 < p(x) \in C^1(J) , q(x) \in C^0(J) , u, v \in C^2(J) (*)$$

وليكن L المؤثر المعرف في (2) . فإذا كان $x_0, x_1 \in J$ موضعين صفرين لـ v متتاليين (أي أن $v \neq 0$ في (x_0, x_1)) ، وإذا كان :

$$\frac{Lu}{u} \leq \frac{Lv}{v}$$

في نقط (x_0, x_1) حيث يكون $u(x) \neq 0$ ، فنحن نصح إحدى الحالتين :

$$u = cv \quad (أ)$$

(ب) لـ u موضع صفر في (x_0, x_1) .

البرهان : إذا لم تصح الحالة (ب) فإن $u \neq 0$ و $v \neq 0$ في $J_0 = (x_0, x_1)$. ونستطيع هنا أن نفرض أن $u > 0$ و $v > 0$ في J_0 فيكون :

$$w = uv' - v u' \quad \text{بفرض أن} \quad 0 \leq uLv - vLu = (pw)'$$

ثم أن $w(x_0) \geq 0$ لأن $v(x_0) = 0$ و $v'(x_0) \geq 0$ وأن $w(x_1) \leq 0$

وحيث أن pw متزايدة تماماً فإن $w(x) = 0$. إذن :

(*) $C^*(J)$ هي مجموعة جميع الدوال المعرفة على الفترة J ولها هناك

مشتقات مستمرة من المرتبة k

$$\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{1}{u^2} w \Rightarrow \frac{u}{v} = \text{const}$$

وهذه هي الحالة (آ) .

(٢-٨) نتائج . مبرهنة الفصل لستورم : ضمن الفروض العامة في (٢-٧) ،
وبشكل خاص بفرض أن J فترة كيفية نستنتج مايلي :

(آ) إذا لم يكن u حلاً بديهياً لـ $Lu = 0$ ، فإن لـ π مواضع صفرية بسيطة منتهية أو عدودة . وإذا كانت هذه المواضع عدودة فليس لها نقطة تجمع في J .

لأنه إذا كان $u(x_0) = u'(x_0) = 0$ فإنه ينتج عن مبرهنة وحدانية الحل أن $u \equiv 0$. وإذا كان $u(x_k) = 0$ (بفرض أن k عدد طبيعي) ، وكانت $\xi \in J \rightarrow x_k$ فإنه ينتج بماكمة بسيطة أن $u(\xi) = u'(\xi) = 0$ وبالتالي فإن $u \equiv 0$.

(ب) خاصة الفصل . نقول عن المواضع الصفرية لـ u و v إنها تتبادل الفصل فيما إذا كان بين كل موضعين لـ π موضع صفري لـ v وبالعكس .

(ج) مبرهنة الفصل لستورم . إذا كان u_1, u_2 حلين مستقلين خطياً لـ $Lu = 0$ فإن المواضع الصفرية لهما تتبادل الفصل .

ذلك لأنه إذا كان u حلاً لـ $Lu = (pu')' + qu = 0$ ، وكان v حلاً غير بديهي لـ :

$$L_0 v = (p v')' + q_0 v = 0 \quad q_0(x) \leq q(x)$$

فإن بين كل موضعين صفريين لـ v موضعاً صفرياً لـ u .

ينتج الجزء الاول مباشرة من (٢ - ٧) ، وينتج الجزء الثاني كذلك بسبب

$$\frac{Lv}{v} = q - q_0 \geq 0 \text{ و } \frac{Lu}{u} = 0$$

(د) ينتج بشكل خاص عن (ا) أن بين كل موضعين صفرين حل ل $Lu(x, \lambda) = 0$ (4) موضعاً صفرياً $u(x, \lambda')$ عندما $\lambda < \lambda'$. وبذلك نكون قد اثبتنا القضية الاخيرة من (٢ - ٢) .

(٢ - ٩) الاهتزاز: نفرض جميع الدوال ذات قيم حقيقية . نقول عن حل ل $Lu = 0$ انه مهتز (أو له سلوك اهتزازي) في J ، إذا كان ل u عدد عدود من المواضع الصفرية في J . واستناداً إلى (آ) من (٢ - ٨) ان هذه الحالة لا تحدث إلا إذا كان J غير متراص . يقال في هذه الحالة أيضاً أن المعادلة $Lu = 0$ اهتزازية . ذلك لانه استناداً إلى (ا) من (٢ - ٨) فإن كل حل غير بدهي ، مهتز إذا كان أحد الحلول مهتزاً .

ان مبرهنة الفصل التي تحدثنا عنها قبل قليل ذات أهمية كبيرة في تحديد السلوك الاهتزازي عملياً ، فاستناداً الى هذه المبرهنة يكون :

و آ ، اذا كانت $L_0 u = (pu') + q_0(x)u$ اهتزازية وكانت $q(x) \geq q_0(x)$ فإن $Lu = (pu') + qu = 0$ اهتزازية .

وكتطبيق على ذلك نبرهن :

ب ، ان معادلة بسل التفاضلية $x^2 u'' + x u' + (x^2 - \alpha^2)u \neq 0$ اهتزازية في $(0, \infty)$ ، مهما كان العدد الحقيقي α .

ذلك لاننا اذا ادخلنا المتغير الجديد $s = \log x$ وكتبنا $w(s) = u(e^s)$ فإننا نحصل على المعادلة التفاضلية :

$$Lw = w'' + (c^2 - \alpha^2)w = 0$$

بفرض ان الاشتقاق هو بالنسبة لـ s . واذا وضعنا :

$$L_0 v = v'' + v = 0$$

فإننا نحصل ، استناداً الى (آ) ، على المطلوب وذلك لان
 $q(s) = c^2 - \alpha^2 \geq q_0(s) = 1$. يمكننا أن نصل (في الحالة التي
 نحن بصدها مثلا) وبالاعتد على (c) من (٢-٨) ، إلى تحديد أفضل للبعد
 بين المواضع الصفرية فيما اذا وضعنا :

$$L_0 v = v'' + \lambda^2 v$$

بـ λ مناسبة ، كسألة مقارنة .

(٢-١٠) - مبرهنة السمة لتكن J فترة كيفية وليكن $(J) p, q \in C^1$ ،
 بفرض أن $p > 0$ و $q > 0$. فإذا كان u حلاً غير بدهي لـ
 $Lu = (pu')' + qu = 0$ ، وكان $x_k < x_{k+1}$ موضعين قصوين لـ u فإن :

$$|u(x_k)| \geq |u(x_{k+1})| \quad \text{فيما إذا كان} \quad (pq)' \geq 0$$

أي ان السعات تنقص أو تزيد حسبما يكون pq متزايداً أو متناقصاً .

والاثبات نشق الدالة :

$$y(x) = u^2 + \frac{1}{pq} (pu')^2$$

فتمحصل على :

$$y' = 2u u' - \frac{(pq)'}{(pq)^2} (pu')^2 + \frac{2p u'}{p q} (-qu) - (pq)' \left(\frac{u'}{q}\right)^2$$

فإذا كان $(pq)' \geq 0$ أو $0 \leq$ فإن y متناقص أو متزايد . ولكن
 $u'(x_k) = 0$ ، وبالتالي فإن $y(x_k) = u^2(x_k)$ و $y(x_{k+1}) = u^2(x_{k+1})$ ومثله
 نحصل على المطلوب .

مثال : ان ساعات دوال بسل في $(0, \infty)$ متناقصة وذلك مهما كان العدد الحقيقي
 α . وهذا ينتج عن المعادلة التي مرت معنا في (ب) من (٢-٩) بعد
 التحويل ، حيث يكون $p(s) = 1$ و $q(s) = e^{2s} - \alpha^2$ ، انما فقط عندما
 $| \alpha | > \log s$. اما اذا كان $| \alpha | \leq \log s$ فلا توجد قيم قصوى .

اما اثبات مبرهنة النشر (٢-٣) فسنجدها في البند القادم .

(٢-١١) تعاديل (١) لتكن لدينا مسألة القيم الذاتية :

$$u'' + \lambda u = 0 \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0) = u'(0) \quad u(1) = 0$$

أوجد القيم الذاتية والدوال الذاتية واثبت أن :

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{2} + n\pi + \beta_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

حيث أن β_n يتناقص الى الصفر عندما $n \rightarrow \infty$. ارم u_0 و u_1

(٢) أوجد القيم والدوال الذاتية للمسألة السابقة بعد أن نستبدل بشروطها

الحدية الشروط التالية :

$$u(0) = u'(0) \quad u(1) = u'(1)$$

(٣) حل مسألة القيم الذاتية :

$$(xu')' + \frac{\lambda}{x} u = 0$$

هل $\lambda = 0$ قيمة ذاتية ؟

(٢ - ١٢) مبرهنة الاهتزاز لتكن لدينا المعادلة التفاضلية :

$$u'' + q(x)u = 0$$

ونفرض أن $q(x)$ مستمر لاجل $x \geq \alpha$ وأنه يحقق أحد الشرطين التاليين :

$$\int_{\alpha}^{\infty} q(x) dx = \infty \text{ و } q(x) \geq 0 \quad (\bar{A})$$

$$\int_{\alpha}^{\infty} |q(x) - \alpha| dx < \infty \quad \alpha > 0 \quad (\text{ب})$$

عندئذ تكون المعادلة التفاضلية امترازية ، ويكون كل حل في الحالة (ب) محدوداً .

تترك البرهان كتمرين ، حيث يمكن في الحالة (ب) أن نفرض أن $\alpha = 1$ (دون أن نغس همومية المسألة) . استخدم تحويل بروفير ، فيكون استناداً إلى (6) :

$$\varphi' = \cos^2 \varphi + q(x) \sin^2 \varphi$$

وهنا علينا أن نثبت $\varphi(x) \rightarrow \infty$ عندما $x \rightarrow \infty$. أما في الحالة (\bar{A}) فإن φ رتيب وعلى المرء أن يفترض جدلاً أن ليس لـ φ نهاية منتهية c ويصل إلى تناقض (ندرس الحالة $c = k\pi + \frac{\pi}{2}$ وحدها) . استخدم في الحالة (ب)

المتباينة $|q-1| \geq \phi' \geq 1$. إن محدودية الحل تتبع عن (7) .

وكي نستطيع تطبيق مبرهنة الاهتزاز في الحالة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية ، نحتاج إلى مايلي :

(٢-١٣) صيغ تحويل (آ) إن المعادلة التفاضلية :

$$u'' + a_1(x) u' + a_0(x) u = h(x)$$

تنتقل بالتحويل :

$$v(x) = u(x) e^{A(x)} \quad A(x) = \frac{1}{2} \int a_1(x) dx$$

إلى المعادلة التفاضلية :

$$v'' + (a_0(x) - \frac{1}{2} a_1'(x) - \frac{1}{4} a_1^2(x)) v = h(x) e^{A(x)}$$

(ب) ان المعادلة التفاضلية :

$$(p(x)u')' + q(x)u = h(x)$$

تنتقل بإدخال متغير جديد t معطى ب :

$$t = t(x) = \int \frac{dx}{p(x)}$$

إلى المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + p(x) q(x) v = p(x) h(x)$$

بفرض أن $v(t) = u(x(t))$

ونترك على شكل تمرين مايلي :

(٣) حول المعادلة التفاضلية :

$$x u'' - u' + x^3 u = 0$$

معتمداً على التحويلين (آ) و (ب)

(٢ - ١٤) تمارين : (آ) عين جميع حلول المعادلة التفاضلية :

$$u'' + \frac{\alpha}{x^2} u = 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(يستفاد من التحويل $(x=c)$. عين قيم α التي تجعل المعادلة التفاضلية اهتزازية واعتماداً على مبرهنة الفصل اثبت :

(ب) مبرهنة الاهتزاز : إن المعادلة التفاضلية :

$$u'' + q(x)u = 0$$

(بفرض أن $q(x)$ صفر عندما $x \geq a$) اهتزازية في $[a, \infty)$ عندما

يكون $\lim_{x \rightarrow \infty} \inf x^2 q(x) > \frac{1}{4}$ وانما غير اهتزازية عندما $\lim_{x \rightarrow \infty} \sup x^2 q(x) < \frac{1}{4}$

٣ - المؤثرات المتراسة المتقارنة ذاتياً في فضاء هلبرت : مبرهنة النشر .

سنبداً هذا البند في الحديث عن نظرية القيم الذاتية للمؤثرات المتراسة المتقارنة ذاتياً في فضاء هلبرت ثم نستخدم النتائج في مسألة القيم الذاتية لـ شورم - ليوفيل .

(٣ - ١) الجداء السلمي . نفهم من الجداء السلمي في فضاء خطي H حقيقي

أو عقدي ، تطبيقاً من $H \times H$ في \mathbb{R} أو \mathbb{C} بالخواص التالية :

$$(\lambda f + \mu g, h) = \lambda (f, h) + \mu (g, h) \quad (\text{الخطية})$$

$$(f, g) = \overline{(g, f)} \quad (\text{التناظر})$$

$$(f, f) > 0 \quad \text{عندما } f \neq 0, \quad (\text{القطعية})$$

وذلك مهما كانت f, g, h من H ومهما كانت السلمتان λ و μ (من \mathbb{R} أو من \mathbb{C}).
 ينتج عن الخاصية الثانية « والتي تسمى في الحالة العقديّة خاصة هورميت » أن
 (f, f) موجب دوماً وأن :

$$(f, \lambda g + \mu h) = \bar{\lambda}(f, g) + \bar{\mu}(f, h)$$

وهذا يعني أنه في الحالة الحقيقية يكون الجداء السلمي ثنائي الخطية .
 ان ماسنذكره فيما يلي سيكون صحيحاً سواء في الحالة الحقيقية أو الحالة العقديّة ،
 حتى ولو لم نشر إلى ذلك . سنقدم الاثبات في الحالة العقديّة وهو يصح في
 الحالة الحقيقية أيضاً .

نعرف في الفضاء الخطي H نظماً بـ .

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

وبسهولة نستطيع ان نثبت خصائص النظم . لاثبات متباينة المثلث مثلا نرى
 أنه مهما كان f و g من H

$$0 \leq (f + \lambda g, f + \lambda g) = (f, f) + \lambda(g, f) + \bar{\lambda}(f, g) + \lambda \bar{\lambda}(g, g)$$

$$\text{وإذا وضعنا هنا } \lambda = -\frac{(f, g)}{\|g\|^2} \text{ فإننا نجد بحسابات بسيطة أن :}$$

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad (\text{متباينة شفارتز})$$

وعلى هذا فإن :

$$\begin{aligned} (f+g, f+g) &= (f,f) + (f,g) + (g, f) + (g, g) \\ &= (f, f) + 2\|f\| \cdot \|g\| + (g, g) = (\|f\| + \|g\|)^2 \end{aligned}$$

ومنه تنتج متباينة المثلث :

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

يمكن للمرء أن يثبت بسهولة :

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + \|g\|^2 \quad \text{، مساواة متوازي الاضلاع ،}$$

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \quad \text{، مبرهنة فيثاغورث ، إذا كان } (f, g) = 0$$

(٣-٢) الفضاء قبل الهيلبرتي والفضاء الصليبرتي . نسمي كل فضاء خطي مع الجداء السلمي فضاء قبل الهيلبرتي . ان هذا الفضاء مع التنظيم المعرف بالجداء السلمي هو فضاء منظم . وإذا كان هذا الفضاء المنظم تماماً ، أي فضاء باناخي ، فإنه يسمى فضاء هيلبرتي . وهذه بعض الأمثلة :

(أ) ، ان \mathbb{R}^n المعرف عليه الجداء السلمي :

$$(a, b) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

هو فضاء هيلبرتي حقيقي ، وأن \mathbb{C}^n المعرف عليه الجداء السلمي :

$$(a, b) = a_1 \bar{b}_1 + \dots + a_n \bar{b}_n$$

هو فضاء هيلبرتي عقدي ، والتنظيم في كل من هاتين الحالتين هو تنظيم اقليدس .

(ب) ، لتكن H المجموعة $C(J)$ المكونة من جميع الدوال $f(x)$ ذات القيم

الحقيقية والمستمرة في $J: a \leq x \leq b$. ولتأخذ الجداء السلمي :

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx \quad (1)$$

ونعرف المسافة بين دالتين f و g من هذا الفضاء بـ :

$$\|f - g\| = \sqrt{\int_a^b (f - g)^2 dx} \quad (2)$$

ومن السهل علينا أن نثبت أن هذا الجداء السلمي يحقق الشروط المطلوبة .
 وحيث أنه توجد متتاليات من الدوال $f_n \in C(J)$ تشكل ، وفق التنظيم (2) ،
 متتالية كوشية ، ولكنها ليست متقاربة إلى دالة مستمرة مثل المتتالية :

$$f_n(x) = \left\{ \max \left(x, \frac{1}{n} \right) \right\}^{-1/3} \quad 0 \leq x \leq 1$$

التي نهايتها ، وفق التنظيم (2) هو الدالة $x^{-1/3}$ التي لا تنتمي إلى H ، فإن
 هذا الفضاء الحقيقي هو فضاء قبل الهيلبرتي .

وإذا ما أراد المرء أن يجعل من هذا الفضاء تاماً فعليه أن يضيف دوالاً أخرى
 تعاني انقطاعاً ، وهذا يقودنا إلى :

(-) الفضاء الهيلبرتي الحقيقي $L^2(J)$ للدوال الكمولة تربيعياً في J ، أي
 التي يكون فيها التكاملان :

$$\int_a^b f^2(x) dx \quad \text{و} \quad \int_a^b f(x) dx$$

موجودين ، والتي نعرف فيها الجداء السلمي (1) . إن التكاملات الواردة هنا هي تكاملات لويينغ .

(د) كذلك تشكل الدوال ذات القيم العقدية المستمرة في J أو الكمولة تريبياً ، فضاء عقدي قبل هيلبرتي أو هيلبرتي بفرض أن الجداء السلمي معرف بـ :

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

وهنا نود أن نلفت النظر إلى أن الدراسة التي سنقوم بها والتي تتعلق بمسألة القيم الذاتية لستورم وليوفيل ستم دون تكامل لويينغ ، أي في مجال الدوال المستمرة . وبشكل أدق في فضاء قبل هيلبرتي .

(هـ) تعريف : اثبت أن الجداء السلمي هو دالة مستمرة من $H \times H$ إلى C أو إلى R .

(٣-٣) النظم المتعامدة المنظمة ومتسلسلات فورييه . ليكن H ، كما سنفرض دائماً ، فضاء قبل هيلبرتي حقيقي أو عقدي . نقول عن متتالية $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ من H انها نظام متعامد منظم فيما إذا كان :

$$(w_n, w_m) = \delta_{nm}$$

وإذا كان f عنصراً من H فإننا نسمي المتسلسلة :

$$c_n = (f, w_n) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n w_n \quad (3)$$

متسلسلة فورييه المولدة بـ f ، وتسمى c_n معاملات فورييه لـ f . وأما فيما يتعلق بتقارب هذه المتسلسلة وبمجموعها فإننا نورد مايلي :

إذا كان :

$$g_n = f - \sum_{i=0}^n c_i w_i \quad (4)$$

فإن :

$$\begin{aligned} \|g_n\|^2 &= \|f\|^2 - \sum_{i=0}^n \bar{c}_i (f, w_i) - \sum_{i=0}^n c_i (w_i, f) \\ &+ \sum_{i,j=0}^n c_i \bar{c}_j (w_i, w_j) = \|f\|^2 - \sum_{i=0}^n |c_i|^2 \end{aligned} \quad (5)$$

وبالتالي يكون :

(أ)

$$\sum_{i=0}^{\infty} |c_i|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |(f, w_i)|^2 \leq \|f\|^2 \quad (6)$$

(متباينة بسل)

مهما كان f من H .

د ب ، تشكل المجموع الجزئية لتسلسلة فورييه (3) متتالية كوشيه . وبالتالي إذا كان H فضاء هيلبرتياً فإن متسلسلة فورييه (3) متقاربة ، أي أن متتالية المجموع الجزئية متقاربة ، وفق التنظيم ، إلى عنصر من H .

د ، تصح المساواة :

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} c_i w_i$$

د وفق التنظيم ، إذا وإذا فقط صحت إشارة المساواة في (6) . وإذا كان

هذا هو الحال مهما كان f من H فإننا نقول عن (w_n) انها نظام متعامد منظم تام أو انها قاعدة متعامدة منظمة . تنتج (آ) و (ب) مباشرة من (5) ، ولائبات (ب) نفرض S_n هو مجموع جزئي نوني لتسلسلة فورييه (3) . فإذا كان $m < n$ فإن :

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{i,j=m+1}^n c_i \bar{c}_j (w_i, w_j) = \sum_{i=m+1}^n |c_i|^2$$

وبسبب تقارب التسلسلة (6) فإن (s_n) متتالية كوشية .

(د) مثال : تشكل الدوال :

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} , w_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \quad w_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \quad (n \in \mathbb{N})$$

نظام متعامد منظم في فضاء المثال (ب) ، أو المثال (ح) من (٣-٢) ، حيث تأخذ $J = [0, 2\pi]$.

وتشكل الدوال :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \quad n \in \mathbb{Z}$$

نظاماً متعامداً منظماً في فضاء المثال (د) من (٣-٢) ، بفرض أن $J = [0, 2\pi]$.

وتترك للقارئ برهان مايلي :

(هـ) تشكل المجاميع الجزئية لتسلسلة $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i w_i$ متتالية كوشية اذا واذا

فقط كانت المتسلسلة $\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i|^2$ متقاربة . إن هذا الشرط في فضاء هيلبرت هو شرط لازم وكاف لتقارب المتسلسلة .

(و) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i w_i$ متقاربة إلى عنصر f من H فإن $\alpha_i = (f, w_i)$ ، وبعبارة أخرى ان كل متسلسلة متقاربة هي متسلسلة فورييه لمجموعها . وبشكل خاص يكون

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i w_i = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i w_i \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

(٣ - ٤) المؤثرات المحدودة والمتراصة والتقارئة ذاتياً : ليكن H فضاء قبل هيلبرتي حقيقي أو عقدي وليكن $T: H \rightarrow H$ مؤثراً خطياً . نقول عن T انه محدود إذا كان تنظيم T :

$$\|T\| = \sup \{ \|Tf\| : f \in H, \|f\| = 1 \}$$

منتهياً . عندئذ يكون :

$$\|Tf\| \leq \|T\| \cdot \|f\| \quad f \in H \quad (7)$$

وإذا كان T خطياً ومحدوداً وكان :

$$(Tf, g) = (f, Tg) \quad f, g \in H$$

فإننا نقول عن T انه متقارن ذاتياً أو هرميتياً .

ونقول عن مؤثر خطي T انه متراص إذا كان لكل متتالية (Tf_n) ، مها كانت المتتالية المحدودة (f_n) من H ، متتالية جزئية متقاربة (بنهاية في H) . ويمكن للمرء أن يتحقق بسهولة من أن كل مؤثر خطي متراص محدود .

(\bar{A}) منها كان المؤثر الهرميتي T ومهما كان العنصر f من H فإن (Tf, f) حقيقي وان :

$$\|T\| = \sup \{ |(Tf, f)| : f \in H, \|f\| = 1 \}$$

البرهان : لنرمز للطرف الأيمن من هذه المساواة بـ β فعندئذ يكون :

$$|(Tf, f)| \leq \beta \|f\|^2 \quad f \in H \quad (8)$$

واستناداً إلى (7) وإلى متباينة شفارتز يكون :

$$|(Tf, f)| \leq \|Tf\| \|f\| < \|T\| \|f\|^2$$

لأجل $\|f\| = 1$. إذن $\beta \leq \|T\|$ ويتم اثبات المتباينة المعكوسة اعتماداً على التطابقة :

$$(Tf+Tg, f+g) - (Tf-Tg, f-g) = 2(Tf, g) + 2(Tg, f)$$

ويكون الطرف الأيسر استناداً إلى (8) وإلى مساواة متوازي الاضلاع أصغر من :

$$\beta \|f+g\|^2 + \beta \|f-g\|^2 - 2\beta (\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

وإذا وضعنا بشكل خاص $g = Th$ و $f = \lambda h$ بفرض أن $\lambda = \|Th\|^{-1}$ فإن :

$$2(Tf, g) + 2(Tg, f) = 2\lambda (Th, Th) + 2\lambda (T^2 h, h) = 4\lambda^3$$

إذن :

$$4\lambda^3 \leq 2\beta (\lambda^2 + \lambda^2) \Rightarrow \lambda = \|Th\| \leq \beta$$

ولما كان h باستثناء $\|h\|=1$ كيفياً فإن $\|T\| \leq \beta$ ، وبالتالي $\|T\| = \beta$

(٢-٥) القيم الذاتية للمؤثرات الهرميتية المتراصة : إذا كان :

$$Tw = \mu w \quad 0 \neq w \in H \quad (9)$$

فعدئذ تسمى μ قيمة ذاتية لـ T ويسمى w العنصر الذاتي الموافق .

وللحصول على قيمة ذاتية لمؤثر هرميتي متراص T ننظر ، بفرض $T \neq 0$ ، في متتالية (φ_n) من H تحقق :

$$\|\varphi_n\| = 1, \quad |(T\varphi_n, \varphi_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|T\|$$

وإذا انتقلنا ، إن كان ضرورياً ، إلى متتالية جزئية فإننا نفرض أيضاً أن كلا من المتتالية $(T\varphi_n)$ والمتتالية الحقيقية $(T\varphi_n, \varphi_n)$ متقاربتان (T متراص) :

$$(T\varphi_n, \varphi_n) \rightarrow \mu \quad T\varphi_n \rightarrow \mu w$$

إن μ حقيقي وإن $\|T\| = |\mu| > 0$. ويكون عندئذ :

$$\begin{aligned} 0 \leq \|T\varphi_n - \mu\varphi_n\|^2 &= \|T\varphi_n\|^2 - 2\mu(T\varphi_n, \varphi_n) + \mu^2 \\ &\leq 2\mu^2 - 2\mu(T\varphi_n, \varphi_n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

أو :

$$\| \epsilon_n \| \rightarrow 0 \quad \text{وأن } \epsilon_n \in H \text{ بفرض أن } T\varphi_n = \mu\varphi_n + \epsilon_n$$

ولما كان $T\varphi_n \rightarrow \mu w$ فإن $\mu\varphi_n \rightarrow \mu w$ أي $\varphi_n \rightarrow w$ وبالتالي $T\varphi_n \rightarrow Tw$

وتصح كذلك المساواة (9) ويكون $\|w\| = 1$

(٦-٣) مبرهنة . إذا كان T مؤثراً هرميتياً متراصاً في فضاء قبل هيلبرتي H ، فعندئذ توجد قيمة ذاتية $\mu_0 \in \mathbb{R}$ تحقق $\|T\| = |\mu_0|$. إن للعنصر الذاتي الموافق $w_0 \in H$:

$$T w_0 = \mu_0 w_0 \quad \|w_0\| = 1$$

الخاصة التالية وهي أن العبارة $(T w, w)$ تبلغ قيمتها العظمى $\|T\|$ على سطح كرة الواحدة في النقطة w_0 .

لقد تم اثبات هذه المبرهنة في (٣-٥) عندما $T \neq 0$. أما إذا كان $T = 0$ فهي بديهية .

لنلاحظ أنه من (٩) ينتج : $(T w, w) = \mu \|w\|^2$ أي أن $\|T\| \leq |\mu|$ مهما كانت القيمة الذاتية μ وان كل قيمة ذاتية (بفرض أن T هرميتي) حقيقية .

لننظر الآن في الفضاء الجزئي H_1 لجميع العناصر $f \in H$ المتعامدة مع w_0 :

$$H_1 = \{ f \in H , (f, w_0) = 0 \}$$

ومن الواضح أن H_1 ينتقل بـ T إلى نفسه لأن :

$$(T f, w_0) = (f, T w_0) = \mu_0 (f, w_0) = 0 \quad f \in H_1$$

وأن T هرميتي في H_1 ومتراص .

يمكن إعادة الدراسة نفسها في H_1 فنصل إلى قيمة ذاتية μ_1 وإلى عنصر ذاتي w_1 يحققان :

$$\|w_1\| = 1 , (w_0, w_1) = 0 , |\mu_1| \geq |\mu_0|$$

ليكن الآن H_0 فضاء جزئياً مكوناً من جميع العناصر f من H ، المتعامدة

مع كل من w_0 و w_1 وهكذا .

إن هذه العملية لاتتوقف إذا كان H غير منتهي البعد وذلك لأن الفضاء الجزئي H_n المكون من العناصر f التي تحقق :

$$H_n : (f, w_i) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

لايساوي $\{0\}$

(٣ - ٧) مبرهنة : ليكن H فضاء قبل هيلبرتي لانهائي الابعاد وليكن $T : H \rightarrow H$ هرميتياً ومتواصلاً . عندئذ يكون لمسألة القيم الذاتية (9) عدد غير منته من القيمة الذاتية الحقيقية μ_0, μ_1, \dots التي تحقق :

$$|\mu_0| \geq |\mu_1| \geq |\mu_2| > \dots \quad (10)$$

$$\mu_n \rightarrow 0 \text{ عندما } n \rightarrow \infty$$

وتشكل العناصر الذاتية المقابلة w_n :

$$T w_n = \mu_n w_n$$

نظاماً متعامداً منتظماً :

$$(w_m, w_n) = \delta_{m,n}$$

وإذا كان H_n فضاء جميع عناصر f من H التي تحقق :

$$(f, w_i) = 0 \quad i = 0, \dots, n-1$$

فإن :

$$|\mu_n| = \sup \|Tf\| = \sup |(Tf, f)| \quad (f \in H_n, \|f\|=1) \quad (11)$$

إن كل عنصر من فضاء الصورة لـ T يمثل بتسلسلة فورية الخاصة به . أي انه إذا كان $h = Tf$ وبفرض أن f عنصر من H فإن :

$$d_i = (h, w_i) = \mu_i (f, w_i) \quad \text{بفرض أن } h = \sum_{i=0}^{\infty} d_i w_i \quad (12)$$

لقد تم اثبات هذه المبرهنة ، باستثناء (12) وعلاقة النهاية في (10) ، بالملاحظات الاخيرة . اما أن تشكل μ_n متتالية صفرية فهذا واضح لأنه اذا لم يكن الأمر كذلك فإن المتتالية $\psi_n = \frac{1}{\mu_n} w_n$ تكون عندئذ محدودة ويكون للمتتالية $(w_n) = (T\psi_n)$ متتالية جزئية متقاربة الأمر الذي يستحيل أن يكون صحيحاً بسبب كون $\|w_n - w_m\|^2 = 2$ عندما $m \neq n$.

ولاثبات (12) نفرض $c_i = (f, w_i)$ معاملات فورييه لـ f ونأخذ :

$$g_n = f - \sum_{i=0}^{n-1} c_i w_i$$

من الواضح أن g_n عنصر من H_n وأنه استناداً الى (11) و (5) و (10) يكون :

$$\|Tg_n\| \leq \mu_n \|g_n\| \leq \mu_n \|f\| \rightarrow 0$$

وينتج المطلوب عندئذ من المساواة :

$$h - \sum_{i=0}^{n-1} d_i w_i = Tg_n$$

(٣-٨) اضافات وملاحظات : (أ) ان كل قيمة ذاتية $\mu \neq 0$ لـ T مساوية لاحدى القيم μ_n ، وان الفضاء الذاتي الموافق (أي مجموعة جميع العناصر w من H التي تحقق المعادلة (9)) منتهي البعد ويتولد من العناصر الذاتية w_k

الموافقة لـ $\mu_k = \mu$. وبعبارة أخرى إذا كان w حلاً لـ (9) لأجل $\mu \neq 0$ فإن w يقع في الفضاء الصورة لـ T ، أي أن :

$$T w = \sum c_i \mu_i w_i \text{ و } c_i = (w, w_i) \text{ بفرض أن } w = \sum c_i w_i .$$

ويكون اعتماداً على (9) وعلى (و) من (٣-٢) $\mu c_i = \mu_i c_i$. فإذا كان $\mu_i \neq \mu$ مها كانت i فإن $c_i = 0$ و $w = 0$. أما إذا كان $\mu = \mu_i$ فإن $c_i = 0$ لجميع قيم i التي يكون من أجلها $\mu_i \neq \mu$ ويكون $w = \sum c_k w_k$ حيث يتمدد المجموع على جميع قيم k التي يكون لاجلها $\mu_k = \mu$.

(ب) ان العنصر الذاتي w_i هو حل لمسألة تحويلات

$$|(Tf, f)| = \max .$$

بشرط جانبي $\|f\| = 1$ و $(f, w_i) = 0$ لأجل $i = 0, \dots, n-1$

(٢) إذا كان H فضاء هيلبرتياً وإذا لم يكن $\mu = 0$ قيمة ذاتية لـ T فإن (w_i) قاعدة متعامدة منظمه ، أي أنه مها يكن f من H يكون :

$$c_i = (f, w_i) \text{ أن بفرض أن } f = \sum_{i=0}^{\infty} c_i w_i$$

ذلك لان الطرف الأيمن من هذه المعادلة (أي متسلسلة فورييه لـ f) متقارب استناداً الى (ب) من (٣-٣) ويساوي مثلاً g . واستناداً الى (9) من (٣-٣) يكون أيضاً $c_i = (g, w_i)$. وبذلك يكون لـ Tf و لـ Tg معاملات فورييه c_i نفسها . وهي متساوية استناداً الى القضية (د) ١٢ . وينتج من $T(f-g) = 0$ ، نظراً لأن الصفر ليس قيمة ذاتية لـ T ، أن $f = g$.

لنتقل الآن الى تطبيق هذه النتيجة على مسألة القيم الذاتية لـ شورم - ليوفيل .

(٢-٩) مسألة القيم الذاتية لشتورم - ليوفيل : لتكن لدينا المسألة :

$$Lu + \lambda ru = 0 \quad \text{في } J = [a, b]$$

(13)

$$R_1 u = R_2 u = 0$$

حيث يكون :

$$Lu = (pu') + qu, \quad R_1 u = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a)$$

$$R_2 u = \beta_1 u(b) + \beta_2 p(b) u'(b)$$

وذلك ضمن الفروض (SL) التي مرت في (٢-١) . يمكننا أن نقبل أن $\lambda = 0$ ليست قيمة ذاتية ، وذلك لأنه إذا لم تكن λ^* ، مثلا ، قيمة ذاتية فإننا نستبدل بـ $q(x)$ ، $q^*(x) = q(x) + \lambda^* r(x)$ ، وإذا كانت (λ_0, w_0) قima ذاتية ودوال ذاتية للمسألة القديمة فإن $(\lambda_0 - \lambda^*, w_0)$ هي القيم الذاتية والدوال الذاتية للمسألة الجديدة ، وبالتالي لا يكون الصفر قيمة ذاتية للمسألة الجديدة يمكن تصور كل حل u لـ (13) على أنه حل لمسألة شتورم نصف المتجانسة في القيم الحدية :

$$Lu = g(x) \quad g(x) = -\lambda r(x) u(x)$$

$$R_1 u = R_2 u = 0$$

وهذه تحقق استناداً إلى (12) من (١-٦) المعادلة التكاملية :

$$u(x) = -\lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi) r(\xi) u(\xi) d\xi \quad (14)$$

بفرض أن $\Gamma(x, \xi)$ هو دالة غرين لمسألة شتورم في القيم الحدية (4) من البند الأول . ووجود هذا الحل أكدته المبرهنة (١-٧) نظراً لأن $\lambda = 0$ ليست

قيمة ذاتية (إذا كان $R_1 u = 0$ و $Lu = 0$ فالحل الصفري هو الحل الوحيد) .

لندخل ، بسبب التناظر ، الدالتين الجديدتين :

$$w(x) = \sqrt{r(x)} u(x) , K(x, \xi) = -\Gamma(x, \xi) \sqrt{r(x)r(\xi)} \quad (15)$$

عندئذ تأخذ (14) الشكل التالي :

$$w(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) w(\xi) d\xi \quad (16)$$

وهذه معادلة تكاملية بنواة متناظرة :

$$K(x, \xi) = K(\xi, x) \quad (17)$$

وحول العلاقة بين المسألة الاصلية والمعادلة التكاملية تصح المبرهنة التالية :

(٢-١٠) مبرهنة : ضمن الفروض (SL) ، وبفرض أن الصفر ليس قيمة ذاتية لـ (13) ، فإنه يلزم وبكفي كفي يكون العدد λ قيمة ذاتية وتكون الدالة $u(x)$ دالة ذاتية موافقة هو أن يكون u مستمراً في J وغير مطابق للصفر ومحققاً للمعادلة التكاملية (14) ، أو أن يكون $w = \sqrt{r(x)} u$ مستمراً في J وغير مطابق للصفر ومحققاً للمعادلة التكاملية (16) . إن النواة $k(x, \xi)$ هي دالة متناظرة مستمرة في المربع $Q = [a, b] \times [a, b]$.

لقد اثبتنا الجزء الاسامي من هذه المبرهنة بدراستنا السابقة ، ولم يبق امامنا سوى نفرة بسيطة . ذلك أننا إذا أردنا أن نثبت ان كل حل u لـ (14) هو حل لـ (13) فإن علينا ان نثبت أولاً أن $u \in C^2(J)$ ، إذ اننا لم نفرض في u سوى الاستمرار . ان هذا الامر ينتج عن المبرهنة (١-٧) ، نظراً لان

لتكامل في الطرف الايمن من (14) شكل (12) من البند الأول حيث يكون
 $g = -\lambda v u$ ، ونظراً لان هذا التكامل يفرض أن g مستمر هو فضول باستمرار
 مرتين كما اثبتنا هناك .

إن مسألة القيم الذاتية الأصلية هي اذن بمثابة لمعادلة فريد هولم التكاملية (16) .

ومن المناسب ان نضرب (16) بـ $\frac{1}{\lambda}$ فنحصل على :

$$T f = \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad \text{ان يفرض } T w = \mu w \quad (18)$$

نكتفي بدراسة هذه المعادلة في الفضاء الحقيقي قبل الهيلبرتي $H = C(J)$ الذي
 ورد في المثال ب من (٣-٢) مستخدمين النتائج السابقة . إن المؤثر T ينقل
 $C(J)$ إلى نفسه . ولما كانت $\lambda = 0$ ليست قيمة ذاتية لـ (13) ، وكانت
 $\mu = 0$ ، كما يبدو بسهولة ، ليست قيمة ذاتية لـ T فإن هناك تقابلاً بين القيم
 الذاتية λ لـ (13) والقيمة الذاتية μ لـ (18) وفق $\lambda = \frac{1}{\mu}$. إن المؤثر T خطي
 وهرميتي ومتراص . وتنتج الهرميتية من تناظر K وتنتج معها أيضاً الصيغة :

$$(T f, g) = (f, T g) \quad f, g \in C(J) \quad (19)$$

وأما تواص T فينتج عن المبرهنة التالية :

(٣-١١) مبرهنة : إذا كانت (f_n) متتالية من $H = C(J)$ يفرض أن
 $\|f_n\| \leq c$ فإن المتتالية :

$$g_n(x) = T f_n = \int_a^b K(x, \xi) f_n(\xi) d\xi$$

نحقق شرط مبرهنة اسكوني - ارزبلا ، أي أنها متساوية الاستمرار ومحدودة بالمعنى العادي :

$$|g_n(x)| \leq C_1 \quad x \in J \quad n \in \mathbb{N}$$

وهذا يؤدي إلى أن ل g_n متتالية جزئية متقاربة بانتظام .

البرهان: بسبب استمرار $K(x, \xi)$ فإنه إذا كان $\epsilon > 0$ مفروضاً فهناك $\delta > 0$ بحيث يكون :

$$|K(x, \xi) - K(x', \xi)| < \epsilon \quad \text{عندما} \quad |x - x'| < \delta$$

واستناداً إلى متباينة شفارتز فاننا نجد ل $g = Tf$ و $\|f\| \leq C$

$$|g(x) - g(x')| \leq \int_a^b |K(x, \xi) - K(x', \xi)| |f(\xi)| d\xi$$

$$\leq (\epsilon, |f|) \leq \epsilon \|f\| \leq C \epsilon \sqrt{b-a}$$

وهذا نكون قد اثبتنا تساوي الاستمرار . وأما المحدودية فنتج بشكل أبسط . ان النواة K مستمرة فهي محدودة : $|K(x, \xi)| \leq A$ ، واستناداً إلى متباينة شفارتز ينتج :

$$|g_n(x)| = |(K, f_n)| \leq \|K\| C \leq AC \sqrt{b-a}$$

وهذا نكون في وضع نستطيع فيه ان نطبق المبرهنة (3 - 7) على المؤثر T .

وإذا ما اردنا ان ننقل هذه النتائج المتعلقة ب (16) ، على المعادلة التكاملية الأصلية (14) أو مسألة القيم الذاتية (13) ، فما علينا سوى أن نلاحظ صيغ التحويل (15) . وإذا كان w_i الدالة الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية λ_i ب (16)

فمعتدئ تصح (14) لأجل :

$$u_i(x) = \frac{w_i(x)}{\sqrt{r(x)}} \quad \lambda_i = \frac{1}{\mu_i} \quad (20)$$

أي :

$$u_i(x) = -\lambda_i \int_a^b \Gamma(x, \xi) r(\xi) u_i(\xi) d\xi \quad (21)$$

وبالتالي استناداً إلى البرهنة (١ - ٧)

$$L u_i + \lambda_i r(x) u_i = 0 \quad R_1 u_i - R_2 u_i = 0 \quad (22)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

وأما نشر دالة مفروضة $\varphi(x)$ حسب الدوال الذاتية u_i فإنه ينتج ، إذا
أجلنا النظر في موضوع التقارب مؤقتاً ، بنشر $h = \sqrt{r} \varphi$ حسب w_i :

$$h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i w_i(x) \quad d_i = (h, w_i) \quad (23)$$

وهذا مكافئ ل :

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i u_i(x) \quad d_i = \int_a^b r(x) \varphi(x) u_i(x) dx \quad (24)$$

أي بالشعر الوارد في (٢ - ٣) .

ليكن الآن $\varphi \in C^2(J)$ و $R_1 \varphi = R_2 \varphi = 0$ ، فيكون استناداً إلى (12) من البند

الأول أن $\varphi(x) = (\Gamma, L\varphi)$ حيث يعني الجداء السلمي هنا وفيما يلي التكامل بالنسبة لـ ξ مع ترك x كوسيط . لذلك إذا وضعنا $h = \sqrt{\Gamma}\varphi$ و $f = -\frac{L\varphi}{\sqrt{\Gamma}}$ فإن :

$$h(x) = \sqrt{\Gamma(x)} (\Gamma, -f\sqrt{\Gamma}) = (K, f) - Tf$$

وبالتالي فإن h تقع في الفضاء الصورة لـ T وتكون (12) صحيحة أي تكون (23) صحيحة ، على أن نفهم هذه المساواة بمفهوم التقارب بالوسط المربع أي بمفهوم المسافة (2) . سنثبت فيما يلي أن التقارب المنتظم أيضاً قائم في J .

استناداً إلى (12) يكون $d_i = \mu_i c_i$ بفرض أن $c_i = (f, w_i)$. بالإضافة لذلك يمكننا ان ننظر إلى العدد $w_i(x_0)$ ، بفرض x_0 ثابتة ، على أنه معامل فورييه للدالة $K(x_0, \xi)$:

$$\mu_i w_i(x_0) = (K(x_0, \cdot), w_i)$$

لننظر الآن في مجموع جزئي للمتسلسلة (23) من $i=m$ إلى $i=n$ ، ولنطبق عليه متراجحة شفارتز :

$$\sum_{i=m}^n c_i \mu_i w_i(x_0))^2 \leq \sum_{i=m}^n c_i^2 \sum_{i=m}^n (\mu_i w_i(x_0))^2$$

واستناداً إلى متباينة بسل يكون مجموع الطرف الأيمن الممتد من 0 إلى ∞ أصغر من $\|K(x_0, \cdot)\|^2$. كذلك ان المجموع الاول في الطرف الايمن هو مجموع جزئي لمتسلسلة متقاربة . وعلى هذا فانه إذا كان ϵ عدداً موجباً مفروضاً فهناك عدد n بحيث يكون :

$$\left(\sum_{i=m}^n c_i \mu_i w_i(x_0) \right)^2 \leq \epsilon \|K(x_0, \cdot)\|^2 \leq A \epsilon$$

عندما يكون $n > m \geq n_0$ و $x_0 \in J$.

وهذا نكون قد اثبتنا التقارب المنتظم للمتسلسلة (23) والمتسلسلة (24) أيضاً .
وبذلك نكون قد اثبتنا مبرهنة التقارب (٢ - ٣) في الحالة التي يكون فيها
. $\varphi \in C^2(J)$

نود أن نذكر أن المبرهنة صحيحة أيضاً عندما يكون $\varphi \in C^1(J)$ غير أننا
سنغض النظر عن هذا البرهان .

٤ - السلوك التقاربي - الاستقرار

(٤ - ١) نظرية الاستقرار : إن هدف هذا البند هو الوصول إلى رواتر حول
الارتباط المستمر لحل المعادلة التفاضلية بالقيم الابتدائية . لننظر على سبيل المثال
بالحل $y(t)$ للمسألة :

$$y' = -y \quad y(0) = \eta$$

والحل $z(t)$ للمعادلة نفسها إنما بشرط ابتدائي جديد $z(0) = \eta + \epsilon$. عندئذ
يكون :

$$z(t) - y(t) = \epsilon e^{-t}$$

وهنا نرى ان تغير القيمة الابتدائية دون أن نغير المعادلة التفاضلية أدى إلى
أن الفرق بين الحلين يسعى إلى ∞ مثل e^{-t} .

أما إذا نظرنا إلى المعادلة التفاضلية :

$$y' = -y$$

فإننا نجد أن الفرق بين حلين y و z لقيمتين ابتدائيتين $\eta, \eta + \epsilon$ هو :

$$z(t) - y(t) = \epsilon e^{-t}$$

وهذا يتقارب الى الصفر عندما $t \rightarrow \infty$.

(٢-٤) الاستقرار والاستقرار المقارب . سنفرض المتغير t فيا يلي حقيقياً ،

بينما يمكن للدوال f, y_1, \dots, y_n أن تكون ذات قيم في \mathbb{R}^n أو \mathbb{C}^n .

لتكن لدينا مجموعة المعادلات التفاضلية :

$$y'_i = f_i(t, y_1, \dots, y_n) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

لنستخدم اسلوب المتجهات بادخال الرموز التالية :

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad f(t, y) = \begin{pmatrix} f_1(t, y) \\ \vdots \\ f_n(t, y) \end{pmatrix}$$

عندئذ تأخذ مجموعة المعادلات التفاضلية المذكورة الشكل :

$$y' = f(t, y)$$

ليكن $x(t)$ حلاً للمجموعة (1) لأجل $0 \leq t < \infty$ ، حيث نفرض أن

$f(t, y)$ معرف على الأقل في $|y - x(t)| < \alpha$ في $0 \leq t < \infty$ ، S_α ومستمر .

نقول عن حل $x(t)$ انه مستمر إذا تحقق مايلي :

لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث تكون جميع الحلول $y(t)$ الموافقة لـ :

$$|y(0) - x(0)| < \delta$$

موجودة لأجل $t \geq 0$ وتحقق المتباينة :

$$|y(t) - x(t)| < \epsilon \quad 0 < t < \infty$$

ونقول عن الحل $x(t)$ انه مستقر متقارب إذا كان مستقراً وإذا وجد $\delta > 0$ بحيث تحقق جميع الحلول $y(t)$ الموافقة لـ $|y(0) - x(0)| < \delta$ الشرط :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - x(t)| = 0$$

ونقول عن الحل إنه غير مستمر أو انه قلق إذا لم يكن مستقراً .

ملاحظات : إن النظم في هذه التعاريف هو نظم كفي في \mathbb{R}^n أو \mathbb{C}^n .
ويمكن للمرء أن يثبت أن النتائج التي نحصل عليها مستقلة عن النظم الذي نختاره .

واقدمت العادة في نظرية الاستقرار أن نبحث في الحالة $t \rightarrow +\infty$. أما الحالة $t \rightarrow -\infty$ فمن الممكن أن ترجع إلى الحالة السابقة .

(٣-٤) مبرهنة : إذا كانت لدينا مجموعة المعادلة التفاضلية :

$$y'_i = a_{i1}(t) y_1 + \dots + a_{in}(t) y_n \quad i = 1, \dots, n$$

وإذا رمزنا بـ A للمصفوفة :

$$(a_{ij})$$

فإن المجموعة السابقة تكتب بالشكل :

$$y' = Ay \quad (2)$$

إن الأعداد a_{ij} يمكن أن تكون حقيقية أو عقدية .

لقد رأينا أننا حل هذه المعادلة نضع :

$$y(t) = c e^{\lambda t}$$

ف نجد :

$$(A - \lambda E) c = 0$$

بفرض أن :

$$E = (\delta_{ij})$$

ويكون للمجموعة حل غير الصفري إذا كانت λ حلاً للمعادلة :

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة n في λ تسمى المعادلة المميزة . وتسمى حلولها القيم المميزة للمصفوفة A .

مبرهنة : إذا حقت القيم المميزة λ_i للمصفوفة A المتباينة .

$$\operatorname{Re} \lambda_i < \alpha \quad (3)$$

فإن (*)

$$|e^{\lambda t}| \leq c e^{\alpha t} \quad \text{لأجل } t \geq 0 \quad (4)$$

بثابت موجب مناسب c .

إن إثبات هذه المبرهنة ينتج عن الحقيقة التالية : إن للمعادلة التفاضلية (2) n

(*) أن $|A|$ هو تنظيم المصفوفة A . والنظائم التي نسمح بها تحقق بالإضافة إلى شروط التنظيم المتباينتين :

$$|AB| \leq |A| |B| \quad |Ax| \leq |A| |x|$$

بفرض أن A و B مصفوفتان و x متجه

حلاً مستقلاً من الشكل :

$$y(t) = e^{\lambda t} p(t) \quad (5)$$

بفرض أن λ هي قيمة مميزة لـ A و

$$p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$$

حدودية من درجة لا تزيد عن n .

فإذا كان $\alpha - \text{Re } \lambda = \epsilon > 0$ فإن $|p_i(t)| \leq c_i e^{\epsilon t}$ وبالتالي :

$$|e^{\lambda t} p_i(t)| \leq e^{(\epsilon + \text{Re } \lambda)t} c_i = c_i e^{\alpha t}$$

وإذا رمزنا بـ $Y(t)$ لنظام أسامي مكون من n حلاً من الشكل (5) ، فإن كلا من مركباته ، والتي عددها n^2 ، لا يتجاوز جداء ثابت بـ $e^{\alpha t}$. ان الامر نفسه يصح لأجل $Y(t)$ وبالتالي ، نظراً لأن $e^{\alpha t}$ هو أيضاً نظام أسامي يمكن أن يمثل بالشكل $e^{\alpha t} = Y(t)C$ لأجل $e^{\alpha t}$.

(٤-٤) مبرهنة . إن جميع حلول المعادلة التفاضلية الخطية :

$$y' = A y \quad (A \text{ مصفوفة بعناصر ثابتة})$$

تسمى نحو الصفر عندما $t \rightarrow \infty$ إذا وإذا فقط كانت :

$$\text{Re } \lambda_i < 0 \quad (6)$$

وذلك مهما كانت القيمة المميزة λ_i للمصفوفة A .

البرهان : يمكن كتابة كل حل y على الشكل $y(t) = e^{\lambda t} y(0)$. واستناداً

إلى المبرهنة السابقة :

نرى أن $y(t) \rightarrow 0$ عندما $t \rightarrow \infty$.

أما إذا وجدت قيمة ذاتية $\lambda = \mu + i\nu$ بحيث يكون $\mu \geq 0$ ، فعندئذ يوجد للمعادلة التفاضلية حل من الشكل :

$$y(t) = c e^{\lambda t} \quad (0 \neq c \in \mathbb{C}^n) \quad (7)$$

وهذا لا يسعي إلى الصفر عندما $t \rightarrow \infty$.

وهكذا نصل إلى المبرهنة التالية :

($0 = \epsilon$) مبرهنة في الاستقرار : لتكن $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ($p \leq n$) القيم الذاتية لـ A وليكن $\gamma = \max \{ \operatorname{Re} \lambda_i ; i = 1, \dots, p \}$ ، عندئذ يكون الحل البديهي $x(t) \equiv 0$ للمعادلة (2) :

مستقراً مقارباً عندما $\gamma < 0$

قلعاً عندما $\gamma > 0$

غير مستقر مقارب (يمكن ان يكون مستقراً أو قلعاً) عندما $\gamma = 0$

أي انه إذا كان $\gamma > 0$ و $\lambda = \mu + i\nu$ قيمة ذاتية بقسم حقيقي موجب ، فإنه توجد حلول $z(t)$ غير محدودة رغم أن $|z(0)|$ يمكن ان تكون صغيرة بقدر كفي . مثال ذلك الحلول $z = \alpha y(t)$ حيث يعطى y بـ (7) .

أما الحالة $\gamma = 0$ فهي لا تعطي حلاً مستقراً مقارباً ، الأمر الذي يظهر من (7) إذا وضعنا $\lambda = i\nu$.

وكشال على الحالة الأخيرة نورد المصفوفتين :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وهنا يكون :

$$e^{At} = E \quad , \quad e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

في المثال الأول نجد حالة الاستقرار وفي المثال الثاني نجد حالة القلق .

ولتوضيح سلوك الاستقرار ، لنظام خطي بمعاملات ثابتة ، تماماً سنوجه اهتمامنا فيما يلي لمسائل غير خطية . وفي بداية الأمر نورد المبرهنة المساعدة التالية :

(٤-٦) مبرهنة جرونوول : لتكن $\varphi(t)$ دالة حقيقية مستمرة في $J: 0 \leq t \leq \alpha$

ولیکن :

$$\varphi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \varphi(t) dt$$

في J وبفرض أن $\beta > 0$. عندئذ يكون في J :

$$\varphi(t) \leq \alpha e^{\beta t}$$

البرهان : ليكن $\epsilon < \alpha$ ولنضع :

$$\psi(t) = (\alpha + \epsilon) e^{\beta t}$$

إن الدالة ψ تحقق المعادلة التفاضلية $\psi' - \beta\psi = \epsilon$ ، فهي تحقق إذن المعادلة

التكاملية :

$$\psi(t) = \alpha + \epsilon + \beta \int_0^t \psi(\tau) d\tau$$

لنبرهن الآن أن $\psi < \varphi$ في J . إن هذه المتباينة صحيحة عندما $t = 0$. ولنفرض ، مؤقتاً ، أن ادعاءنا خاطيء وأن القيمة τ_0 هي القيمة الأولى التي يكون فيها $\psi(\tau_0) = \varphi(\tau_0)$. عندئذ يكون $\varphi \leq \psi$ لأجل $0 \leq t \leq \tau_0$ وبالتالي يكون :

$$\varphi(\tau_0) \leq \alpha + \beta \int_0^{\tau_0} \varphi(s) ds < \alpha + \epsilon + \beta \int_0^{\tau_0} \psi(\tau) d\tau = \psi(\tau_0)$$

وهذا التناقض يؤكد أن $\psi < \varphi$ في J . ولما كان $\epsilon > 0$ كيفي فإننا قد وصلنا إلى المطلوب .

إن المبرهنة التالية تتعلق بمعادلة تفاضلية ذات جزء رئيسي خطي :

$$y' = Ay + g(t, y) \quad (8)$$

بفرض أن g ، لاجل y صغير ، صغير بالمقارنة مع y .

(٧-٤) مبرهنة الاستقرار: لتكن الدالة $g(t, z)$ معرفة لاجل $t \geq 0$

و $|z| \leq \alpha$ ($\alpha > 0$) ومستمرة . ولنفرض أن :

$$\frac{|g(t, z)|}{|z|} \text{ تسمى ؛ تنظام إلى الصفر لاجل } 0 \leq t < \infty \text{ وذلك} \quad (9)$$

عندما $|z| \rightarrow 0$ وبشكل خاص $g(t, 0) = 0$. ولنفرض أن المصفوفة A ثابتة وأن القسم الحقيقي لمتل قيمة مميزة λ_1 للمصفوفة A سالب . عندئذ يكون الحل $x(t) \equiv 0$ للمعادلة التفاضلية (8) مستقرأ مقارباً .

البرهان: استناداً إلى الفرض وإلى المبرهنة (٤-٣) يوجد ثابتان $c > 0$ و $\beta > 0$ بحيث يكون $\operatorname{Re} \lambda_i < -\beta$ ويكون:

$$|e^{At}| \leq c e^{-\beta t} \quad t \geq 0$$

واستناداً إلى (9) يوجد عدد $\delta : 0 < \delta < \alpha$ بحيث يكون:

$$|z| \leq \delta, t \geq 0 \text{ لاجل } |g(t, z)| \leq \frac{\beta}{2c} |z| \quad (10)$$

ونبلغ المطلوب إذا اثبتنا مايلي:

$$|y(0)| \leq \epsilon < \frac{\delta}{c} \Rightarrow |y(t)| \leq c \epsilon e^{-\frac{\beta t}{2}} \quad (*)$$

وللقيام بذلك نذكر بأن حل للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة:

$$y' = Ay + b(t)$$

هو من الشكل:

$$y(t) = e^{At} y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} b(s) ds \quad y_0 = y(0)$$

فإذا كان $y(t)$ حلاً لـ (8)، فإنه يحقق إذن المعادلة التكاملية:

$$y(t) = e^{At} y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} g(s, y(s)) ds$$

وبالتالي فإن هذا الحل، استناداً إلى (10)، يحقق المتباينة:

$$|y(t)| < |y_0|c e^{-\beta t} + \int_0^t c e^{-\beta(t-s)} \frac{\beta}{2c} |y(s)| ds \quad (11)$$

طلما (10) محققة ، أي طالما $|y| < \delta$. ليكن الآن $y(t)$ حلاً لـ (8) و $|y_0| < \epsilon$ و $|y(t)| < \beta t$. عندئذ ينتج من (11) (طالما)
: $(|y| \leq \delta$

$$\varphi(t) \leq c\epsilon + \frac{\beta}{2} \int_0^t \varphi(s) ds$$

واستناداً إلى مبرهنة جروتوول :

$$|y(t)| \leq c\epsilon e^{-\frac{\beta t}{2}} < \delta \quad \text{أو} \quad \varphi(t) \leq c\epsilon e^{\frac{\beta t}{2}} \quad (12)$$

ينتج عن هذا أن $|y(t)|$ لا يمكن أن يبلغ القيمة δ لأجل القيمة الموجبة لـ t ، وبالتالي فإن المتباينة (12) صحيحة والافتضاء (*) صحيح (يمكن تبديله $y(t)$ إلى محيط منطقة تعريف g وبالتالي استناداً إلى (12) إلى كافة الفترة $(0 \leq t < \infty$) .

(4-8) مبرهنة عدم الاستقرار (القلق) : لنفرض أن $g(t,z)$ يحقق شروط المبرهنة (2-7) ، ولتكن A مصفوفة ثابتة ، وليكن كذلك :

$$\text{Re } \lambda > 0$$

لأجل قيمة ذاتية λ واحدة على الأقل للمصفوفة A . عندئذ يكون الحل $x(t) = 0$ للمعادلة التفاضلية (8) غير مستقر .

البرهان : لنقل أولاً المعادلة التفاضلية (8) بتحويل خطي مناسب إلى شكل

يلائم هدفنا . لتكن $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ حلول المعادلة المميزة للمصفوفة A (مع مراعاة تكرار كل حل) . ومن المعلوم في الجبر الخطي أن هناك مصفوفة Q (غير شاذة) تنقل المصفوفة A إلى شكل جوردان النظامي :

$$B = Q^{-1} A Q = (b_{ij})$$

حيث يكون $b_{ii} = \lambda_i$ ويكون $b_{i,i+1}$ مساوياً للصفر أو 1 ويكون فيما سوى ذلك $b_{ij} = 0$. لتكن H المصفوفة القطرية :

$$H = \text{diag} (\eta , \eta^2 , \dots , \eta^2) \quad \eta > 0$$

ويمكن للمرء أن يجد بسهولة أن :

$$D = H^{-1} B H \Leftrightarrow b_{ij} \eta^{j-i}$$

أي أن $d_{ii} = \lambda_i$ و $d_{i,i+1}$ يساوي الصفر أو η ، وفيما سوى ذلك $d_{ij} = 0$.

فاذا وضعنا الآن $y(t) = CH z(t)$ فإن المعادلة التفاضلية (8) تتحول إلى الشكل :

$$z' = H^{-1} C^{-1} y' = H^{-1} C^{-1} [ACH z + g(t, CH z)]$$

أو :

$$z' = Dz + f(t, z) \quad (13)$$

بفرض أن :

$$f(t, z) = H^{-1} C^{-1} g(t, CH z)$$

ومنه نرى أن f يحقق ، شأنه في ذلك شأن g ، الشرط (9) ، وذلك لأنه

إذا كان $|z| \leq \delta$ لأجل $g(t, z) \leq \epsilon$ فإن :

$$|f(t, z)| \leq |H^{-1} C^{-1}| \cdot |CH| \varepsilon |z|$$

$$\text{لأجل } |z| < \delta / |CH|$$

ويمكننا بدلاً من (13) أن نكتب :

$$z'_i = \lambda_i z_i \{ + \eta z_{i+1} \} + f_i(t, z) \quad i=1, \dots, n \quad (14)$$

حيث لا يرد الحد الواقع بين القوسين الكبيرين إلا عندما يكون الدليل i متتبعاً إلى واحدة من مصفوفات جوردان فيها أكثر من سطر ، ولا توافق في مصفوفة جوردان هذه السطر الأخير .

لنرمز بـ z و k للأداة التي يكون من أجلها :

$$\operatorname{Re} \lambda_j > 0 \quad \operatorname{Re} \lambda_k \leq 0$$

و بـ φ و ψ للدالتين السليمتين الحقيقيتين :

$$\varphi(t) = \sum_j |z_j(t)|^2 \quad , \quad \psi(t) = \sum_k |z_k(t)|^2$$

بفرض أن $z(t)$ حل لـ (13) . لنختار $\eta > 0$ صغيراً بحيث يكون :

$$0 < \eta < \operatorname{Re} \lambda_j \quad \text{مهما كانت } j .$$

وليكن $\delta > 0$ صغيراً بقدر يكون فيه :

$$|z|_0 \leq \delta \quad \text{لأجل } |f(t, z)|_0 < \eta |z|_0$$

ليكن الآن $z(t)$ حلاً يحقق :

$$|z(0)|_0 < \delta \quad , \quad \psi(0) < \varphi(0) \quad (15)$$

فنعدتد ، استناداً إلى (14) ، يكون :

$$\varphi' - 2 \sum_j \operatorname{Re} z_j' \bar{z}_j = 2 \sum_j (\operatorname{Re} \lambda_j z_j \bar{z}_j [+ \eta \operatorname{Re} z_{j+1} \bar{z}_j] + \operatorname{Re} \bar{z}_j f_j(t, z)) \quad (16)$$

$$\psi(t) \leq \varphi(t) \quad \text{و} \quad |z(t)|_0 < \delta \quad \text{طالما}$$

واستناداً إلى متباينة شفارتز (ملاحظين أن $z+1$ هو دليل من النمط z)

$$\sum \operatorname{Re} z_{j+1} \bar{z}_j \leq \sum |z_j z_{j+1}| \leq \sqrt{\sum |z_j|^2 \sum |z_j|^2} = \varphi$$

$$\sum \operatorname{Re} \bar{z}_j f_j \leq \sqrt{\sum |z_j|^2 \sum |f_j|^2} < \sqrt{\varphi} |f|_0$$

كذلك :

$$|f|_0 < \eta |z|_0 - \eta \sqrt{\varphi + \psi} \leq 2\eta \sqrt{\varphi}$$

إذن :

$$\frac{1}{2} \varphi' > 6\eta \varphi - \eta \varphi - 2\eta \varphi = 3\eta \varphi$$

وتصح لأجل $\psi(t)$ مساواة بمائة لـ (16) (حيث نستبدل k بـ z فقط) ،

ومنه ينتج بالاسلوب نفسه وبسبب $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$:

$$\frac{1}{2} \psi' \leq \eta \psi + 2\eta \varphi$$

عندئذ ، طالما $\psi(t) \leq \varphi(t)$ ، يكون

$$\varphi' > 2\eta \varphi + w(t)$$

$$\psi' \leq 2\eta \psi + w(t)$$

$$\varphi(0) > \psi(0)$$

بفرض أن $w(t) = 4\eta \varphi$. وباجراء محاكمة بمائة التي مرت معنا في

(٢ - ٥) من هذا الفصل بصدق الحديث عن الدالة العليا نجد :

$$\psi(t) < \varphi(t)$$

وهذا يعني أنه لا يمكن أن يكون $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$. لذلك فإن كل حل $z(t)$ ، تحقق قيمه الابتدائية الشرط (15) ، يحقق $\psi(t) < \varphi(t)$ و $\varphi' > \delta\eta\varphi$ طالما $|z(t)| < \delta$. وهكذا نجد $\varphi(t) \geq \varphi(0)e^{\delta\eta t}$. أي أن لكل حل من هذا النوع يوجد t_0 بحيث يكون $|z(t_0)| = \delta$ وهذا يؤدي إلى أن الحل $x(t) \equiv 0$ غير مستقر .

(٤ - ٩) تطبيق على النظام :

$$y' = f(y) \quad (17)$$

إن الطرف الأيمن لا يتعلق بـ t بشكل صريح ، وهذا يعني أنه إذا كان $y(t)$ حلاً فإن $y(t+t_0)$ هو حل أيضاً . لنفرض أن $f(0) = 0$ وأن كل مركبة f_i منشورة في متسلسلة قوى

$$f_i(y_1, \dots, y_n) = a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n + \dots$$

وعلى هذا فإننا بدلاً من (17) يمكننا أن نكتب :

$$y' = Ay + g(y) \quad (18)$$

بفرض أن $A = (a_{ij})$ وأن $g(y)$ حدودية حدودها الأولى من الدرجة الثانية على الأقل . ويصح بالنسبة لـ g الشرط (9) .

واستناداً إلى مبرهنة الاستقرار (٤ - ٧) نرى أن الوضع $x \equiv 0$ مستقر مقارب إذا كان الأمر كذلك لأجل المعادلة الخطية (2) . وإستناداً إلى (٤ - ٨) يكون هذا الوضع غير مستقر عندما يكون $\text{Re } \lambda > 0$ لأجل قيمة ذاتية لـ A .

وفي الحالة التي يكون فيها $\max \operatorname{Re} \lambda_i = 0$ فإننا لانستطيع أن نعطي نتيجة محددة . وفي سبيل هذا الهدف ننظر في المثال التالي :

(٤ - ١٠) مثال : ليكن $n = 1$ وليكن :

$$y' = \alpha y + \beta y^3 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

ان المعادلة الخطية الموافقة $y' = \alpha y$ وان سلوك الاستقرار للحل $y \equiv 0$ نجده في الجدول التالي :

المعادلة غير الخطية	المعادلة الخطية
استقرار مقارب	$\alpha < 0$ استقرار مقارب
عدم استقرار	$\alpha > 0$ عدم استقرار
استقرار مقارب إذا كان $\beta < 0$	$\alpha = 0$ استقرار
استقرار إذا كان $\beta = 0$	
عدم استقرار إذا كان $\beta > 0$	

(٤ - ١١) مبرهنة جرونوول المعممة : لنفرض أن الدالة ذات القيم الحقيقية $\varphi(t)$ مستمرة في $J = [0, a]$ وأن :

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_0^t h(s) \varphi(s) ds$$

في J . بفرض أن $\alpha \in \mathbb{R}$ وأن $h(t)$ غير سالب ومستمر في J (يمكنني

أن يكون كمولاً وفق لويينغ (. عندئذ يكون :

$$\varphi(t) \leq \alpha e^{\int_0^t h(s) ds}$$

ترك البرهان للقارئ ، وعليه في سبيل ذلك أن بشكل دالة $\varphi(t)$ تحقق المعادلة التكاملية :

$$\psi(t) = \alpha + \epsilon + \int_0^t h(s) \psi(s) ds$$

ويثبت أن $\varphi < \psi$

(٤-١٢) تمارين :

(آ) ليكن لدينا نظام المعادلات التفاضلية (في \mathbb{R} أو \mathbb{C}) .

$$y' = Ay + g(t, y)$$

بفرض أن A مصفوفة ثابتة وأن $\operatorname{Re} \lambda < \alpha$ مهما كانت القيمة الذاتية λ للمصفوفة A . ليكن بعد ذلك $g(t, y)$ مستمراً لاجل $t \geq 0$ أو $y \in \mathbb{R}^n$ أو $y \in \mathbb{C}^n$ و :

$$|g(t, y)| \leq h(t) |y|$$

بدالة $h(t)$ مستمرة (ويكفي أن تكون كمولة) لأجل $t \geq 0$. اثبت ان كل حل $y(t)$ يحقق :

$$|y(t)| \leq K |y(0)| e^{\alpha t + K \int_0^t h(s) ds}$$

بشأن $K > 0$ مستقلة عن y .

أرشاد : أوجد لـ $\varphi(t) = e^{-at} |y(t)|$ معادلة تكاملية واستخدم مبرهنة جرونول المعمة واستنتج من (أ) :

(ب) إذا كان $h(t)$ كمولاً على $0 \leq t < \infty$ وكان لجميع القيم الذاتية لـ A جزء حقيقي سالب ، فإن الحل $y \equiv 0$ مستقر مقارب . وتسمى بعد ذلك جميع الحلول نحو الصفر عندما $t \rightarrow \infty$.

(ج) لنفرض في النظام الخطي :

$$y' = (A + B(t))y$$

أن $B(t)$ مصفوفة مستمرة لأجل $t \geq 0$ ، وأن :

$$\int_0^{\infty} |B(t)| dt < \infty$$

فإذا كان لجميع القيم الذاتية لـ A جزء حقيقي سالب فإن الحل $y = 0$ مستقر مقارب .

* * *

الفصل الخامس

المعادلات التكاملية الخطية

١ - مقدمة :

تلعب المعادلات التكاملية دوراً هاماً في كثير من حقول الميكانيك والفيزياء الرياضية وفي المعادلات التفاضلية التي تحقق شروطاً حدية معينة ، كما أنها تعتبر أداة هامة في كثير من فروع التحليل مثل التحليل التابعي والطوريات العشوائية .

(١-١) تعريف : المعادلة التكاملية معادلة تظهر فيها الدالة المجهولة تحت إشارة أو أكثر من اشارات التكامل . فمثلا ان المعادلات التالية :

$$f(s) = \int_a^b K(s, t) g(t) dt \quad (1)$$

$$g(s) = f(s) + \int_a^b K(s, t) g(t) dt \quad (2)$$

$$g(s) = \int_a^b K(s, t) [g(t)]^2 dt \quad (3)$$

بفرض أن $g(s)$ الدالة المجهولة في حين بقية الدوال الواردة فيها معلومة ،
هي معادلات تكاملية . ويقال عن المعادلة التكاملية انها خطية إذا كانت العمليات
التي تخضع لها الدالة المجهولة في المعادلة هي عمليات خطية ، فالمعادلتان (1) و (2)
خطيتان أما المعادلة (3) فليست خطية . وفي الواقع يمكن كتابة (1) و (2)
بالشكل :

$$L [g(s)] = f(s)$$

بفرض أن L مؤثر تكاملي خطي مناسب . ومن الواضح أنه إذا كان c_2 و c_1
ثابتين فإن :

$$L [c_1 g_1(s) + c_2 g_2(s)] = c_1 L [g_1(s)] + c_2 [L g_2(s)]$$

وسيتصدر اهتمامنا في هذا الكتاب على نوعين رئيسيين من المعادلات التكاملية
الخطية .

(1) معادلات فريد هولم الخطية : وهي معادلات من الشكل :

$$g(s) - \lambda \int_a^b K(s,t) g(t) dt = f(s) \quad (4)$$

وإذا كان الطرف الأيمن معدوماً فإننا نقول عن المعادلة (4) إنها معادلة
فريد هولم المتجانسة المقابلة لـ (4) .

(2) معادلات فولترا الخطية . وهي معادلات من الشكل :

$$g(s) - \lambda \int_a^s K(s,t) g(t) dt = f(s) \quad (5)$$

يسمى التابع $K(s,t)$ في المعادلات (4) و (5) نواة المعادلة التكاملية .

(١-٢) تعريف: نقول عن تابع g إنه كمول تربيعياً على $[a,b]$ ، أو أنه من L_2 فيما إذا كان :

$$\int_a^b |g(t)|^2 dt < \infty$$

ونقول عن النواة $K(s,t)$ انها كمولة تربيعياً على المربع $D(a \leq s \leq b, a \leq t \leq b)$ أو انها من L_2 فيما إذا كان :

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 ds dt < \infty \quad (6)$$

$$\int_a^b |K(s,t)|^2 dt < \infty \quad \forall s \in [a,b] \quad (7)$$

$$\int_a^b |K(s,t)|^2 ds < \infty \quad \forall t \in [a,b]$$

ليلاحظ أن المتوابع g, f, K الواردة في التعاريف السابقة هي توابع حقيقية أو عقدية ، إنما s و t هما متغيران حقيقيان .

٢- معادلة فريدهولم التكاملية لنفرض فيما يلي أن النواة $K(s,t)$ كمولة و كمولة تربيعياً على المربع $D(a \leq s \leq b, a \leq t \leq b)$ ، وأن التابع $f(s)$ كذلك كمول و كمول تربيعياً على $[a,b]$.

ولنبداً بحل معادلة فريد هولم التكاملية عندما تكون النواة متردية .

(٢-١) معادلة فريدهولم ذات النواة المتردية : نقول عن النواة $K(s,t)$ ان-ا متردية فيما إذا أمكن كتابتها على الشكل :

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(t) \quad (8)$$

بفرض أن الدوال $a_1(s), \dots, a_n(s)$ مستقلة خطياً وأن الدوال $b_1(t), \dots, b_n(t)$ مستقلة خطياً كذلك .

بالتعويض في المعادلة (4) نجد :

$$g(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^n a_i(s) \int_a^b b_i(t) g(t) dt \quad (9)$$

وإذا فرضنا :

$$\int_a^b b_i(t) g(t) dt = c_i \quad i=1,2, \dots, n \quad (10)$$

فإن المعادلة (9) تأخذ الشكل :

$$g(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^n c_i a_i(s) \quad (11)$$

بالتعويض في (10) نجد :

$$\int_a^b b_i(t) [f(t) + \lambda \sum_{j=1}^n c_j a_j(t)] dt = c_i$$

وبفرض أن :

$$\int_a^b b_i(t) f(t) dt = f_i \quad \int_a^b b_i(t) a_j(t) dt = x_{ij}$$

نجد :

$$f_i + \lambda \sum_{j=1}^n x_{ij} c_j \equiv c_i \quad (12)$$

فمن أجل معادلة تكاملية مفروضة تكون النواة و f معروفتين وبالتالي نستطيع حساب الاعداد f_i و x_{ij} . وبذلك تكون مجموعة المعادلة (12) هي مجموعة معادلات خطية بالمجهول c_i . فإذا استطعنا حل هذه المعادلات لإيجاد قيم c_i فإننا نعوض في (11) ونحصل على حل المعادلة التكاملية .

مثال : حل المعادلة التكاملية :

$$g(s) = \cos s + \lambda \int_0^{2\pi} [\sin s \cos t - \sin 2s \cos 2t + \sin 3s \cos 3t] g(t) dt$$

الحل : ان :

$$f(s) = \cos s \quad a_1(s) = \sin s \quad a_2(s) = -\sin 2s \quad a_3(s) = \sin 3s$$

$$b_1(t) = \cos t \quad b_2(t) = \cos 2t \quad b_3(t) = \cos 3t$$

وبالتالي فإن :

$$f_1 = \int_0^{2\pi} \cos t \cos t dt = \pi \quad f_2 = \int_0^{2\pi} \cos 2t \cos t dt = 0$$

$$f_3 = \int_0^{2\pi} \cos 3t \cos t dt = 0 \quad x_{11} = \int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt = 0$$

$$x_{12} = - \int_0^{2\pi} \cos t \sin 2t dt = 0 \quad x_{13} = \int_0^{2\pi} \cos t \sin 3t dt = 0$$

$$x_{21} = \int_0^{2\pi} \cos 2t \sin t dt = 0 \quad x_{22} = - \int_0^{2\pi} \cos 2t \sin 2t dt = 0$$

$$x_{22} = \int_0^{2\pi} \cos 2t \sin 3t dt = 0$$

$$x_{31} = \int_0^{2\pi} \cos 3t \sin t dt = 0$$

$$x_{32} = \int_0^{2\pi} \cos 3t \sin 2t dt = 0$$

$$x_{33} = \int_0^{2\pi} \cos 3t \sin 3t dt = 0$$

وتأخذ المعادلات (12) الشكل :

$$\pi = c_1 \quad 0 = c_2 \quad 0 = c_3$$

بالتعويض في (11) نجد الحل :

$$g(s) = \cos s + \lambda \pi \sin s$$

نستخلص مما سبق ان حل معادلة فريد هولم التكاملية ذات النواة المتوحدية يتحول إلى حل مجموعة من المعادلات الجبرية الخطية (12) في المجاهيل c_1 . إن معين الأمثال ل (12) هو :

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda x_{11} & -\lambda x_{12} & \dots & -\lambda x_{1n} \\ -\lambda x_{21} & 1 - \lambda x_{22} & \dots & -\lambda x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda x_{n1} & -\lambda x_{n2} & \dots & 1 - \lambda x_{nn} \end{vmatrix} \quad (13)$$

فإذا كان لهذا المعين قيمة غير مساوية للصفر فإن للمجموعة (12) حلاً وحيداً c_1, c_2, \dots, c_n وبالتالي يوجد للمعادلة التكاملية (4) حل وحيد . وإذا كان $f(s) = 0$ ، أي إذا كانت المعادلة التكاملية متجانسة فإن المجموعة (12) تصبح متجانسة ، ويكون حلها الوحيد هو الحل $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ والحل الوحيد للمعادلة التكاملية هو $g(s) = 0$.

أما إذا كانت قيمة المعين $D(\lambda)$ مساوية للصفر فعندئذ لا يكون المجموعة (12) أي حل أو يكون لها عدد غير منته من الحلول ، الأمر الذي سنعالجه بعد قليل .

(2-2) المعادلة المتجانسة : وجدنا في الفقرة السابقة ان حل المعادلة المتجانسة:

$$g(s) = \lambda \int_a^b K(s,t) g(t) dt \quad (14)$$

يؤول إلى حل المجموعة المتجانسة من المعادلات الجبرية :

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - \lambda x_{ij}) c_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

فإذا لم تكن λ حلاً للمعادلة :

$$\det (\delta_{ij} - \lambda x_{ij}) = 0 \quad (16)$$

فإنه ليس للمعادلة (14) سوى الحل الصفري $g(s) = 0$.

نسمي كل قيمة لـ λ تحقق (16) قيمة ذاتية للنواة $K(s,t)$.

وإذا كانت λ قيمة ذاتية فإن للمعادلة (15) حلولاً مختلفة عن الحل الصفري $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ ، وإذا نظرنا إلى كل حل c_1, c_2, \dots, c_n على أنه متجه c مركباته هي (c_1, c_2, \dots, c_n) فإن هذه الحلول تشكل فضاء متجهياً منتهي البعد $E_{(n)}$. وإذا كان p عدد أبعاد هذا الفضاء فإن هناك p حلاً مستقلاً خطياً (15) .

$$c^{(j)} = (c_1^j, c_2^j, \dots, c_n^j) \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (17)$$

ويكون كل حل لـ (15) هو تركيب خطي من هذه الحلول .

ان كل حل من الحلول (17) يعطينا بتعويضه في :

$$g(s) = \lambda \sum_{i=1}^n c_i a_i(s) \quad (18)$$

حلا لـ (14) . بذلك نحصل على p حلا لـ (14) لأجل القيمة الذاتية المفروضة . لتكن هذه الحلول هي $g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(p)}$.

وبسبب خطية المعادلة (14) في الدالة المجهولة g فإن أي تركيب خطي من هذه الحلول هو حل لـ (14) .

ومن الواضح أنه إذا كان p حلا : $g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(p)}$ لـ (14) مرتبطة بعلاقة خطية .

$$\mu_1 g^{(1)} + \mu_2 g^{(2)} + \dots + \mu_p g^{(p)} = 0$$

فإن المتغيرات $c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(p)}$ المقابلة تكون مرتبطة بالعلاقة :

$$\mu_1 c^{(1)} + \mu_2 c^{(2)} + \dots + \mu_p c^{(p)} = 0$$

وبالعكس ، وعلى هذا فإن لفضاء حلول المعادلة المتجانسة (14) البعد نفسه كما لفضاء حلول المجموعة (15) .

(٢ - ٣) المعادلة التكاملية المنقولة

نسمي المعادلة :

$$h(s) = l(s) + \lambda \int_a^b K(t,s) h(t) dt \quad (19)$$

منقول المعادلة التكاملية (4) . إن النواة في (19) لا تختلف عن النواة في (4) سوى أن s و t تبادلا موضعيا . فالمعادلة التكاملية :

$$h(s) = s^2 + \lambda \int_0^1 (s^2 - t^2) h(t) dt$$

هي منقول المعادلة التكاملية :

$$g(s) = 3s + \lambda \int_0^1 (t^2 - s^2) g(t) dt$$

إن حل المعادلة (19) ، عندما تكون النواة متردبة ، مكافئ لحل مجموعة المعادلات :

$$C_i - \lambda \sum_{k=1}^n x_{ki} C_k = l_i \quad (20)$$

وذلك بفرض أن :

$$C_i = \int_a^b a_i(s) h(s) ds \quad l_i = \int_a^b a_i(s) l(s) ds$$

وبما أن معين الأمثال للمجموعة (20) لا يختلف عن معين الأمثال لـ (15) ، فإن القيم الذاتية للنواة $K(s,t)$ لا تختلف عن القيم الذاتية للنواة $K(t,s)$. ينتج عن هذا أنه إذا كان للمعادلة (4) حل وحيد فإن للمعادلة (19) كذلك حلا وحيداً .

(٢ - ٤) مبرهنة فريدهولم :

لتفرض الآن أن λ قيمة ذاتية للنواة $K(s,t)$ ، عندئذ يكون لمجموعة

المعادلات (15) حل غير الحل الصفري ، وتشكل مجموعة الحل فضاء متجهياً $E_{(\lambda)}$ ، كما أنه يكون لمجموعة المعادلات (20) حل غير الحل الصفري ، وتشكل مجموعة الحل فضاء متجهياً $E'_{(\lambda)}$. ويكون عدد أبعاد $E_{(\lambda)}$ مساوياً لعدد أبعاد $E'_{(\lambda)}$.
 لتكن :

$$C^{(j)} = (C_1^{(j)} , C_2^{(j)} , \dots , C_n^{(j)}) \quad (j = 1, 2, \dots, p) \quad (21)$$

قاعدة لـ $E'_{(\lambda)}$. عندئذ يعطينا كل حل من هذه الحلول بتعويضه في .

$$h(s) = \lambda \sum_{i=1}^n C_i b_i(s)$$

حلا $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(p)}$ للمعادلة المتجانسة الموافقة لـ (19) . إن الحلول $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(p)}$ مستقلة خطياً وتشكل قاعدة لفضاء حلول هذه المعادلة .

نعلم من أبحاث الجبر الخطي انه يلزم ويكفي كي يكون المعادلة (12) حل ، عندما يكون معين الأمثال معدوماً ، هو أن يتعامد المتجه $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ مع جميع المتجهات $C^{(j)}$ ، أي أن يتحقق الشرط :

$$\sum_{i=1}^n f_i C_i^{(j)} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

وبما أن :

$$f_i = \int_a^b b_i(t) f(t) dt$$

فإننا نجد :

$$\sum_{i=1}^n C_i^{(j)} \int_a^b b_i(t) f(t) dt = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n C_i^{(j)} b_i(t) \right] f(t) dt = 0$$

إذن :

$$\int_a^b h^{(j)}(t) f(t) dt = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

وإذا ما تحققت هذه الشروط فعندئذ يكون للمعادلة (4) حل . لنفرض أن g_0 حل خاص لهذه المعادلة ، وانا أجرينا التحويل :

$$g = g_0 + G$$

نعرض في (4) فنجد :

$$G = \lambda \int_a^b K(s,t) G(t) dt$$

والحل العام للأخيرة هو تركيب خطي من الحلول المستقلة خطياً $g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(p)}$ ، أي :

$$G = \mu_1 g^{(1)} + \mu_2 g^{(2)} + \dots + \mu_p g^{(p)}$$

فالحل العام لـ (4) هو :

$$g = g_0 + \mu_1 g^{(1)} + \mu_2 g^{(2)} + \dots + \mu_p g^{(p)}$$

نستخلص من كل ماسبق مبرهنة فريدولم التالية :

إذا كان لدينا المعادلة :

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) g(t) dt \quad (21)$$

فإننا نميز بين حالتين :

(أ) λ ليست قيمة مميزة للنواة K . عندئذ يكون للمعادلة التكاملية المتجانسة ولتقولها الحل الصفري فقط ، ويكون للمعادلة (21) ولتقولها حل وحيد .

(ب) λ قيمة مميزة لـ K عندئذ يكون للمعادلة المتجانسة الموافقة لـ (21) حلول غير الحل الصفري تشكل فضاء ذا بعد منته كما يكون لتقول هذه المعادلة المتجانسة كذلك حلول غير الحل الصفري تشكل فضاء، له البعد نفسه . وإذا كانت $g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(p)}$ قاعدة لمجموعة الحل الأولى و $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(p)}$ قاعدة لمجموعة الحل الثانية ، فعندئذ يلزم ويكفي كفي يكون لـ (21) حل هو أن تتحقق الشروط :

$$\int_a^b h^{(j)}(t) f(t) dt = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

ويكون الحل العام عندئذ هو حاصل جمع حل خاص إلى تركيب خطي من الدوال $g^{(j)}$.

مثال (١) حل المعادلة التكاملية

$$g(s) = \lambda \int_{-1}^1 (5st^3 + 4s^2t + 3st) g(t) dt$$

الحل : نرى في هذه المعادلة أن :

$$a_1(s) = 5s \quad a_2(s) = 4s^2 \quad a_3(s) = 3s$$

$$b_1(t) = t^3 \quad b_2(t) = t \quad b_3(t) = t$$

وبالتالي فإن :

$$x_{11} = \int_{-1}^1 t^3 (5t) dt = 2 \quad x_{12} = \int_{-1}^1 4 t^5 dt = 0 \quad x_{31} = \int_{-1}^1 3 t^4 dt = \frac{6}{5}$$

$$x_{21} = x_{31} = \int_{-1}^1 5t^2 dt = \frac{10}{3} \quad x_{22} = x_{32} = \int_{-1}^1 4t^3 dt = 0 \quad x_{23} = x_{33} = \int_{-1}^1 3t^2 dt = 2$$

وإن المعادلات التي تعين c_i هي :

$$(1-2\lambda) \cdot c_1 \quad - \frac{6}{5} \lambda c_3 = 0$$

$$- \frac{10}{3} \lambda c_1 + c_2 \quad - 2 \lambda c_3 = 0$$

$$- \frac{10}{3} \lambda c_1 \quad + (1-2\lambda) c_3 = 0$$

ومعنى الأمثال لهذه المجموعة يساوي :

$$D(\lambda) = 1 - 4\lambda$$

وعلى هذا فهناك قيمة مميزة واحدة وهي $\lambda = \frac{1}{4}$. نعوض في المجموعة الأخيرة فنجد :

$$5c_1 = 3c_3 \quad c_2 = c_3$$

فاحل العام للمعادلة المذكورة :

$$g(s) = c_1 (5s) + c_2 (4s^2) + c_3 (3s)$$

$$g(s) = 4c_2 \left(s^2 + \frac{3s}{2} \right)$$

بفرض أن c_2 ثابت كفي .

مثال (٢) بين أنه ليس المعادلة التكاملية :

$$g(s) = f(s) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(s+t) g(t) dt$$

أي حل عندما $f(s) = s$ ، ولكن لها عدداً غير منته من الحلول عندما
 $f(s) = 1$

الحل : ان :

$$a_1(s) = \sin s \quad a_2(s) = \cos s \quad b_1(t) = \cos t \quad b_2(t) = \sin t$$

وبالتالي فإن :

$$x_{11} = x_{22} = 0 \quad x_{12} = x_{21} = \pi$$

والمعادلات التي تعين c_i هي :

$$c_1 - \lambda \pi c_2 = f_1 \quad (*)$$

$$-\lambda \pi c_1 + c_2 = f_2$$

بفرض أن :

$$f_1 = \int_0^{2\pi} f(t) \cos t dt \quad f_2 = \int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt$$

وعلى هذا فإن :

$$D(\lambda) = 1 - \lambda^2 \pi^2$$

وهناك قيمتان مميزتان $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$ و $\lambda_2 = -\frac{1}{\pi}$. وعلى هذا فإن للمعادلة المفروضة عدداً غير منته من الحلول أو ليس لها أي حل حسبما تكون الشروط :

$$\int_0^{2\pi} f(t) h^{(j)}(t) dt = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

محققة أو غير محققة ، وذلك بفرض أن $h^{(j)}(s)$ تشكل قاعدة لفضاء الحلول للمعادلة المتجانسة الموافقة لمقول المعادلة التكاملية المفروضة .

ولكن بما أن النواة متناظرة بالنسبة لـ s و t فإن هذه المعادلة المتجانسة هي المعادلات المتجانسة للمعادلة التكاملية المفروضة . لذلك نبدأ بمجل المجموعة :

$$c_1 - \lambda \pi c_2 = 0$$

$$-\lambda \pi c_1 + c_2 = 0$$

لأجل $\lambda = \frac{1}{\pi}$. أي أن $c_1 = c_2$ ، فعدد أبعاد فضاء الحلول لهذه المجموعة يساوي الواحد وكذلك عدد أبعاد فضاء الحلول للمعادلة المتجانسة يساوي الواحد .

$$h^{(1)}(s) = g^{(1)}(s) = c_1 (\cos s + \sin s)$$

وشرط وجود الحل للمعادلة التكاملية هو

$$\int_0^{2\pi} (\cos s + \sin s) f(s) ds = 0$$

فإذا كان $f(s) = s$ فإن

$$\int_0^{2\pi} (\cos s + \sin s) s ds = -2\pi \neq 0$$

وليس للمعادلة التكاملية أي حل . أما إذا كان $f(s) = 1$ فإن :

$$\int_0^{2\pi} (\cos s + \sin s) ds = 0$$

فالمعادلة عدد غير منته من الحلول

وإذا اردنا الوصول إلى هذه الحلول ، نلاحظ في هذه الحالة أن :

$$f_1 = \int_0^{2\pi} \cos t dt = 0 \quad f_2 = \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0$$

ويكون حل المجموعة (*) عندئذ هو $c_1 = c_2$ إذن الحل العام هو :

$$g(s) = f(s) + c_1 a_1(s) + c_2 a_2(s)$$

$$g(s) = 1 + c_1 (\cos s + \sin s)$$

بفرض أن c_1 ثابت كفي .

(٢-٥) تمارين: أوجد القيم المميزة ثم أوجد حلول كل من المعادلات التالية:

$$g(s) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(s+t) g(t) dt$$

$$g(s) = \lambda \int_0^1 (2st - 4s^2) g(t) dt$$

$$g(s) = \lambda \int_{-1}^1 (s \cosh t - t^2 \sinh s) g(t) dt$$

$$g(s) = s + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (s \cos t + t^2 \sin s + \cos s \sin t) g(t) dt$$

$$g(s) = \cos s + \lambda \int_0^{\pi} \sin(s-t) g(t) dt$$

$$g(s) = s + \lambda \int_0^{2\pi} |\pi-t| \sin s g(t) dt$$

$$g(s) = \frac{6}{5} (1-4s) + \lambda \int_0^1 (s \ln t - t \ln s) g(t) dt$$

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 (1-3st) g(t) dt$$

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 (s+t) g(t) dt$$

٣ - النواة الحالة : سنحاول في هذا البند استخدام طريقة التقريبات المتتالية

الموصول إلى حل لمعادلة فريدهولم . لتفرض أن كلا من الدالتين $f(s)$ و $K(s,t)$ كمولة ترتيبياً .

ولنبداً بالتقريب من المرتبة صفر :

$$g_0(s) = f(s) \quad (1)$$

وبتعويض هذا التقريب في معادلة فريدهولم :

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) g(t) dt \quad (2)$$

نجد التقريب من المرتبة الأولى :

$$g_1(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) g_0(t) dt \quad (3)$$

نعوض في (2) فنحصل على التقريب من المرتبة الثانية وهكذا . أن التقريب من المرتبة (n+1) هو :

$$g_{n+1}(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) g_n(t) dt \quad (4)$$

فإذا سعى $g_n(s)$ بانتظام إلى نهاية معينة عندما $n \rightarrow \infty$ ، فإن هذه النهاية هي الحل المطلوب . ولدراسة هذه النهاية نجري الحسابات بالتفصيل فنجد :

$$g_1(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) f(t) dt \quad (5)$$

$$g_2(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) f(t) dt \quad (6)$$

$$+ \lambda^2 \int_a^b K(s,t) \left[\int_a^b K(t,x) f(x) dx \right] dt$$

ويمكن تبسيط هذه الصيغة إذا وضعنا :

$$K_2(s,t) = \int_a^b K(s,x) K(x,t) dx \quad (7)$$

وبتغيير ترتيب المتكاملة في (6) نجد :

$$g_2(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(s,t) f(t) dt \quad (8)$$

وبشكل مماثل نجد :

$$g_3(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(s,t) f(t) dt + \lambda^3 \int_a^b K_3(s,t) f(t) dt \quad (9)$$

بفرض أن :

$$K_3(s,t) = \int_a^b K(s,x) K_2(x,t) dx \quad (10)$$

وبمتابعة العمل نجد :

$$K_m(s,t) = \int_a^b K(s,x) K_{m-1}(x,t) dx \quad (11)$$

والتقريب من المرتبة $(n+1)$ لحل المعادلة التكاملية (2) هو :

$$g_n(s) = f(s) + \sum_{m=1}^n \lambda^m \int_a^b K_m(s,t) f(t) dt \quad (12)$$

ندعي $K_m(s,t)$ النواة المكررة الـ m ، وذلك بفرض أن $K_1(s,t) = K(s,t)$ وبالانتقال إلى النهايات عندما $n \rightarrow \infty$ نحصل على مايسمى متسلسلة ينومان :

$$g(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(s) = f(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(s,t) f(t) dt \quad (13)$$

نرى من (11) أن :

$$\begin{aligned} K_m(s,t) &= \int_a^b K(s,x) K_{m-1}(x,t) dx \\ &= \int_a^b K(s,x) \int_a^b K(x,\tau) K_{m-2}(\tau,t) d\tau dx \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b K(s,x) K(x,\tau) dx \right] K_{m-2}(\tau,t) d\tau \\ &= \int_a^b K_2(s,\tau) K_{m-2}(\tau,t) d\tau \end{aligned}$$

ويعتادة العمل على هذا النحو نجد :

$$K_m(s,t) = \int_a^b K_{m-1}(s,x) K(x,t) dx \quad (14)$$

يبقى أن نعين الشروط التي تجعل من التسلسلة الأخيرة متقاربة . لأجل ذلك نستخدم متراجحة شفارتز فنجد :

$$\left| \int_a^b K_m(s,t) f(t) dt \right|^2 \leq \left(\int_a^b |K_m(s,t)|^2 dt \right) \int_a^b |f(t)|^2 dt \quad (15)$$

وإذا فرضنا A نظم f :

$$A^2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt \quad (16)$$

وإذا رمزنا بـ C_m^2 للحد الأعلى للتكامل :

$$\int_a^b |K_m(s,t)|^2 dt$$

فإن المتباينة (15) تأخذ الشكل :

$$\left| \int_a^b K_m(s,t) f(t) dt \right|^2 \leq C_m^2 A^2 \quad (17)$$

نطبق الآن متباينة شفارتز على (14) فنجد :

$$|k_m(s,t)|^2 \leq \int_a^b |K_{m-1}(s,x)|^2 dx \int_a^b |K(x,t)|^2 dx$$

وبكاملة طرفي هذه المتباينة بالنسبة لـ t وبفرض أن :

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx dt \quad (18)$$

نحصل على :

$$\int_a^b |K_m(s,t)|^2 dt \leq B^2 C_{m-1}^2 \quad (19)$$

ومن هذه المتباينة الأخيرة نجد :

$$C_m^{-1} \leq B^{2m-2} C_1^2 \quad (20)$$

ومن (17) و (20) نجد :

$$\left| \int_a^b K_m(s,t) f(t) dt \right|^2 \leq C_1^2 A^2 B^{2m-2} \quad (24)$$

وعلى هذا فإن القيمة المطلقة للحد العام للمتسلسلة الواردة في (12) هو أصغر من $B^{m-1} |\lambda| AC_1$ وهذا يعني أن المتسلسلة في (13) متقاربة بانتظام إذا كان :

$$|\lambda| B < 1 \quad (22)$$

وهكذا نكون قد برهننا أن المعادلة (2) حلا معطى بالصيغة (13) ، لأجل كل قيمة لـ λ تحقق الشرط (22) . لنفرض الآن أن لـ (2) حلين هما $g_1(s)$ و $g_2(s)$ أي :

$$g_1(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) g_1(t) dt$$

$$g_2(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) g_2(t) dt$$

وبالطرح وبفرض أن $\varphi(s) = g_1(s) - g_2(s)$ نجد :

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t) \varphi(t) dt$$

و بتطبيق متباينة شفارتز على هذه المعادلة نجد :

$$|\varphi(s)|^2 \leq |\lambda|^2 \int_a^b |K(s,t)|^2 dt \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt$$

وبالمكاملة بالنسبة لـ s نجد :

$$\int_a^b |\varphi(s)|^2 ds \leq |\lambda|^2 \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 ds dt \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt$$

أو :

$$(1 - |\lambda|^2 B^2) \int_a^b |\varphi(s)|^2 ds \leq 0 \quad (23)$$

واستناداً إلى (22) نجد أن $\varphi(s) = 0$ أي أن $g_1(s) = g_2(s)$ ، وذلك بفرض أن $g_1(s)$ و $g_2(s)$ مستمران على $[a, b]$.

لننظر بعد ذلك في المتسلسلة :

$$K_1(s,t) + \lambda K_2(s,t) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(s,t) + \dots \quad (24)$$

لقد تبين لنا بتطبيق متباينة شفارتز على (11) أن :

$$|K_m(s,t)|^2 \leq \int_a^b |K_{m-1}(s,x)|^2 dx \int_a^b |K(x,t)|^2 dx$$

وبالاستفادة من (20) وبفرض أن الحد الأعلى لتسكامل :

$$\int_a^b |K(x,t)|^2 dx$$

هو C'^2 فإننا نجد :

$$|K_m(s,t)|^2 \leq B^{2m-4} C_1^2 C'^2$$

إذن :

$$|\lambda^{m-1} K_m(s,t)| \leq |\lambda|^{m-1} \frac{C_1 C'}{B^2} B^m$$

ومنه نلاحظ أن المتسلسلة (24) متقاربة اطلاقاً إذا تحقق الشرط (22) .
لنرمز لمجموع المتسلسلة (24) بـ $R(s,t,\lambda)$. إن هذا التابع R تحليلي في λ
يسمى النواه الحالة لـ $K(s,t)$.

$$R(s,t,\lambda) = K(s,t) + \lambda K_1(s,t) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(s,t) + \dots \quad (25)$$

وبضرب طرفي هذه العلاقة بـ $K(x,s)$ والمساواة بالنسبة لـ s نجد :

$$\lambda \int_a^b K(x,s) R(s,t,\lambda) ds = \lambda K_1(x,t) + \lambda^2 K_2(x,t) + \dots$$

إذن :

$$R(s,t,\lambda) - K(s,t) = \lambda \int_a^b K(s,x) R(x,t,\lambda) dx \quad (26)$$

كذلك يمكن أن نبوهن أن :

$$R(s,t,\lambda) - K(s,t) = \lambda \int_a^b K(x,t) R(s,x,\lambda) dx \quad (27)$$

لنعد إلى المعادلة (2) ولنكتبها بالشكل :

$$\frac{g(s) - f(s)}{\lambda} = \int_a^b K(s,t) g(t) dt \quad (28)$$

وباستخدام (26) نجد :

$$\frac{g(s) - f(s)}{\lambda} = \int_a^b R(s,t,\lambda) g(t) dt - \lambda \int_a^b \int_a^b R(s,x,\lambda) K(x,t) g(t) dx dt$$

وبالاستفادة من (28) نستطيع أن نكتب :

$$\frac{g(s) - f(s)}{\lambda} = \int_a^b R(s,t,\lambda) g(t) dt - \int_a^b R(s,x,\lambda) [g(x) - f(x)] dx$$

ومنه :

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_a^b R(s,t,\lambda) f(t) dt \quad (29)$$

وهذا يعني أنه ليس لمعادلة فريدهولم المفروضة سوى الجبل (29) . وبالعكس
ان الدالة $g(s)$ المعطاة ب (29) هي حل لمعادلة فريدهولم ، لأن :

$$\int_a^b K(s,x)g(x) dx = \int_a^b K(s,x)f(x) dx + \lambda \int_a^b \int_a^b K(s,x) R(x,t,\lambda) f(t) dx dt$$

وبالاعتقاد على (26) نجد :

$$\int_a^b K(s,x)g(x) dx = \int_a^b R(s,t,\lambda) f(t) dt$$

ومنها نجد العلاقة :

$$g(s) = \lambda \int_a^b K(s,x) g(x) dx + f(s)$$

وهذا ما نريد اثباته .

ومن الواضح أن الحل المعطى بـ (29) لا يختلف عن الحل المعطى بتسلسلة نيومان (13) . ويمكن التحقق من ذلك مباشرة . نكتب أولاً التكامل :

$$\int_a^b R(s,t,\lambda) f(t) dt$$

بعد تعويض الدالة الحالة بالتسلسلة المطاة بـ (24) ، والمكاملة حدأ حدأ .

أمثلة :

١ - حل المعادلة التكاملية :

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 e^{s-t} g(t) dt$$

مستخدماً النواة الحالة

الحل : إن :

$$K_1(s,t) = e^{s-t}$$

$$K_2(s,t) = \int_0^1 e^{s-x} e^{x-t} dx = e^{s-t}$$

وإذا تابعنا نجد كذلك أن $K_n(s,t) = e^{s-t}$ مهما كان العدد الصحيح الموجب n . إذن :

$$\Gamma(s,t,\lambda) = K(s,t)(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots) = \frac{e^{s-t}}{1-\lambda}$$

بفرض أن $|\lambda| < 1$. فالنواة الحالة دالة تحليلية في λ ولكن بالتمديد التحليلي نجد ان مدها تحليلي في المستوي كله باستثناء القيمة $\lambda = 1$. والحل المطلوب هو :

$$g(s) = f(s) - \frac{\lambda}{\lambda - 1} \int_0^1 e^{s-t} f(t) dt$$

٢ - حل المعادلة التكاملية :

$$g(s) = 1 + \lambda \int_0^1 (1 - 3st)g(t) dt$$

مستخدماً طريقة التقريبات المتتالية ، ثم أوجد النواة الحالة

الحل : ننتقل من التقريب ذي المرتبة صفر $g_0(s) = 1$ فنجد :

$$g_1(s) = 1 + \lambda \int_0^1 (1 - 3st) dt = 1 + \lambda \left(1 - \frac{3}{2}s\right)$$

$$g_2(s) = 1 + \lambda \int_0^1 (1 - 3st) \left(1 + \lambda \left(1 - \frac{3}{2}t\right)\right) dt = 1 + \lambda \left(1 - \frac{3}{2}s\right) + \frac{1}{4} \lambda^2$$

... ..

$$g(s) = 1 + \lambda \left(1 - \frac{3}{2}s\right) + \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^3 \left(1 - \frac{3}{2}s\right) + \frac{1}{16}\lambda^4 + \frac{1}{16}\lambda^5 \left(1 - \frac{3}{2}s\right) + \dots$$

أو :

$$g(s) = \left(1 + \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda^4 + \dots\right) \left(1 + \lambda \left(1 - \frac{3}{2}s\right)\right)$$

ولكن المتسلسلة الهندسية متقاربة عندما $|\lambda| < 2$ ، فإذا استبدلنا هذه المتسلسلة بمجموعها نجد :

$$g(s) = \frac{4 + 2\lambda(2 - 3s)}{4 - \lambda^2}$$

وبالتمديد التحليلي نجد أن هذا الحل يصلح مهما كانت λ باستثناء $\lambda = \pm 2$.

وللحصول على النواة الحالة نبدأ بحساب النوى المتكررة .

$$K_1(s, t) = 1 - 3st$$

$$K_2(s, t) = \int_0^1 (1 - 3sx)(1 - 3xt) dx = 1 - \frac{3}{2}(s+t) + 3st$$

$$K_3(s, t) = \int_0^1 (1 - 3sx) \left[1 - \frac{3}{2}(x+t) - 3xt\right] dx$$

$$= \frac{1}{4}(1 - 3st) = \frac{1}{4}K_1(s, t)$$

وبشكل مماثل نجد :

$$K_4(s, t) = \frac{1}{4}K_1(s, t)$$

$$K_n(s, t) = \frac{1}{4}K_{n-2}(s, t)$$

وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned} F(s, t, \lambda) &= K_1 + \lambda K_2 + \lambda^2 K_3 + \dots \\ &= (1 + \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{16} \lambda^4 + \dots) K_1 + \lambda (1 + \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{16} \lambda^4 + \dots) K_2 \\ &= [(1 + \lambda) - \frac{3}{2} (s + t) - 3(1 - \lambda)st] / (1 - \frac{1}{4} \lambda^2) \quad |\lambda| < 2 \end{aligned}$$

(١-٣) تمارين

١- اثبت أن حل المعادلة التكاملية :

$$g(s) = 1 + \lambda \int_0^\pi \sin(s+t) g(t) dt$$

يعطى بـ :

$$g(s) = 1 + [2\lambda \cos s + \lambda^2 \pi \sin s] / [1 - \frac{1}{4} \lambda^2 \pi^2]$$

٢- أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$g(s) = 2s + \lambda \int_0^1 (s+t) g(t) dt$$

بطريقة التقريبات المتتالية مكثفياً بالتقريب من المربعة الثالثة

٣- اثبت مايلي :

$$K_m(s, t) = \int_a^b K_r(s, x) K_{m-r}(x, t) dx$$

٤ - أوجد متسلسلة نيومان للمعادلة التكاملية :

$$g(s) = \sin s - \frac{1}{2} s + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} s t g(t) dt$$

• - لتكن لدينا المعادلة التكاملية .

$$g(s) = 1 + \lambda \int_0^1 s t g(t) dt$$

(آ) بين باستخدام العلاقة $|\lambda| < 1$ ان متسلسلة نيومان متقاربة عندما

$$|\lambda| < 3$$

(ب) بين باستخدام طريقة النواة الحالة أن :

$$g(s) = 1 + s [\lambda/2 + \lambda^2/6 + \dots]$$

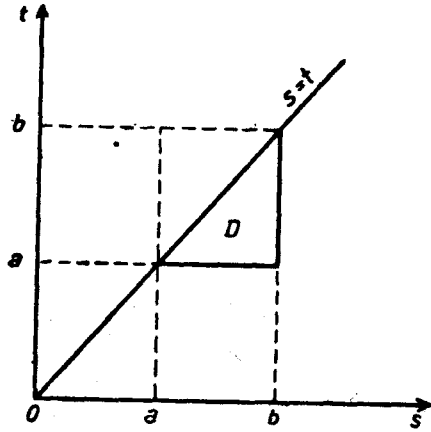
٤ - معادلة فولترا التكاملية

لقد دعونا المعادلة التكاملية من الشكل :

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_a^b V(s,t) g(t) dt \quad (1)$$

معادلة فولترا التكاملية . سنفرض فيما يلي أن النواة $V(s,t)$ مستمرة في المثلث Δ المحدد بالمستقيبات $s=b, t=a, s=t$ وعلى محيطه . ولنفرض كذلك أن f كمول وكمول تربيعياً على المجال $[a,b]$.

حل المعادلة (1) يمكن ردها إلى معادلة فريدهولم بتعريف نواة جديدة $K(s,t)$ على النحو التالي :



$$K(s,t) = V(s,t) \quad (t \leq s \text{ عندما})$$

$$K(s,t) = 0 \quad (t > s \text{ عندما})$$

إن النواة $K(s,t)$ محدودة في المربع $a \leq s \leq b, a \leq t \leq b$ ومستمرة هناك باستثناء القطر $s = t$: ولذلك يمكن إيجاد الحل وفق طريقة الفقرة السابقة فنجد النوى المكررة التالية :

$$V_2(s,t) = \int_t^s V(s,x) V(x,t) dx \quad (2)$$

وبشكل مماثل نجد :

$$V_{n+1}(s,t) = \int_t^s V(s,x) V_n(x,t) dx \quad (3)$$

وإذا فرضنا أن الحد الأعلى لـ V في Δ هو A أي :

$$|V(s,t)| < A$$

فإننا نجد اعتماداً على (2) :

$$|V_2(s, t)| < (s-t) A^2$$

ونجد بشكل مماثل أن :

$$|V_n(s, t)| < \frac{(s-t)^{n-1} A^n}{(n-1)!}$$

وإذا شكنا النواة الحالة :

$$R(s, t, \lambda) = V(s, t) + \lambda V_2(s, t) + \lambda^2 V_3(s, t) + \dots$$

فإننا نجد :

$$|\lambda^{n-1} V_n(s, t)| < \frac{|\lambda|^{n-1} (s-t)^{n-1} A^n}{n!} \leq \frac{|\lambda|^{n-1} (b-a)^{n-1} A^n}{n!}$$

ينتج عن هذا ان المتسلسلة متقاربة بانتظام في Δ مهما كانت λ ، وعلى هذا نستطيع القول : ان النواة الحالة لمعادلة فولتيرا هي دالة صحيحة في λ . وبالتالي فإن لمعادلة فولتيرا حلاً وحيداً مهما كانت قيمة λ ومهما كانت الدالة $f(s)$. ويعطى هذا الحل بدلالة النواة الحالة والدالة $f(s)$ وفق الصيغة :

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_a^b R(s, t, \lambda) f(t) dt \quad (4)$$

مثال (1) أوجد متسلسلة نيومان للمعادلة التكاملية :

$$g(s) = (1+s) + \lambda \int_0^1 (s-t) g(t) dt$$

الحل : ان :

$$V(s, t) = V_1(s, t) = s - t$$

$$V_2(s, t) = \int_t^s (s-x)(x-t) dx = \frac{(s-t)^3}{3!}$$

$$V_3(s, t) = \int_t^s \frac{(s-x)(x-t)^2}{2!} dx = \frac{(s-t)^3}{3!}$$

وممكننا ، إذن :

$$g(s) = (1+s) + \lambda \left(\frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} \right) + \lambda^2 \left(\frac{s^4}{4!} + \frac{s^5}{5!} \right) + \dots$$

فإذا كانت $\lambda = 1$ مثلا نجد أن $g(s) = e^s$

مثال - ٢ - حل المعادلة التكاملية .

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_0^s e^{s-t} g(t) dt$$

الحل : نجد في هذا المثال أن :

$$V_1(s, t) = e^{s-t}$$

$$V_2(s, t) = \int_t^s e^{s-x} e^{x-t} dx = (s-t) e^{s-t}$$

$$V_3(s, t) = \int_t^s (x-t) e^{s-x} e^{x-t} dx = \frac{(s-t)^2}{2!} e^{s-t}$$

.....

$$V_n(s, t) = \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{s-t}$$

والنواة الحالة هي :

$$R(s,t,\lambda) = \begin{cases} e^{s-t} \sum_1^{\infty} \frac{\lambda^{n-1} (s-t)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{(\lambda+1)(s-t)} & t < s \\ 0 & t > s \end{cases}$$

فالحل المطلوب هو :

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_0^s e^{(\lambda+1)(s-t)} f(t) dt$$

(٤-١) تعاريف

حل معادلات فولتيرا التكاملية التالية :

$$g(s) = 1 + \int_0^s (s-t)g(t) dt$$

$$g(s) = 2s + 6s + \int_0^s (6s - 6t + 5)g(t) dt$$

$$g(s) = e^{s^2} + \int_0^s e^{s^2-t^2} g(t) dt$$

$$g(s) = e^s + \int_0^s e^{s-t} g(t) dt$$

$$g(s) = \sin s + 2 \int_0^s e^{s-t} g(t) dt$$

$$g(s) = e^s \sin s + \int_0^s \frac{2 + \cos s}{2 + \cos t} g(t) dt$$

$$g(s) = s 3^s - \int_0^s 3^{s-t} g(t) dt$$

$$g(s) = e^{s^2 + 2s} + 2 \int_0^s e^{s^2 - t^2} g(t) dt$$

$$g(s) = \frac{1}{1+s^2} + \int_0^s \sin(s-t) g(t) dt$$

$$g(s) = e^{-s} + \int_0^s e^{-(s-t)} \sin(s-t) g(t) dt$$

$$g(s) = 1 + s^2 + \int_0^s \frac{1+s^2}{1+t^2} g(t) dt$$

★ ★ ★

ثبت المصطلحات

نورد فيما يلي قائمة باهم المصطلحات المستعملة في هذا الكتاب مرتبة وفق حروف الهجاء العربية مع مقابل كل منها باللغة الانكليزية .

Cylindrical coordinates	احداثيات اسطوانية
Spherical coordinates	احداثيات كروية
Choice of contours	اختيار الطرق
Stability	استقرار
Asymptotic stability	استقرار تقاربي
Linear independence	استقلال خطي
Iteration method	اسلوب تكراري
Complete	تام
Functional analysis	تحليل دالي
Prüfer transformation	تحويل بروفر
Möbius transformation	تحويل موبوس
Compactness	تراص
Contractive mapping	تطبيق تقلصي
Absolute convergence	تقارب مطلق
Uniform convergence	تقارب منتظم
Convergence in norm	تقارب نظيمي
Laplace's integral	تكامل لابلاس
Completeness	تمام

Analytic continuation	تمديد تحليلي
Lipshitz's constant	ثابتة ليبشترز
Equicontinuous family	جماعة متساوية الاستمرار
Legendre's polynomial	حدودية لوجاندر
Trivial solution	حل تافه (بدهي)
Local solution	حل موضعي
Fundamental solutions	حلول أساسية
Contour integral solutions	حلول على شكل تكاملات محيطية
Periodic solutions	حلول دورية
Approximately linear	خطية تقريباً
Analytic function	دالة تحليلية
Eigen function	دالة ذاتية
Green's function	دالة غرين
Hypergeometric function	دالة فوق هندسية
Generating function	دالة مولدة
Functional	دالية
Spherical functions	دوال كروية
Limit cycle	دورة حدية
Bessel's functions	دوال بسل
Test, criterion	رائز
Wronskian	رونسكي
Lipshitz condition	شرط ليبشترز
Local Lipshitz condition	شرط ليبشترز موضعي
Initial conditions	شروط ابتدائية

Recurrence formula	صيغة تدرجية
Rodrigues' formula	صيغة رودريج
Method of successive approximation	طريقة التقريبات المتتالية
Node	عقدة
Double node	عقدة مضاعفة
Euclidean space	فضاء اقليدي
Banach space	فضاء باناخ
Linear space	فضاء خطي
Normed linear space	فضاء خطي منظم
Pre - Hilbert space	فضاء قبل الهيلبرتي
Metric space	فضاء متري
Normed space	فضاء منظم
Hilbert space	فضاء هيلبرت
Pole	قطب
Eigen value	قيمة ذاتية
Principal value	قيمة رئيسية
Ascoli - Arzela theorem	مبرهنة اسكولي ارزيبلا
Sturm's separation theorem	مبرهنة الفصل لستورم
Expansion theorem	مبرهنة النشر
Fixed point theorem	مبرهنة النقطة الثابتة
Existence theorem	مبرهنة وجود
Peano's existence theorem	مبرهنة الوجود لبيانو
Shwarz's inequality	متباينة شوارتز
Triangular inequality	متباينة المثلث

Voltera equation	معادلة فولترا
Fredholm equation	معادلة فريدولم
Fuchs's equation	معادلة فوكس
Fuchs's equation with one singularity	معادلة فوكس بنقطة شاذة واحدة
Fuchs's equation with two singularities	معادلة فوكس بنقطتين شاذتين
Hypergeometric equation	المعادلة فوق الهندسية
Laplace's equation	معادلة لابلاس
Legendre's equation	معادلة لوجاندر
Characterestic equation	معادلة مميزة
Fourier coefficients	معاملات فورييه
Operator	مؤثر
Bounded linear operator	مؤثر خطي محدود
self-adjoint operator	مؤثر متقارن ذاتياً
Asymptotic expansion	نشر مقارب
Orthonormal system	نظام متعامد منظم
The descriptive theory	النظرية الوصفية
Uniqueness theorems	نظريات الوحدةانية
Existence theorems	نظريات الوجود
Norm	نظم
Sup norm , Uniform norm	نظم القيمة العظمى
Weighting supnorm	نظم القيمة العظمى المحملة
Branch point	نقطة تفرع
Equilibrium point	نقطة توازن
Critical point	نقطة حرجة

Spiral point	نقطة حلزونية
Saddle point	نقطة مرجية
Essential singular point	نقطة شاذة أساسية
Regular singular point	نقطة شاذة منتظمة
Irregular singular point	نقطة شاذة غير منتظمة
Isolated singular point	نقطة شاذة منعزلة
Ordinary point	نقطة عادية
Point at infinity	نقطة اللانهاية
Kernel	نواة
Resolvent kernel	نواة حالة
Degenerate kernel	نواة متردبة
Iterated kernels	نوى متكررة
Symmetric kernel	نواة متناظرة
Uniqueness of solution	وحدانية الحل



المصادر

- ١ - سميرنوف ، دروس في الرياضيات العالية
ترجمة : و . قدمي ، ص . أحمد ، م . دعبول ، خ . أحمد ، أ . كنجو
وزارة التعليم العالي ، سوريا ، ١٩٧٠
- 2 — J. C. Burkill, The Theory of ordinary differential equations , oliver and Boyd 1962
- 3 — E. T. Copson : Theory of functions of a complex variable , oxford press, 1962
- 4 — I . M . Gelfand, G . E .Shilov , Generalized functions , Theory of differential equations , acadmic press 1967 .
- 5 — G . Hoheisel, Gewöhnliche Differentialgleichungen , Sammlung Göshen , 1956
- 6 — E. L. Ince , Ordinary differential equation , London 1927
- 7 M. Krashov , A . Kiselev , G. Makarenko , Problems and exercises in integral equations , Mir Pub. 1971
- 8 — A . Lichnerowicz , Lineare Algebra und Lineare Analysis Deutsher Verlag der Wissenschaften 1956
- 9 — W . Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen , Eine Einführung , Springer Verlag 1976
- 10 — C . R . Wylie , Differential equations , Mcgraw Hill Company 1979

الفهرس

رقم الصفحة

٤٠ - ١	الفصل الاول : مبرهنة وجود الحل ووحدانيته
١	١ - مقدمة في التحليل الدالي
١	(١ - ١) الفضاء الخطي
٢	(٢ - ١) الفضاء المنظم
٣	(٣ - ١) أمثلة
٥	(٤ - ١) فضاء باناخ
٦	(٥ - ١) المؤثرات والداليات ، الاستمرار وشرط ليبشتز
٧	(٦ - ١) أمثلة
٨	(٧ - ١) الأسلوب التكراري في فضاءات باناخ
٩	(٨ - ١) مبرهنة النقطة الثابتة
١٤	٢ - مبرهنة الوجود والوحدانية
١٤	(١ - ٢) مبرهنة الوجود والوحدانية
١٧	(٢ - ٢) ملاحظات
١٩	(٣ - ٢) مبرهنة
٢٠	(٤ - ٢) شرط ليبشتز الموضوعي
٢٢	(٥ - ٢) تمهيدية
٢٢	(٦ - ٢) تمهيدية حول تمديد الحلول

رقم الصفحة

٢٤	(٧-٢) مبرهنة الوجود والوحدانية
٢٦	(٨-٢) تمرين
٢٧	٣- نظرية الوجود لبيانو
٢٨	(١-٣) مبرهنة الوجود لبيانو
٢٩	(٢-٣) الاستمرار المتساوي
٢٩	(٣-٣) تمهيدية
٢٩	(٤-٣) مبرهنة اسكولي-ارزبلا
٣١	(٥-٣) مبرهنة
٣٣	(٦-٣) تمرين
٣٣	٤- المعادلات التفاضلية في العقديّة
٣٤	(١-٤) مبرهنة الوجود والوحدانية في العقديّة
٣٧	(٢-٤) تعيين الحل بالنشر في متسلسلة قوى
٣٨	(٣-٤) مثال
٣٩	(٤-٤) تمارين
١٣٠ - ٤١	الفصل الثاني : المعادلات التفاضلية الخطية في العقديّة
٤١	١- مقدمة
٤٢	(٢-١) النقط العادية والشاذة
٤٢	(٣-١) الحل بجوار نقطة عادية
٤٥	(٤-١) مبرهنة
٤٥	(٥-١) مثال
٤٨	(٦-٢) التمديد التحليلي للحل
٤٩	(٧-١) الحل العام للمعادلة التفاضلية

رقم الصفحة

٥٠	٢ - الحل في جوار نقطة شاذة منتظمة
٦١	(١-٢) تمرين (١)
٦٢	(٢-٢) تمرين (٢)
٦٥	(٣-٢) تمرين (٣)
٦٧	(٤-٢) تمارين للحل
٦٨	(٥-٢) الحل في جوار نقطة شاذة
٧٤	(٦-٢) الحل في جوار نقطة اللانهاية
٧٦	(٧-٢) أمثلة
٧٧	٣ - معادلة فوكس
٧٨	(١-٣) معادلة فوكس ذات نقطة شاذة واحدة
٧٩	(٢-٣) معادلة فوكس بنقطتين شاذتين
٧٩	(٣-٣) معادلة غروص « المعادلة فوق الهندسية »
٨٤	(٤-٣) تمارين
٨٥	٤ - معادلة لوجاندر التفاضلية
٨٧	(١-٤) حدوديات لوجاندر
٨٩	(٢-٤) الدالة المولدة لحدوديات لوجاندر
٩١	(٣-٤) الصيغ التكرارية
٩٣	(٤-٤) تمارين
٩٥	٥ - تمثيل الحلول بتكاملات
٩٦	(١-٥) معادلة لابلاس التكاملية
١٠٠	(٢-٥) اختيار الطرق
١٠٢	(٣-٥) أمثلة
١٠٥	(٤-٥) تكاملات تشتمل على قوى لـ (z-٢)

رقم الصفحة	
١٠٧	(٥ - ٥) مثال
١٠٨	(٦ - ٥) تمارين للحل
١١١	٦ - النشر المقارب للحلول
١١١	(١ - ٦) النشر المقارب
١١٥	(٢ - ٦) النشر المقارب لحل معادلة لابلاس
١٢٥	٧ - معادلة بسل التفاضلية
١٢٦	(١ - ٧) توابع بسل
١٢٧	(٢ - ٧) الصيغ التكرارية
١٢٩	(٣ - ٧) تمارين
١٦٠-١٣١	الفصل الثالث : النظرية الوصفية للمعادلات التفاضلية غير الخطية
١٣١	١ - مقدمة
١٣١	٢ - مستوى الطور والنقط الحرجة
١٣٧	٣ - النقط الحرجة ومسارات مجموعة خطية
١٤٥	(١ - ٣) تمارين
١٤٥	٤ - النقط الحرجة لمجموعة خطية تقريباً
١٥٤	(١ - ٤) أمثلة
١٥٨	(٢ - ٤) تمارين
١٥٩	٥ - المجموعات التي هي ليست خطية تقريباً
٢٢٨-١٦١	الفصل الرابع : مسائل القيم الحدية والقيم الذاتية ، استقرار الحلول
١٦١	١ - مسائل القيم الحدية
١٦١	(١ - ١) مقدمة
١٦٢	(٢ - ١) مسألة شتورم الحدية
١٦٤	(٣ - ١) مبرهنة

رقم الصفحة

١٦٦	(١-٤) الحلول الاساسية
١٦٨	(١-٥) مبرهنة
١٦٩	(١-٦) دالة غرين
١٧٠	(١-٧) مبرهنة
١٧٢	(١-٨) ملاحظات
١٧٣	(١-٩) تمارين
١٧٥	٢- مسألة شتورم - ليوفيل في القيم الذاتية
١٧٥	(٢-١) طرح المسألة
١٧٧	(٢-٢) مبرهنة وجود
١٧٧	(٢-٣) مبرهنة نشر
١٧٨	(٢-٤) تحويل بروفر
١٧٩	(٢-٥) خواص φ
١٨٣	(٢-٦) مسألة القيم الذاتية
١٨٥	(٢-٧) مبرهنة
١٨٦	(٢-٨) نتائج . مبرهنة الفصل لشتورم
١٨٧	(٢-٩) الاهتزاز
١٨٨	(٢-١٠) مبرهنة السعة
١٨٩	(٢-١١) تمارين
١٩٠	(٢-١٢) مبرهنة الاهتزاز
١٩١	(٢-١٣) صيغ تحويل
١٩٢	(٢-١٤) تمارين
١٩٢	٣- المؤثرات المتوازية المتقارنة ذاتياً في فضاء هلبرت : مبرهنة النشر
١٩٢	(٣-١) الجداء السلمي

رقم الصفحة

- ١٩٤ (٢-٣) الفضاء قبل الهيلبرتي والفضاء الهلبرتي
- ١٩٦ (٣-٣) النظم المتعامدة المنظمة ومتسلسلات فورييه
- ١٩٩ (٤-٣) المؤثرات المحدودة والمتراصة والمتقاربة ذاتياً
- ٢٠١ (٥-٣) القيم الذاتية للمؤثرات الهرميتية المتراصة
- ٢٠٢ (٦-٣) مبرهنة
- ٢٠٣ (٧-٣) مبرهنة
- ٢٠٤ (٨-٣) اضافات وملاحظات
- ٢٠٦ (٩-٣) مسألة القيم الذاتية لشتورم - ليوفيل
- ٢٠٧ (١٠-٣) مبرهنة
- ٢٠٨ (١١-٣) مبرهنة
- ٢١٢ ٤ - السلوك التقاربي ، الاستقرار
- ٢١٢ (١-٤) نظرية الاستقرار
- ٢١٣ (٢-٤) الاستقرار والاستقرار المقارب
- ٢١٤ (٣-٤) مبرهنة
- ٢١٦ (٤-٤) مبرهنة
- ٢١٧ (٥-٤) مبرهنة في الاستقرار
- ٢١٨ (٦-٤) مبرهنة جرونوول
- ٢١٩ (٧-٤) مبرهنة في الاستقرار
- ٢٢١ (٨-٤) مبرهنة عدم الاستقرار (القلق)
- ٢٢٥ (٩-٤) تطبيق على النظام
- ٢٢٦ (١٠-٤) مثال
- ٢٢٦ (١١-٤) مبرهنة جرونوول المعممة

رقم الصفحة	
٢٢٢	(٤ - ١٢) تمارين
٢٢٩-٢٦٣	الفصل الخامس : المعادلات التكاملية الخطية
٢٢٩	١ - مقدمة
٢٢٩	(١ - ١) تعريف
٢٣١	(١ - ٢) تعريف
٢٣١	(٢ - ١) معادلة فريدهولم ذات النواة المتعدية
٢٣٥	(٢ - ٢) المعادلة المتجانسة
٢٣٦	(٢ - ٣) المعادلة التكاملية المنقولة
٢٣٧	(٢ - ٤) معرنة فريدهولم
٢٤٤	(٢ - ٥) تمارين
٢٤٥	٣ - النواة الحالة
٢٥٧	(٣ - ١) تمارين
٢٥٨	٤ - معادلة فولترا التكاملية
٢٦٢	(٤ - ١) تمارين
٢٦٥	ثبت المصطلحات
٢٧١	المصادر
٢٧٣	الفهرس