الدكتور
انور اللحام
كلية العلوم ـ جامعة دمشق

الدكتورة
الهام حمصي
كلية العلوم ـ جامعة دمشق

الجبر ٥

الطبعة الرابعة

مطبعة دار الكتاب ـ دمشق

١٤١٠ ـ ١٤١١ هـ

١٩٩٠ ـ ١٩٩١ م

المقـدِمَة

الجبر فرع من فروع الرياضيات البحتة ، يلعب دوراً رئيسياً في عملية تطوير الرياضيات ويسهم مساهمة فعالة في حل المسائل المطروحة على إنسان هذا العصر في ميادين شتى كالاقتصاد والفيزياء والطب والتخطيط والبرمجة والأقمار الصناعية ...

لذا كان واجباً حتمياً على طالب الرياضيات ، أن يتعرف على المفاهيم الجبرية المختلفة وأن يدرس البعض منها وان يتابع القراءة العلمية ليقف على عتبة البحث العلمي مسهماً في تقدم بلده ومسايراً ركب التطور العلمي المستمر .

لقد جاء كتاب الجبر (٥) ليغطي المنهج المقرر للجبر (٥) بفقراته الرئيسية الأربعة ، فقسم إلى أربعة أبواب يمكن اعتبار كل منها مدخلاً للبحث الذي يعالجه :

الباب الأول : نظرية أنصاف الزمر .

الباب الثاني : نظرية الحقول وتمديداتها ونظرية غالوا .

الباب الثالث : الفضاءات الحلقية .

الباب الرابع : الجبور والحدوديات بأكثر من مجهول .

وقد كتب البابين الأول والثاني الدكتور أنور اللحام بينما قامت الدكتورة الهام حمصي بكتابة البابين الثالث والرابع وذلك تعاوناً منهما لأخراج الكتاب بأسرع مايمكن حتي يكون جاهزاً بين يدي طلابنا الاعزاء مع بداية العام الجامعي ١٩٨٣ - ١٩٨٤ .

يمتاز كتاب الجبر (٥) بالأمور التالية :

آ ـ انه يتمم الكتب الأربعة في الجبور (١) و (٢) و (٣) و (٤) وبذلك أمكن أن نقدم ولأول مرة مجموعة كتب متكاملة تضع أمام القارىء العربي صورة عن بعض فروع الجبر الرئيسية .

ب ـ اتبع كل باب بالمراجع التي استفيد منها والتي يمكن للقارىء مطالعتها للتوسع والاستزادة من العلم .

حـ ـ يتطرق كتاب الجبر (٥) لمواضيع جديدة ، كتبت باللغة العربية للمرة الأولى وهذا مجال فخر واعتزاز رغم أنه كان مبعث جهد وتعب كبيرين .

د ـ إن الأبواب الأربعة في هذا الكتاب منفصلة بمعنى انه يمكن للقارىء قراءة أحد هذه الأبواب دون الأبواب الباقية مع شرط توفر المعلومات الأساسية في الجبر .

من ناحية أخرى فإننا نود الاشارة إلى الأمور التالية :

آ ـ لقد صدرت الموافقة على منهاج مقرر الجبر (٥) في نهاية العام الدرسي ١٩٨٢ ـ ١٩٨٣ ، ورغبة منا في أن يكون الكتاب جاهزاً مع مطلع العام الدرسي ١٩٨٣ ـ ١٩٨٤ فإن بعض فصوله لم تعالج إلا بشكل سريع .

ب ـ يمكن اعتبار كتاب الجبر (٥) نواة لكتاب متقدم في الجبر يغني المكتبة العربية .

أخيراً ورغم الجهد المضني الذي بذل لأخراج هذا الكتاب بهذا الشكل فإنه يعتبر اللبنة الأولى في كتاب متقدم في الجبر رغم حاجته إلى صقل وتشذيب ، مرحبين دوماً بآراء وملاحظات القراء والزملاء والله الموفق .

المنهاج المقرر

الباب الاول : نظرية أنصاف الزمر .

الباب الثاني : نظرية الحقول وتمديداتها ونظرية غالوا .

الباب الثالث : الفضاءات الحلقية .

الباب الرابـع : الجبور والحدوديات بأكثر من مجهول .

الرموز المستخدمة

f^* ، f_*	التشاكل المستخلص من f
in_j	التباين القانوني لـ M_j في $\bigoplus_{i\in I} M_i$
$\prod_{i\in I} M_i$	الجداء الديكارتي للجماعة $(M_i)_{i\in I}$
$\varphi \otimes \psi$	الجداء الموتري لتشاكلين $\varphi \in Hom(M,M')$. $\psi \in Hom(N,N')$
$M \otimes N$	الجداء الموتري للفضاءين الحلقيين M , N
$\bigoplus_{i\in I} M_i$	المجموع المباشر الخارجي للجماعة $(M_i)_{i\in I}$
pr_j	الاسقاط القانوني $(pr_j : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j)$
coim f	الصورة الموافقة لـ f وهي $M/\ker f$ حيث يكون $f \in Hom(M,N)$
$Ann_R(S)$	العادم لـ S
co ker f	النواة الموافقة لـ f وهي $N/Im\, f$ حيث يكون $f \in Hom(M,N)$
π_N	تطبيق الغمر القانوني للفضاء M على الفضاء الخارج M/N
$(M_i)_{i\in I}$	جماعة فضاءات حلقية على الحلقة الواحدية R
R	حلقة واحدية
Im f	صورة التشاكل f
M/N	فضاء الخارج الحلقي لـ M على N
$End_R(M)$	مجموعة التداكلات (الاندومورفيزمات) على M
$Hom_R(M,N)$	مجموعة التشاكلات بين الفضاءين الحلقيين M,N على R .

$\langle S \rangle$	مجموعة التراكيب الخطية على S
R^S	مجموعة التطبيقات للمجموعة S في الحلقة R
Z	مجموعة الاعداد الصحيحة
rad A	أساس الجبر A
$A \otimes B$	الجداء الموتري للجبرين A،B
out L	الاشتقاق الخارجي على جبرلي L وهو Der L / Inn L
$[d_1, d_2]$	المبادل لـ d_1 , d_2
Cr (S)	المركز لمجموعة جزئية S من جبرلي L
N_L (S)	المناظم للجبر الجزئي S من L
Inn L	تطبيقات الاشتقاق الداخلي على جبرلي L
d	تطبيق الاشتقاق على الجبر A
A/B	جبر الخارج لـ A على المثالي B لـ A
A	جبر على حلقة واحدية تبادلية R
L	جبر لي على الحقل F
$x * y$	جداء x بـ y في جبرلي
$R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$	حلقة الحدوديات في n مجهولا $x_1, x_2, \ldots, x_n$
$End_R(A \quad B)$	مجموعة التداكلات على $A \otimes B$
Der (A)	مجموعة تطبيقات الاشتقاق على الجبر A
Der (L)	مجموعة تطبيقات الاشتقاق على جبرلي L

الباب الأول

نظريـــة نصف الزمرة

الفصل الأول

مفاهيم ومبادىء اولية

في

نظرية نصف الزمرة

تمهيد :

إن اصطلاح « نصف الزمرة » ظهر للمرة الأولى في باريس عام ١٩٠٤ تحت اسم « demi – groupe » في كتاب العالم الرياضي الفرنسي J . A . de Séguier عنوانه « Éléments de la théorie des groupes abstraits » .

وأول بحث نشر حول نصف الزمرة كان عام ١٩٠٥ نشره L . E . Dikson تحت عنوان :

«On semigroups and the general isomorphisms between infinite groups»

لكن نظرية نصف الزمرة بدأت في الحقيقة عام ١٩٢٨ ، حين نشر العالم الروسي A.K. Suschkwitsch بحثاً هاماً مبيناً فيه أن كل نصف زمرة منتهية تحوي نواة ، ودرس في بحثه هذا بنية أنصاف الزمر المنتهية . وحال دون تقدم نظرية نصف

الزمرة أن النتائج التي أوردها سوشكوفيتش لم تكن بشكل يمكن استخدامها . وجاء D. Rees عام ١٩٤٠ فأدخل مفهوم المصفوفـــة على الزمرة الصفرية وأثبت أن أنصاف الزمر البسيطة غير المنتهية التي تملك عنصراً جامداً بدائيـــاً تملك نواة أيضاً . وبذا عمم مبرهنة سوشكوفيتش وأورد نتائج يمكن استخدامها . وتوالت بعد عـام ١٩٤٠ الأبحاث المنشورة حول نظرية نصف الزمرة وازدادت بشكل مذهل ، وفي عام ١٩٧٠ صدر في الولايات المتحدة الأمريكية العـدد الأول من المجلة العلمية الدورية (Semigroup Forum) المتخصصة في أبحاث نصف الزمرة. وتشعب البحث في نظرية نصف الزمرة وتطبيقاتها في شتى العلوم وأخذت الدراسة فيها اتجاهين رئيسيين : النظرية التوبولوجية والنظرية الجـبرية (التي هي موضوع اهتمامنا في هذا المدخل إلى نظرية نصف الزمرة) .

لقد كان أول كتاب ظهر حول موضوع نصف الزمرة لسوشكوفيتش ، نشره بالروسية في كراكوف عام ١٩٣٧ تحت عنوان « Theory of generalized groups » وبعده جاء كتاب E. Hille الذي نشرته الجمعية الرياضية الأمريكية عام ١٩٤٨ تحت عنوان « Functional Analysis and Semigroups » وقد عدله مـع زميله R. S. phillips عام ١٩٥٧ . غير أن هذا الكتاب يأخذ ناحية التحليل في دراسته لنصف الزمرة وتطبيقاتها . ثم ظهر عام ١٩٥٨ كتاب بالألمانية لمؤلفه R.H. Bruck تحت عنوان : « A survey of binary systems » ضمنه فصلاً عن نصف الزمرة . أما العالم الروسي E. S. Lyapin فقد نشر في موسكو كتابه (Semigroups) عام ١٩٦٠ وترجمته الجمعية الرياضية الأمريكية ونشرته بالانجليزية عـام ١٩٦٣ . ثم جـــاء كتاب « The algebraic theory of semigroups » الذي كتبه A.H. Clifford و G. B. Preston » بجزئيه ، الأول نشر عام ١٩٦١ والثـاني صدر عام ١٩٦٧ . وهو الكتاب الذي يعتبر المرجع الأساسي حتى اليوم في نظرية نصف الزمرة (جبرياً) .

إننا نود أن ننبه إلى أن هذا الباب يمكن اعتباره مدخلاً مبسطاً لنظرية نصف الزمرة نركز جل اهتمامنا فيه على دراسة بنية نصف الزمرة ، ونعرض بعض مبرهنات نصف الزمرة نلحقها بتمارين تعتبر متممات لهذه المبرهنات . وحتى يكون الباب متكاملاً فإننا سنبدأ بالتركيز على التعاريف الأولية اللازمة لدراسة هذا الموضوع .

ومما هو جدير بالذكر أن دراستنا هذه ستقتصر على الناحية الجبرية ، ولن نتعرض مطلقاً لأنصاف الزمر التوبولوجية في هذا الكتاب .

١ ـ ١ ـ ١ تعاريف اولية

النظام الرياضي (Groupoid) (S ,*) هو مجموعة غير خالية S معرف عليها قانون تشكيل داخلي (binary operation) * الذي هو دالة :

$$* : S \times S \to S \; ; \; (x,y) \to *(x,y)$$

هذا ويمكن التعبير عن الصورة $*(x,y)$ بالشكل $x * y$

نصف الزمرة (S , *) (semigroup) هو نظام رياضي تجميعي . أي :

$$(x * y) * z = x * (y * z) \qquad \forall x, y, z \in S$$

[سوف لن نهتم كثيراً برمز العملية (قانون التشكيل) * وذلك حين لانخشى الالتباس ، فسنكتب $x\,y$ عوضاً عن $x * y$ ، كما أننا سندعو العملية بالضرب تجاوزاً] .

من المهم أن نلاحظ هنا أن تحقق شرط التجميعية في نصف الزمرة يسمح لنا بكتابة التركيب

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \qquad x_1, \ldots, x_n \in S$$

دون أقواس ، ودون أن يكون معنى هذا التركيب غامضاً .

ـ الرمز x^n $(n \in N)$ يقصد به جداء n عنصر من S كل منها مساو للعنصر x ، علماً بأن N هي مجموعة الأعداد الطبيعية

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

بينما

$$N^{\circ} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

ـ المقدار $|S|$ يقصد به رئيسي المجموعة S (The cardinal number) وهو ما سندعوه **مرتبة** نصف الزمرة S (order) .

ـ سوف نشير إلى نصف الزمرة الضربية بالرمز $(S, .)$ أو غالباً S فقط .

ـ إذا كانت نصف الزمرة S تملك الخاصة الاضافية :

$$\forall\, x, y \in S \qquad xy = yx$$

فسندعوها **نصف زمرة تبديلية** .

ـ إذا ملكت نصف الزمرة S عنصراً e يحقق الشرط التالي :

$$\forall\, x \in S \qquad xe = ex = x$$

قلنا إن S ذات **عنصر حيادي** e وندعوها عندئـــذ **نصف زمرة واحدية** (Monoid) . وغالباً ما نرمز لهذا العنصر الحيادي بالرمز 1 .

أما إذا حقق العنصر e الشرط التالي فقط

$$\forall\, x \in S \qquad xe = x$$

فإننا نقول عن e أنه **حيادي يميني** وبصورة مشابهة نعرف **الحيادي اليساري** .

ـ من السهل البرهان على أن أي نظام رياضي S متى ملك عنصراً حيادياً e فهذا الحيادي وحيد . إذ أنه لو وجد حيادي آخر e' لـكان :

$$\forall\, x \in S \qquad x e' = e' x = x$$

وبالتالي

$$e' = e e' = e$$

- إذا لم تحو نصف الزمرة S على عنصر حيادي ، فمن السهولة بمكان تزويدها بحيادي وذلك بإضافة عنصر جديد 1 إلى S يخضع للشرط التالي :

$$\forall s \in S \qquad 1s = s1 = s$$

و

$$11 = 1$$

إن $S \cup \{1\}$ تصبح نصف زمرة ذات عنصر حيادي 1 .

هذا ومن المهم الاشارة إلى أننا سنقصد بالرمز S^1 مايلي :

$$S^1 = \begin{cases} S & \text{إذا كانت } S \text{ تملك عنصراً حيادياً} \\ S \cup \{1\} & \text{إذا كانت } S \text{ لاتملك عنصراً حيادياً} \end{cases}$$

- إذا كانت نصف الزمرة S تحوي أكثر من عنصر واحد ، وكانت تحوي عنصراً k يحقق الشرط التالي :

$$\forall x \in S \qquad xk = kx = k$$

فإننا نـــدعو k **عنصراً ماصاً** أو **عنصراً صفرياً** (أو اختصاراً **صفـر** S وغالباً مانرمز له بالرمز 0) ، كما نقول عن S بأنها **نصف زمرة ذات صفر** .

هذا ويمكن تعريف **الصفر اليميني** و **الصفر اليساري** بصورة مشابهة لتعريف كل من الحيادي اليميني والحيادي اليساري .

وهنا تجدر الملاحظة بأن نصف الزمرة تحوي على الأكثر عنصراً ماصاً واحداً فقط . حيث لو فرضنا جدلاً وجود عنصرين ماصين k و k' فإن :

$$k' = k k' = k$$

كما يجدر بنا أن نلاحظ أهمية الشرط : (S تحوي أكثر من عنصر واحد) وذلك تجنباً لنصف الزمرة التافهة $\{a\}$ حيث $a^2 = a$ وبالتـــالي a حيادي وصفر بنفس الوقت .

ـ إذا كانت نصف الزمرة S لاتحوي عنصراً ماصاً ، فمن السهل تزويدهـــا بهذا العنصر ، وذلك بإضافة صفر إلى المجموعة S يحقق الشرط التالي :

$$\forall s \in S \qquad 0s = s0 = 0$$

و

$$00 = 0$$

فنحصل على نصف زمرة $S \cup \{0\}$ ذات عنصر ماص أو ذات صفر .

وهنا سنستخدم الرمز S^0 للدلالة على مايلي :

$$S^0 = \begin{cases} S & \text{إذا حوت } S \text{ على الصفر} \\ S \cup \{0\} & \text{إذا لم تحو } S \text{ على الصفر} \end{cases}$$

ـ من الجدير بالملاحظة أن أي نصف زمرة S يمكنها أن تحقق فقط واحدة من الحالات التالية (بالنسبة لكل من العنصر الحيادي والعنصر الماص) :

(١) S لاتحوي أي عنصر ماص (حيادي) يساري ولا أي عنصر مـــاص (حيادي) يميني .

(٢) S تحوي عنصراً ماصاً (حيادياً) يسارياً أو أكثر ولكن لاتحوي أي عنصر ماص (حيادي) يميني .

(٣) S تحوي عنصراً ماصاً (حيادياً) يمينياً أو أكـثر ولكن لاتحوي أي عنصر ماص (حيادي) يساري .

(٤) S تحوي عنصراً ماصاً (حيادياً) ثنائي الجانب وحيداً ، وليس هناك أي عنصر ماص (حيادي) يميني أو يساري آخر .

ـ رغم السهولة الواضحة التي لاحظناها في الانتقال من نصف زمرة ما S إلى نصف زمرة ذات عنصر حيادي أو ذات عنصر ماص ، فإننا لانستطيع إرجاع دراسة أنصاف الزمر إلى دراسة أنصاف الزمر ذات العنصر الحيـــادي أو ذات العنصر الماص . ذاك لأن إضافة أي من هذين العنصرين قد يؤدي بنا إلى التضحية ببعض الخصائص المميزة لنصف الزمرة الأصلية .

لنأخذ مثالاً بسيطاً على ذلك : لتكن G زمرة ما غير تافهة (فهي بالطبع نصف زمرة) ولنضيف إليها عنصر الصفر فنحصل على مايسمى **زمرة مع الصفر** (0 – group) وهي بالتأكيد ليست زمرة .

ـ إننا نجد بين أنصاف الزمر ذات الصفر ، نصف زمرة عديمة القيمة ظاهرياً وهي نصف الزمرة **الصفرية** أو **المنعدمـة** ، حيث أن جـــداء أي عنصرين من نصف الزمرة هذه يساوي الصفر .

$$\forall\, x, y \in S \qquad xy = 0$$

كما أن هناك نصف زمرة تدعى **صفرية يسارية** حيث :

$$\forall\, x, y \in S \qquad xy = x$$

ونصف زمرة **صفرية يمينية** حيث :

$$\forall\, x, y \in S \qquad xy = y$$

ـ يمكن اعتبار أنصاف الزمر الصفرية اليمينية واليسارية كحالات خاصة من نصف زمرة عامة يمكن تعريفها كما يلي :

لتكن A و B مجموعتين غير خاليتين و $S = A \times B$ ولنعرف عملية الضرب التالية على S :

$$(a, b)(a', b') = (a, b') \qquad a, a' \in A \text{ و } b, b' \in B$$

سوف ندعو S **عصبة مستطيلة** (rectangular band) .

إذا كان $|B| = 1$ فــإن S هي نصف زمرة صفرية يسارية ، وإذا كانت $|A| = 1$ فإن S هي نصف زمرة صفرية يمينية .

- لنفرض أن A و B مجموعتان جزئيتان من نصف زمرة S فإننــا نكتب بالتعريف :

$$AB = \{ ab \ : \ a \in A \text{ و } b \in B \}$$

وهنا يمكننا أن نلاحظ بسهولة أنه :

$$(AB)C = A(BC) \qquad \forall A, B, C \subseteq S$$

وبالتالي فإن التركيب $A_1 A_2 \ldots\ldots A_n$ ذو معنى ولا يحتاج إلى أقواس ، كما أن الرموز $A^2, A^3, \ldots\ldots$ ماهي إلا اختصار للمقادير $AA, AAA, \ldots\ldots$.

كذلك عندما تكون $B = \{b\}$ فإننا سنكتب Ab عوضاً عن $A\{b\}$ ، و $Ab \cup b$ عوضاً عن $A\{b\} \cup \{b\}$.

- إذا كان a عنصراً في نصف زمرة S لاتملك عنصراً حيادياً ، فإن a قــد لاتنتمي إلى Sa في الحالة العامة . إننا سوف نستخدم الرموز التالية :

S^1a للدلالة على $Sa \cup a$

aS^1 للدلالة على $a \cup aS$

S^1aS^1 للدلالة على $a \cup aS \cup Sa \cup SaS$

ومما هو جدير بالذكر أن كلاً من S^1a و aS^1 و S^1aS^1 هي مجموعة جزئيـة من S (أي لاتحوي العنصر الحيادي 1) .

- إن نصف الزمرة S التي تحقق الخاصة :

$$\forall a \in S \qquad aS = Sa = S$$

ماهي إلا زمرة . مع أن هذا ليس بالتعريف الشائع للزمرة ولكن يمكن أن نبرهن أنه مكافىء لتعريف J. Pierpont المعروف الذي نشره عام ١٩٠١ ، والذي نعبر عنه بمصطلحاتنا الحالية كما يلي ، **الزمـرة** G هي :

١) نصف زمرة

٢) $(\exists e \in G)(\forall a \in G)(ae = ea = a)$

٣) $(\forall a \in G)(\exists a' \in G)(aa' = a'a = e)$

كما يكافىء تعريف L. E. Dikson المنشور عام ١٩٠٥ والذي ينص على أن الزمرة G هي :

١) نصف زمرة

٢) $(\exists e \in G)(\forall a \in G)(ae = a)$

٣) $(\forall a \in G)(\exists a' \in G)(aa' = e)$

أو هي

١) نصف زمرة

٢) $(\exists e \in G)(\forall a \in G)(ea = a)$

٣) $(\forall a \in G)(\exists a' \in G)(a'a = e)$

ويكافيء تعريف Weber - Huntington للزمرة الذي نشره H. Weber عام ١٨٩٦ وعدله E.V.Huntington عام ١٩٠٢ وهو أن الزمرة G هي :

١) نصف زمرة

٢) $(\forall a, b \in G)(\exists x, y \in G)(ax = b$ و $ya = b)$

تمرين (١)

تحقق من صحة تكافؤ التعاريف الأربعة السابقة للزمرة G .

١ ـ ١ ـ ٢ نصف الزمرة

إليك فيما يلي بعض الأمثلة لأنصاف الزمر .

مثال (١)

ليكن n عدداً طبيعياً ما ($n \in N^0$) ولنأخذ المجموعة :

$$S = \{ 0 , 1 , 2 , \ldots\ldots , n - 1 \}$$

ولنعرف العملية * على S كما يلي : إن ناتج $s_1 * s_2$ حيث ($s_1 , s_2 \in S$) هو باقي قسمة $s_1 . s_2$ على n . أي $s_1 * s_2 = s_1 s_2 (\text{mod } n)$

من السهل أن نلاحظ أن $(S , *)$ نصف زمرة تبديلية . (تحقق من ذلك).

مثال (٢)

لتكن M_n مجموعة كل المصفوفات العقدية من المرتبة n مـــع عملية ضرب المصفوفات العادية ، فهي نصف زمرة .

مثال (٣)

لتكن S مجموعة كل التوابـع المستمرة ذات المتحولين x و y المعرفـــة على المربـع :

$0 \leqslant x \leqslant a$ و $0 \leqslant y \leqslant a$ ولنعرف العملية * التالية على S (التي تلعب دوراً هاماً في نظرية المعادلات التـكاملية) : ليكن $f_1 (x , y)$ و $f_2 (x , y)$ عنصرين ما من S ، إن ناتج العملية * على العنصرين السابقين هو :

$$f_1(x , y) * f_2 (x , y) = \int_0^a f_1 (x , t) f_2 (t , y) dt$$

وبالعودة إلى خصائص التكامل نجد أن $(S, *)$ نصف زمرة .

مثال (٤)

لتكن S مجموعة كل التوابع ذات المتحول الواحد x والقابلة للتكامل إطلاقاً على المجال :

$0 \leqslant x < \infty$. ولنعرف العملية $*$ التالية على هذه التوابع :

إن ناتج التابعين $f_1(x)$ و $f_2(x)$ هو :

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_0^x f_1(t) . f_2(x-t)\, dt$$

إن $(S, *)$ نصف زمرة تبديلية

مثال (٥)

لتكن S مجموعة كل السلاسل الاعتبارية ذات الأمثال العقدية والتي حدها الثابت صفر ، أي التي من الشكل :

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \qquad a_k \in C , \forall k \in N$$

ولنعرف العملية $*$ على S كما يلي :

إن ناتج السلسلتين :

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \quad , \; B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k \qquad A,B \in S$$

هو

$$A * B = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i x^i \right)^k$$

فتكون $(S, *)$ نصف زمرة .

مبرهنة (١)

إذا كانت S نصف زمرة ذات صفر فإن S هي زمرة مع الصفر إذا وفقط إذا ، تحقق الشرط التالي :

$$(\forall a \in S - \{0\}) (aS = Sa = S)$$

البرهــان

لزوم الشرط : إذا كانت $S = G^0$ فإن $aG = Ga = G$ وذلــك مهما يكن $a \in G$ حيث $G = S - \{0\}$.

لكن

$$S a = G a \cup 0 \quad و \quad a S = a G \cup 0$$

وبالتالي

$$(\forall a \in G) (a S = S a = S)$$

كفاية الشرط : نفرض تحقق الشرط

$$(\forall a \in S - \{0\}) (a S = S a = S)$$

ولنفرض $G = S - \{0\}$ مجموعة جزئية من S .

إن $G \neq \Phi$ لأن $| S | > 1$ بالتعريف .

ليكن $a , b \in G$ عنصرين كيفيين فإن $a b \in G$ حتماً وإلا فإن $a b = 0$

وبالتالي

$$S^2 = SS = (Sa) (bS) = S (ab) S = S0S = \{0\}$$

وهذا يقضي أن

$$S = aS \subseteq S^2 = \{0\}$$

أي $S = \{0\}$ وهو يتناقض مع الفرض $|S| > 1$.

وبالتالي G مغلقة بالنسبة لعملية الضرب ، أي مهما يكن $a \in G$ فإن :

$$Ga \subseteq G \quad و \quad aG \subseteq G$$

لنبرهن الآن أن $aG = G$ ، إذا لم يكن كذلك فإن $aG \subset G$ وبالتالي :

$$aS = a(G \cup 0) = aG \cup 0 \subset S$$

أي أن $aS \neq S$ مع أن $a \in G$ وهذا يخالف الفرض . وبالتالي $aG = G$ مهما يكن $a \in G$.

وبنفس الطريقة نثبت أن $Ga = G$ مهما تكن $a \in G$. إذن G زمرة جزئية من S وبالتالي فإن S زمرة مع الصفر □

١ – ١ – ٣ نصف الزمرة الجزئية

تعريف (١)

إذا كانت $(S, *)$ نصف زمرة فإن المجموعة الجزئية غير الخالية T من S تدعى **نصف زمرة جزئية** من S إذا كانت مغلقة بالنسبة للعملية $*$ ، أي إذا تحقق الشرط :

$$(\forall x, y \in T)(x * y \in T)$$

يمكن التعبير عن هذا الشرط بصورة أخرى مستخدمين مفهوم جداء مجموعتين، فنقول إن T نصف زمرة جزئية من S إذا كان :

$$T^2 \subseteq T$$

إن S نفسها نصف زمرة جزئية من S (تبعاً للتعريف) كما أن $\{0\}$ و $\{1\}$

هما نصفا زمرتين جزئيتين من S إذا حوت S على عنصر ماص وعنصر حيادي .

تعريف (٢)

إن العنصر e من نصف زمرة S يدعى **عنصراً جامداً** (أو خاملاً أو لا نام)
إذا كان $e^2 = e$. كما أن نصف الزمرة S التي كل عناصرها عناصر جامدة تدعى نصف زمرة جامدة أو « **عصبة** » .

إن كلًّا من العنصر الماص والعنصر الحيادي في نصف زمرة هو عنصر جامد ولكن العكس غير صحيح في الحالة العامة .

إن من الممتع أن نهتم بأنصاف الزمر الجزئية التي هي زمر بحد ذاتها ، وسوف ندعوها **زمراً جزئية** .

من السهل أن نلاحظ أن مجموعة غير خالية T من نصف زمرة S هي زمرة جزئية من S إذا وفقط إذا كان :

$$(\forall a \in T) (a T = T a = T)$$

تمرين (٢)

تحقق من أن الصفر لايمكن أن ينتمي إلى T إذا كانت S نصف زمرة ذات صفر و $| T | > 1$.

وهنا يجدر بنا أن نلاحظ أن العنصر الحيادي e_1 للزمرة الجزئية T من S هو عنصر جامد في S ولكنه ليس بالضرورة حيادي نصف الزمرة S .

تمرين (٣)

أثبت أنه إذا ملك عنصر a في مونوئيد S نظيراً يمينياً بالنسبة للحيادي e وآخر يسارياً ، فإنهما متساويان ولا يوجد أي نظير آخر للعنصر a في S .

١ ـ ١ ـ٤ قابلية القسمة

إذا كانت S نصف زمرة وليست زمرة فهذا يعني أن هناك على الأقل عنصرين $a , b \in S$ بحيث أنه لايوجد $x, y \in S$ تحققا العلاقتين :

$$x\,b = a \quad و \quad b\,y = a$$

من الممكن أن نجد أنه من أجل هذين العنصرين a و b قد تتحقق إحدى العلاقتين السابقتين ؛ أي أنه قد نجد x أو y تحقق إحدى المعادلتين في S .

وهذا يقودنا إلى التعريف التالي :

تعريف (٣)

يسمى العنصر b من نصف الزمرة S **قاسماً يمينياً** للعنصر a من S إذا وجد عنصر $x \in S$ بحيث يكون :

$$x\,b = a$$

ويدعى b **قاسماً يسارياً** للعنصر a من S إذا وجد عنصر $y \in S$ بحيث يكون :

$$b\,y = a$$

إذا كان b قاسماً يمينياً للعنصر a فإننا نقول « إن a **يقبل القسمة** على b من اليمين » .

وإذا كان b قاسماً يسارياً للعنصر a قلنا « إن a يقبل القسمة على b من اليسار » .

مبرهنة (٢)

لتكن S نصف زمرة ، B مجموعة كل القواسم اليمينية واليسارية لكل عنصر في S . إن :

(١) B غير خالية إذا وفقط إذا كانت S مونوئيداً (نصف زمرة واحدية) .

(٢) B زمرة جزئية من S إذا كانت غير خالية .

البرهــان

إن المجموعة

$$B = \{ b \in S \ : bS = Sb = S \}$$

(١) آ – إذا كانت S مونوئيداً ، فحياديها e ينتمي إلى B لأن

$$eS = Se = S$$

وبالتالي $B \neq \Phi$.

ب – إذا كانت $B \neq \Phi$ فيوجد عنصر $b \in S$ ينتمي إلى B ، وبالتـــالي $\forall a \in S$ فانه يوجد $x , y \in S$ بحيث :

$$bx = a \quad و \quad yb = a$$

لكن $b \in S$ وبالتالي يوجد $e \in S$ و e' بحيث :

$$be = b \quad و \quad e'b = b$$

ومنه نجد أن :

$$ae = ybe = yb = a$$

$$e'a = e'bx = bx = a$$

إذاً e حيادي يميني في S و e' حيادي يساري في S وهذا يقضي بـــأن :
$e = e'$ هو حيادي S .

(٢) إذا كانت $B \neq \Phi$ فليكن $b_1 , b_2 \in B$. إن :

$$b_1 b_2 S = b_1 (b_2 S) = b_1 S = S$$

$$S b_1 b_2 = (S b_1) b_2 = S b_2 = S$$

وبالتالي $b_1 b_2 \in B$.

إن $B \neq \Phi$ تقضي بوجود عنصر حيادي e في S ولكن :

$$eS = Se = S$$

إذاً $e \in B$.

بما أن $e \in S$ فمهما يكن $b \in B$ فإنه يوجد $b', b'' \in S$ بحيث :

$$e = b\,b' \quad \text{و} \quad e = b''\,b$$

لكن

$$b''\,b\,b' = b''\,b\,b'$$

ومنه ينتج

$$e\,b' = b''\,e$$

أي أن

$$b' = b''$$

ثم إن

$$S = e\,S = b'b\,S = b'\,S$$

$$S = S\,e = S\,b\,b' = S\,b'$$

إذاً $b' \in B$. وبالتالي B زمرة جزئية من S ▯ .

مبرهنـة (٣)

في نصف زمرة S ، مجموعة كل العناصر التي تقبل القسمة من اليمين ومن اليسار على كل عنصر من عناصر S هي إما خالية او زمرة جزئية من S .

البرهـان :

لتكن C المجموعة المذكورة في نص المبرهنة . إذا لم تكن $C = \Phi$ فلنفرض

أن $c_2 , c_1 \in C$. فمهما يكن $a \in S$ يوجد $x \in S$ بحيث :

$$c_1 = a x$$

أي $c_1 c_2 = a (x c_2)$ وبالتالي فــإن a يقبل القسمة على $c_1 c_2$ من اليسار .

بنفس الطريقة نثبت أن a يقبل القسمة على $c_1 c_2$ من اليمين ، وبالتــالي $c_1 c_2 \in C$.

الخاصة التجميعية محققة في C لأن $C \subseteq S$.

بما أن c_1 و c_2 تنتمي إلى C فإنه يوجد u , v , w في S بحيث :

$$c_1 = c_2 w \quad \text{و} \quad c_2^2 v = c_2 \quad \text{و} \quad u c_2^2 = c_2$$

ومنه نجد أن :

$$u c_2 = u c_2 c_2 v = c_2 v$$

وبالتالي :

$$c_2 (c_2 v^2 c_1) = (c_2^2 v)(v c_1) = c_2 v c_1 = u c_2 c_1 = u c_2 c_2 w = c_2 w = c_1$$

أي أن العنصر $c_2 v^2 c_1 = y$ حل للمعادلة $c_2 y = c_1$ في S .

لنثبت الآن أن $y \in C$. لدينا مهما يكن $a \in S$ يوجـــد b و s من S بحيث أن :

$$c_2 = a b \qquad\qquad c_1 = s a$$

وبالتالي :

$$y = a b v^2 s a = a (b v^2 s a) = (a b v^2 s) a$$

أي أن $y \in C$.

وبطريقة مشابهة يمكن أن نجـد حلاً $x \in S$ للمعادلة $x c_2 = c_1$ ثم نــبرهن أن $x \in C$.

وبذا يتم البرهان على أن C إن لم تكن خالية فهي زمرة جزئية من S ▯

مبرهنـة (٤)

إذا ملكت نصف زمرة S عنصراً g يقسم كلاً من عناصرها يميناً ويساراً ، ويقبل ، بنفس الوقت ، القسمة يميناً ويساراً على كل عنصر من عناصرها ، فان S زمرة .

البرهـــان :

مهما يكن a و b من S فإنه يوجد x_1 , x_2 , y_1 , y_2 في S بحيث :

$$a = x_1 g \quad \text{و} \quad a = g y_1 \quad \text{و} \quad g = x_2 b \quad \text{و} \quad g = b y_2$$

وبالتالي فإن :

$$a = x_1 x_2 b \quad \text{و} \quad a = b y_2 y_1$$

أي أن $x = x_1 x_2$ و $y = y_2 y_1$ حل المعادلتين :

$$a = x b \quad \text{و} \quad a = b y$$

وبالتالي فإن S زمرة ▯

مثال (٦)

لتكن G_1 و G_2 زمرتين ما بحيث $G_1 \cap G_2 = \Phi$. ولتكن $S = G_1 \cup G_2$ ولنعرف قانون تشكيل داخلي على S كما يلي : لتكن $a , b \in S$ فإنه إذا كانت a و b من زمرة واحدة (G_1 أو G_2) فإن ناتج ab هو نفسه في زمرتها . أما إذا كانت $a \in G_1$ و $b \in G_2$ فإن :

$$ab = ba = b$$

فمن السهل أن نتحقق من خاصية التجميـع .

ثم إنه مهما يكن $a \in G_1$ فإن :

$$aS = a(G_1 \cup G_2) = aG_1 \cup aG_2 = G_1 \cup G_2 = S$$
$$Sa = (G_1 \cup G_2)a = G_1 a \cup G_2 a = G_1 \cup G_2 = S$$

ثم إنه مهما يكن $b \in G_2$ ومهما يكن $s \in S$ فإنه يوجد $x, y \in S$ بحيث :

$$xs = b \quad و \quad sy = b$$

ذلك لأنه إذا كانت $s \in G_2$ فإن للمعادلتين السابقتين حل في G_2 وبالتالي في S.

أما إذا كانت $s \in G_1$ فإن $x = y = b$ حل للمعادلتين في S .

إذاً :

$$C = G_2 \quad و \quad B = G_1$$

١ ــ ١ ــ ٥ التشاكل والتماثل

تعريف (٤)

لتكن $(S, *)$ و $(S', .)$ نصفي زمرتين ، وليكن $\varphi : S \to S'$ تطبيقاً فإننا ندعو φ **تشاكلاً** (homomorphism) إذا حقق الشرط التالي :

$$\forall x, y \in S \qquad \varphi(x * y) = \varphi(x) . \varphi(y)$$

غالباً ما نهمل ذكر رمز العمليتين المعرفتين على S و S' معتبرين أن ذلك مفهوم ضمناً ونكتب الشرط كما يلي :

$$\forall x, y \in S \qquad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

إذا كان φ متبايناً دعوناه « **تشاكلاً احادياً** » monomorphism .

وإذا كان φ تقابلاً دعوناه « **تماثلاً او تشاكلاً تقابلياً** » isomorphism .

وإذا كان $S = S'$ فــإن التشاكل φ يدعى « **تشاكلاً داخلياً او ذاتياً** » endomorphism .

وإذا كان φ تقابلاً و $S = S'$ دعوناه « **تماثلاً ذاتياً** » automorphism .

هذا ونقول عن S و $\varphi(S)$ أنهما « **متشاكلتان** » homomorphic إذا كان φ تشاكلاً . ونعبر عن ذلك بالرمز $S \sim \varphi(S)$.

ونقول عن S و S' أنهما « **متماثلتان** » isomorphic إذا كان φ تماثلاً ونعبر عن ذلك بالرمز $S \approx S'$.

تمرين (٤)

أثبت أنه إذا كانت S نصف زمرة و φ تشاكلاً من S إلى نصف زمرة S' فإن $\varphi(S)$ هو نصف زمرة جزئية من S' .

مثال (٧) :

لتكن M مجموعة ما غير خالية ولتكن S مجموعة جزئية من $\mathcal{G}(M)$ بحيث:

$$\forall\ A, B \in S \qquad A \cap B \in S$$

إن $(S, \cap)$ تشكل نصف زمرة تبديلية كل عنصر من عناصرها هو عنصر جامد .

إن من الممتع أن نبرهن أن كل نصف زمرة تبديلية ذات عناصر كلها جامدة تماثل نصف زمرة S من هذا الشكل .

مبرهنة (٥)

إن اي عصبة تبديلية E ، تماثل نصف زمرة S . حيث S مجموعة مجموعات جزئية من المجموعة E مصحوبة بعملية التقاطع .

البرهان :

لنفرض $A_e \subseteq E$ مجموعة كل العناصر من E التي تقبل القسمة (يميناً ويساراً)

على العنصر $e \in E$. أي لتكن

$$A_e = eE \cap Ee = eE$$

(لأن E تبديلية) .

من الواضح أنه إذا كان $f \in E$ فإن :

$$A_{ef} \subseteq A_e \cap A_f$$

[لأن $x \in A_{ef}$ يقضي بوجود عنصر $a \in E$ بحيث $x = aef = efa$ وبالتالي $x \in eE = A_e$ و $x \in Ef = A_f$] .

من جهة أخرى إذا فرضنا $x \in A_e \cap A_f$ فـــإنه يوجد عنصران $a, b \in E$ بحيث :

$$x = ae = ea \quad , \quad x = fb = bf$$

ولكن

$$x = x^2 = aebf = (ab)(ef) = (ef)(ab) \in A_{ef}$$

وبالتالي

$$A_e \cap A_f = A_{ef}$$

لتكن

$$S = \{ A_e \subseteq E : e \in E \}$$

فتكون $(S, \cap)$ نصف زمرة تبديلية ذات عناصر كلها جامدة .

نصطنع التطبيق :

$$\varphi : E \to S \; ; \; e \to A_e$$

إن φ تشاكل لأنه مهما يكن $f, e \in E$ فإن :

$$\varphi(ef) = A_{ef} = A_e \cap A_f = \varphi(e) \cap \varphi(f)$$

كذلك فإن φ تقابل لأن :

(i) $$\varphi(e) = \varphi(f) \Rightarrow A_e = A_f$$

لكن $e^2 = e \in A_e$ و $f^2 = f \in A_f$ ثم إنه يوجـــد عنصران g و y من E بحيث :

$$e = gf \quad \text{و} \quad f = ye$$

وبالتالي

$$e = gye \quad \text{و} \quad f = ygf$$

ينتج عن ذلك أن :

$$e = gye = gygf = gyf = f$$

(ii) مهما تكن $A \in S$ يوجد $e \in E$ بحيث $A = A_e$ وبالتالي يوجـــد $e \in E$ بحيث $A = \varphi(e)$

إذن φ تماثل و $E \approx S$ ▯

١ ـ ١ ـ ٦ نصف زمرة التحويلات التامة

The full transformation semigroup

تعريف (٥)

الدالة $\varphi : A \to A$ تدعى **تحويــلا** للمجموعة A .

ونرمز لمجموعة كل التحويلات لمجموعة A بالرمز $\mathcal{F}(A)$.

إن المجموعة $\mathcal{F}(A)$ مع عملية تركيب التطبيقات (أو فلنقل جداء التحويلات) هي نصف زمرة ، ندعوها **«نصف زمرة التحويلات التامة»** للمجموعة A .

إن الزمرة التناظرية $\mathfrak{S}(A)$ المحتوية على كل تباديل A ، أي المحتوية على كل التقابلات من A على A مع عملية تركيب التطبيقات (جـداء التحويلات) هي زمرة جزئية من $\mathcal{F}(A)$.

تمرين (٥)

عندما تكون A مجموعة غير خالية وعدد عناصرها m فأثبت أن :

$$|\mathcal{F}(A)| = m^m \quad \text{و} \quad |\mathcal{G}(A)| = m!$$

تعريف (٦)

إن تشاكلاً φ من نصف زمرة S إلى نصف زمرة التحويلات $\mathcal{F}(A)$ لمجموعة A يسمى **تمثيلاً** لنصف الزمرة S بدوال (أو بتحويلات) .

إذا كان φ تشاكلاً أحادياً فسندعوه « **تمثيلاً اميناً** » faithful representation.

تعريف (٧)

إذا كانت S نصف زمرة فإن التحويل :

$$\rho_a : S \to S \;;\; x \to xa \qquad a \in S$$

يدعى « **الانسحاب اليميني الداخلي** » لنصف الزمرة S المقابل للعنصر a من S .

كما أن التحويل :

$$\lambda_a : S \to S \;;\; x \to ax$$

يدعى « **الانسحاب اليساري الداخلي** » لنصف الزمرة S المقابل للعنصر a من S

تمرين (٦)

أثبت أن كلاً من $\{ \rho_a : a \in S \}$ و $\{ \lambda_a : a \in S \}$ نصف زمرة جزئيـة من $\mathcal{F}(S)$.

وأثبت أن

$$\rho_a \rho_b = \rho_{ba}$$

بينما

$$\lambda_a \lambda_b = \lambda_{ab}$$

تعريف (٨)

إن التحويل

$$\varphi : S \to \mathscr{F}(S) \; ; \; a \to \lambda_a$$

يدعى «**التمثيل النظامي**» لنصف الزمرة S بينما التحويل :

$$\psi : S \to \mathscr{F}(S) \; ; \; a \to \rho_a$$

يدعى «**التمثيل النظامي المعاكس**» لنصف الزمرة S .

إذا كان φ تمثيلاً نظامياً لنصف الزمرة S^1 فإننـــا ندعوه «**ممدد التمثيل النظامي**» لنصف الزمرة S . وكذلك الأمر بالنسبة **لممدد التمثيل النظامي المعاكس**

تمرين (٧)

أثبت أن كلاً من ممدد التمثيل النظامي وممـــدد التمثيل النظامي المعاكس هو تمثيل أمين دوماً .

تعريف (٩)

تدعى نصف الزمرة S «**اختزالية يسارية**» إذا كان كل عنصر من عناصر S قابل للاختصار من اليسار (أي $\forall x, y \in S$ و $\forall a \in S$ فإن $ax = ay$ يقضي $x = y$) . وبطريقة مشابهة نعرف «**الاختزالية اليمينية**» .

مبرهنـــة (٦)

يمكن لنصف زمرة S ان تمثل تمثيلاً اميناً كنصف زمرة من التحويلات المتباينة

لمجموعة في نفسها ، إذا وفقط إذا ، كانت S اختزالية يسارية ، وكانت S لاتملك اي عنصر جامد ليس بحياديها (الواحد) .

هذا وفي حال تحقق الشرطين السابقين فإن :

(١) إذا كانت a و b من S بحيث $ba = b$ فإن $a = 1$ و $S = S^1$.

(٢) S^1 نصف زمرة اختزالية يسارية لاتملك اي عنصر جامد مختلف عن الواحد .

(٣) ممدد التمثيل النظامي لنصف الزمرة S هو تمثيل أمين لـ S كنصف زمرة من التطبيقات المتباينة لـ S_1 في نفسها .

البرهان :

لزوم الشرط : نفرض أن S نصف زمرة تحويلات متباينة لمجموعة A في نفسها . وليكن $g , h , f \in S$ بحيث $g f = g h$.

إنه مهما يكن $x \in A$ فإن $g f (x) = g h (x)$. لكن g متباين ، وبالتالي

$$f(x) = h (x) \qquad \forall x \in A$$

وهذا يؤدي إلى $f = h$. وبالتالي S اختزالية يسارية .

إذا كان φ عنصراً جامداً في S فإن :

$$\forall x \in A \qquad \varphi \varphi (x) = \varphi (x)$$

لكن $\varphi \in S$ فهو متباين ، ومنه ينتج أن :

$$\varphi (x) = x \qquad \forall x \in A$$

أي أن φ تطبيق مطابق ، فهو حيادي نصف الزمرة S .

كفاية الشرط : نفرض S نصف زمرة اختزالية يسارية ولا تملك عنصراً جامداً ليس بحياديها ، فإذا برهنا صحة (١) و (٢) و (٣) فقد تم برهان كفاية الشرط .

(١) ليكن a و b عنصرين من S بحيث $ba = b$ عندئذ $ba^2 = ba$ وهذا يؤدي إلى أن $a^2 = a$ (لأن S اختزالية يسارية) .

ينتج أن $a = 1$ (لأن S لاتملك عنصراً جامداً ليس بحياديها) .

وبالتالي S تملك عنصراً حيادياً . أي أن $S = S^1$.

(٢) إذا كانت $S = S^1$ فلا شيء يجب برهانه .

لنفرض $S \neq S^1$ ولنفرض جدلاً أن هناك ثلاثة عناصر a , b , c من S بحيث :

$$ca = cb \quad \text{و} \quad a \neq b$$

عندئذ $c \neq 1$ وبالتالي $c \in S$.

بما أن S اختزالية يسارية فلا يمكن أن يكون a و b من S معاً . وبالتالي لنفرض أن

$$b \in S \ \text{و}\ a = 1 \qquad \text{إذن} \qquad c = cb \qquad \text{مع} \qquad b \neq 1$$

وهذا يناقض مابرهناه في (١) إذاً S^1 نصف زمرة اختزاليـــة يسارية ومن الواضح أنها لا يمكن أن تملك عنصراً جامداً غير الواحد .

(٣) ليكن

$$\varphi : S^1 \to \mathscr{F}(S^1) ; x \to \lambda_x$$

ممدد التمثيل النظامي لنصف الزمرة S . فإن φ تمثيل أمين .

إذا كانت $x , y \in S^1$ و $a \in S$ بحيث $\lambda_a(x) = \lambda_a(y)$ فإن :

$$ax = ay$$

وبالتالي $x = y$ حسبما جاء في (٢) . أي أن λ_a (مهما يكن $a \in S$) هو تحويل متباين لـ S^1 في نفسها .

ينتج عن (١) و (٢) و (٣) أن S يمكن أن تمثل تمثيلاً أميناً كنصف زمرة لمجموعة من التحويلات المتباينة لمجموعة في نفسها ▯

تعريف (١٠)

نقول عن تحويل ρ لنصف زمرة S أنه **« انسحاب يميني »** لـ S إذا كان :

$$x.\rho(y) = \rho(xy)$$

وذلك مهما تكن $x, y \in S$.

ونقول عن تحويل λ لنصف زمرة S أنه **« انسحاب يساري »** لـ S إذا كان :

$$\lambda(x).y = \lambda(xy)$$

وذلك مهما تكن $x, y \in S$.

ونقول عن انسحاب يميني ρ وانسحاب يساري λ لنصف زمرة S أنهما **مترابطان** إذا كان :

$$\forall x, y \in S \quad , \quad x.\lambda(y) = \rho(x).y$$

تمرين (٨)

برهن أن الانسحابين الداخليين λ_a و ρ_a مترابطان .

مبرهنة (٧)

ليكن λ و ρ انسحابين يساري ويميني لنصف زمرة S ، وليكن $a \in S$ عندئذ :

$$\lambda \lambda_a = \lambda_{\lambda(a)} \quad و \quad \rho \rho_a = \rho_{\rho(a)}$$

وإذا كان λ و ρ مترابطين فإن

$$\lambda_a \lambda = \lambda_{\rho(a)} \quad و \quad \rho_a \rho = \rho_{\lambda(a)}$$

البرهـــان :

مهما يكن $x \in S$ فإن :

$$\lambda \lambda_a (x) = \lambda(ax) = \lambda(a) . x = \lambda_{\lambda(a)} (x)$$

$$\rho \rho_a (x) = \rho(xa) = x \rho(a) = \rho_{\rho(a)} (x)$$

لنفرض الآن أن λ و ρ مترابطان فينتج أنه مهما يكن x من S فإن :

$$\lambda_a \lambda(x) = \lambda_a (\lambda(x)) = a \lambda(x) = \rho(a) . x = \lambda_{\rho(a)} (x);$$

$$\rho_a \rho(x) = \rho_a (\rho(x)) = \rho(x) . a = x . \lambda(a) = \rho_{\lambda(a)} (x)$$

تمرين (٩)

أثبت أنه إذا كانت نصف الزمرة S تملك حيادياً يمينياً فإن كل انسحاب يميني لـ S هو داخلي .

مبرهنة (٨)

إذا كانت S نصف زمرة وكانت $A = S^1$ فإنه يوجد تشاكل احادي

$$\varphi : S \to \mathcal{F}(A)$$

البرهـــان :

لنصطنع التطبيق :

$$\lambda_a : S^1 \to S^1 ; \; x \to a x \qquad a \in S$$

إن $\lambda_a \in \mathcal{F}(A)$ وبالتالي يوجد تطبيق :

$$\varphi : S \to \mathscr{F}(A)\ ;\ a \to \lambda_a$$

إن φ متباين لأنه $\forall\, a, b \in S$ فإن :

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \lambda_a = \lambda_b$$

أي

$$\forall\, x \in S^1 \qquad \lambda_a(x) = \lambda_b(x) \Rightarrow a\,x = b\,x$$

لكن $1 \in S^1$ وبالتالي $a\,1 = b\,1 \Rightarrow a = b$

كذلك φ تشاكل لأنه $\forall x \in S^1$ فإن :

$$\lambda_a \lambda_b(x) = \lambda_a(bx) = a\,b\,x = \lambda_{ab}(x)$$

وبالتالي

$$\lambda_a \lambda_b = \lambda_{ab}$$

أي أن

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(a\,b)$$

ملاحظة (١)

إن هذه المبرهنة شديدة الشبه بمبرهنة Cayley بالنسبة للزمرة .

تمرين محلول (١)

لتكن A مجموعة غير خالية ، $\mathscr{F}(A)$ نصف زمرة التحويلات التامة للمجموعة $\underline{A}$ ، أثبت أن :

الشرط اللازم والكافي ليكون $\psi \in \mathscr{F}(A)$ قاسم يساري للعنصر $\varphi \in \mathscr{F}(A)$ هو أن يكون :

$$\psi(A) \supseteq \varphi(A)$$

الحـل :

(١) بفرض ψ قاسم يساري للتحويل φ فإنـــه يوجد تحويل $g \in \mathcal{F}(A)$ بحيث :

$$\varphi = \psi g$$

وبالتالي

$$\varphi(A) = \psi g(A) \subseteq \psi(A)$$

(٢) بفرض $\psi(A) \supseteq \varphi(A)$ فإنه $\forall\ y \in \varphi(A)$ فإن $y \in \psi(A)$

أي أنه مهما يكن $x \in A$ فإن :

$$y = \varphi(x) \in \psi(A)$$

أي أنه مهما يكن $x \in A$ فإنه يوجد $u \in A$ بحيث $y = \psi(u)$

لنصطنع التحويل

$$h : A \to A$$

بحيث إذا كانت $y = \psi(u)$ فإننا نفرض $h(x) = u$

وبالتالي :

$$\psi h(x) = \psi(u) = y = \varphi(x) \qquad \forall\ x \in A$$

أي أن

$$\psi h = \varphi$$

تعريف (١١)

إذا كانت $(S, *)$ و $(T, .)$ نصفي زمرتين فـــإن الجداء الديكارتي . (Cartesian probuct)

$$S \times T = \{ (s, t) : s \in S, t \in T \}$$

مع قانون التشكيل الداخلي :

$$(s, t)(s', t') = (s * s', t . t')$$

يشكل نصف زمرة (تحقق من ذلـك) ندعوها « **الجداء المباشر** » لنصفي الزمرتين S , T .

تمرين محلول (٢)

أثبت أن نصف الزمرة S تماثل عصبة مستطيلة E إذا وفقط إذا كانت تماثل الجداء المباشر لنصف زمرة صفرية يسارية ونصف زمرة صفرية يمينية .

الحـــل :

لزوم الشرط :

بفرض S تمثل الجـداء المباشر لنصف زمرة صفرية يسارية A ونصف زمرة يمينية B أي $S \approx A \times B$ فإنه :

$$(\forall\ a, a' \in A)\ (\forall b, b' \in B)\ [\ (a,b)\ (a',b') = (aa', bb') = (a, b')\ ]$$

وبالتالي فإن $A \times B$ عصبة مستطيلة .

كفاية الشرط :

بفرض S تماثل عصبة مستطيلة E ، فلنبرهن أن E تماثل الجداء المباشر لنصف زمرة يسارية ونصف زمرة يمينية فيتم المطلوب .

لتكن $E = A \times B$ (A , B مجموعتان غير خاليتين) .

إذاً :

$$(\forall\ a, a' \in A)(\forall\ b, b' \in B)[\ (a, b)\ (a', b') = (a, b')\ ]$$

لنعرف على A العملية التالية :

$$(\forall a,a' \in A) (a a' = a)$$

ولنعرف على B العملية التالية :

$$(\forall b,b' \in B) (b b' = b')$$

ثم لنصطنع التطبيق :

$$\varphi : A \times B \to A \times B \ ; \ (a,b) \to (a,b)$$

الذي منطلقه العصبة المستطيلة $E = A \times B$ ومستقره الجداء المباشر لنصفي الزمرتين $A \times B$

إن

$$\varphi [(a,b) (a',b')] = \varphi (a,b') = (a,b')$$

لكن

$$\varphi (a,b) \varphi (a',b') = (a,b) (a',b') = (a,b')$$

إذاً φ تشاكل . ولكن حسب تعريفه تطبيق مطابق فهو تقابل وبالتالي $\bar{\bar{\varphi}}$ تماثل .

۱ ــ ۱ ــ ۷ نصف الزمرة الدوارة Cyclic semigroup

تعريف (۱،۲)

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من نصف زمرة S . إن المجموعة B المؤلفة من كل العناصر $b \in S$ التي يمكن التعبير عنها كجداء عناصر من A هي نصف زمرة جزئية من S . نقول عن B أنها نصف زمرة جزئية **مولدة** من A ونقول عن A أنها **مجموعة مولدات** B ونعبر عن ذلك بالرمز :

$$B = \langle A \rangle$$

هذا وإذا كانت A مجموعة جزئية منتهية من S ؛ $A = \{ a_1 , a_2 , \cdots , a_m \}$

فسنكتب $B = \langle A \rangle$ بالشكل :

$$B = \langle a_1 , a_2 , \cdots , a_m \rangle$$

يمكن التعبير أيضاً عن نصف الزمرة B التي مجموعة مولداتها A بالشكل :

$$B = \langle A \rangle = A \cup AA \cup AAA \cup \cdots\cdots$$

هذا ويمكن أن نلاحظ بسهولة أن :

(١) $\langle\langle A \rangle\rangle = \langle A \rangle$

(٢) إذا كانت $A_1 \subseteq A_2$ فإن :

$$\langle A_1 \rangle \subseteq \langle A_2 \rangle$$

إن بالامكان الوصول إلى مجموعة مولدات نصف زمرة جزئية بطريقة أخرى . فنحن نعلم أنه إذا كانت S نصف زمرة وكانت $\{ K_i : i \in I \}$ مجموعة أنصاف زمر جزئية من S فإن :

$$\bigcap_{i \in I} K_i$$

هو مجموعة خالية أو نصف زمرة جزئية من S .

إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من نصف زمرة S وكانت B تقاطع كل أنصاف الزمر الجزئية من S الحاوية على A (S نفسها تحوي A) فـإن B هي نصف زمرة جزئية من S تمتاز بما يلي :

(١) $A \subseteq B$.

(٢) إذا كانت K نصف زمرة جزئية من S تحوي A فإن $B \subseteq K$.

أي أن B أصغر نصف زمرة جزئية تحوي A (تحقق من ذلك) .

تمرين محلول (٣)

لتكن S نصف زمرة ، A مجموعة جزئية غير خالية من S .

أثبت أن $B = \langle A \rangle$ إذا وفقط إذا كانت B تقاطـــع كل أنصاف الزمر الجزئية من S الحاوية على A .

الحـــل :

لزوم الشرط :

نفرض B تقاطع كل أنصاف الزمر الجزئية من S الحاوية على A .

إن $A \subseteq B$ وبالتالي فـــإن B تحوي كل الجداءات الممكنة لعناصر من A أي أن :

$$\langle A \rangle \subseteq B$$

من ناحية أخرى $A \subseteq \langle A \rangle$ وبالتالي حسب تعريف B فإن :

$$B \subseteq \langle A \rangle$$

ومنه ينتج أن :

$$B = \langle A \rangle$$

كفاية الشرط :

نفرض $B = \langle A \rangle$.

إن كل نصف زمرة جزئية من S تحوي A ، تحوي $\langle A \rangle$ وبالتالي تحوي B وهكذا ينتج أن B هي أصغر نصف زمرة جزئية من S تحوي A ، أي أن B هي تقاطع كل أنصاف الزمر الجزئية من S التي تحوي A .

تعريف (١٣)

إذا كانت S نصف زمرة وكانت A مجموعة جزئية غير خالية من S بحيث

$S = \langle A \rangle$ فإن A هي مجموعة مولدات S .

ملاحظة (٢)

إن كل نصف زمرة تملك مجموعة مولدات واحـــدة أو أكثر . فمثلاً S نفسها هي مجموعة مولدات S . لكنه عادة يوجـد عـدة مجموعات مولدة لنصف الزمرة S ، وهذا واضح لأنه إذا كانت $A \subset S$ مجموعة مولدات لـ S فـــإذا أخذنا أي مجموعة جزئية من S تحوي A فهي مجموعة مولدة لـ S أيضـاً . وهنا نجد أن من المفيد أن نبحث عن مجموعة المولدات التي تحوي أقل عدد ممكن من العنـاصر ، التي تـــدعى عـادة **«مجموعة المولدات غـير الخزولـة»** irreducible generating set أي المجموعة المولدة التي لاتحوي أي مجموعة جزئية حقاً تولد S أيضاً . وهنا تجدر الملاحظة أن هذه المجموعة قد لا تكون الوحيـدة في S .

إن كل نصف زمرة منتهية تملك مجموعة مولدات أصغرية (غـــير خزولة) والوصول إليها ليس صعباً فانطلاقاً من أية مجموعة مولدة لنصف الزمرة وبعـد أن نحذف منها كل عنصر يمكن التعبير عنه كجداء لعناصر من المجموعة الباقية نصل إلى مجموعة المولدات الأصغرية . وهنا يجدر بنا أن نلاحظ أن المجموعات المولدة الأصغرية لنصف زمرة S لاتحوي ـ بالضرورة ـ عدداً واحداً من العناصر .

إن أنصاف الزمر غير المنتهية قد لاتحوي مجموعات مولدة أصغرية ، والمثال التالي يوضح ذلك .

مثـال (٨) :

لتكن S مجموعة كل الأعداد الطبيعية N ولنعرف عليها قانون التشكيل الداخلي :

$a\,b$ = القاسم المشترك الأعظم لـ a و b حيث $a, b \in N$

إذا كانت A مجموعة مولدات S (وهي غير منتهية طبعاً) وكان n عدداً ما من A فإن :

$A' = A - \{ n \}$ مجموعة مولدات لـ S . ذلك لأن $2n$ و $3n$ مثـلاً يمكن التعبير عنها كجداء عناصر من A (لاحظ أن كلاً من $2n$ و $3n$ لايمكن التعبير عنه كجداء لعناصر من A بينها n) وبالتالي كجداء عناصر من A' لكن n هي القاسم المشترك الأعظم لـ $2n$ و $3n$ وبالتالي $S = < A' >$ مع $A' \subset A$.

تعريف (١٤)

إذا كان a عنصراً من نصف زمرة S فإن :

$$< a > = \{ a , a^2 , a^3 , \cdots \} = \{ a^n : n \in N \}$$

نصف زمرة جزئية من S ندعوها **نصف زمرة جزئية دوارة** من S مولدها a.

وإذا كانت $S = <a>$ فـإننا نقول عن S أنها **نصف زمرة دوارة** مولدها a .

هذا وإن بعض المؤلفين يدعوها **نصف زمرة وحيدة المولد** Monogenic semigroup

إن **مرتبـة** أي عنصر $a \in S$ هو بالتعريف مرتبـة نصف الزمرة الجزئيـة الدوارة $< a >$.

مبرهنة (٩)

لتكـن S نصف زمرة دوارة مولدها a ، أي $S = <a>$. فإن :

(١) $< a >$ منتهية إذا وفقط إذا وجد عددان طبيعيان s , r $(r < s)$ بحيث $a^r = a^s$.

(٢) إذا كانت $< a >$ غير منتهية ، فإنها تماثل نصف الزمرة $(N , +)$

البرهـان :

(١) **لزوم الشرط :** نفرض وجود عددين s, r ($r < s$) بحيث أن $a^r = a^s$. كي نبرهن أن $S = \langle a \rangle$ منتهية ، دعنا نفرض أن s هي أصغر عدد صحيح موجب يحقق الشرط :

a^s هي أول قوة لـ a تساوي قوة أخرى لـ a أصغر منها أساً .

بما أن $a, a^2, \ldots, a^{s-1}$ كلها متمايزة فإن r هو العـدد الصحيح الموجب الوحيد الأقل من s الذي يحقق الشرط $a^r = a^s$.

لنفرض $m = s - r$ فيكون $a^{m+r} = a^r$.

وبالتالي مهما يكن العدد الصحيح الموجب k فإن $a^{km+r} = a^r$

(لبرهان ذلك اضرب طرفي المساواة $a^{m+r} = a^r$ بـ a^m وذلك $k-1$ مرة) .

والآن مهما يكن $n \in N$ بحيث $n > s$ فمن الممكن كتابته بالشكل :

$$n - s = \lambda m + \mu$$

أي

$$n = (\lambda + 1) m + r + \mu$$

حيث λ و μ عددان صحيحان

$$0 \leqslant \mu < m \quad \text{و} \quad \lambda \geqslant 0$$

وبالتالي إذا كانت $n \geqslant s$ فإن :

$$a^n = a^{(\lambda+1)m+r} \cdot a^\mu = a^r \cdot a^\mu = a^{r+\mu}$$

لكن $s > r + m > r + \mu$ وبالتالي :

$$a^n \in \{ a, a^2, \ldots, a^r, \ldots, a^{r+m-1} \}$$

وبالتالي $\langle a \rangle$ منتهية ، بل ومن المرتبة $r + m - 1$.

كفاية الشرط : نفرض

$$S = \{ a , a^2 , \dots , a^{s-1} \}$$

إن $a^s \in \langle a \rangle$ حسب تعريف $\langle a \rangle$ وبالتالي لابـــد من وجود عنصر ينتمي للمجوعة :

$$\{ a , a^2 , \dots , a^{s-1} \}$$

يساوي a^s أي لابد من وجود $r \in N$ $(r < s)$ بحيث $a^r = a^s$

(٢) إذا كانت $\langle a \rangle$ غير منتهية فلنصطنع التطبيق :

$$\varphi : \langle a \rangle \to N ; \; a^n \to n$$

حيث $(N,+)$ نصف زمرة الأعداد الطبيعية مع الجمع العادي .

إن من السهل أن نثبت أن φ تقابل حيث :

$$\varphi (a^{n_1}) = \varphi (a^{n_2}) \Rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow a^{n_1} = a^{n_2}$$

ثم $\forall n \in N$ فإن $a^n \in \langle a \rangle$.

كذلك φ تشاكل لأن :

$$\varphi(a^{n_1} . a^{n_2}) = \varphi (a^{n_1+n_2}) = n_1 + n_2 = \varphi (a^{n_1}) + \varphi (a^{n_2})$$

نتيجة (١)

(١) جميع أنصاف الزمر الدوارة غير المنتهية متشاكلة .

(٢) إذا كانت في $\langle a \rangle$ كل قوتين مختلفتي الأس غير متساويتين فإن $\langle a \rangle$ غير منتهية لكنها قابلة للعد .

(٣) نصف الزمرة الدوارة غير المنتهية لاتحوي أي عنصر جامد .

تعريف (١٥)

إذا كانت S نصف زمرة دوارة منتهية مولدها a من الشكل :

$$S = \{ a , a^2 , \ldots , a^r , \ldots a^{r+m-1} \}$$

حيث $a^{r+m} = a^r$ فإن r تدعى **دليل** a بينما m تدعى **دور** a أو نقول دليل $\langle a \rangle$ (index) ودور $\langle a \rangle$ (period) .

ملاحظة (٢)

من الجدير بالملاحظة أن :

الدليل + الدور = المرتبة + ١

تمرين (١٠)

أثبت أنه :

(١) مهما يكن $r , m \in N$ فإنه يوجد نصف زمرة دوارة منتهية دليلها r ودورها m .

(٢) تتماثل نصفا زمرتين دوارتين إذا وفقط إذا كان لهما نفس الدليل ونفس الدور .

إرشاد :

خذ $S = \{ 1,2 , \ldots , r , \ldots , r + m - 1 \}$

وعرف عليها قانون التشكيل :

$$x_* y = \begin{cases} x + y & \text{إذا كانت } r + m > x + y \\ r+(x + y - r)\bmod m & \text{إذا كانت } r + m \leqslant x + y \end{cases}$$

ثم أثبت أن $T = \langle a \rangle$ ذات الدليل r والدور m تماثل S .

تمرين (١١)

لدينا التحويل a المعرف على $\{0,1,2,\dots r,\dots, r+m-1\}$ كما يلي :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & r & \cdots & r+m-2 & r+m-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & r+1 & \cdots & r+m-1 & r \end{pmatrix}$$

أثبت أن $\langle a \rangle$ نصف زمرة دوارة دليلها r ودورها m . ماذا تستنتج ؟

مبرهنة (١٠)

لتكن $\langle a \rangle$ نصف زمرة جزئية دوارة منتهية دليلها r ودورها m فإن :

$$K_a = \{ a^r , a^{r+1} ,\dots, a^{r+m-1} \}$$

زمرة جزئية دوارة من $\langle a \rangle$ مرتبتها m .

البرهـــان :

مهما يكن العددان الطبيعيان u و v بحيث $u > r$ و $v > r$ فإن :

$$u + v - r = \lambda m + \mu \qquad \lambda \geqslant 0 \text{ ، } 0 \leqslant \mu < m$$

وبالتالي

$$a^u . a^v = a^{u+v} = a^{r+\mu+\lambda m} = a^{r+\mu} \in K_a$$

كذلك إذا كان

$$a^u = a^v$$

فإن $$(u - v) \equiv 0 \bmod m$$

ذلك لأنه لو فرضنا

$$u = r + \lambda_1 m + \mu_1$$

$$v = r + \lambda_2 m + \mu_2$$

لنتج

$$a^{r+\lambda_1 m+\mu_1} = a^{r+\lambda_2 m+\mu_2}$$

وبالتالي

$$a^{r+\mu_1} = a^{r+\mu_2}$$

لكن

$$r+\mu_2 < r+m \quad \text{و} \quad r+\mu_1 < r+m$$

وبالتالي

$$r+\mu_2 = r+\mu_1$$

ومنه

$$\mu_1 = \mu_2$$

إذاً

$$u - v \equiv 0 \bmod m$$

ولنبرهن الآن على وجود عنصر حيادي في <a> ؛ من أجل ذلك نفرض أن $e = a^u$ عنصر جامد فيكون

$$u \equiv 0 \bmod m \Leftarrow (2u - u) \equiv 0 \bmod m \Leftarrow e^2 = e$$

إن هذا العنصر الجامد هو الحيادي في K_a ذلك لأن $a^{km} = e$ وبالتالي فإن $\forall a^x \in K_a$

$$a^x . a^{km} = a^{x+km} = a^x$$

ومهما يكن a^x من K_a فإنه يوجد $a^y \in K_a$ بحيث :

$$a^x . a^y = e$$

وذلك يقضي بأن $x + y \equiv 0 \bmod m$ أي أن y موجود وبالتالي a^y موجود في K_a .

١ ـ ١ ـ ٨ الزمر الجزئية العظمى

لقد بينا في الفقرة السابقة أنه إذا كانت $<a>$ غير منتهية فهي لاتحوي أي عنصر جامد وبالتالي لاتحوي زمرة جزئية . ومن الواضح أن أي نصف زمرة S تحوي زمرة جزئية إذا وفقط إذا كانت تحوي عنصراً جامداً (تحقق من ذلك) .

تمرين محلول (٤)

إذا كان e عنصراً جامداً من نصف زمرة S فإن :

(١) $eS = \{ a \in S : ea = a \}$

(٢) $Se = \{ a \in S : ae = a \}$

(٣) $eSe = \{ a \in S : ae = ea = a \}$

(٤) $eSe = eS \cap Se$

الحـل :

(١) $\forall a \in eS$ فإنه يوجد $x \in S$ بحيث $a = ex$ وبالتالي :

$$ea = e^2 x = ex = a$$

(٢) $(\forall a \in Se)(\exists x \in S)(a = xe) \Rightarrow ae = xe^2 = xe = a$

(٣) $(\forall a \in eSe)(\exists x \in S)(ae = xe) \Rightarrow ea = ae = a$

(٤) $a \in eS \cap Se \Leftrightarrow ea = ae = a \Leftrightarrow a \in eSe$

وبالتالي :

$$Se \cap eS = eSe$$

مبرهنة (١١)

ليكن e عنصراً جامداً في نصف زمرة S ولتكن H_e مجموعة جزئية من eSe تحوي كل عنصر من eSe يملك نظيراً في eSe بالنسبة إلى e فإن :

١) H_e زمرة جزئية من S تحوي e .

٢) H_e تحوي أي زمرة جزئية G من S تلاقي H_e . أي أن:

$$G \cap H_e \neq \Phi \Rightarrow G \subseteq H_e$$

البرهان:

(١) eSe نصف زمرة جزئية من S ذات حيادي e (تحقق من ذلك)

إذا كان $x, y \in eSe$ بحيث

$$xy = yx = e$$

فإن $x, y \in H_e$ حسب تعريف H_e كذلك فإن $e \in H_e$. أضف إلى أن:

$u, v \in H_e$ يقضي بوجود $u', v' \in H_e$ بحيث:

$$uu' = u'u = e \quad \text{و} \quad vv' = v'v = e$$

وبالتالي

$$(uv)(v'u') = (v'u')(uv) = e$$

ومنه $\forall u, v \in H_e$ فإن $uv \in H_e$ و H_e زمرة جزئية من S .

(٢) بفرض G زمرة جزئية من S بحيث:

$$G \cap H_e \neq \Phi$$

نفرض f حيادي G وليكن $a \in G \cap H_e$ وليكن g نظير a في G و h نظير a في H_e إن:

$$e = ha = haf = ef = eag = ag = f$$

إذاً e هو حيادي G وبالتالي $G \subseteq eSe$. وحسب تعريف H_e فإن:

$$G \subseteq H_e$$

تعريف (١٦)

إن زمرة جزئيـــة G من نصف زمرة S تـــدعى **زمرة جزئية عظمى** maximal subgroup في S إذا لم تكن محتواة حقيقة في أي زمرة جزئيـة أخرى في S .

مبرهنة (١٢)

لتكـــن S نصف زمرة ذات عنصر جامد e ، ولتكـــن H_e الزمرة الجزئية من S المعرفة في المبرهنة السابقة ، فيكون :

١) H_e زمرة جزئية عظمى في S

٢) اي زمرة جزئية عظمى G في S هي من الشكل H_f حيث f هـــو حيادي G .

٣) الزمر الجزئية العظمى المختلفة في S كلها منفصلة (اي تقاطع اي اثنتين منها هو المجموعة الخالية) .

البرهـــان :

لتكن G زمرة جزئية عظمى من S تحوي H_e

(١) إن $G \supseteq H_e \Leftarrow G \cap H_e \neq \Phi \Leftarrow G \subseteq H_e \Leftarrow G = H_e$

وبالتالي H_e زمرة جزئية عظمى .

(٢) G تملك حيادياً f وبالتالي فإن $G \cap H_f \neq \Phi$ لأن $f \in G \cap H_f$

إذاً $G \subseteq H_f$. لكن G زمرة جزئية عظمى فرضاً وبالتالي :

$$G = H_f$$

(٣) مما سبق ينتج أن مجموعة الزمر الجزئية العظمى في S هي :

$$A = \{ H_e : e \in S \text{ و } e^2 = e \}$$

ليكن e و f عنصرين جامدين في S $(e \neq f)$ إذاً

$$H_e \cap H_f = \Phi$$

ذلك أنه لو فرضنا $H_e \cap H_f \neq \Phi$ لـكان :

$$H_e \subseteq H_f \quad \text{و} \quad H_f \subseteq H_e$$

وبالتالي $H_e = H_f$ وهذا يقضي بأن $e = f$ مناقض للفرض .

تمرين (١٢)

أثبت أن K_a زمرة جزئية عظمى في $<a>$.

١ ـ ١ ـ ٩ انصاف الزمر الدورية Periodic Semigroups

إن كل عنصر a من نصف زمرة S يولد ـ كما نعلم ـ نصف زمرة جزئية دوارة $<a>$ من S . وبذا فإن :

$$S = \bigcup_{a \in S} <a>$$

إن عدداً من خواص نصف الزمرة S يمكن معرفتها من خواص أنصاف الزمر الجزئية $<a>$ $(a \in S)$.

وكمثال على ذلـك نعرف أنصاف الزمر الدورية اعتماداً على خواص أنصاف الزمر الجزئية الدوارة لها .

تعريف (١٧)

يقال عن نصف زمرة S أنهـا **دورية** إذا كانت كل من أنصاف الزمرة الجزئية الدوارة $<a>$ $(a \in S)$ منتهية .

تمرين (١٣)

أثبت أن نصف الزمرة S دورية ، إذا وفقط إذا كانت كل نصف زمرة

جزئية فيها تملك عنصراً جامداً .

تمرين (١٤)

أثبت أن كل نصف زمرة منتهية ، دورية . ولكن العكس غير صحيح .

تمرين محلول (٥)

أثبت أن نصف الزمرة الدوارة $<a>$ ذات الدليل r والدور m تكون زمرة، إذا وفقط إذا ، كانت $r = 1$.

الحـــل :

(١) $<a>$ زمرة دوارة منتهية

$$<a> = \{ a, a^2, \ldots, a^n \}$$

حياديها a^n وبالتالي $a^{n+1} = a$ وبالتالي $r = 1$

(٢) $<a>$ نصف زمرة دوارة فيها $r = 1$ وبالتالي $K_a = <a>$ أي أن $<a>$ زمرة .

مبرهنة (١٣)

تكون نصف الزمرة الدورية الاختزالية اليسارية S زمرة ، إذا وفقط إذا ، ملكت عنصراً جامداً وحيداً .

البرهـــان :

(١) إذا كانت S زمرة فإن حياديها هو العنصر الجامد الوحيد فيها .

(٢) ليكن e العنصر الجامد الوحيد في نصف الزمرة الدورية الاختزالية اليسارية S . مهما يكن $a \in S$ فإن $<a>$ منتهية وبالتالي فلها دليـــل r ودور m. إذا

فرضنا جدلاً أن $r > 1$ فإن :

$$a^{r+m} = a^r$$

وبالتالي

$$a.a^{r+m-1} = a.a^{r-1}$$

لكن S اختزالية يسارية وبالتالي :

$$a^{r+m-1} = a^{r-1}$$

ولكن هذا يناقض تعريف r و m . إذاً $r = 1$ ومنه $<a>$ زمرة جزئيـــة من S حياديها e (لأن e الجامد الوحيد في S) وبالتالي :

$$ea = ae = a \qquad \forall\, a \in S$$

فالجامد e هو حيادي S . كذلـــك $a \in <a>$ فله نظير في $<a>$ وبالتالي في S . ينتج عن ذلك أن S زمرة .

ملاحظة (٣)

إن كلاً من الشروط الثلاثة الواردة في المبرهنة السابقة (الدورية ، الاختزالية اليسارية ، وحدانية الجامد) ضروري وجوده لتصبح S زمرة . سوف نوضح في الأمثلة التالية أن وجود اثنين فقط غير كاف لوحده .

مثال (٩)

إن $(N^0,+)$ نصف زمرة اختزالية يسارية ذات جامـــد وحيد (الصفر) ولكنها ليست زمرة .

مثال (١٠)

نصف الزمرة S الصفرية ، فيهـا عنصر جامـد وحيد (الصـفر) ، وهي

دورية ، لكنها ليست زمرة إذا كانت S تحوي أكثر من عنصر واحد .

مثال (١١)

نصف الزمرة S الصفرية اليمينية ، دورية ، اختزاليـــة يسارية ، ولكنها ليست زمرة .

١ ـ ١ ـ ١٠ التحقق من الخاصة التجميعية

إن التحقق من الخاصة التجميعية في نظام رياضي $(S,*)$ عندما يعرّف قانون التشكيل الداخلي $*$ على مجموعة منتهية S جدولياً ، يعتبر بحق عملاً شاقاً ومضنياً. إن الطريقة التالية لاختبار التجميعية تعتبر سهلة جداً (متى أتقنها المرء) وتساعد على التحقق من الخاصة التجمعية بزمن قصير جداً ، ودون جهـد أو عناء . وفيما يلي شرح مقتضب للطريقة نتبعه بمثال لتوضيح خطوات العمل . ولكن يجدر بنا قبل ذلك أن نوضح مايلي :

يبدو للوهلة الأولى أن ما سنقدمه من خطوات لتنفيذ هذه الطريقة ، يجب تكراره من أجل كل عنصر $a\in S$ ، ولكن هذا غير صحيح ، إذ سنبين أنـه يكفي تكرار الخطوات من أجل كل عنصر a ينتمي لمجموعـــة مولدات النظام الرياضي S فقط .

لنعرف قانوني تشكيل داخلي على S كما يلي (وذلـك من أجل كل عنصر $a\in S$) :

$$x \top y = x * (a * y) \qquad x, y \in S$$

$$x \perp y = (x * a) * y \qquad x, y \in S$$

واضح أن الخاصة التجميعية تكون محققة في $(S,*)$ ، إذا وفقط إذا ، انطبقت $\top$ و $\perp$ من أجل كل عنصر معين $a\in S$.

إذن فالفكرة الأساسية في هذه الطريقة تكمن في كتابة جدولين القانونين $\top$ و $\perp$ وذلك من أجل كل عنصر $a \in S$ والتحقق من أنهما متطابقين في كل مرة .

إن جدول العملية $\top$ يمكن الحصول عليه بسهولة من الجدول الأصلي للعملية $*$ بعد أن نبدل عمود كل $y \in S$ بعمود $a * y$ في الجدول .

كما أن جدول العملية $\perp$ يمكن استخلاصه بسهولة من الجدول الأصلي للنظام الرياضي $(S, *)$ بعد أن نبدل سطر كل $x \in S$ بسطر $x * a \in S$ في الجدول الجديد .

من الجدير أن نلاحظ هنا ، أنه ليس من الضروري ، كتابة جدول لـ $\top$ وآخر لـ $\perp$ ، بل يكفي أن نكتب جدولاً واحداً فقط (لـ $\top$ مثلاً) ثم نقارن سطر كل $x \in S$ في هذا الجدول مع سطر $x * a \in S$ في الجدول الأصلي القانون $*$.

لتسهيل العمل في انجاز الاختبار نبدأ باستبدال سطر عناصر S المرتبة في أعلى الجدول المخصص للقانون $\top$ بسطر a في الجدول $*$ كما نستبدل عمود عناصر S المرتبة يسار الجدول المخصص للقانون $\top$ بعمود a في الجدول $*$.

إن كل عنصر $a * y$ في سطر a من الجدول $*$ يدلنا على العمود الذي يجب أن ننسخه من الجدول $*$ في الجدول $\top$ تحت العنصر y . وكل عنصر $x * a$ في عمود a من الجدول $*$ يدلنا على السطر الذي يجب أن نقارنه مع سطر x في الجدول $\top$.

مثال (١٢)

ليكن $(S, .)$ نظاماً رياضياً معرفاً بالجدول :

.	a	b	c	d	e
a	a	a	a	d	d
b	a	b	c	d	d
c	a	c	b	d	d
d	d	d	d	a	a
e	d	e	e	a	a

إن المجموعة $A=\{c, e\}$ هي مجموعة مولدات S ذلك لأن :

$$d = c.e \quad , \quad b = c^2 \quad , \quad a = e^2$$

لنكتب الآن الجدولين الخاصين بالعنصرين c و e وفق العملية T فنجد باتباع الخطوات المشروحة سابقاً أن الجدولين هما :

T_c	a	c	b	d	d
a	a	a	a	d	d
c	a	c	b	d	d
b	a	b	c	d	d
d	d	d	d	a	a
e	d	e	e	a	a

T_e	d	e	e	a	a
d	d	d	d	a	a
d	d	d	d	a	a
d	d	d	d	a	a
a	a	a	a	d	d
a	a	a	a	d	d

لاحظ أننا لكتابة جدول c بدأنا بنسخ سطر c من الجدول الأصلي وهو :

a c b d d

وسجلناه أعلى الجدول . كذلك نسخنا عمود c من الجدول الأصلي وهو :

a c b d e

وسجلناه يسار الجدول .

ثم بدأنا بنقل عمود a من الجدول الأصلي ثم عمود c ثم عمود d ثم عمود d

حتى اكتمل الجدول T_c . كذلك فعلنا من أجل جدول $T_{\hat{e}}$.

نقارن الآن سطر a من جدول T_c مع سطر a في الجـــدول الأصلي ثم سطر c مع قرينه في الجدول الأصلي وهكذا من أجل سطر b ثم سطر d ثم سطر e فنجد أن هذه الأسطر مطابقة للأسطر المقابلة لها في الجـدول الأصلي . علماً بأنه كان بالإمكان أن ننسخ الأسطر ثم نقارن الأعمدة فنحصل على نفس النتيجة .

والآن بما أن التطابق حاصل بالنسبة لكل من الجدولين e, c فإننا نحكم بـأن النظام الرياضي (S , .) هو نصف زمرة .

ملاحظة (٤)

لقد ذكرنا في البداية أنــه لاضرورة لتكرار العملية من أجل كل عنصر في S بل نكتفي بتكرارها من أجل كل عنصر a من مجموعة مولدات S .

لنفرض A مجموعة مولدات S . ولنفرض أن :

$$x(ay) = (xa)y \qquad \forall x,y \in S \text{ و } \forall a \in A$$

ولنفرض a,b∈ A فينتج أنه مهما يكن x, y∈S :

$$x(ay) = (xa)y \qquad \text{و} \qquad x(by) = (xb)y$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} x((ab)y) &= x(a(by)) \\ &= (xa)(by) \\ &= ((xa)b)y \\ &= (x(ab))y \end{aligned}$$

أي أنه إذا حققت $a,b \in A$ خاصية التجميع مع كافـــة عناصر S فإن ab تحقق خاصية التجميع مع كل عناصر S أيضاً وبالتالي فـإن أي جـداء لعناصر من A يحقق خاصة التجمع مع كافة عناصر S . لكن A مجموعـــة مولدات S وكل عنصر من S يمكن التعبير عنـه كجداء لعناصر من A إذاً :

$$(xy)z = x(yz) \qquad \forall\ x,y,z \in S$$

* * *

تمارين (١ ــ ١)

(١) أثبت صحة مــــابلي :

آ ـ إذا كان e عنصراً جامداً في نصف زمرة اختزالية يسارية S فـإن e هو عنصر حيادي يساري في S .

ب ـ إن نصف الزمرة الاختزالية لايمكنها أن تحوي أكثر من عنصر جامـد واحد ، هو حياديها .

(٢) أثبت صحة مايلي :

آ ـ إذا كانت S نصف زمرة اختزالية فإن S^1 هي كذلك .

ب ـ لتكن S نصف زمرة صفرية يسارية مع $|S| > 1$ فإن S اختزالية يمينية ولكن S^1 ليست كذلك .

(٣) ليكن a عنصراً ما في نصف زمرة S ولتكن :

$$A = \{ x \in S \ : \ axa = a \}$$

أثبت أنه إذا كانت $A \neq \Phi$ فإن $Aa\,[aA]$ نصف زمرة جزئية صفرية [يمينية] يسارية في S .

(٤) ليكن S نظاماً رياضياً ولتكن :

$$A = \{ a \in S \ : \ x(ay) = (xa)\,y \ ; \ \forall x, y \in S \}$$

آ ـ برهن أن A نصف زمرة جزئية من S .

ب ـ برهن أنه إذا كانت A مجموعة مولدات S فإن S هي بلدورها نصف زمرة .

(٥) أثبت صحة مايلي :

آ ـ إن كل عنصر a من نصف زمرة دورية S له قوة a^n تشكل عنصراً جامداً في S .

أي

$$(\forall a \in S)(\exists n \in N)(a^n \cdot a^n = a^n)$$

ب ـ إن أي نصف زمرة دورية تحوي زمرة جزئية عظمى .

(٦) أثبت أن مجموعة كل العناصر a من نظام رياضي S التي تحقق الخاصة :

$a(xy) = (ax)y$ وذلك مهما يكن $x,y \in S$ هي نصف زمرة جزئية من S.

(٧) إذا كانت S نصف زمرة بحيث $S^2 = S$ فإن كل انسحاب يميني لـ S يتبادل مع كل انسحاب يساري لـ S . أثبت ذلك .

(٨) أثبت أن نصف الزمرة S هي نصف زمرة صفرية يمينية إذا وفقط إذا حققت أحد الشرطين التاليين :

آ ـ كل تحويل لـ S هو انسحاب يميني لـ S .

ب ـ الانسحاب اليساري الوحيد لـ S هو التطبيق المطابق .

(٩) لتكن A مجموعة غير منتهية قابلة للعد ، ولتكن S مجموعة كل التطبيقات المتباينة $\varphi : A \to A$ التي تحقق الخاصة التالية :

$A - \varphi(A)$ مجموعة غير منتهية .

آ ـ أثبت أن S نصف زمرة جزئية من $\mathcal{F}(A)$.

ب ـ أثبت أنه مهما يكن $\varphi \in S$ فإنه يوجد تقابل بين $A - \varphi(A)$ و $\varphi(A) - \varphi^2(A)$

جـ ـ استنتج أن S لا تحوي أي عنصر جامد .

(١٠) ليكن $\varphi: S \to T$ تشاكلاً ، حيث S و T نصفا زمرتين . أثبت صحة كل مما يلي :

آ ـ صورة أي عنصر جامد e من S هو عنصر جامد f في T .

ب ـ صورة أي نصف زمرة جزئية من S هو نصف زمرة جزئية في T .

حـ ـ إذا كان φ غامراً فإن صورة الحيادي (الصفر) إن وجد في S هو الحيادي (الصفر) في T . وبيّن أن شرط الغامر أساسي لايمكن الاستغناء عنه .

(١١) آ ـ أثبت أن العناصر الصفرية اليسارية في $\mathscr{F}(A)$ هي فقط التحويلات الثابتة في A (أي التحويلات التي مدى كل منها عنصر واحد من A) .

ب ـ أثبت أنه لايوجد عناصر صفرية يمينية في $\mathscr{F}(A)$ إذا كانت $|A| > 1$

(١٢) لتكن K مجموعة كل العناصر الصفرية اليسارية في نصف زمرة ما ولنفرض أن K غير خالية . برهن أنه يوجد تماثل بين S و $\mathscr{F}(K)$ ، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :

١ ـ $a = b \quad \Rightarrow \quad (\forall x \in K)(a,b \in S) \text{ ؛ } ax = bx$

٢ ـ إذا كان φ أي تحويل لـ K فيوجد $a \in S$ بحيث أن $ax = \varphi(x)$

(١٣) إن عنصراً ما $\varphi \in \mathscr{F}(A)$ جامد إذا وفقط إذا كان مقصور التطبيق φ على $\varphi(A)$ تطبيقاً مطابقاً . أثبت صحة ذلك .

(١٤) لتكن S نصف زمرة تتصف بما يلي :

إذا كانت $ab = cd \; (a,b,c,d \in S)$ فإن $b = d$ أو $a = c$.

أثبت أن S إما أن تكون نصف زمرة صفرية يسارية أو صفرية يمينية .

(١٥) إذا كانت S نصف زمرة ذات صفر يميني فأثبت أن المجموعة K لكل الأصفار اليمينية في S هي نصف زمرة جزئية صفرية يمينية في S ، تحقق الشرط $SK \subseteq K$ و $KS \subseteq K$.

كما أنه مهما تكن $A \subseteq S$ بحيث $SA \subseteq A$ و $AS \subseteq A$ فإن $K \subseteq A$.

(١٦) ليكن S نظاماً رياضياً معروفاً بالجدول :

	e	a	x	y
e	e	a	x	y
a	a	e	x	y
x	x	y	x	y
y	y	x	x	y

آ ـ أثبت أن S نصف زمرة .

ب ـ ليكن $\varphi : S \to \mathcal{F}(\{1,2\})$

بحيث :

$$\varphi(e) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \varphi(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

أثبت أن φ تشاكل أحادي .

حـ ـ ليكن :

$$\psi : S \to \mathcal{F}(S)$$

حيث

$$\psi(e) = \begin{pmatrix} e & a & x & y \\ e & a & x & y \end{pmatrix} \qquad \psi(a) = \begin{pmatrix} e & a & x & y \\ a & e & y & x \end{pmatrix}$$

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} e & a & x & y \\ x & x & x & x \end{pmatrix} \qquad \psi(y) = \begin{pmatrix} e & a & x & y \\ y & y & y & y \end{pmatrix}$$

أثبت أن ψ تشاكل أحادي .

(١٧) اختبر الخاصة التجميعية في كل من الأنظمة الرياضية التالية :

	e	f	g	a	b
e	e	a	e	a	b
f	b	f	g	b	b
g	g	f	g	f	b
a	b	a	e	b	b
b	b	b	b	b	b

	a	b	c	d	e
a	a	b	a	b	c
b	c	c	a	a	b
c	b	c	b	c	a
d	c	c	b	b	a
c	a	a	c	c	b

	e	f	g	a	b
e	e	e	e	e	b
f	f	f	f	f	b
g	g	g	g	g	b
a	e	e	f	e	b
b	b	b	b	b	b

(١٨) لتكن $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ ولنعرف العملية $*$ التالية على S :

$x * y =$ القاسم المشترك الأعظم لهما وذلك مهما تكن $x, y \in S$.

أثبت أن $(S, *)$ نصف زمرة .

(١٩) لتكن $S = \langle a \rangle$ منتهية دليلها $r > 1$. أثبت أن :

آ) $S - S^2 = \{a\}$

ب) استنتج أن أي نصف زمرة دوارة منتهية (وليست زمرة) تملك عنصراً مولداً وحيداً .

حـ) هل الطلب السابق صحيح في حالة الزمرة ، أيد إجابتك بمثال .

(٢٠) لتكن S مجموعة المصفوفات التالية مع عملية ضرب المصفوفات المعروفة :

$$c=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ a=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$f=\begin{bmatrix}0&-1\\0&0\end{bmatrix},\ e=\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix},\ d=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$0=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\ h=\begin{bmatrix}0&0\\0&-1\end{bmatrix},\ g=\begin{bmatrix}0&0\\-1&0\end{bmatrix}$$

أثبت أن S نصف زمرة ، وعين جميع زمرها الجزئية العظمى .

(٢١) لتكن $(S,.)$ نصف زمرة . A مجموعة كل أنصاف الزمر الجزئية لـ S .

آ – اثبت أن $(A,\cap)$ عصبة تبديلية .

ب – هل $(A,\cup)$ نصف زمرة ؟ أعط مثالاً يدعم إجابتك .

حـ – أثبت أن $(A,*)$ عصبة تبديلية . حيث قانون التشكيل * معرف على A كما يلي :

$$B_1 * B_2 = \langle B_1 \cup B_2 \rangle \qquad B_1, B_2 \in A$$

* * *

الفصل الثاني

مثاليات نصف الزمرة

١ ـ ٢ ـ ١ مبادىء أولية

لاحظنا أن نصف الزمرة الجزئية K من نصف زمرة S تحقق شرط الانغلاق، وهنا يتبادر إلى الذهن سؤال : هل توجد مجموعات جزئية من S تحقق شرط الانغلاق بالنسبة لجميع عناصر S ؟ أي هل يوجد مجموعات جزئية $A \subseteq S$ بحيث :

$$(\forall a \in A)(\forall x \in S)(\, ax \in A \quad \text{أو} \quad xa \in A\,)$$

وما هي خصائص هذه المجموعة الجزئية . إن هذه المجموعات تلعب دوراً رئيسياً في نظرية نصف الزمرة .

تعريف (١)

يقال عن مجموعة جزئية غير خالية A من نصف زمرة S بأنها **مثالي يساري** لـ S إذا كان :

$$SA \subseteq A$$

ويقال عن A بأنها **مثالي يميني** لـ S إذا كان :

$$AS \subseteq A$$

أما إذا كانت A تحقق الشرطين السابقين معاً ، أي إذا كانت $A \neq \Phi$ وكان :

$$SA \subseteq A \quad \text{و} \quad AS \subseteq A$$

فإن A تدعى عندئذ **مثالياً ثنائي الجانب** لـ S .

واضح أن مفاهيم المثالي اليميني واليساري وثنائي الجانب تصبح واحدة في حالة نصف زمرة تبديلية .

تمرين (١)

أثبت أن كل مثالي (أحادي الجانب أو ثنائي الجانب) هو نصف زمرة . هل العكس صحيح ؟ ادعم إجابتك بمثال .

مثال (١)

مجموعة كل الأعداد الزوجية في N هي مثالي في N المصحوبة بعملية الضرب العادي .

مثال (٢)

مجموعة كل الدوال الحقيقية المعرفة على $\mathbb{R}$ مع عملية تركيب الدوال تشكل نصف زمرة S . ومجموعة كل الدوال الثابتة فيها هي مثالي ثنائي الجانب لـ S . بينما مجموعة كل الدوال الدورية فيها هي مثالي يساري لـ S . ومجموعة كل الدوال المغايرة للصفر من أجل جميع قيم $x \in \mathbb{R}$ تشكل مثالياً يمينياً لـ S . (تحقق من ذلك) .

مثال (٣)

لتكن S نصف زمرة ما . $B \subseteq S$ غير خالية . إن SB مثالي يساري لـ S .

BS مثالي يميني لـ S . SBS مثالي ثنائي الجانب في S .

تمرين (٢)

لتكن $S = \langle a \rangle$. أثبت صحة مايلي :

آ ـ إذا كانت S منتهية دليلها r ودورها m فإن :

$$A_k = \{ a^k , a^{k+1} ,..., a^{k+m-1} \}$$

حيث $k = 1,2,... r$ هي جميع مثاليات S .

ب ـ إذا كانت S غير منتهية فإن :

$$B_k = \{ a^k , a^{k+1} , a^{k+2},... \}$$

(حيث ... $k = 1,2,3,$) هي جميع مثاليات S .

ملاحظة (١)

من الواضح أن كل مثالي يميني [يساري ، ثنائي الجانب] في حلقة $(K,+,.)$ هو مثالي يميني [يساري ، ثنائي الجانب] في نصف الزمرة $(K,.)$. ولكن العكس غير صحيح في الحالة العامة . والمثال التالي يوضح ذلك ، ففي الحلقة $(Z,+,.)$ نجد أنه مهما يكن $n \in N$ فإن :

$$A_n = \{ ..., -n-1 , -n , 0, n , n+1,... \}$$

مثالي لـ $(Z,.)$ وليس مثالياً للحلقة $(Z,+,.)$. (تحقق من ذلك) .

مبرهنة (١)

في خلقة واحدية $(K,+,.)$ ؛ كل مثالي يساري لنصف الزمرة $(K,.)$ هو مثالي يساري للحلقة K نفسها ، إذا وفقط إذا ، كان كل عنصرين في $(K,.)$ ، أحدهما قاسم يميني للآخر .

البرهان :

لزوم الشرط : نفرض أن كل مثالي يساري في $(K,.)$ هو مثالي يساري في

$(K,+,.)$. مهما يكن $x,y \in K$ فإن :

$$K(Kx \cup Ky) = K^2x \cup K^2y \subseteq Kx \cup Ky$$

وبالتالي $Kx \cup Ky$ مثالي يساري في $(K,.)$

ينتج عن ذلك أن $Kx \cup Ky$ مثالي يساري في $(K,+,.)$ وبالتالي :

$$x+y \in Kx \cup Ky \qquad \forall x,y \in K \quad .$$

لنفرض $x+y \in Kx$ (مثلاً) فيوجد $z \in K$ بحيث :

$$x+y = zx$$

$$y = (z-e)x$$

حيث e حيادي $(K,.)$.

كفايـة الشرط : نفرض أن كل عنصرين في $(K,.)$ أحدهما قاسم يميني للآخر .

ليكن A مثالياً يسارياً ما لـ $(K,.)$ وليكن $x,y \in A$ و $b \in K$.

لدينا $bx \in A$. بما أن $x,y \in A$ فيوجد $z \in K$ بحيث : $y = zx$ وبالتالي :

$$x - y = ex - zx = (e-z)x \in A$$

$$y - x = (-e)(x-y) \in A$$

ومنه ينتج أن A مثالي يساري في الحلقة $(K,+,.)$.

تمرين (٢)

لتكن S نصف زمرة . أثبت صحة كل مما يلي :

آ ـ S مثالي ثنائي الجانب لـ S نفسها .

ب ـ إذا كانت S تحوي عنصراً ماصاً 0 فـــإن $\{0\}$ هو مثالي ثنـائي الجانب لـ S .

ح – إن اجتماع أي جماعة من المثاليات اليسارية لـ S هو مثالي يساري لـ S .

د – تقاطع أي جماعة من المثاليات اليمينية لـ S هو مثالي يميني لـ S (إن لم يكن خالياً) .

هـ – إذا كانت B نصف زمرة جزئية من S ، وكان A مثالياً يسارياً لـ S فإن :

$A \cap B$ مثالي يساري لـ B (إذا لم يكن خالياً) .

تعاريف (٢)

(١) المثالي اليساري (اليميني ، ثنائي الجانب) A لنصف زمرة S ، يدعى **اصغرياً** إذا كان A لايحوي حقيقة أي مثالي يساري (يميني ، ثنائي الجانب) لـ S .

(٢) المثالي اليساري (اليميني ، ثنائي الجانب) الأصغري A لنصف زمرة S يسمى **الأصغر** إذا كان A محتوى في أي مثالي يساري (يميني ، ثنائي الجانب) لـ S .

(٣) المثالي اليساري (اليميني ، ثنائي الجانب) A لنصف زمرة S ، يدعى **اعظمياً** إذا كان $A \neq S$ وكان غير محتوى حقيقة في أي مثالي يساري (يميني ، ثنائي الجانب) لـ S .

(٤) المثالي اليساري (اليميني ، ثنائي الجانب) الأعظمي A في نصف زمرة S يسمى **الأعظم** إذا كان يحوي أي مثالي يساري (يميني ، ثنائي الجانب) لـ S

تمرين (٤)

لتكن S نصف زمرة و A مثالياً يسارياً لـ S و B مثالياً يمينياً لـ S .
أثبت أن :

آ ـ AB مثالي ثنائي الجانب لـ S .

ب ـ $BA \subseteq A \cap B$.

حـ ـ تقاطع أي مثالي يساري مع أي مثالي يميني لـ S ، مجموعة غير خالية

مبرهنة (٢)

لتكن S نصف زمرة و L مثالياً يسارياً اصغرياً لـ S و R مثالياً يمينياً اصغرياً لـ S فإن :

آ ـ RL زمرة جزئية من S .

ب ـ بفرض e حيادي الزمرة RL فإن :

$$R = eS \quad \text{و} \quad L = Se \quad \text{و} \quad RL = R \cap L = eSe$$

البرهان :

آ ـ إن

$$(RL)(RL) = R(LR)L \subseteq RSL \subseteq RL$$

وبالتالي RL نصف زمرة جزئية من S . ثم إن :

$$RL \subseteq RS \subseteq R \quad \text{و} \quad RL \subseteq SL \subseteq L$$

وبالتالي :

$$RL \subseteq R \cap L \qquad (1)$$

والآن مهما يكن $g \in RL$ فإن :

$g \in R$ وبالتالي $gR \subseteq R$ و $g \in L$ وبالتالي $Lg \subseteq L$ (لماذا ؟)

لكن gR مثالي يميني لـ S و Lg مثالي يساري لـ S .

ينتج أن : $gR = R$ و $Lg = L$ (L و R أصغريان) .

إذاً :

$$(\forall g \in RL)(RLg = RL = gRL)$$

وبالتالي RL زمرة جزئية من S .

بما أن $e \in RL \subseteq L$ فإن $Se \subseteq S\,L \subseteq L$. ولأن L أصغري ينتج أن :

$$Se = L$$

كذلك $e \in RL \subseteq R$ وبالتالي $eS \subseteq R\,S \subseteq R$ ولأن R أصغري ينتج أن .

$$eS = R$$

وسبق أن برهنا أن :

$$eS \cap Se = eSe$$

إذاً

$$R \cap L = eSe$$

أي أن :

$$x \in RL \Leftarrow ex = x \Leftarrow x \in R \cap L$$

لأن $e \in R$ و $x \in L$.

وبالتالي $R \cap L \subseteq RL$ (٢)

بمقارنة (١) و (٢) ينتج أن :

$$R \cap L = RL$$

١ ـ ٢ ـ ٢ نصف الزمرة النظامية Regular Semigroup

تعريف (٣)

نقول عن عنصر a من نصف زمرة S أنه **عنصر نظامي** إذا حوت S على عنصر x بحيث $axa = a$ أي أن :

$$[\, a \text{ عنصر نظامي من } S \,] \Leftrightarrow [\, a \in aSa \,]$$

ونقول عن S أنها **نصف زمرة نظامية** إذا كانت كل عناصرها نظامية .

أي أن :

$$[\, S \text{ نصف زمرة نظامية} \,] \Leftrightarrow [\, (\forall a \in S)(a \in aSa) \,]$$

مثال (٥)

العنصر الجامد في نصف زمرة عنصر نظامي .

العصبة نصف زمرة نظامية .

مبرهنة (٣)

الشرط اللازم والكافي لتكون نصف زمرة S ، نظامية ، هو أن يحقق كل مثالي يميني B وكل مثالي يساري A لـ S الشرط :

$$BA = B \cap A$$

البرهــان :

إن $BA \subseteq BS \subseteq B$ و $BA \subseteq SA \subseteq A$

إذاً

$$BA \subseteq B \cap A \qquad (1)$$

لزوم الشرط : لتكن S نصف زمرة نظامية

لنفرض a عنصراً ما من $B \cap A$ ، فيوجد عنصر $x \in S$ بحيث $a = axa$

إن $a \in A$ وبالتالي $xa \in A$. إذاً

$$a = axa = a(xa) \in BA$$

ينتج أن :

$$B \cap A \subseteq BA \qquad (2)$$

بمقارنة (1) و (2) ينتج أن :

$$B \cap A = BA$$

كفاية الشرط : نفرض تحقق الشرط المفروض في المبرهنة .

ليكن a عنصراً ما من S . إن

$B = a \cup aS$ مثالي يميني لـ S . (تحقق من ذلك)

و S مثالي يساري لـ S نفسها . إذاً :

$$a \in B = B \cap S = BS = (a \cup aS)S \subseteq aS$$

كذلك $A = Sa \cup a$ مثالي يساري لـ S . (تحقق من ذلك) .

و S مثالي يميني لـ S نفسها .

إذاً :

$$a \in A = A \cap S = SA = S(a \cup Sa) \subseteq Sa$$

لكن Sa مثالي يساري لـ S و aS مثالي يميني لـ S فلدينا :

$$a \in Sa \cap aS = (aS)(Sa) \subseteq aSa$$

وبالتالي S نصف زمرة نظامية ▯

وكنتيجة من المبرهنة السابقة يمكن أن نبرهن الحالة الخاصة التالية :

مبرهنة (٤)

الشرط اللازم والكافي لتكون زمرة تبديلية S ، نظامية ، هو ان يحقق أي مثالي M لـ S الشرط :

$$MM = M$$

البرهـــان :

(١) إذا كانت S نظامية فإن :

$$MM = M \cap M = M$$

(٢) إذا كان $MM = M$ وذلك من أجل أي مثالي M لـ S فإنـه بفرض M_1 و M_2 مثاليان لـ S فإن $M_1 \cap M_2$ مثالي لـ S وبالتالي :

$$M_1 \cap M_2 = (M_1 \cap M_2)(M_1 \cap M_2) \subseteq M_1 M_2$$

لكن

$$M_1 M_2 \subseteq M_1 S \subseteq M_1 \quad \text{و} \quad M_1 M_2 \subseteq S M_2 \subseteq M_2$$

إذاً

$$M_1 M_2 \subseteq M_1 \cap M$$

وبالتالي

$$M_1 M_2 = M_1 \cap M_2$$

وينتج عن ذلك أن S نظامية .

١ ـ ٢ ـ ٣ المثاليات الاصغرية Minimal ideals

لتكن $\mathcal{A}[\mathcal{C},\mathcal{B}]$ مجموعة كل المثاليات اليسارية [اليمينية ، ثنائية الجانب] في نصف زمرة S فإن كلاً من هذه المجموعات مع عملية ضرب المجموعات الجزئية في S :

$$A,B\subseteq S \qquad AB = \{ ab : a\in A , b\in B\}$$

تشكل نصف زمرة (تحقق من ذلك) .

توطئة (١)

اي مثالي يساري (يميني ، ثنائي الجانب) اصغري في نصف زمرة S هو عنصر ماص يميني (يساري ، ثنائي الجانب) في نصف زمرة المثاليات $\mathcal{A}(\mathcal{C},\mathcal{B})$.

البرهـــان :

سنكتفي ببرهان حالة واحـــدة (اليسارية مثلا) والحالتان الباقيتان لهما برهان مماثل .

ليكن L مثالياً يسارياً أصغرياً لـ S فإنه مهما يكن $A\in\mathcal{A}$ لدينا :

$$AL\subseteq SL\subseteq L$$

لكن $AL\in\mathcal{A}$ و L أصغري . إذاً

$$AL = L$$

نتيجـة (١)

اي نصف زمرة S تملك على الاكثر مثاليا (ثنائي الجانب) اصغريا واحداً .

تعاريف (٤)

(١) إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من نصف زمرة S فإن :

$S^1A = A\cup SA$ [$AS^1 = A\cup AS$, $S^1AS^1 = A\cup SA\cup AS\cup SAS$]

مثالي يساري [يميني ، ثنائي الجانب] لـ S يحوي A ويـدعى **المثالي اليساري [اليميني ، ثنائي الجانب] المولد من** A .

(٢) إذا كانت $A = \{a\}$ فإن $L(a) = S^1a$ [$J(a) = S^1aS^1$, $R(a) = aS^1$] يدعى **المثالي اليساري [اليميني ، ثنائي الجانب] الرئيسي المولد من** a

(٣) نقول عن نصف زمرة أنها **بسيطة [بسيطة يسارياً ، بسيطة يمينياً]** إذا لم تحو على أي مثالي ثنائي الجانب [يساري ، يمني] حقيقي لها .

(٤) نقول عن مثالي يساري [يمني] L [R] لنصف زمرة S بأنه تـام إذا كان $SL = L$ [$RS = R$] .

توطئـة (٢)

(١) إن $L(a)$ [$R(a)$ و $J(a)$] أصغر مثالي يساري [يميني ، ثنائي الجانب] لنصف الزمرة S ، يحـوي a .

(٢) اي مثالي يساري [يميني ، ثنائي الجانب] A هو أصغري ، إذا وفقط إذا كان $A = L(a)$ [$A = J(a)$, $A = R(a)$] وذلك مهما يكن $a \in A$.

البرهـان :

(١) إذا كان B مثالياً يسارياً لـ S يحوي a فإن :

$$L(a) = a \cup Sa \subseteq B \cup SB \subseteq B$$

(٢) **لزوم الشرط** : إذا كان A مثالياً يسارياً أصغرياً فإنه مها يكن $a \in A$ فإن $L(a) \subseteq A$ وبالتالي $L(a) = A$.

كفاية الشرط : نفرض أنه مهما يكن $a \in A$ فإن $L(a) = A$.

ليكن B مثالياً يسارياً لـ S محتوى في A وليكن b عنصراً ما من B وبالتالي $b \in A$.

إن

$$b \in B \Rightarrow L(b) \subseteq B \subseteq A$$

لكن $L(b) = A$ لأن $b \in A$ وبالتالي $A = B$ و A أصغري ∎

مبرهنة (٥)

ليكن L (R) مثالياً يسارياً (يمنياً) اصغرياً في نصف زمرة S فإن :

١) Lx (xR) مثالي يساري (يميني) اصغري لـ S وذلك $\forall x \in S$

٢) أي مثالي يساري (يميني) اصغري لـ S يمكن كتابته بالشكل Lx (xR) من اجل عنصر ما $x \in S$.

٣) تقاطع اي مثاليين يساريين (يمينيين) اصغريين مختلفين هو مجموعة خالية .

البرهان :

(١) إن $S(Lx) \subseteq Lx$ وبالتالي Lx مثالي يساري لـ S وذلك $\forall x \in S$.

إن $a \in Lx$ يقضي بوجود عنصر $b \in L$ بحيث $a = bx$

وإن

$$b \in L \Rightarrow Sb \subseteq SL \subseteq L$$

لكن L أصغري ، فينتج أن

$$Sb = L$$

كذلك

$$L(a) = Sa \cup a = Sbx \cup bx = Lx \cup bx = Lx$$

وبالتالي Lx مثالي يساري أصغري .

(٢) ليكن M مثالياً يسارياً أصغرياً في S وليكن a عنصراً ما من M فإن:

$$La \subseteq SM \subseteq M \Rightarrow La = M$$

(٣) ليكن M_1, M_2 $(M_1 \neq M_2)$ مثاليين يساريين أصغريين لـ S . نفرض جدلاً أن $M_1 \cap M_2 = A \neq \Phi$ فيكون A مثالياً يسارياً لـ S محتوى في كل من M_1 و M_2 . لكن M_1 و M_2 أصغريان وبالتالي :

$$A = M_1 \text{ و } A = M_2 \Rightarrow M_1 = M_2$$

وهذا مخالف للفرض وبالتالي :

$$M_1 \cap M_2 = \Phi$$

نتيجة (٢)

إذا كانت نصف الزمرة S تملك مثالياً يسارياً (يمينياً) اصغرياً L (R) فإن اي مثالي يساري (يميني) A يحوي مثالياً يسارياً (يمينياً) اصغرياً .

البرهان :

$$a \in A \Rightarrow La \subseteq SA \subseteq A$$

وبالتالي A يحوي المثالي اليساري الأصغري La .

تمرين (٥)

ليكن L(R) مثالياً يسارياً (يمينياً) أصغرياً لنصف زمرة S . اثبت أن L (R) نصف زمرة بسيطة يسارياً (يمينياً) ، واستنتج من ذلك أنها نصف زمرة بسيطة .

١ ـ ٢ ـ ٤ المثالي الأصغر Universally minimal ideal

مبرهنة (٦)

إذا ملكت نصف زمرة S المثالي اليساري (اليميني) الأصغر $L_*(R_*)$ فإن :

(آ) $\underset{*}{L}x = \underset{*}{L}$ ($x\underset{*}{R} = \underset{*}{R}$) وذلك مهما تكن $x \in S$

(ب) $S\underset{*}{L} = \underset{*}{L}S = \underset{*}{L}$ ($\underset{*}{R}S = S\underset{*}{R} = \underset{*}{R}$)

(حـ) $\underset{*}{L}(\underset{*}{R})$ مثالي تام ثنائي الجانب لـ S .

البرهـــان :

(آ) $\underset{*}{L}$ مثالي يساري أصغري $\Leftarrow$ $\underset{*}{L}x$ مثالي يساري أصغري وذلك $\forall x \in S$

$\underset{*}{L}$ المثالي اليساري الأصغر $\Leftarrow$ $\underset{*}{L}x = \underset{*}{L} \Leftarrow \underset{*}{L} \subseteq \underset{*}{L}x$

(ب) $\underset{*}{L}S = \bigcup_{x \in S} \underset{*}{L}x = \underset{*}{L}$

كذلك

$$S\underset{*}{L} = \underset{*}{L} \Leftarrow S\underset{*}{L} \subseteq \underset{*}{L}$$

(حـ) بما أن :

$$S\underset{*}{L} = \underset{*}{L}S = \underset{*}{L}$$

فإن $\underset{*}{L}$ مثالي تام ثنائي الجانب لـ S .

مبرهنة (٧)

الشرط اللازم والكافي كي تملك نصف زمرة S المثالي اليساري (اليميني ، ثنائي الجانب) الأصغر $\underset{*}{L}(\underset{*}{R} ، \underset{*}{T})$ هو أن تملك نصف زمرة المثاليات $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$ ، $\mathcal{C}$) عنصراً ماصاً .

البرهـــان :

(١) $\underset{*}{L}$ موجود $\Leftarrow$ $L\underset{*}{L} = \underset{*}{L}$ وذلك مهما تكن $L \in \mathcal{A}$.

كذلك

$$\underset{*}{L}L = \underset{*}{L} \Leftarrow \underset{*}{L}L \subseteq \underset{*}{L}S = \underset{*}{L}$$

أي أن

$$\underset{*}{L}L = L\underset{*}{L} = \underset{*}{L}$$

ذلك مهما تكن $L \in \mathcal{O}$

(٢) $\mathcal{O}$ تملك عنصراً ماصاً A فان :

$$A L = L A = A$$

ذلك مهما تكن $L \in \mathcal{O}$

وبالتالي :

$$A = A L \subseteq S L \subseteq L$$

١ ـ ٢ ـ ٥ النواة في نصف زمرة The kernel of a semigroup

لقد بينا فيما سبق أن نصف زمرة ما S يمكنها أن تملك على الأكثر مثالياً أصغرياً واحداً . إن هذا المثالي الأصغر T_* يسمى **نواة نصف الزمرة** - إن وجد -

بما أن هذه النواة محتواة في أي مثالي لنصف الزمرة S ، فيمكن أن نقول عنها بأنها تقاطع كل مثاليات S . إذا كان هذا التقاطع خالياً فإن نصف الزمرة لاتملك نواة ومثال ذلك نصف الزمره (N,+) . بينما نلاحظ أن كل نصف زمرة منتهية تملك مثالياً يمينياً أصغرياً ومثالياً يسارياً أصغرياً كما تملك نواة .

مبرهنة (٨)

إذا حوت نصف زمرة S على مثالي يساري (يميني) اصغري L(R) فإن S تملك نواة K .

(اضف إلى ذلك ان K هي اجتماع كل المثلثات اليسارية (اليمينية) الاصغرية في S .

البرهـــان :

إن $L x$ $(\forall x \in S)$ هو مثالي أصغري لـ S .

ثم إن اجتماع كل المثاليـات اليسارية الأصغرية هو :

$$LS = \bigcup_{x \in S} Lx$$

وهو مثالي ثنائي الجانب في S .

ليكن A مثالياً ما ثنائي الجانب في S . إن :

$$ALx \subseteq SLx \subseteq Lx \qquad \forall x \in S$$

ولكن Lx أصغري فينتج أن :

$$ALx = Lx$$

من جهة أخرى :

$$ALx \subseteq AS \subseteq A$$

وبالتالي :

$$Lx \subseteq A \qquad \forall x \in S$$

ينتج أن :

$$LS = \bigcup_{x \in S} Lx \subseteq A$$

وبالتالي فإن LS هو المثالي الأصغر في S أي هو نواة S .

مبرهنة (٩)

إذا حوت نصف زمرة S على مثالي يساري اصغري L ومثالي يميني اصغري R فـإن S تملك نواة K حيث :

$$K = LR = LSR = LS = SR = LK = KR$$

البرهـان :

إن S تملك نواة إعتماداً على المبرهنة السابقة وإن :

$$K = LS = SR$$

ثم إنه

$$\forall a \in L \qquad La \subseteq LL \subseteq SL \subseteq L \Rightarrow La = L$$

كذلك

$$\forall b \in R \qquad bR \subseteq RR \subseteq RS \subseteq R \Rightarrow bR = R$$

وهذا يقضي بدوره إلى أن

$$a \in L \quad \Rightarrow \quad L = La \subseteq LS = K$$

$$b \in R \quad \Rightarrow \quad R = bR \subseteq SR = K$$

إذاً LR و LSR و LK و KR محتواة في K .

ولكنها جميعاً مثاليات ثنائية الجانب و K نواة S إذاً :

$$K = KR = LK = LSR = LR$$

نتيجة (٢)

إذا كان L و L' مثاليين اصغريين لنصف زمرة S و R و R' مثاليين يمينيين اصغرين لـ S فــإن

$$LR = L'R'$$

ذلك لان كلاً منها يساوي النواة K .

مبرهنة (١٠)

آ) إذا حوت نصف زمرة S على المثالي اليساري (اليميني) الأصغر L_* (R_*) فإن S تحوي على النواة K وإن $K = L_*$ ($K = R_*$).

ب) إذا حوت S على L_* و R_* معاً فإن $K = L_* = R_*$ والنــواة K زمــرة جزئية من S .

البرهــان :

آ) إن $L_* S = L_*$ (مبرهنة ٦) كذلك $K = L_* S$ (مبرهنة ٩) إذاً :

$$L_* = K$$

ب) إن

$$K = L_* = R_* \Leftarrow R_* = K \quad \text{و} \quad L_* = K$$

كذلك لدينا

$$xR_* = R_* \quad \text{و} \quad L_*x = L_*$$

وذلك مهما تكن $x \in S$ (مبرهنة ٦)

إذاً

$$Kx = xK = K$$

وذلك مهما تكن $x \in K$

وبالتالي فإن K زمرة جزئية من S □

تمرين (٦)

أثبت أن نصف الزمرة S تحوي المثالي اليساري (اليميني) الأصغر $L_*(R_*)$ ، إذا وفقط إذا ، حوت على عنصر واحد على الأقل يقبل القسمة يميناً (يساراً) على جميع عناصر S .

أضف إلى أن مجموعة العناصر التي تقبل القسمة يميناً (يساراً) على جميع عناصر S هي المثالي اليساري (اليميني) الأصغر $L_*(R_*)$ في S .

تمرين (٧)

أثبت أن نصف زمرة S تحوي على نواة K ، إذا وفقط إذا ، حوت على عنصر واحد x على الأقل بحيث أن $x \in SaS$ وذلك مهما يكن a من S .

أضف إلى أن مجموعة العناصر $x \in S$ بحيث $x \in SaS$ ذلك مهما يكن $a \in S$ هي النواة K .

ملاحظة (٢)

بينا فيما سبق أنه إذا حوت نصف زمرة S على المثالي اليساري الأصغر L_* أو المثالي اليميني الأصغر R_* فإن S تحوي على النواة K .

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن : هل العكس صحيح ؟

إن المثالين التاليين يعطيان الاجابة على هذا السؤال .

(١) لتكن S نصف زمرة معرفة بالجدول التالي :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	c	c	c	c
d	a	a	a	a

(تحقق من الخاصة التجميعية) .

فإن S تملك نواة $K = L_* = \{a, b, c\}$ لكنها لاتملك R_* .

(٢) لتكن S نصف الزمرة المعرفة بالجدول :

	a	b	c	d	e	f
a	b	b	e	e	e	b
b	b	b	e	e	e	b
c	f	f	d	d	d	f
d	f	f	d	d	d	f
e	b	b	e	e	e	b
f	f	f	d	d	d	f

(تحقق من الخاصة التجميعية)

فإن S تملك نواة $K = \{b, d, e, f\}$ ولكنها لاتملك L_* ولا R_* .

تمريـن (٨)

إن K في المثال الأخير ليست زمرة جزئيـة من S !

هل هـــذا يناقض المبرهنة (١٠) ؟ علل إجابتك .

١ ــ ٢ ــ ٦ المثاليات الاعظمية Maximal ideals

توطئة (٣) :

إذا حوت نصف زمرة S على مثالي يساري (يميني ، ثنائي الجانب) اعظمي A فإن اجتماع A مـع اي مثالي يساري (يميني ، ثنائي الجانب) B غـير محتوى في A هـو S .

البرهـان :

إن A و B مثاليان يساريان يقضي بأن $A \cup B$ مثالي يساري لايساوي A .

إذاً A يحتوى حقيقة في $A \cup B$. ولكن A أعظمي . إذاً $A \cup B = S$.

نتيجة (٢)

١) إذا كان A مثالياً يسارياً (يمينياً ، ثنائي الجانب) اعظمياً في نصف زمرة S فإنـه $\forall x \notin A$ لدينــا :

$$[A \cup J(x) = S \quad , \quad A \cup R(x) = S] \; A \cup L(x) = S$$

٢) إذا حوت نصف زمرة S على اكثر من مثالي يساري (يميني ، ثنائي الجانب) اعظمي واحد فإن اجتماع اي اثنين مختلفين من نوع واحد يساوي S .

مثـال (٥)

لتكن S نصف الزمرة المعرفة بالجدول :

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	2	3	4	5	6
3	3	3	3	3	3	3	3
4	0	1	2	3	4	5	6
5	5	5	5	5	5	5	5
6	0	1	2	3	4	5	6

(تحقق من الخاصة التجميعية)

إن S تحوي ثلاث مثاليات يسارية عظمى :

$$L_1 = \{ 0,1,2,3,4,5 \}$$

$$L_2 = \{ 0,1,2,3,5,6 \}$$

$$L_3 = \{ 0,1,3,4,5,6 \}$$

بينما تحوي S مثالياً يمينياً أعظمياً وحيداً

$$R = \{ 1,3,5 \}$$

ومثالياً أعظمياً (ثنائي الجانب) وحيداً

$$T = R = \{ 1,3,5 \}$$

مثـال (٦)

لتكن N^0 مجموعة الأعداد الطبيعية مع الصفر ، معرفاً عليها العملية :

$$m * n = 0 \qquad \forall m,n \in N^0$$

فهي نصف زمرة صفرية فيهـا $(N^0 - \{a\})$ مثـالي يساري ويميني وثنـائي الجانب أعظمي في N^0 وذلك مهما يكن $a \in N$. وهكذا فـإن N^0 تحوي عدداً لانهائياً من المثاليات الأعظمية ، واجتماع أي اثنين مختلفين منها هو N^0 نفسها .

مبرهنة (١١١)

الشرط اللازم والكافي ليكون المثالي اليساري (اليميني ، ثنائي الجانب) A اعظمياً في نصف زمرة S هو :

$\forall a,b \notin A$ فـإن

$$[\, J(a) = J(b) \ , \ R(a) = R(b)] \ L(a) = L(b)$$

البرهـان :

لزوم الشرط : نفرض أن A مثالي يساري أعظمي لـ S ، وليكن $a,b \notin A$.

إن

$$A \cup L(a) = S \Rightarrow b \in L(a) \Rightarrow L(b) \subseteq L(a)$$

ثم

$$A \cup L(b) = S \Rightarrow a \in L(b) \Rightarrow L(a) \subseteq L(b)$$

وبالتالي

$$L(a) = L(b)$$

وذلك مهما تكن $a, b \notin A$

كفاية الشرط : نفرض أنه $\forall a,b \notin A$ فإن $L(a) = L(b)$ ينتج من ذلك أن

$$S - A = L(a) \qquad \forall a \notin A$$

نفرض أن هناك مثالي يساري B يحوي A حقيقة فيكون :

$$B - A \neq \Phi$$

بفرض $a \in B - A$ فإن :

$$L(a) \cup A \subseteq B \Leftarrow A \subseteq B \quad \text{و} \quad L(a) \subseteq B$$

لكن $a \notin A$ وبالتالي :

$$B = S \quad \Leftarrow \quad L(a) \cup A = S$$

ومنه A مثالي يساري أعظمي .

١ ـ ٢ ـ ٧ العناصر الموسّعة increasing elements

تعريف (٥)

يـدعى العنصر a في نصف زمرة S **قاسماً مشتركاً يمينياً (يسارياً)** لنصف الزمرة S إذا كان :

$$(aS = S) \quad Sa = S$$

ويسمى **قاسماً مشتركاً** لنصف الزمرة S إذا كان :

$$aS = Sa = S$$

تعريف (٦)

يدعى العنصر a من نصف زمرة S **موسّعاً يمينياً (يسارياً)** في S إذا وجدت مجموعة جزئية $D \subset S$ بحيث أن :

$$(aD = S) \quad Da = S$$

إن وجود عنصر موسع يميني (يساري) في نصف زمرة يبـدو وكأنـه مستحيل . غير أننا سنورد بعد قليل مثالاً توضيحياً ، يبين وجود مثل هـذه العناصر في بعض أنصاف الزمر .

مبرهنة (١٢)

لايمكن لعنصر a في نصف زمرة S أن يكون موسعاً يمينياً ويسارياً بآن واحد .

البرهـان :

نفرض جدلاً وجود عنصر $a \in S$ يتصف بأنه موسع يميني ويساري بآن واحد، إذن توجد مجموعتان جزئيتان D وD′ في S بحيث $D' \neq S \neq D$ وأن :

$$D'a = S \quad \text{و} \quad aD = S$$

إن $aD=S$ يقضي بوجود عنصرين e و x في S بحيث :

$$ax = e \quad \text{و} \quad ae = a$$

كذلك $D'a = S$ يقضي بأنه مهما تكن $z\in S$ فإنه يوجد $y \in D'$ بحيث :

$$z = ya$$

أي أن

$$ze = yae = ya = z \qquad \forall z \in S$$

وبالتالي e حيادي يميني في S . إذاً :

$$D' = D'e = D'ax = Sx$$

لكن

$$S = Se = Sax = Sx \subseteq S$$

وبالتالي $Sx = S$ وهذا يقضي بأن $D' = S$ (مخالف للفرض) .

أي أنه لايوجد أي عنصر من S يتصف بأنه موسع يميني ويساري بآن واحد .

ملاحظة (٤)

إن من المهم أن نتـــذكر أن بعض أنصاف الزمر لاتملك عناصر موسعة مطلقاً مثل :

آ) أنصاف الزمر المنتهية لاتملك عناصر موسعة .

ب) أنصاف الزمر التبديلية لاتملك عناصر موسعة .

ج) أنصاف الزمر الاختزالية لاتملك عناصر موسعة .

د) الزمر لاتملك عناصر موسعة .

مبرهنة (١٢)

لتكن A مجموعة كل العناصر الموسعة اليمينية ، B مجموعة كل العناصر الموسعة اليسارية ، C مجموعة كل العناصر اللاموسعة في نصف زمــرة S . فإذا كانت A و B و C ليست خالية فإن :

(١) A و B و $A \cup C$ و $B \cup C$ و C انصاف زمر جزئية في S .

(٢) إن $A \cup B \cup C = S$ و $A \cap B = \Phi = A \cap C = B \cap C$

(٣) إن نصف الزمرة A لاتحوي اي عنصر موسع يساري لها . و B لاتملك أي عنصر موسع يميني لها .

(٤) إذا كانت S مونوئيداً فإن $C \neq \Phi$ وهي لاتملك اي عنصر موسع لها .

البرهــان :

(١) آ – بفرض $a,b \in A$ فإنه يوجد $S \supseteq D',D$ $(D \neq S \neq D')$ بحيث :

$$Da = S \quad \text{و} \quad D'b = S$$

وبالتالي

$$S \supseteq Dab = Sb \supseteq D'b = S$$

إذاً $Dab = S$ ومنه ينتج أن $ab \in A$ و A نصف زمرة جزئية من S .

ب) بنفس الطريقة نثبت أن B نصف زمرة جزئية من S .

جـ) نفرض جدلاً أنه يوجـــد عنصران $a,b \in C \cup A$ و $ab \notin C \cup A$ أي $ab \in B$.

إذن توجد مجموعة $D \subset S$ بحيث :

$$abD = S$$

لكن $bD \neq S$ لأن $b \notin B$ وبالتـــالي $a(bD) \neq S$ لأن $a \notin B$ إذاً $ab \notin B$

وهذا يناقض الفرض وبالتالي $C \cup A$ نصف زمرة جزئية من S .

د) بنفس الطريقة نثبت أن $C \cup B$ نصف زمرة جزئية من S .

ه) إن

$$(C \cup A) \cap (C \cup B) = C \cup (A \cap B) = C \cup \Phi = C$$

وبالتالي C نصف زمرة جزئية من S .

٢) من تعريف A و B و C ومن المبرهنة (١٢) نجد أن :

$$A \cup B \cup C = S \quad \text{و} \quad A \cap B = B \cap C = C \cap A = \Phi$$

٣) نفرض جدلاً أن A تحوي عنصراً موسعاً يسارياً لها a أي أنه توجـــد $D \subset A$ بحيث $Da = A$. وبالتالي يوجد $e \in D$ بحيث $ae = a$.

بما أن $a \in A$ فتوجد $D' \subset S$ بحيث $D'a = S$.

إذاً مهما تكن $y \in S$ يوجد $x \in S$ بحيث $xa = y$

وبالتالي

$$ye = xae = xa = y$$

إذاً e حيادي يميني في S . لكن $e \in A$ فتوجد $D'' \subset S$ بحيث $D''e = S$

لكن $D''e = D''$ وبالتالي $D'' = S$.

وهذا يناقض قولنا $D'' \subset S$. إذاً A لاتحوي أي عنصر موسع يساري لها .

٤) إذا كانت S تملك حيادياً e فإن $e \in C$ وبالتالي $C \neq \Phi$.

نفرض جدلاً أن C تملك عنصراً موسعاً يمينياً لها a وبالتالي فإنـه يوجد مجموعة جزئية $D \subset C$ بحيث $Da = C$. إذاً يوجد عنصر $x \in D \subset C$

بحيث أن $xa = e$ ومن هذا ينتج أن :

$$S = Se = Sxa \subset Sa \subset S$$

وهذا تناقض . إذاً لاتحوي C أي عنصر موسع يميني لها .

وبنفس الطريقة نثبت أن C لاتحوي أيعنصر موسع يساري لها .

مبرهنة (١٤)

كل عنصر موسع يميني (يساري) في نصف زمرة S هو قاسم مشترك يميني (يساري)لها ولكنه ليس بقاسم مشترك يساري (يميني) لها .

البرهـــان :

إذا كان a عنصراً موسعاً يمينياً في S فإنه يوجد $D \subset S$ بحيث $Da = S$

وبالتالي

$$S = Da \subseteq Sa \subseteq S$$

يعطي

$$Sa = S$$

نفرض جدلاً أن a قاسم مشترك يساري أيضاً لها .

إذاً S تملك قاسماً مشتركاً وبالتالي S تملك عنصراً حيادياً e (حسب المبرهنة ٢ من الفصل الأول) . وينتج عن ذلـك وجود $b \in S$ بحيث $ab = e$.

إن

$$D = De = Dab = Sb = (Sa) b = Se = S$$

وهذا مخالف للفرض ($D \neq S$) . إذاً a ليس بقاسم مشترك يساري لـ S .

مبرهنة (١٥)

إذا حوت نصف زمرة واحدية (مونوئيد) S على عناصر موسعة يمينية فإنها تحوي على عناصر موسعة يسارية والعكس بالعكس .

البرهان :

إذا حوت S على عنصر موسع يميني a فإنه توجد $D \subset S$ بحيث $Da = S$.

لكن S تملك حيادياً وليكن $S \ni e$ فيوجد $x \in S$ بحيث $xa = e$.

إذاً

$$S = eS = xaS = x\,(aS)$$

إن $aS \neq S$ حسب ماجاء في المبرهنة السابقة وبالتالي x عنصر موسع يساري في S .

مثال (٧)

لتكن S نصف زمرة ذات عنصر حيادي 1 مولدة من العنصرين a و b حيث $ab = 1$ أي :

$$S = \langle a,b \;;\; ab = 1 \rangle$$

لو فرضنا

$$a^0 = b^0 = 1 \quad \text{و} \quad ba \neq 1$$

فإن :

آ) $\langle a \rangle$ و $\langle b \rangle$ نصفا زمرتين جزئيتين غير منتهيتين من S .

ذلك لأنه لو فرضنا جدلاً أن $\langle a \rangle$ منتهية مثلا لوجد r و $m \in N$ بحيث

$$a^{r+m} = a^r$$

وبالتالي

$$a^{r+m} . b^r = a^r . b^r$$

أي أن

$$a^m = 1$$

إذاً

$$b = 1\,b = a^m b = a^{m-1}$$

ينتج أن

$$ba = a^m = 1$$

وهذا يخالف الفرض .

ب) إذا كان $b^m = a^n$ من أجل عنصرين ما $m, n \in N^0$ فإن :

$$a^m a^n = a^m b^m = 1$$

وبالتالي $a^{m+n} = 1$. لكن $\langle a \rangle$ غير منتهية . إذاً $m + n = 0$

ومنه ينتج أن

$$m = n = 0$$

ﺣ) إذا كانت $b^m a^n = 1$ من أجل عنصرين ما $m,n \in N^0$ فإن :

$$n = m \Leftarrow a^n = a^m \Leftarrow a^m b^m a^n = a^m$$

لأن $\langle a \rangle$ غير منتهية . إذاً $b^n a^n = 1$ وبالتالي :

$$ba = (1\,b)\,a = (b^n a^n b)\,a = (b^n a^{n-1})\,a = b^n a^n = 1$$

وهذا يخالف الفرض . إذاً :

$$m = n = 0$$

د) كل عنصر $x \in S$ يمكن التعبير عنه بصورة واحدة فقط من الشكل :

$$x = b^m a^n \quad \text{حيث} \quad m,n \in N^0$$

ذلك لأنه لو فرضنا جدلاً بأن هناك عنصر $x \in S$ يمكن التعبير عنه بصورتين مختلفتين :

$$x = b^m a^n = b^h a^k$$

لنفرض مثلاً $k \geqslant n$ فنميز حالتين :

$m \geqslant h$ فينتج :

$$a^h . b^m . a^n . b^n = a^h . b^h . a^k . b^n$$

أي :

$$b^{m-h} = a^{k-n}$$

وبالتالي :

$$m - h = 0 \text{ و } n - k = 0 \Leftarrow m = h \text{ و } n = k$$

كذلك $m \leqslant h$ تعطي :

$$a^m b^m a^n b^n = a^m b^h a^k b^n$$

$$1 = b^{h-m} . a^{k-n}$$

وبالتالي :

$$h - m = 0 \text{ و } k - n = 0 \Leftarrow m = h \text{ و } k = n$$

وهذا يناقض الفرض .

هـ) إن

$$S = \{ b^m a^n : m , n \in N^0 \}$$

و) مهما تكن $k \in N$ فإن :

$$D = S . a^k = \{ b^m . a^{n+k} : m,n \in N^0 \} \neq S$$

لأن $b \notin D$ (حيث $n + k \neq 0$) .

كذلك :

$$D' = b^k . S = \{ b^{m+k} . a^n : m , n \in N^0 \} \neq S$$

لأن $a \notin D'$ (حيث $m + k \neq 0$)

ز) إن :

$$D . b^k = S . a^k b^k = S . 1 = S$$

كذلك :

$$a^k D' = a^k b^k S = 1 . S = S$$

وبالتالي b^k عنصر موسع يميني و a^k عنصر موسع يساري في S وذلك مهما تكن $k \in N$.

١ ــ ٢ ــ ٨ العناصر القاعدية Basic elements

تعريف (٧)

يقال عن عنصر a من نصف زمرة S بأنـه **قاعدي يميني (يساري ، ثنائي الجانب)** إذا كان :

$$S a \cup a = S \quad [a S \cup a = S \text{ و } a S \cup S a \cup S a S \cup a = S]$$

ينتج من التعريف مباشرة أن :

آ) أي مثالي يميني (يساري ، ثنائي الجـانب) حقيقي A في نصف زمرة S لايحوي أي عنصر قاعدي يساري (يميني ، ثنائي الجانب) لـ S .

ب) إذا حوت نصف زمرة S على أكـثر من مثالي يميني (يساري) أعظمي واحد فإنها لاتحوي أي عنصر قاعدي يساري (يميني) لها .

جـ) إذا حوت نصف زمرة S على أكثر من مثالي أعظمي واحد فإنهـا لاتحوي أي عنصر قاعدي يميني أو يساري أو ثنائي الجانب لها .

د) إن أي عنصر قاسم مشترك يميني (يساري ، ثنائي الجانب) هو عنصر

قاعدي يميني (يساري ، ثنائي الجانب) ولكن العَكس غير صحيح .

ه) إن أي عنصر موسع يميني (يساري) هو عنصر قاعدي يميني (يساري) ولكن العكس غير صحيح .

مبرهنة (١٦)

لتكن S نصف زمرة فيها :

$$A = \{ a\in S : R(a) = S \wedge aS \neq S \}$$

$$B = \{ a\in S : L(a) = S \wedge Sa \neq S \}$$

$$C = \{ a\in S : J(a) = S \wedge J(a) - \{a\} \neq S \}$$

$$D = \{ a\in S : aS = S \}$$

$$E = \{ a\in S : Sa = S \}$$

$$G = \{ a\in S : aS = Sa = S \}$$

إن : آ) كلا من A و B و C هي إما خالية أو ذات عنصر وحيد .

ب) إذا كانت $A \neq \Phi$ فإن $G = D = \Phi$

جـ) إذا كانت $B \neq \Phi$ فإن $G = E = \Phi$

د) إذا كانت $C \neq \Phi$ فإن $G = E = D = \Phi$

البرهان :

آ) إذا كانت $A \neq \Phi$ (مثلاً) فإنه يوجد عنصر $a\in S$ بحيث :

$aS \cup a = S$ و $aS \neq S$.

إن aS مثالي يميني وبالتالي :

$\forall x\in aS$ فإن $R(x) \subseteq aS$ وبالتالي $R(x) \neq S$. إذاً $A = \{a\}$.

وبنفس الطريقة نناقش B و C .

ب) إذا كانت $A \neq \Phi$ فـــإنه يوجد عنصر وحيد $a \in S$ بحيث $R(a) = S$ و $a \notin Sa$. وبالتالي $\forall x \in S$ فإن $xS \neq S$ ومنه ينتج أن : $D = G = \Phi$.

من الواضح أنه إذا كانت $D \neq \Phi$ أو $G \neq \Phi$ فإن $A = \Phi$.

حـ) البرهان مشابه للبرهان السابق .

د) إذا كانت $C \neq \Phi$ فإن S تملك عنصراً واحداً a بحيث :

$$a \cup S a \cup a S \cup S a S = S \quad \wedge \quad S a S \cup S a \cup a S \neq S$$

وبالتالي مهما يكن العنصر $x \in S$ بحيث $x \neq a$ فإن :

$$J(x) \subseteq Sa \cup aS \cup SaS \subset S$$

ومنه ينتج أن :

$$Sx \neq S \quad \text{و} \quad xS \neq S$$

وبالتالي :

$$D = E = G = \Phi$$

ملاحظة (٥)

من الممكن أن تكون A و B و C جميعها غير خالية في نصف زمرة S فمثلاً في نصف الزمرة S :

	a	b	c	d
a	a	b	c	b
b	b	c	a	c
c	c	a	b	a
d	b	c	a	c

(تحقق من الخاصة التجميعية)

لدينا $A = B = C = \{d\}$

نتائج (٤)

١) يمكننا أن نلاحظ أن أي نصف زمرة S يمكنها أن تحقق حالة واحـدة فقط من الحالات التالية :

آ) S لاتملك أي عنصر قاعدي يميني (يساري) لها .

ب) S تملك عنصراً قاعدياً يمينياً (يسارياً) لها واحداً فقط ، ولكنها لا تملك أي قاسم مشترك يميني (يساري) لها .

حـ) S تملك عنصراً قاعديـاً يمينياً (يسارياً) واحداً أو أكثر كلها قواسم مشتركة يمينية (يسارية) لهـــا .

٢) أما بالنسبة للعنصر القاعدي ثنائي الجانب فإن S يمكنها أن تحقق حالة واحدة فقط من الحالات التالية :

آ) S لاتملك عنصراً قاعدياً ثنائي الجانب .

ب ، S تملك عنصراً قاعدياً ثنائي الجانب وحيداً ولكنهـــا لاتملك أي قاسم مشترك يميني أو يساري لها .

حـ)S تملك عنصراً قاعـدياً ثنائي الجانب واحداً أو أكثر ولكن من أجل أي عنصر قاعدي a لها فإن :

$$aS \cup Sa \cup SaS = S$$

٣) إذا كانت S مونوئيداً ذات عناصر موسعة فإن :

آ) مجموعة كل العناصر القاعدية اليمينية A في S والتي تحوي ضمنهـا حقيقة مجموعة كل العناصر الموسعة اليمينية في S ، هي مجموعة غـــير خالية ولا تساوي S .

ب) مجموعة كل العناصر القاعدية اليسارية B في S والتي تحوي ضمنها حقيقة مجموعة كل العناصر الموسعة اليسارية في S ، هي مجموعة غـير خالية ولا تساوي S .

هـ) $A \neq B$.

د) مجموعة كل العناصر القاعدية ثنائية الجانب D فى S تحقق ما يلي :

$$D \supseteq A \cup B$$

مبرهنة (١٧)

لتكن S نصف زمرة (بدون عناصر موسعة) فإن الشرط اللازم والكافي لتملك S عنصراً قاسماً مشتركاً يمينياً (يسارياً) هو ان تملك S حيادياً يمينياً (يسارياً) .

البرهان :

(١) S تملك حيادياً يمينياً e $\Leftarrow$ $Se = S$ و e قاسم مشترك يميني لـ S .

(٢) S تملك قاسماً مشتركاً يمينياً a $\Leftarrow$ $Sa = S$.

لكن $a \in S$ يقضي بوجود عنصر $S \ni e$ بحيث $ea = a$.

إن a عنصر اختزالي يميني في S ذلك لأن $xa = ya$ $(x, y \in S)$ يقضي $x = y$ وإلا لكان $S = (S - \{x\})a$ وهذا يخالف للفرض لأن S لاتملك عناصر موسعة .

الآن $\forall v \in S$ فإن :

$$va = v(ea) = (ve)a$$

وبالتالي $v = ve$ و e حيادي يميني في S .

تعريف (٨)

نقول عن عنصرين a و b من نصف زمرة S أن كلاً منهما نظير لـلآخر إذا كان :

$$aba = a \qquad \text{و} \qquad bab = b$$

نتيجة (٥)

يمكن أن نستنتج مباشرة من المبرهنة السابقة أنه في نصف زمرة S لاتحوي عناصر موسعة :

آ) كل قاسم مشترك يميني (يساري) في S هو عنصر اختزالي يساري (يميني) في S .

ب) كل قاسم مشترك يميني (يساري) في S هو عنصر نظامي في S ، كما أن نظيره في S هو قاسم مشترك يميني (يساري) في S .

ذلك لأن a قاسم مشترك يميني لـ $S \Leftarrow S$ $Sa = S \Leftarrow$ يوجد حيادي يميني $e \in S$ بحيث $ac = ea = a$. لكن $e \in S$ فيوجد عنصر $x \in S$ بحيث :

$$xa = e$$

بالتالي : $\quad axa = ae = a$

ليكن b نظير a أي :

$$bab = b \quad \text{و} \quad aba = a$$

إن :

$$Sab = S \Leftarrow ab = e \Leftarrow aba = ea$$

لكن $Sa = S$ وبالتالي $Sb = S$.

حـ) المجموعة $G = \{ a \in S : aS = Sa = S \}$ إن لم تكن خالية فهي زمرة جزئية من S .

تمرين (٩)

إذا ملكت نصف زمرة S قاسماً مشتركاً يسارياً (يمينياً) واحـــداً فقط

a ، فإن a هو عنصر حيادي يساري (يميني) في S . أثبت ذلك .

١ ــ ٢ ــ ٩ المثالي الأعظم universally maximal ideal

مبرهنة (١٨)

الشرط اللازم والكافي لتحوي نصف زمرة S على المثالي الأعظم ثنائي الجانب (اليساري ، اليميني) $\overset{*}{T}$ ($\overset{*}{L}$ ، $\overset{*}{R}$) هو ان تملك عنصراً قاعدياً ثنائي الجانب (يمينياً ، يسارياً) واحداً على الأقل ــ ولكن ليست جميعها ــ .

اضف إلى ذلك ان $\overset{*}{T}$ ($\overset{*}{L}$ ، $\overset{*}{R}$) هي متممة مجموعة كل العناصر القاعدية ثنائية الجانب (اليمينية ، اليسارية) في S .

البرهان :

لزوم الشرط : نفرض أن S تحوي المثالي الأعظم $\overset{*}{T}$

إن $S - \overset{*}{T} \neq \Phi$. إذاً مهما يكن $h \in S - \overset{*}{T}$ أي $\forall h \notin \overset{*}{T}$ فــإن :

$$T = J(h) = h \cup Sh \cup hS \cup ShS$$

هو مثالي ثنائي الجانب في S .

فهناك حالتان $T \subseteq \overset{*}{T}$ أو $T = S$

لكن $T \subseteq \overset{*}{T}$ تقضي بأن $h \in \overset{*}{T}$ (لأن $h \in T$) وهذا مخالف للفرض .

إذاً $T = S$ وبالتالي فإن h عنصر قاعدي ثنائي الجانب في S .

إن $\overset{*}{T}$ لاتحوي أي عنصر قاعدي لـ S لأن

$$J(a) \neq S \Leftarrow J(a) \subset \overset{*}{T} \Leftarrow a \in \overset{*}{T}$$

إذاً متممة $\overset{*}{T}$ (أي $S - \overset{*}{T}$) هي مجموعة كل العناصر القاعدية في S .

كفاية الشرط : نفرض أن S تحوي عنصراً قاعدياً h وأن S ليست كلها عناصر قاعدية .

ولتكن

$$H = \{ h \in S \ : \ J(h) = S \}$$

إن $H \neq \Phi$ و $H \neq S$ فرضاً .

إذاً $\bar{H} \neq S$ و $\bar{H} \neq \Phi$.

الآن $\forall x \in S$ و $\forall y \in \bar{H}$ فإن :

$$J(xy) = xy \cup xyS \cup Sxy \cup SxyS \subseteq Sy \cup SyS \subseteq J(y) \subset S$$

$$J(yx) = yx \cup yxS \cup Syx \cup SyxS \subseteq yS \cup SyS \subseteq J(y) \subset S$$

وبالتالي :

$$J(xy) \neq S \neq J(yx)$$

إذاً :

$$xy\ ,\ yx \in \bar{H}$$

أي أن :

$$\bar{H}S \subseteq \bar{H} \quad \text{و} \quad S\bar{H} \subseteq \bar{H}$$

أي $\bar{H}$ مثالي ثنائي الجانب لـ S .

لنفرض أن T مثالي لـ S غير محتوى في $\bar{H}$ فيكون $H \cap T \neq \Phi$

إذاً يوجد عنصر $b \in T$ بحيث أن $J(b) = S$.

لكن :

$$T = S \quad \Leftarrow \quad S = J(b) \subseteq T \subseteq S \quad \Leftarrow \quad b \in T$$

وهكذا فإن $\bar{H}$ هو المثالي الأعظم في S .

مثال (٨)

لتكن S نصف زمرة معرفة بالجدول : (تحقق من الخاصة التجميعية)

	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	e	f
c	a	c	e	a	c	e
d	a	d	a	d	a	d
e	a	e	c	a	e	c
f	a	f	e	d	c	b

إن S تبديلية ، فلا فرق بين قاعدي يميني ويساري وثنائي الجانب .

إن $\{e,f\}$ مجموعة العناصر القاعدية في S وبالتالي :

$$L^* = R^* = T^* = \{a, b, c, d\}$$

ملاحظة (٦)

إن المثالي الأعظم هو المثالي الأعظمي الوحيد في نصف الزمرة ، ولكن يجب الانتباه إلى أن العكس غير صحيح . والمثال التالي يوضح ذلك .

لتكن S_1 وS_2 نصفي زمرتين حيث S_1 هي المجال المفتوح $]-1, +1[$ من مجموعة الأعداد الحقيقية مع عملية الضرب العادية . S_2 هي المجموعة $\{0, a\}$ حيث $a^2 = a$ و 0 هو العنصر الماص في S_2 .

إن $S = S_1 \cup S_2$ مع قانون التشكيل التالي :

$xy = x * y$ إذا كانت $x,y \in S_1$ أو $x,y \in S_2$

$0 = y * x = x * y$ إذا كانت $x \in S_1$ و $y \in S_2$.

إن S نصف زمرة تحوي المثالي اليساري الأعظمي الوحيد S_1 . لكن S_1 ليس المثالي اليساري الأعظم لـ S لأن S_2 هو مثالي يساري لـ S . و S_1 لاتحوي S_2 .

مبرهنة (١٩)

إذا كانت S نصــف زمرة واحدية (مونوئيــداً) ذات عناصــر موسعة فــإن S تملك $\overset{*}{L}$ و $\overset{*}{R}$ وإن

$$\overset{*}{L} \neq \overset{*}{R}$$

وإذا لم تكن S بسيطة فإن S تملك $\overset{*}{T}$ وإن

$$\overset{*}{T} \subseteq \overset{*}{L} \cap \overset{*}{R}$$

البرهان :

نفرض أن A و B و C مجموعات كل العناصر القاعدية اليمينية ، اليسارية ، ثنائية الجانب على الترتيب في S ، فنجد أن :

$$A \neq \Phi \quad و \quad A \neq S \quad و \quad B \neq \Phi \quad و \quad B \neq S$$

وبالتالي

$$\overset{*}{L} = S - A \quad , \quad \overset{*}{R} = S - B$$

لكن $A \neq B$ (مبرهنة ١٣) إذاً

$$\overset{*}{L} \neq \overset{*}{R}$$

والآن إذا لم تكن S بسيطة فإن $C \neq S$ و $C \neq \Phi$ وبالتالي S تملك

$$\overset{*}{T} = S - C$$

إن :

$$\overset{*}{L} \cap \overset{*}{R} = (S - A) \cap (S - B) = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} \supseteq \overline{C} = \overset{*}{T}$$

مثال (٩)

بالعودة إلى المثال (٧) نجد في نصف الزمرة :

$$S = < a,b \; ; \; ab = 1 >$$

أن مجموعة العناصر القاعدية اليمينية في S هي :

$$A = \{ 1 , b , b^2 , \ldots \}$$

وبالتالي :

$$\overset{*}{L} = S - \{ \; b^n : n \in N^0 \}$$

كما أن مجموعة كل العناصر القاعدية اليسارية في S هي

$$B = \{ 1 , a , a^2, \ldots \}$$

وبالتالي

$$\overset{*}{R} = S - \{ a^n : n \in N^0 \} \neq \overset{*}{L}$$

لكن S نصف زمرة بسيطة وبالتالي فإنها لاتحوي $\overset{*}{T}$.

مبرهنة (٢٠)

إذا حوت نصف زمرة S (بدون عناصر موسعة) على المثالي اليساري (اليميني) الأعظم $\overset{*}{L}$ $(\overset{*}{R})$ فإن S تحوي على المثالي الأعظم $\overset{*}{T}$. أضف إلى ذلك ان

$$(\overset{*}{T} = \overset{*}{R}) \; \overset{*}{T} = \overset{*}{L}$$

البرهان :

إذا حوت S على $\overset{*}{L}$ فإنه مهما يكن $x \in S$ فإن $\overset{*}{L} x$ مثالي يساري وبالتالي :

$$\forall x \in S \qquad \overset{*}{L} x \subseteq \overset{*}{L}$$

إذاً

$$\overset{*}{L} S \subseteq \overset{*}{L}$$

أي أن $\overset{*}{L}$ مثالي يميني ، فهو مثالي ثنائي الجانب .

لكن T أي مثالي ثنائي الجانب ، فإن T مثالي يساري وبالتالي $T \subseteq \overset{*}{L}$.

ينتج أن $\overset{*}{L}$ هو المثالي الأعظم أي :

$$\overset{*}{L} = \overset{*}{T}$$

نتيجة (٦)

اذا حوت نصف زمـرة S (بدون عناصـر موسعة) على المثـالي اليساري الأعظـم $\overset{*}{L}$ والمثالي اليميني الأعظم $\overset{*}{R}$ فـإن S تحوي $\overset{*}{T}$ ويكون :

$$\overset{*}{R} = \overset{*}{T} = \overset{*}{L}$$

ملاحظة (٧)

إن عكس المبرهنة السابقة غير صحيح . والمثال التالي يوضح ذلك .

لتكن S نصف زمرة معرفة بالجدول التالي :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	d
c	c	c	c	c
d	a	b	a	d

فنجد أن S تملك المثالي الأعظم $\overset{*}{T}$ حيث :

$$\overset{*}{T} = \{ a , c \}$$

لكنها لاتملك $\overset{*}{L}$ ولا $\overset{*}{R}$.

تمرين (١٠)

في نصف زمرة S (بدون عناصر موسعة) ، أي عنصر $a \in S$ يتصف بأنه

قاعدي يميني ويساري بآن واحد ، يحقق مايلي :

إما $a \in Sa \cap aS$ أو $a \notin Sa \cup aS \cup SaS$ أثبت ذلك .

مثال (١١٠)

لتكن S نصف الزمرة المعرفة بالجدول التالي :

	a	b	c	d
a	a	b	c	a
b	b	c	a	c
c	c	a	b	a
d	b	c	a	c

فيكون :

$$T^* = L^* = R^* = \{a,b,c\}$$

و S تملك عنصراً قاعدياً وحيداً

$$c \notin cS \cup Sc \cup ScS$$

مبرهنة (٢١)

إذا كانت $A = \{a \in S : aS = S\}$ مجموعة جزئية غير خالية من نصف زمرة S (بدون عناصر موسعة) فإن :

١) $aA = A$ و $a\bar{A} = \bar{A}$ وذلك مهما تكن $a \in A$.

٢) A نصف زمرة جزئية نظامية اختزالية يسارية من S .

البرهان :

إذا كانت $a,b \in A$ فإن

$$abS = aS = S$$

وبالتالي $ab \in A$.

أي أن A نصف زمرة جزئية و $aA \subseteq A$ وذلك مهما تكن $a \in A$.

إذا كانت $\Phi = \bar{A}$ فإن $a\bar{A} = \bar{A}$ و $aA = A$ وذلك $\forall a \in A$.

أما إذا كانت $\bar{A} \neq \Phi$ فإن $\bar{A}$ هو المثالي اليميني الأعظم R^* في S .

وبالتالي فهو المثالي الأعظم T^* في S .

إذاً $S\bar{A} \subseteq \bar{A}$ وبالتالي $a\bar{A} \subseteq \bar{A}$ وذلك مهما تكن $a \in A$.

لكن

$$S = aS = a(A \cup \bar{A}) = aA \cup a\bar{A}$$

ثم إن

$$aA \subseteq A \quad \text{و} \quad a\bar{A} \subseteq \bar{A} \quad \text{و} \quad A \cap \bar{A} = \Phi$$

إذاً

$$aA = A \quad \text{و} \quad a\bar{A} = \bar{A}$$

وذلك مهما تكن $a \in A$.

إن كل عنصر $a \in A$ هو عنصر نظامي في A وهو عنصر اختزالي يساري في S (مبرهنة (١٧) ونتيجتها) وبالتالي A نصف زمرة جزئية نظامية اختزالية يسارية .

ملاحظة (٨)

يمكن صياغة مبرهنة مشابهة وبرهانها مشابه أيضاً للبرهان السابق :

إذا كانت S نصف زمرة (بدون عناصر موسطة) فيها $B = \{b \in S : Sb = S\}$ مجموعة جزئية غير خالية فإن :

١) $Bb = B$ و $\bar{B}b = \bar{B}$ **وذلك مهما تكن** $b \in B$.

٢) B **نصف زمرة جزئية نظامية اختزالية يمينية من** S .

مبرهنة (٢٢)

لتكن S نصف زمرة واحدية (بدون عناصر موسطة) ولتكن :

$B = \{ b \in S : Sb = S \}$ و $A = \{ a \in S : aS = S \}$

فإن $A = B$ وإن A زمرة جزئية مـن S .

البرهان :

بمـا أن S ذات عنصر حيادي ، فإن $A \neq \Phi \neq B$

إذا كانت $A = B = S$ فإن S زمرة وينتهي البرهان .

إذاً لنفرض أن A أو B لاتساوي S (لنفرض أن $A \neq S$ والبرهان مشابه من أجل $B \neq S$) .

إن $\Phi \neq A \neq S$ وبالتالي $S \neq \bar{A} \neq \Phi$ وإن S تملك المثالي اليميني الأعظم $\overset{*}{R} = \bar{A}$. إذاً S تملك المثالي الأعظم $\overset{*}{T} = R^*$.

لنفرض جدلاً أن $B = S$ فيكون $Sx = S$ وذلك مهما تكن $x \in S$. وهذا يقضي بأن S بسيطة يسارياً فلا تملك أي مثالي يساري حقيقي . وهذا مخالف لكون T^* مثالي حقيقي يساري في S . إذاً $B \neq S \Leftarrow S \neq \bar{B} \neq \Phi$.

إذاً S تملك المثالي اليساري الأعظم $L^* = \bar{B}$.

إذاً $\overset{*}{L} = \overset{*}{R}$ أي $\bar{A} = \bar{B}$ وبالتالي $A = B$.

إذاً $A = \{ a \in S : aS = Sa = S \}$ فهي زمرة جزئية عظمى في S .

نتيجة (٧)

إذا كانت S نصف زمرة واحدية (وليست زمرة) وبدون عناصر موسعة ، فإن S تملك المثالي اليساري الأعظم L^* والمثـــالي اليميني الأعظم $\overset{*}{R}$ والمثالي الأعظم T^* .

وإن $L^* = \overset{*}{R} = T^*$ ومتممة $\overset{*}{L}$ هي زمرة جزئية من S .

مبرهنة (٢٣)

لتكن S نصف زمرة واحدية (بدون عناصر موسعة) وليست زمرة . فإن نصف الزمرة الجزئية $H \supseteq S$ هي المثالي اليميني الأعظم (وبالتالي اليساري وثنائي الجانب) لـ S ، إذا وفقط إذا ، كانت $\overline{H}$ متممة H في S زمرة جزئية من S بحيث أن $aH = Ha = H$ وذلك مهما يكن $a \in \overline{H}$.

البرهان :

(١) إذا كانت $H = \overset{*}{R}$ فإن $\overline{H}$ زمرة جزئية في S (حسب النتيجة السابقة) .

ولإن $aH = Ha = H$ وذلك مهما يكن $a \in \overline{H}$ (مبرهنة ٢١) .

(٢) إذا كانت $\overline{H}$ زمرة جزئية في S وكان $aH = Ha = H$ مهما تكن $a \in \overline{H}$ فإن :

$$aS = a(H \cup \overline{H}) = aH \cup a\overline{H} = H \cup \overline{H} = S \quad \forall a \in \overline{H}$$

وبالتالي a عنصر قاعدي يساري في S .

إن $\overline{H}$ زمرة جزئية حقيقية من S لأن S ليست زمرة .

بما أن H نصف زمرة جزئية من S (فرضاً) فمهما يكن $a \in H$ فـإن

$$Ha \subseteq H$$

لكن مهما تكن $a \in \overline{H}$ فإن $Ha = H$. إذاً $HS = H$.

وبالتالي H مثالي يميني حقيقي في S لذا لايحوي أي عنصر قاعدي يساري لـ S . إذاً $\overline{H}$ هي مجموعة كل العناصر القاعدية اليسارية في S . وهكذا فإن H هي المثالي اليميني الأعظم (وبالتالي اليساري وثنائي الجانب) في S .

* * *

تماريــن (١ ـ ٢)

١) برهن أن الشرط اللازم والكافي ليكون عنصر a من نصف زمرة S قاسماً مشتركاً لها هو أن يكون : $a\,S\,a = S$

٢) برهن أن الشرط اللازم والكافي ليكون عنصر a من نصف زمرة واحدية S قاسماً مشتركاً يمينياً (يسارياً) لها هو أن يملك نظيراً يسارياً (يمينياً) بالنسبة للحيادي .

٣) برهن أن الشرط اللازم والكافي ليكون عنصر a من نصف زمرة واحدية S قاسماً مشتركاً لها هو أن يملك نظيراً يمينياً فيها .

٤) برهن أن الشرط اللازم والكافي لتملك نصف زمرة S قاسماً مشتركاً لها هو أن تملك عنصراً حيادياً .

٥) برهن أنه في نصف زمرة S (لاتحوي عناصر موسعة) كل قاسم مشترك يميني (يساري) a في S هو عنصر نظامي تماماً في S .
(أي أنه يوجد $x \in S$ بحيث $a x a = a$ و $a x = x a$)
كما أن نظيره هو أيضاً قاسم مشترك يساري (يميني) في S .

٦) لتكن S نصف زمرة (بدون عنصر ماص) تملك عنصراً جامداً e ومثالياً يسارياً أصغرياً L .
برهن أنه إذا كانت $e \in L$ فإن $S e = L$ وأن L هي زمرة يسارية (أي

أنها بسيطة يسارياً واختزالية يمينياً) . بينما eL هي زمرة جزئية في S .
ويرهن أن eS مثالي يميني أصغري في S .

٧) برهن أنه إذا كانت نصف زمرة S تملك مثالياً G وكانت G زمرة جزئية من S فإن G هي نواة S .

٨) لتكن S نصف زمرة (بدون عنصر ماص) ذات مثـالي يساري أصغري L . أثبت أن $L = Sx$ وذلك مهما يكن $x \in L$.

٩) لتكن S نصف زمرة (بدون عنصر ماص) وليكن M مثالياً أصغرياً في S . برهن أن M نصف زمرة جزئية بسيطة من S .

١٠) ليكن T مثالياً في نصف زمرة S و M نصف زمرة جزئية من S فأثبت ان: $T \cap M$ هو مثالي لـ T وأن $M \cup T$ هو نصف زمرة جزئية من S .

١١) برهن أنه إذا كان A مثالياً لنصف زمرة S وكان B مثالياً لنصف الزمرة الجزئية A بحيث أن $B^2 = B$ فإن B هو مثالي لنصف الزمرة S نفسها .

١٢) لتكن S نصف زمرة مولدة من العنصرين a و b تربطهما العلاقتان :

$$b^2a = a \quad \text{و} \quad ab^2 = b^2$$

أي

$$S = \langle a,b \,;\, b^2a = a \wedge ab^2 = b^2 \rangle$$

اكتب الجدول الممثل لنصف الزمرة S وبيّن أن S تملك المثالي اليميني الأعظم $\overset{*}{R}$ والمثالي الأعظم $\overset{*}{T}$ لكنها لاتملك المثالي اليساري الأعظم L^* .

١٣) لتكن S نصف زمرة مولدة من التحويلين :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 5 & 5 & 5 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 8 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

اكتب جدول S وعين المثالي اليميني واليساري وثنائي الجانب الأعظم (أيها يوجد) .

١٤) لتكن N مجموعة الأعداد الطبيعية معرفاً عليها قانون التشكيل :

$$a \cdot b = \begin{cases} a & \text{إذا كان } b \text{ عدداً فردياً} \\ b & \text{إذا كان } b \text{ عدداً زوجياً} \end{cases}$$

بين أن N نصف زمرة وعين مجموعة العناصر القاعدية اليمينية A فيها وبين أن A نصف زمرة جزئية نظامية اختزالية يمينية في N .

هل تملك N عناصر قاعدية يسارية ؟

ماهو المثالي اليساري الأعظم في N ؟ هل تملك N المثالي الأعظم اليميني ؟ وهل تملك N المثالي الأعظم ؟ .

١٥) لتكن G مجموعة غير خالية معرف عليها قانوني تشكيل + و . بحيث :

١) $(G,+)$ نصف زمرة ، $(G,.)$ زمرة .

٢) $(a+b)c = ac+bc$.

اثبت أن :

آ) $G = G+G$

ب) إذا ملكت $(G,+)$ عنصراً جامداً فإن كل عنصر من عناصرها هو عنصر جامد .

حـ) لتكن $A = G \times G$ مع قانون التشكيل :

$$(a,b)(c,d) = (a.c \ , \ b.c+d) \qquad a,b,c,d \in G$$

اثبت أن A نصف زمرة بسيطة .

١٦) ليكن e حيادياً يسارياً معيناً من نصف زمرة S و U مجموعة القواسم اليسارية لـ e و V مجموعة القواسم اليمينية لـ e .

اثبت أن :

آ) U تحوي كل القواسم المشتركة اليسارية لـ S . وهي نصف زمرة جزئية من S تحوي كل العناصر الحيادية اليسارية لـ S ، ولاعنصر جامد آخر .

ب) إذا كانت $S = U$ فإن S زمرة يمينية . أما إذا كانت $S \neq U$ فــإن $U - S$ هو المثالي اليميني الأعظم لـ S . و U نصف زمرة جزئية من S .

حـ) V نصف زمرة جزئية من S اختزاليــة يسارية تحوي e ولا عنصر جامد آخر .

د) $H_e = U \cap V$ زمرة جزئية عظمى من S حياديها e .

هـ) إذا كانت $S = V$ فإن S زمرة . أمــا إذا كانت $S \neq V$ فـإن $S - V$ هو مثالي يساري لـ S و V نصف زمرة جزئية من S .

* * *

الفصل الثالث

بنيـــة انصاف الزمـــر

نشر J.A. Green عام ١٩٥١ بحثاً عنوانه « حول بنية أنصاف الزمر » عرّف فيه عدداً من علاقات التكافؤ على نصف زمرة ، كان لها أثر كبير في دراسة بنية نصف الزمرة . إننا ـ في هذا الفصل ـ سنركز على دراسة بنية نصف الزمرة معتمدين على علاقات غرين . لكننا قبل أن نتعرض لعلاقـات غرين ، سندرس بعض خصائص علاقات التكافؤ ، لنعتمد عليها في دراستنا لبنية نصف الزمرة .

١ ـ ٣ ـ ١ نصف زمرة العلاقات على مجموعة

The semigroup of relations on a set

إن المقصود بكلمـة علاقة ثنائية Binary relation (او اختصـاراً علاقــة) ρ على مجموعة A هو مجموعة جزئية من الجــداء الديكارتي $A \times A$. إذا كانت $(a,b) \in \rho$ فيمكن أن نعبر عن ذلك أيضاً بالشكل $a\rho b$ ونقول « إن a مرتبطة مع b بالعلاقة ρ » .

إذا كانت ρ و σ علاقتين معرفتين على A فإن تركيب هاتـين العلاقتين (أو لنقل جداء العلاقتين) $\rho o \sigma$ يعرف كما يلي :

$(a,b) \in \rho o \sigma$ يكافىء وجود $x \in A$ بحيث $(a,x) \in \rho$ و $(x,b) \in \sigma$ أي :

$$[(a,b) \in \rho o \sigma] \Leftrightarrow [(\exists x \in A)(a \rho x \wedge x \sigma b)]$$

إن قانون التشكيل الداخلي $\circ$ المعرف كما سبق على مجموعـــة كل العلاقات $\mathcal{S}(A)$ على A تجميعي ، ذلك لأنه إذا كانت $\rho, \sigma, \tau \in \mathcal{S}(A)$ فإن كلًا من :

$$(a,b) \in \rho \circ (\sigma \circ \tau) \quad و \quad (a,b) \in (\rho \circ \sigma) \circ \tau$$

يكافيء وجود عنصرين $x,y \in A$ بحيث :

$$(a,x) \in \rho \quad \wedge \quad (x,y) \in \sigma \quad \wedge \quad (y,b) \in \tau$$

اي أنه

$$\forall \rho, \sigma, \tau \in \mathcal{S}(A)$$

فإن

$$(\rho \circ \sigma) \circ \tau = \rho \circ (\sigma \circ \tau)$$

وبالتالي $(\mathcal{S}(A), \circ)$ نصف زمرة . كذلك فإنها تملك عنصراً حيادياً :

$$i = \{ (a,a) : a \in A \} \in \mathcal{S}(A)$$

كما أنها تملك عنصراً ماصاً وهو العلاقة المستحيلة (أو الخالية) Φ .

لنعرف العلاقة العكسية لـ ρ كما يلي :

$$\rho^{-1} = \{ (a,b) \in A \times A : (b,a) \in \rho \}$$

نلاحظ أن

$$\rho = (\rho^{-1})^{-1} \quad و \quad (\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$$

ويمكن تعميمها :

$$(\rho_1 \circ \rho_2 \circ \cdots \circ \rho_n)^{-1} = \rho_n^{-1} \circ \rho_{n-1}^{-1} \circ \cdots \circ \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$$

ثم إن $\rho \subseteq \sigma$ تكافيء

$$[\, (a,b) \in \sigma \Leftarrow (a,b) \in \rho \,]$$

كذلك فإن

$$\overline{\rho} = A \times A - \rho$$

أي

$$\bar{\rho} = \{ (a,b) \in A \times A : (a,b) \notin \rho \}$$

تمرين (١)

أثبت أن $(\mathcal{S}(A), \cup, \cap, ^-)$ جبر بول .

تمرين (٢)

أثبت أن :

آ) ρ انعكاسية يكافىء $i \subseteq \rho$

ب) ρ تناظرية يكافىء $\rho = \rho^{-1}$

حـ) $\bar{\rho}$ متعدية يكافىء $\rho o \rho \subseteq \rho$

د) إن كل علاقة تكافؤ على مجموعة A هي عنصر جامد في نصف الزمرة $\mathcal{S}(A)$

تعريف (١)

إن العنصر φ من $\mathcal{S}(A)$ يدعى **دالة جزئية** من $A \supseteq B$ إلى A إذا كان

1 - $|\varphi(x)| = 1$ وذلك مهما تكن x من B مجموعة تعريف φ اي :

$$[(x_1, y_1) \in \varphi \wedge (x_2, y_2) \in \varphi] \Rightarrow y_1 = y_2$$

إذا كانت φ و Ψ دالتين جزئيتين في A بحيث $\varphi \subseteq \Psi$ فـــإننا نقول :

إن φ مقصور Ψ أو Ψ تمديــد φ .

إذا رمزنا لمجموعة الدول الجزئية في A بالرمز P (A) فإن P(A) نصف زمرة جزئية من $\mathcal{S}(A)$.

كما أن $\mathcal{F}(A)$ نصف زمرة جزئية من $\mathcal{S}(A)$ وهي محتواة في $P(A)$.

كذلك فإن $\mathcal{G}(A)$ زمرة جزئية من $\mathcal{S}(A)$ محتواة في $\mathcal{F}(A)$.

١ ـ ٣ ـ ٢ علاقة التكافؤ Equivalence relation

إذا كانت ρ علاقة ما على مجموعة A فإن مجموعة علاقات التكافؤ التي تحوي ρ ليست خالية (إن $A \times A \supseteq \rho$) وبالتالي فإن تقاطع جميع عناصر هذه المجموعة هو علاقة تكافؤ (تحقق من ذلك) وهي أصغر علاقة تكافؤ على A تحوي ρ (تحقق من ذلك) وتدعى هذه العلاقة **علاقة التكافؤ المولدة** من ρ ونرمز لها بالرمز ρ^e .

إن من المفيد أن نجد طريقة نتمكن بواسطتها من الوصول إلى العلاقة ρ^e عند معرفة ρ .

قبل كل شيء لنعرف $\overset{\infty}{\rho}$ التي ندعوها **العلاقة المتعدية اللاصقة** (transitive closure) لـ ρ . إن :

$$\overset{\infty}{\rho} = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} \rho^n = \rho \cup \rho o \rho \cup \rho o \rho o \rho \cup \cdots\cdots\cdots$$

إن مايبرر هذه التسمية هو المبرهنة التالية .

مبرهنة (١)

إذا كانت ρ علاقة ما على مجموعة A فإن $\overset{\infty}{\rho}$ هي أصغر علاقة متعدية على A تحوي ρ .

البرهان :

١) إن $\overset{\infty}{\rho}$ علاقة متعدية ذلك لأنه :

إذا كان $(x,y) \in \overset{\infty}{\rho}$ و $(y,z) \in \overset{\infty}{\rho}$ فإنه يوجد عددان $m,n \in N$ بحيث :

$$(x,y)\in\rho^m \quad \text{و} \quad (y,z)\in\rho^n$$

وبالتالي فإن :

$$(x,z)\in\rho^m o\rho^n=\rho^{m+n}\subseteq\overset{\infty}{\rho}$$

٢) إن $\rho\subseteq\overset{\infty}{\rho}$ وهذا واضح من تعريف $\overset{\infty}{\rho}$.

٣) إذا كانت σ علاقة متعدية ما على A تحوي ρ فإن :

$$\rho^2=\rho o\rho\subseteq\sigma o\sigma\subseteq\sigma$$

وهكذا فإن $\rho^n\subseteq\sigma$ من أجل $n=1,2,3,\ldots$. أي أن :

$$\overset{\infty}{\rho}\subseteq\sigma$$

مبرهنة (٢)

إذا كانت ρ علاقة ما على مجموعة A فإن:

$$\rho^e=[\rho\cup\rho^{-1}\cup i]^{\infty}$$

البرهان :

من المبرهنة السابقة نعلم أن ρ^e متعدية وتحوي ρ و ρ^{-1} و i فهي انعكاسية .

كذلك بما أن $\sigma=\rho\cup\rho^{-1}\cup i$ علاقة تناظرية فإنه $\forall n\in N$ لدينا :

$$\sigma=\sigma^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma^n=(\sigma^{-1})^n=(\sigma^n)^{-1}$$

ذلك لأن :

$$(\sigma^n)^{-1}=(\sigma o\sigma o\ldots o\sigma)^{-1}=\sigma^{-1}o\sigma^{-1}o\ldots o\sigma^{-1}=(\sigma^{-1})^n$$

وبالتالي فإن σ^n تناظرية . أي أن ρ^e تناظرية .

وينتج أن ρ^e علاقة تكافؤ على A تحوي ρ .

لتكن τ علاقة تكافؤ على A تحوي ρ . إن $\rho\subseteq\tau$ و $i\subseteq\tau$ و $\rho^{-1}\subseteq\tau$ إذاً :

$$\sigma = \rho \cup \rho^{-1} \cup i \subseteq \tau$$

لكن

$$\sigma \circ \sigma \subseteq \tau \circ \tau \subseteq \tau$$

وبالتالي

$$\sigma^{n} \subseteq \tau$$

وذلك مهما تكن $n \in N$

أي أن $\rho^{\circ} \subseteq \tau$.

ملاحظة (١)

بينا فيما سبق أن تقاطع أية مجموعة من علاقات التكافؤ المعرفة على مجموعة A هو علاقة تكافؤ على A ، ولم نتعرض لذكر حالة الاجتماع . لذا يجب الانتباه إلى أن ذلك غير صحيح في حالة الاجتماع حتى ولو كان اجتماع علاقتي تكافؤ فقط . (حاول أن تعطي مثالاً يوضح ذلك) .

لتكن ρ و σ علاقتي تكافؤ على مجموعة A نرمز بـ $\rho \vee \sigma$ لعلاقة التكافؤ المولدة من $\rho \cup \sigma$. إن ما يمكن قوله هنا عن $\rho \vee \sigma$ هو أنها ليست إلا العلاقة المتعدية الملاصقة لـ $\rho \cup \sigma$ أي أن :

$$\rho \vee \sigma = (\rho \cup \sigma)^{\circ} = (\rho \cup \sigma)^{\infty}$$

تمرين (٣)

أثبت أن $\rho \cup \sigma \subseteq \rho \circ \sigma$ عندما تكون ρ و σ علاقتي تكافؤ على مجموعة $\bar{A}$.

مبرهنة (٣)

إذا كانت ρ و σ علاقتي تكافؤ على مجموعة A وإذا كان

$$\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$$

فإن

$$\rho \vee \sigma = \rho o \sigma$$

البرهان :

إن

$$\rho \vee \sigma = (\rho \cup \sigma)^{\infty} = (\rho \cup \sigma) \cup [(\rho \cup \sigma) o (\rho \cup \sigma)] \cup \cdots$$

وبالتالي فإن

$$\rho o \sigma \subseteq \rho \vee \sigma$$

إن $\rho o \sigma$ علاقة تكافؤ على A ذلك لأن :

١) $i \subseteq \rho o \sigma$ فهي انعكاسية

٢) $\rho o \sigma$ تناظرية لأن :

$$(\rho o \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} o \rho^{-1} = \sigma o \rho = \rho o \sigma$$

٣) $\rho o \sigma$ متعدية لأن :

$$(\rho o \sigma) o (\rho o \sigma) = \rho o \sigma o \rho o \sigma = \rho o \rho o \sigma o \sigma = \rho o \sigma$$

كذلك فإن

$$\rho \cup \sigma \subseteq \rho o \sigma$$

لكن $\rho \vee \sigma$ هي أصغر علاقة تكافؤ تحوي $\rho \cup \sigma$. إذاً :

$$\rho \vee \sigma = \rho o \sigma$$

توطئة (١)

لتكن φ دالة من A الى B و φ^{-1} العلاقة العكسية لـ φ فإن $\rho = \varphi o \varphi^{-1}$ علاقة تكافؤ على A بحيث :

$$(x,y) \in \rho \Leftrightarrow [\varphi(x) = \varphi(y)] \qquad x,y \in A$$

البرهان :

إن φ^{-1} علاقة من B إلى A وبالتالي $\varphi o \varphi^{-1}$ علاقة على A .

إن $(x,y)\in\rho$ يؤدي إلى وجود عنصر $z\in A$ بحيث

$$(x,z)\in\varphi \quad \text{و} \quad (z,y)\in\varphi^{-1}$$

اي أن

$$(x,z)\in\varphi \quad \text{و} \quad (y,z)\in\varphi$$

اي أن :

$$[\,(x,y)\in\rho\,] \Leftrightarrow [\,\varphi(x)=\varphi(y)\,]$$

واضح أن ρ إنعكاسية ، تناظرية ، متعدية فهي علاقة تكافؤ على A .

ملاحظة (٢)

إن $\varphi o\varphi^{-1}$ تدعى نـواة φ ويرمز لها بالرمز $\ker\varphi$.

١ ـ ٣ ـ ٣ التوافق Congruence

تعريف (٢)

لتكن S نصف زمرة ولتكن ρ علاقة على S .

إن ρ تدعى علاقـة **منسجمة يساراً** (left compatible) (مع العملية المعرفة على S) إذا كان :

$$\forall a,s,t\in S \qquad (s,t)\in\rho \Rightarrow (as,at)\in\rho$$

كما تدعى علاقة **منسجمة يميناً** (right compatible) إذا كان :

$$\forall a,s,t\in S \qquad (s,t)\in\rho \Rightarrow (sa,ta)\in\rho$$

وتدعى **منسجمة** (compatible) إذا كان :

$$\forall s,s',t,t'\in S \qquad (s,t),(s',t')\in\rho \Rightarrow (ss',tt')\in\rho$$

إن علاقة التكافؤ المنسجمة يساراً (يميناً) تدعى **توافقاً يسارياً (يمينياً)** .

إن علاقة التكافؤ المنسجمة تدعى **توافقـاً** .

مبرهنة (٤)

العلاقة ρ على نصف زمرة S توافق إذا وفقط إذا كانت توافقاً يمينياً ويسارياً بآن واحد .

البرهان :

لزوم الشرط : نفرض أن ρ توافق .

إذا كان $(s,t) \in \rho$ فمهما يكن $a \in S$ فإن $(a,a) \in \rho$ وبالتالي :

$$(as,at) \in \rho \quad \text{و} \quad (sa,ta) \in \rho$$

لأن ρ منسجمة .

وهكذا فإن ρ توافق يميني ويساري بآن واحد .

كفاية الشرط : إذا كانت ρ توافقاً يمينياً ويسارياً بآن واحد وكان :

$$(s,t) , (s',t') \in \rho$$

فإن $(ss',ts') \in \rho$ لأن ρ منسجمة يميناً

و $(ts',tt') \in \rho$ لأن ρ منسجمة يساراً

وبالتالي $(ss',tt') \in \rho$ لأن ρ علاقة تكافؤ .

ملاحظة (٢)

إذا كانت ρ علاقة تكافؤ على مجموعة A فإن المقصود بـ A/ρ هو مجموعة صفوف تكافؤ A بالنسبة لـ ρ ، فإذا رمزنا بـ $a\rho$ لصف تكافؤ a فإن :

$$A/\rho = \{ a\rho : a \in A \}$$

وقد يقال عنها مجموعة صفوف A قياس ρ أو مجموعة خارج القسمة A/ρ .

إذا كانت S نصف زمرة و ρ توافقاً على S فإن بالإمكان تعريف قانون تشكيل داخلي على مجموعة خارج القسمة S/ρ وذلك كما يلي :

$$\forall a,b \in S \qquad (a\rho)(b\rho) = (ab)\rho$$

إن هذا القانون معرف جيداً ذلك لأنه $\forall a,b,a',b' \in S$ فإن :

$$a\rho = a'\rho \text{ و } b\rho = b'\rho \Rightarrow (a,a') \in \rho \wedge (b,b') \in \rho$$
$$\Rightarrow (ab, a'b') \in \rho$$
$$\Rightarrow (ab)\rho = (a'b')\rho$$

إن التحقق من الخاصة التجميعية سهل جداً .

إذاً S/ρ مع القانون السابق نصف زمرة .

إن الدالة :

$$\varphi : S \longrightarrow S/\rho \; ; \; a \longrightarrow a\rho$$

تدعى الدالة القانونية أو الطبيعية من S إلى S/ρ .

مبرهنة (٥)

١) إذا كانت ρ توافقاً على نصف زمرة S فان S/ρ نصف زمرة بالنسبة للقانون :

$$\forall a,b \in S \qquad (a\rho)(b\rho) = (ab)\rho$$

٢) إذا كان

$$\varphi : S \longrightarrow S/\rho \; ; \; a \longrightarrow a\rho$$

فان φ تشاكل غامر

٣) إذا كانت T نصف زمرة وكان $\Psi : S \longrightarrow T$ تشاكلاً فإن $\sigma = \Psi o \Psi^{-1}$ توافق على S .

٤) يوجد تشاكل احادي

$$\lambda : S/\sigma \rightarrow T$$

بحيث أن مدى λ هو نفسه مدى Ψ .

٥) إن الدالــة

$$\theta : S \to S / \sigma \ ; \ x \to x\sigma$$

تحقق العلاقة

$$\lambda\theta = \Psi$$

البرهان :

١) لقد تم برهانه في الملاحظة السابقة .

٢) $\forall x, y \in S$ فإن :

$$\varphi(xy) = (xy)\rho = (x\rho)(y\rho) = \varphi(x)\varphi(y)$$

كذلك $\forall z \in S / \rho$ فيوجد $x \in S$ بحيث : $z = x\rho$

وبالتالي φ تشاكل غامر .

٣) إن $\sigma = \Psi o \Psi^{-1}$ هي نواة Ψ وهي علاقة تكافؤ على S (توطئة ١) .

إذا كانت $a, b, c, d \in S$ بحيث $(a,b), (c,d) \in \sigma$

فإن

$$\Psi(a) = \Psi(b) \quad \text{و} \quad \Psi(c) = \Psi(d)$$

إذاً

$$\Psi(ac) = \Psi(a)\ \Psi(c) = \Psi(b)\ \Psi(d) = \Psi(bd)$$

وبالتالي $(ac, bd) \in \sigma$

وينتج أن $\ker \Psi = \sigma$ توافق .

٤) لنصطنع الدالة :

$$\lambda : S / \sigma \to T \ ; \ x\sigma \to \Psi(x)$$

إن λ معرف جيداً ومتباين لأن :

$$[\lambda(x\sigma)=\lambda(y\sigma)] \Leftrightarrow [\Psi(x) = \Psi(y)] \Leftrightarrow [(x,y)\in\sigma]$$

كذلك λ تشاكل لأن :

$$\lambda(x\sigma\cdot y\sigma)=\lambda((xy)\sigma) = \Psi(xy)=\Psi(x)\Psi(y) = \lambda(x\sigma)\lambda(y\sigma)$$

واضح أن مدى Ψ هو نفسه مدى λ أي

$$\lambda(S/\rho) = \Psi(S)$$

٥) مهما يكن $x \in S$ فإن

$$\lambda\theta(x) = \lambda(\theta(x)) = \lambda(x\sigma) = \Psi(x)$$

وبالتالي

$$\lambda\theta = \Psi$$

مبرهنة (٦)

لتكن S, S_1, S_2 انصاف زمر . φ_1 تشاكل غامر من S على S_1 . φ_2 تشاكل غامر من S على S_2 . بحيث $\ker \varphi_1 \subseteq \ker \varphi_2$. فإنه يوجد تشاكل وحيد غامر θ من S_1 علـى S_2 بحيث $\theta\varphi_1 = \varphi_2$.

البرهان :

بما أن φ_1 غامر فمها يكن $y \in S_1$ فإنه يوجد $x \in S$ بحيث $\varphi_1(x)=y$.

نصطنع الدالة θ بحيث :

$$\theta : S_1 \to S_2 \; ; \; \varphi_1(x) \to \varphi_2(x) \qquad (x \in S)$$

إن هـذه الدالة معرفة تماماً لأن

$$\Leftarrow \varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2)$$

$$(x_1,x_2) \in \varphi_2 o \varphi_2^{-1} \quad \Leftarrow \quad (x_1,x_2) \in \varphi_1 o \varphi_1^{-1}$$

وبالتالي :

$$\varphi_2(x_1) = \varphi_2(x_2)$$

واضح أن $\theta\,\varphi_1 = \varphi_2$ لأنـه مهما يكن $x \in S$ فإن :

$$\theta\varphi_1(x) = \theta\,(\varphi_1(x)) = \varphi_2(x)$$

كذلك فإن θ تشاكل لأن :

$$\theta\,[\,\varphi_1(u)\varphi_1(v)] = \theta\,[\,\varphi_1(uv)\,] = \varphi_2(uv)$$

$$= \varphi_2(u)\varphi_2(v) = \theta\,(\varphi_1(u))\,\theta\,(\varphi_1(v))$$

كذلك فإن وحـدانيه θ واضحة . لأنـه حتى تحقق θ الشرط $\varphi_2 = \theta\,\varphi_1$ فيجب اصطناع θ كما فعلنا .

نتيجة (١)

إذا كان ρ_1 و ρ_2 توافقين على نصف زمرة S بحيث $\rho_1 \subseteq \rho_2$ فـإن : S/ρ_1 تشاكل S/ρ_2 .

البرهـان :

نصطنع التشاكلين الغامرين

$$\varphi_1 : S \to S/\rho_1 \;;\; x \to x\rho_1$$

$$\varphi_2 : S \to S/\rho_2 \;;\; x \to x\rho_2$$

(انظر المبرهنة ٥)

إن $\rho_1 = \varphi_1 o \varphi_1^{-1}$ لأن :

$$(x,y) \in \varphi_1 o \varphi_1^{-1} \Leftrightarrow \varphi_1(x) = \varphi_1(y) \Leftrightarrow y \in x\rho_1 \Leftrightarrow (x,y) \in \rho_1$$

كذلك $\rho_2 = \varphi_2 o \varphi_2^{-1}$. ولدينا $\rho_1 \subseteq \rho_2$ أي :

$$\varphi_1 o \varphi_1^{-1} \subseteq \varphi_2 o \varphi_2^{-1}$$

فحسب المبرهنة السابقة إن هناك تشاكل غامر وحيد :

$$\theta \;:\; S/\rho_1 \to S/\rho_2 \;;\; x\rho_1 \to x\rho_2$$

بحيث
$$\theta\,\varphi_1 = \varphi_2$$

تمرين (٤)

أثبت صحة مايلي :

آ) إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة G فإن العلاقة ρ المعرفة على G :

$$\forall a,b\in G \qquad (a,b)\in\rho \Leftrightarrow ab^{-1}\in H$$

هي توافق يميني على G .

ب) كل توافق يميني على G نحصل عليه بنفس الطريقة .

حـ) إن $G/\rho = \{ Ha \;:\; a\in G \}$

د) إن ρ توافق على G إذا وفقط إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من G .

مثال (١)

ليكن I مثالياً في نصف زمرة S . نعرف على S العلاقة ρ كما يلي :

$$\forall a,b\in S \qquad (a,b)\in\rho \Leftrightarrow [\, a=b \;\vee\; a,b\in I \,]$$

يمكن التحقق بسهولة أن ρ علاقة تكافؤ على S . وأن :

$$S/\rho = \{I\} \cup \{ \{a\} \;:\; a\in S-I \}$$

كما أن من السهل إثبات أن ρ توافق . إن هذه العلاقة تسمى توافق Rees .

نكتب عادة S / I عوضاً عن S / ρ في توافق Rees وندعو S/I نصف زمرة Rees .

واضح أن S / I تملك عنصراً ماصاً هو I . (تحقق من ذلك) .

مبرهنة (٧)

إذا كانت ρ ، σ توافقين على زمرة G فإن

$$\rho o \sigma = \sigma o \rho$$

البرهان :

إن $(a,b) \in \rho o \sigma$ يقضي بوجود $g \in G$ بحيث

$$(a,g) \in \rho \wedge (g,b) \in \sigma$$

لكن ρ و σ توافقان فهما توافقان يمينيان ويساريان بآن واحد . إذاً لدينا :

$$(bg^{-1}a , bg^{-1}g) \in \rho \quad \wedge \quad (gg^{-1}a , bg^{-1}a) \in \sigma$$

أي أن

$$(bg^{-1}a,b) \in \rho \quad \text{و} \quad (a,bg^{-1}a) \in \sigma$$

وهذا يقضي أن :

$$(a,b) \in \sigma o \rho$$

وبالتالي $\rho o \sigma \subseteq \sigma o \rho$

وبنفس الطريقة نثبت أن $\sigma o \rho \subseteq \rho o \sigma$

فينتج أن : $\rho o \sigma = \sigma o \rho$

تمرين محلول (١)

لتكن G زمرة عنصرها الحيادي e فإنه :

١) إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من G فإن :

$$\rho_N = \{ (a,b) \in G \times G : ab^{-1} \in N \}$$

توافق على G . ومهما تكن $g\in G$ فإن $g\rho_N = Ng$

٢) إذا كانت ρ توافقاً على G فإن $\rho=\rho_N$ حيث $N=e\rho$

٣) إذا كانت M و N زمرتين جزئيتين ناظميتين من G فإن :

$$\rho_M \circ \rho_N = \rho_{MN} \quad و \quad \rho_M \cap \rho_N = \rho_{M\cap N}$$

الحــل

١) $a,b\in G$ $\qquad [(a,b)\in\rho_N] \leftrightarrow [ab^{-1}\in N]$

آ) $\forall a\in G$ فإن $aa^{-1}=e\in N$ وبالتالي $(a,a)\in\rho_N$

ب) $(a,b)\in\rho_N \Leftarrow ab^{-1}\in N$ وبالتالي $(ab^{-1})^{-1}\in N$

أي

$$ba^{-1}\in N$$

وهكذا فإن

$$(b,a)\in\rho_N$$

حـ) $(a,b),(b,c)\in\rho_N \Leftarrow ab^{-1}\in N \wedge bc^{-1}\in N \Leftarrow$

$$(ab^{-1})(bc^{-1})\in N \Leftarrow ac^{-1}\in N \Leftarrow (a,c)\in\rho_N$$

وبالتالي ρ علاقة تكافؤ على G .

د) $\forall g\in G$ فإن $(ag)(bg)^{-1}=ab^{-1}$.

وبالتالي

$$(a,b)\in\rho_N \Leftarrow (ag,bg)\in\rho_N$$

أي أن ρ_N توافق يميني .

لكن N زمرة جزئية ناظمية وبالتالي $gNg^{-1} = N$ مهما تكن $g\in G$.

إن

$$gab^{-1}g^{-1}\in N \Leftarrow ab^{-1}\in N \Leftarrow (a,b) \in \rho_N$$

لذلك مهما تكن $g\in G$ فإن

$$(ga,gb) \in \rho_N$$

إذاً ρ_N توافق يساري وبالتالي ρ_N توافق

ه) إن صفوف التكافؤ :

$$g\rho_N = \{ x\in G : xg^{-1}\in N \}$$
$$= \{ x\in G : x\in Ng \} = Ng \qquad g\in G$$

٢) نفرض $N = e\rho$ ولنثبت أنها زمرة جزئية ناظمية من G .

إن $x,y\in N$ يقضي بأن $(x,y) \in \rho$ وبالتالي $(xy^{-1}, yy^{-1})\in\rho$ أي أن :

$xy^{-1} \in N$ وبالتالي N زمرة جزئية من G .

مهما يكن $g\in G$ ومهما يكن $x\in N$ فإن $(x,e) \in \rho$ وبالتالي :

$$(gxg^{-1},geg^{-1})\in\rho$$

أي أن $gxg^{-1}\in N$ وبالتالي N زمرة جزئية ناظمية من G .

ثم إن

$$xy^{-1}\in N \Leftrightarrow (xy^{-1},yy^{-1})\in\rho \Leftrightarrow (x,y)\in\rho$$

إذاً $\rho=\rho_N$.

٣) آ) إذا كانت M وN زمرتين جزئيتين ناظميتين من G فـإن MN زمرة جزئية ناظمية من G (أثبت ذلك) .

إن

$$(a,b)\in\rho_M\circ\rho_N \Rightarrow (\exists u\in G)[(a,u)\in\rho_M \wedge (u,b)\in\rho_N)$$

$$\Rightarrow (\exists u\in G)[au^{-1}\in M \wedge ub^{-1}\in N]$$

$$\Rightarrow au^{-1}ub^{-1} = ab^{-1}\in MN$$

$$\Rightarrow (a,b)\in\rho_{MN}$$

$$\Rightarrow \rho_M\circ\rho_N \subseteq \rho_{MN}$$

كذلك $(a,b)\in\rho_{MN} \Rightarrow ab^{-1}\rho MN$

$$\Rightarrow (\exists m\in M)(\exists n\in N)(ab^{-1}=mn)$$

إن $ab^{-1}=mn$ يقضي بأن $a=mnb$

نفرض $nb=u$ فتكون $a=mu$

لكن

$$m=au^{-1}\in M \quad \text{و} \quad n=ub^{-1}\in N$$

أي أن

$$(u,b)\in\rho_N \quad \text{و} \quad (a,u)\in\rho_M$$

إذاً $(a,b)\in\rho_M\circ\rho_N$ وبالتالي $\rho_{MN}\subseteq\rho_M\circ\rho_N$

إذاً $\rho_{MN}=\rho_M\circ\rho_N$

ب) إن

$$(a,b)\in\rho_M\cap\rho_N \Leftrightarrow (a,b)\in\rho_M \wedge (a,b)\in\rho_N$$

$$\Leftrightarrow ab^{-1}\in M \wedge ab^{-1}\in N$$

$$\Leftrightarrow ab^{-1}\in M\cap N$$

$$\Leftrightarrow (a,b)\in\rho_{M\cap N}$$

إذاً

$$\rho_M\cap\rho_N=\rho_{M\cap N}$$

١ ـ ٣ ـ ٤ علاقات غرين Green 's relations

نقول عن عنصرين a و b من نصف زمرة S أنهما مرتبطـان بالعلاقـة $\mathcal{L}$ إذا وفقط إذا كانا يولدان نفس المثالي اليساري الرئيسي . أي أن :

$$a,b\in S \qquad [\, a\,\mathcal{L}\, b\,] \iff [\, L(a) = L(b)\,]$$

واضح أن $\mathcal{L}$ علاقة تكافؤ على S . (تحقق من ذلك) .

كذلك نعرف كلًا من علاقتي التكافؤ $\mathcal{R}$ و $\mathcal{J}$ كما يلي :

$$a,b\in S \qquad [\, a\,\mathcal{R}\, b\,] \iff [\, R(a) = R(b)\,]$$

$$a,b\in S \qquad [\, a\,\mathcal{J}\, b\,] \iff [\, J(a) = J(b)\,]$$

يمكن أن نكتب :

$$\mathcal{R} = \{\, (a,b) : R(a) = R(b) \;;\; a,b\in S \,\}$$

$$\mathcal{L} = \{\, (a,b) : L(a) = L(b) \;;\; a,b\in S \,\}$$

$$\mathcal{J} = \{\, (a,b) : J(a) = J(b) \;;\; a,b\in S \,\}$$

إن من الجدير بالملاحظة أن $\mathcal{J}$ هي توافق يميني على S بينما $\mathcal{R}$ توافق يساري على S . ذلك لأنه مهما يكن $S\ni c$ فإن :

$$(Sa\cup a)c = (Sb\cup b)c \Leftarrow Sa\cup a = Sb\cup b \Leftarrow (a,b)\in\mathcal{L}$$

$$(ac,bc)\in\mathcal{L} \Leftarrow L(ac) = L(bc) \Leftarrow Sac\cup ac = Sbc\cup bc \Leftarrow$$

كذلك بنفس الطريقة نجد أن :

$$(ca,cb)\in\mathcal{R} \Leftarrow (a,b)\in\mathcal{R}$$

توطئة (٢)

ليكن a,b عنصرين من نصف زمرة S . إن $(a,b)\in\mathcal{L}$ [$(a,b)\in\mathcal{R}$] إذا وفقط إذا وجد $x, y\in S^1$ بحيث

$[by = a$ و $ax = b]$ $\quad yb = a$ و $xa = b$

و $(a,b) \in \mathcal{J}$ اذا وفقط إذا وجد $x, y, u, v \in S^1$ بحيث $xay = b$ و $ubv = a$

البرهان :

$$a \mathcal{L} b \Rightarrow Sa \cup a = Sb \cup b \Rightarrow b \in S^1 a \wedge a \in S^1 b$$

$$\Rightarrow (\exists x, y \in S^1)(b = xa \wedge a = yb)$$

إن صفوف التكافؤ لهذه العلاقة سيرمز لها بالرموز : L_a , R_a ; J_a حيث $a \in S$ أي :

$L_a = \{ x \in S : x \mathcal{L} a \}$ وندعوه $\mathcal{L}$ — صف يحوي a

$R_a = \{ x \in S : x \mathcal{R} a \}$ وندعوه $\mathcal{R}$ — صف يحوي a

$J_a = \{ x \in S : x \mathcal{J} a \}$ وندعوه $\mathcal{J}$ — صف يحوي a

مثال (٢)

لتكن S نصف الزمرة المعرفة بالجدول :

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	d	d
b	a	b	c	d	d
c	a	c	b	d	d
d	d	d	d	a	a
e	d	e	e	a	a

إن $L(b) = \{ a, b, c, d, e \}$

بينما $L_b = \{ a, c \}$

كذلك $R(a) = \{ a, d \}$

و $R_a = \{ a, d \}$

كذلك $J(e) = \{ a, d, e \}$

و $J_e = \{ e \}$

مبرهنة (٨)

العلاقتان $\mathcal{L}$ و $\mathcal{R}$ متبادلتان والعلاقة :

$$\mathcal{D} = \mathcal{L}o\mathcal{R} = \mathcal{R}\,o\,\mathcal{L} = \mathcal{R}\vee\mathcal{L}$$

هي اصغر علاقة تكافؤ تحوي كلا من $\mathcal{L}$ و $\mathcal{R}$.

البرهان :

إذا كان $(a,b)\in\mathcal{L}o\mathcal{R}$ فإنه يوجد $c\in S$ بحيث أن

$(c,b)\in\mathcal{R}$ و $(a,c)\in\mathcal{L}$

أي يوجد $x,y,u,v\in S^1$ بحيث :

$$xa = c \qquad cu = b \qquad bv = c \qquad yc = a$$

إذاً

$$au = ycu$$

و

$$a = yc = ybv = ycuv$$

فإذا جعلنا $ycu = d$ فإن

$dv = a$ و $au = d$

أي أن $a\mathcal{R}d$

ثم إن

$$yb = ycu = d$$

و

$$xd = xycu = xau = cu = b$$

أي أن $b\mathcal{L}d$.

وبالتالي فإن

$$(a,b)\in\mathcal{R}e\mathcal{L}$$

أي أن

$$\mathcal{L}o\mathcal{R}\subseteq\mathcal{R}o\mathcal{L}$$

وبنفس الطريقة نبرهن أن

$$\mathcal{R} o \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} o \mathcal{R}$$

إذاً

$$\mathcal{L} o \mathcal{R} = \mathcal{R} o \mathcal{L}$$

وبالعودة إلى المبرهنة (٣) نجد أن :

$$\mathcal{D} = \mathcal{L} o \mathcal{R} = \mathcal{R} o \mathcal{L} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$$

وهي أصغر علاقة تكافؤ تحوي كلاً من $\mathcal{L}$ و $\mathcal{R}$

سوف نرمز لتقاطع علاقتي التكافؤ $\mathcal{L}$ و $\mathcal{R}$ بالرمز $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$

وبالتالي $H_a = L_a \cap R_a$ هو صف تكافؤ $\mathcal{H}$ يحوي a

إن من السهل أن نلاحظ أن :

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F} \quad \text{و} \quad \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} , \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F} \quad \text{و} \quad \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$$

أما في حالة أنصاف الزمر التبديلية فإن :

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}\ \mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{F}$$

مبرهنة (٩)

إذا كانت S نصف زمرة دورية فإن $\mathcal{D} = \mathcal{F}$

البرهان :

إن $(a,b) \in \mathcal{F}$ يقضي بوجود $x,y,u,v \in S^1$ بحيث أن :

$$xay = b \quad \text{و} \quad ubv = a$$

إذاً

$$a = (ux)a(yv) = (ux)^2 a(yv)^2 = \dots\dots = (ux)^r a(yv)^r = \dots\dots$$

و

$$b = (xu)b(vy) = (xu)^2 b(vy)^2 = \dots\dots = (xu)^r b(vy)^r = \dots\dots$$

لكن S دورية وبالتالي يوجد $m,n\in N$ بحيث :

$(ux)^m$ و $(vy)^n$ عنصران جامدان في S .

وبالتالي

$$a = (ux)^m a (yv)^m = (ux)^m (ux)^m a (yv)^m = (ux)^m a$$

$$b = (xu)^n b (vy)^n = (xu)^n b (vy)^n (vy)^n = b (vy)^n$$

فلو فرضنا أن $xa=c$ لكان :

$$a = (ux)^{m-1} uxa = (ux)^{m-1} u.c$$

إذاً $a\mathcal{L}c$.

ثم إن

$$b = xay = cy$$

و

$$\begin{aligned} c = xa &= x (ux)^{m+1} a (yv)^{m+1} \\ &= (xu)^{n+1} xay (vy)^n v \\ &= (xu)^{n+1} (bvy)^n (vy)^n v \\ &= (xu)^{n+1} b (vy)^{n+1} (vy)^{n-1} v \\ &= b (vy)^{n-1} v \end{aligned}$$

وبالتالي $b\mathcal{R}c$ إذاً

$$(a,b) \in \mathcal{L}\circ\mathcal{R} = \mathcal{D}$$

أي أن $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{D}$ لكن $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{F}$ إذاً $\mathcal{D}=\mathcal{F}$

١ ـ ٣ ـ ٥ العلاقة بين صفوف التكافؤ

تمرين (٥)

أثبت أن $R_a \subseteq D_a$ و $L_a \subseteq D_a$ وبالتالي $L_a \cup R_a \subseteq D_a$ و $H_a \subseteq D_a$ وذلك $\forall a\in S$

مبرهنة (١٠)

إذا كان x و y عنصرين في نصف زمرة S ، R_x هو $\mathcal{R}$- صف ، L_y هـو $\mathcal{L}$ـ صف . فإن $R_x \cup L_y \neq \Phi$ إذا وفقط إذا وجد $\mathcal{D}$ـ صف D_z $(z \in S)$ يحوي كلا مـن L_y و R_x .

البرهان :

لزوم الشرط : نفرض $R_x \cap L_y \neq \Phi$.

$R_x \cap L_y \neq \Phi$ يقضي بوجود عنصر $z \in S$ بحيث $z \in R_x \cap L_y$ ،

مهما يكن a من R_x فإن $a\mathcal{R}z$ لكن $z\mathcal{L}z$ وبالتالي $a\mathcal{D}z$ أي أن $R_x \subseteq D_z$.

ومهما يكن b من L_y فإن $b\mathcal{L}z$ لكن $z\mathcal{R}z$ وبالتالي $b\mathcal{D}z$ أي أن $L_y \subseteq D_z$.

كفاية الشرط : نفرض وجود $z \in S$ بحيث $R_x \cup L_y \subseteq D_z$.

إن $x,y \in D_z$ أي $x\mathcal{D}y$ يقضي بوجود عنصر $u \in S$ بحيث :

$u\mathcal{R}x$ و $y\mathcal{L}u$ أي $u \in L_y$ و $u \in R_x$ وهكذا $R_x \cap L_y \neq \Phi$

مبرهنة (١١)

إذا كان R_x و L_y صفي تكافؤ في نصف زمرة S $(x,y \in S)$ فان $R_x \cap L_y \neq \Phi$ إذا وفقط إذا كان $x\mathcal{D}y$ كذلك اذا وفقط اذا كانت $R_y \cap L_x \neq \Phi$ اي ان :

$$R_x \cap L_y \neq \Phi \quad \Leftrightarrow \quad x\mathcal{D}y \quad \Leftrightarrow \quad R_y \cap L_x \neq \Phi$$

البرهان :

إن

$$\begin{aligned} R_x \cap L_y \neq \Phi &\Leftrightarrow (\exists z \in S)(z \in L_y \wedge z \in R_x) \\ &\Leftrightarrow (\exists z \in S)(z\mathcal{L}y \wedge z\mathcal{L}x) \\ &\Leftrightarrow x\mathcal{D}y \end{aligned}$$

لكن

$$\mathcal{D} = \mathcal{L} \times \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$$

إذاً

$$x\mathcal{D}y \Leftrightarrow (\exists\, u\in S)\,(x\mathcal{L}u \wedge u\mathcal{R}y)$$
$$\Leftrightarrow (\exists\, u\in S)\,(u\in L_x \wedge u\in R_y)$$
$$\Leftrightarrow L_x \cap R_y \neq \phi$$

مبرهنة (١٢)

ليكن a وb عنصرين من نصف زمرة S بحيث $a\mathcal{R}b$ فإنه :

١) توجد دالة φ من L_a إلى L_b ودالة ψ من L_b إلى L_a بحيث φ و ψ تقابلان متعاكسان .

٢) مهما يكن $x\in L_a$ فان $x\mathcal{R}\varphi(x)$ ومهما يكن $y\in L_b$ فإن $y\mathcal{R}\psi(y)$.

٣) إن L_a و L_b لهما نفس العدد الرئيسي .

البرهان :

(١) بما أن $a\mathcal{R}b$ إذاً يوجد s و s' من S^1 بحيث :

$$as = b \quad \text{و} \quad bs' = a$$

مهما يكن $x\in L_a$ فإن $x\mathcal{L}a$ وبالتالي $xs\mathcal{L}as$ أي $xs\mathcal{L}b$.

إذاً $xs\in L_b$.

كذلك مهما يكن $y\in L_b$ فإن $y\mathcal{L}b$ وبالتالي $ys'\mathcal{L}bs'$ أي $ys'\mathcal{L}a$.

إذاً $ys'\in L_a$.

لنصطنع الدالتين :

$$\varphi : L_a \longrightarrow L_b \;;\; x \longrightarrow xs$$
$$\psi : L_b \longrightarrow L_a \;;\; y \longrightarrow ys'$$

ولنبرهن أنهما تقابلان متعاكسان .

إن $x \in L_a$ يقضي بوجود عنصر t من S^1 بحيث $x = ta$

$y \in L_b$ يقضي بوجود عنصر u من S^1 بحيث $y = ub$

أي أن

$$\varphi\psi(y) = \varphi(ys') = ys's = ubs's = uas = ub = y$$

$$\psi\varphi(x) = \psi(xs) = xss' = tass' = tbs' = ta = x$$

وبالتالي فإن كلًا من $\psi\varphi$ و $\varphi\psi$ تطبيق مطابق . وبالتالي فإن φ و ψ تقابلان متعاكسان .

(٢) مهما يكن x من L_a فإن :

$$\varphi(x) = xs \quad \text{و} \quad x = \varphi(x) . s'$$

إذاً $x \mathcal{R} \varphi(x)$

ومهما يكن $y \in L_b$ فإن :

$$\psi(y) = ys' \quad \text{و} \quad y = \psi(y) . s$$

إذاً $y \mathcal{R} \psi(y)$.

(٣) بما أن φ تقابل من L_a إلى L_b فإن L_a و L_b لهما نفس العدد الرئيسي .

مبرهنة (١٣)

ليكن a و b عنصرين من نصف زمرة S بحيث $a\mathcal{L}b$ فإنه :

١) توجد دالة ρ من R_a الى R_b ودالة σ من R_b الى R_a بحيث أن ρ و σ تقابلان متعاكسان .

٢) مهما يكن x من R_a فان $x\rho\mathcal{L}(x)$ ومهما يكن $y \in R_b$ فان $y\mathcal{L}\sigma(y)$.

٣) إن R_a و R_b لهما نفس العدد الرئيسي .

البرهان :

إن خطوات البرهان مشابهة تماماً لما مر في البرهان السابق . فحتى يتأكـد القارىء من فهمه للمبرهنة السابقة ، نترك له هذا البرهان كتمرين .

مبرهنة (١٤)

إذا كان a و b **عنصرين في نصف زمرة** S **بحيث** $a\mathcal{D}b$ **فان** H_a **و** H_b **لهما نفس العدد الرئيسي .**

البرهان :

بما أن $a\mathcal{D}b$ إذاً يوجد $c\in S$ بحيث $a\mathcal{R}c$ و $c\mathcal{L}b$.

وبالتالي يوجد $s, s', t, t' \in S$ بحيث :

$$as = c \qquad cs' = a \qquad tc = b \qquad t'b = c$$

واعتماداً على المبرهنتين (١٢) و (١٣) يوجد تقابلان :

$$\varphi : L_a \longrightarrow L_c \; ; \; x \longrightarrow xs$$
$$\sigma : R_c \longrightarrow R_b \; ; \; x \longrightarrow tx$$

بحيث $\forall x\in L_a$ فإن $x\mathcal{R}\varphi(x)$ و $\forall y\in R_c$ فإن $y\mathcal{L}\sigma(y)$

إذاً $\forall\ x\in H_a$ فإن $x\mathcal{R}a$ لكن $a\mathcal{R}c$ و $x\mathcal{R}\varphi(x)$

إذن $\varphi(x)\mathcal{R}c$ وبالتالي فإن مقصور φ على H_a هو تقابل على H_c .

بنفس الطريقة نثبت أن مقصور σ على H_c هو تقابل على H_b .

وبالتالي فإن مقصور التابع $\sigma o\varphi$ على H_a هو تقابل على H_b .

إذاً H_a و H_b لهما نفس العدد الرئيسي .

١ ــ ٣ ــ ٦ الزمر الجزئية العظمى

مبرهنة (١٥)

إذا كان a, b **عنصرين من نصف زمرة** S **بحيث** $ab\in H_a$ **فإن مقصور الدالـة :**

$$\varphi : L_a \longrightarrow L_{ab} ; x \longrightarrow xb$$

على H_a هو تقابل من H_a على H_a نفسه .

كذلك إذا كان $ab \in H_b$ فان مقصور الدالـة :

$$\sigma : R_b \longrightarrow R_{ab} ; x \longrightarrow ax$$

على H_b هو تقابل من H_b على H_b نفسه .

البرهان :

إذا كان $ab \in H_a$ فإن $a \mathcal{R} ab$ و $H_a = H_{ab}$ وبالتالي يوجد تقابل :

$$\varphi : L_a \longrightarrow L_{ab} ; x \longrightarrow xb$$

(مبرهنة ١٢) ومقصوره على H_a هو تقابل على $H_a = H_{ab}$ مبرهنـة (١٤)

كذلك إذا كان $ab \in H_b$ فإن $ab \mathcal{L} b$ و $H_{ab} = H_b$ وبالتالي يوجد تقابل

$$\sigma : R_b \longrightarrow R_{ab} ; x \longrightarrow ax$$

(مبرهنة ١٣) ومقصوره على H_b هو تقابل على $H_b = H_{ab}$ (مبرهنة ١٤)

مبرهنة (١٦)

إذا كان H هو $\mathcal{H}$ ـ صف في نصف زمرة S فإذا لم يكـن $H^2 \cap H = \Phi$ فـــان :

$H^2 = H$ وهو زمرة جزئية من S .

البرهان :

بفرض $H^2 \cap H \neq \Phi$ فإن هناك عنصران $a, b \in H$ بحيث $ab \in H$.

حسب المبرهنة السابقة فإن مقصور الدالة :

$$\varphi : L_a \longrightarrow L_{ab} ; x \longrightarrow xb$$

على H_a هو تقابل من H_a على H_a نفسه (لأن $ab \in H = H_a$) .

كذلك فإن مقصور الدالة :

$$\sigma : R_b \longrightarrow R_{ab} \; ; \; x \longrightarrow ax$$

على H_b هو تقابل من H_b على H_b نفسه (لأن $ab \in H = H_b$) .

إذاً مهما يكن $h \in H$ فإن $ah \in H$ و $hb \in H$.

وبالاعتماد على المبرهنة السابقة أيضاً ، يمكن أن نقول إن مقصور الدالة :

$$\varphi_1 : L_a \longrightarrow L_{ah} \; ; \; x \longrightarrow xh$$

على H هو تقابل من H على H . (لأن $ah \in H = H_a$) .

كذلك مقصور الدالة :

$$\sigma_1 : R_b \longrightarrow R_{hb} \; ; \; x \longrightarrow hx$$

على H هو تقابل من H على H (لأن $hb \in H = H_b$)

وبالتالي فإن :

$$Hh = hH = H$$

مهما تكن $h \in H$.

أي أن $H^2 = H$ و H زمرة جزئية من S .

نتيجة (٤)

إذا كانت a و b و ab عناصر من نصف زمرة S تنتمي لنفس الـ $\mathcal{H}$ ـ صف H فان H زمرة جزئية مـن S .

مبرهنة (١٧)

إذا كان e عنصراً جامداً في نصف زمرة S فإن :

١) e حيادي يميني لصف التكافؤ L_e وحيادي يساري لصف التكافؤ R_e وحيادي لصف التكافؤ H_e .

٢) إن H_e زمرة جزئية عظمى من S حياديها e

البرهان :

١) $\forall x \in L_e$ فإن $Sx \cup x = Se$ وبالتالي يوجد $y \in S$ بحيث $x = ye$

إذاً $$xe = ye^2 = ye = x$$

$\forall u \in R_e$ فإن $uS \cup u = eS$ وبالتالي يوجد $v \in S$ بحيث $u = ev$

إذاً $$eu = e^2v = ev = u$$

$\forall z \in H_e$ فإن $z \in L_e \wedge z \in R_e$ وبالتالي :

$$ez = ze = z$$

٢) إن $e \in H_e^2 \cap H_e$ وبالتالي H_e زمرة جزئية من S حيادها e .

بفرض G زمرة جزئية من S تحوي H_e .

إن $G \supseteq H_e$ يقضي بأن حيادي H_e هو حيادي G .

الآن $\forall g \in G$ يوجـــد $g^{-1} \in G$ بحيث :

$$g^{-1}g = gg^{-1} = e \quad \text{وإن} \quad ge = eg = g$$

إذاً $$g \in L_e \text{ و } g \in R_e \Leftarrow g \in H_e$$

أي أن $H_e \supseteq G$ وبالتالي $G = H_e$ وهي زمرة جزئية عظمى من S .

نتيجة (٥)

١)أي $\mathcal{H}$ **ـ صف في نصف زمـــرة** S **يحوي على الأكثر عنصراً جامـــداً واحـــداً .**

٢) إن مجموعة كل الزمر الجزئية العظمى في S **هي :**

$$\{ H_e : e^2 = e , e \in S\}$$

١ ـ ٣ ـ ٧ صفوف تكافؤ العلاقة $\mathcal{D}$

مبرهنة (١٨)

إذا كان L **أي** $\mathcal{L}$ **ـ صف و** R **أيّ** $\mathcal{R}$ **ـ صف في نصف زمرة** S **فإنــه يوجد**

$\mathcal{D}$ـ صف يحوي LR .

البرهان :

ليكن a عنصراً معيناً من L و b عنصراً معيناً من R .

مهما يكن $x \in L$ فإن $x \mathcal{L} a$

ومهما يكن $y \in R$ فإن $y \mathcal{R} b$

لكن $\mathcal{L}$ توافق يميني على S . إذاً $ab \mathcal{L} xb$

كذلك $\mathcal{R}$ توافق يساري على S . إذاً $ab \mathcal{R} xy$

وبالتالي $ab \mathcal{D} xy$

وهذا يعني أن $D_{ab} \supseteq LR$

أي أنه يوجد $\mathcal{D}$ـ صف يحوي LR .

ملاحظة :

لاحظنا أن تقاطع أي صفي تكافؤ R_x و L_y $(x,y \in S)$ في نصف زمرة S هو مجموعة غير خالية عندما $x \mathcal{D} y$. أي عندما يكونا في D ـ صف واحد .

كما أن أي $\mathcal{D}$ ـ صف هو اجتماع $\mathcal{L}$ ـ صفوف واجتماع $\mathcal{R}$ ـ صفوف .

إن هذه الملاحظة تساعدنا على إعطاء صورة توضيحية لصف التكافؤ D

لتكن $\{R_i : i \in I\}$ مجموعة كل صفوف التكافؤ المحتواة في D بالنسبة للعلاقة $\mathcal{R}$.

لتكن $\{L_k : k \in K\}$ مجموعة كل صفوف التكافؤ المحتواة في D بالنسبة للعلاقة $\mathcal{L}$.

نرسم مستطيلاً طوله يساوي عدد عناصر المجموعة K وعرضه يساوي عدد عناصر المجموعة I .

لنضع عناصر L_k في العمود k ، ونضع عناصر R_i في السطر i

إن $R_i \cap L_k$ هو $\mathcal{H}$ – صف . وبالتالي فإن كل مربع من هـــذا المستطيل يحوي $\mathcal{H}$ – صف . وحسب مامر معنا (مبرهنة ١٠) ليس هنـــاك مربع خال أبداً

كما أن كل مربع (مبرهنة ١٤) يحوي نفس العـدد من العناصر . كذلك كل مربع (نتيجة المبرهنة ١٧) يحوي عنصراً جامداً واحداً على الأكثر . وكل مربع يحوي عنصراً جامـــداً تشكل عناصره زمرة جزئيـة عظمى من S (مبرهنة ١٧) .

يمكن تمثيل جميع صفوف تكافؤ العلاقة $\mathcal{D}$ بمستطيلات مستقلة تتوالى بشكل درج (مثلاً) فنحصل على شكل توضيحي لأجزاء S من العلاقة $\mathcal{D}$ يعطي فكرة جيدة عن بنية نصف الزمرة S .

مثـــال (٧)

لتكن S نصف زمرة معرفة بالجدول التالي :

	o	e	f	a	b
o	o	o	o	o	o
e	o	e	o	a	o
f	o	o	f	o	b
a	o	a	o	o	e
b	o	o	b	f	o

إن :

$$\mathcal{L} = \{ (o,o), (e,e), (f,f), (a,a), (b,b) \} = i$$

$$\mathcal{R} = i \cup \{ (e,a)(a,e), (f,b), (b,f) \}$$

$$\mathcal{D} = i \cup \{ (e,a)(a,e), (f,b), (b,f) \}$$

وبالتالي :

$$\begin{array}{llll} D_0 & \boxed{0} & & \\ D_e & & \boxed{e\,|\,a} & \\ D_f & & & \boxed{f\,|\,b} \end{array}$$

١ – ٣ – ٨ العلاقة بين $\mathcal{R}$ و $\mathcal{J}$

لنعرف العلاقات التالية على المجموعات $S/\mathcal{L}$, $S/\mathcal{R}$, $S/\mathcal{J}$:

آ) على $S/\mathcal{L}$ $\qquad [L_a \leqslant L_b] \Leftrightarrow [L(a) \subseteq L(b)] \qquad a,b \in S$

ب) على $S/\mathcal{R}$ $\qquad [R_a \leqslant R_b] \Leftrightarrow [R(a) \subseteq R(b)] \qquad a,b \in S$

حـ) على $S/\mathcal{J}$ $\qquad [J_a \leqslant J_b] \Leftrightarrow [J(a) \subseteq J(b)] \qquad a,b \in S$

يمكن أن نلاحظ بسهولة أن كلاً من هذه العلاقات الثلاث هي علاقة ترتيب .

تمرين (٦)

أثبت أن :

$$L_{xa} \leqslant L_a \quad , \quad R_{ax} \leqslant R_a \quad , \quad J_{xay} \leqslant J_a$$

وذلك مهما يكن $a \in S$ ومهما يكن $x,y \in S^1$.

تعريف (٣)

إذا كانت B مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة مرتبة غير خالية $(A, \leqslant)$ فإن العنصر $b \in B$ يدعى **أصغرياً** (minimal) إذا لم يكن هناك أي عنصر $y \in B$ بحيث $y < b$. أي :

$$(\forall\, y \in B)\,(y \leqslant b \Rightarrow y = b)$$

نقول عن مجموعة مرتبة غير خالية $(A, \leqslant)$ بأنها **تحقق شرط الأصغرية** إذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية من A تملك عنصراً أصغرياً .

ونقول عن مجموعة غير خالية A مرتبة كلياً بأنها **حسنة الترتيب** well-ordered فيما إذا كانت تحقق شرط الأصغرية .

نقول عن نصف زمرة S أنها تحقق الشرط : $\min_L$ ($\min_R$, $\min_J$)

فيما إذا كانت المجموعة المرتبة جزئياً $S/\mathcal{L}$ ($S/\mathcal{R}$, $S/\mathcal{J}$) تحقق شرط الأصغرية.

مبرهنة (١٩)

إذا كانت نصف زمرة S تحقق الشرطين $\min_L$ و $\min_R$ فإن $\mathcal{D}=\mathcal{J}$.

البرهان :

إذا كانت S تحقق الشرطين $\min_L$ و $\min_R$ فإن نصف الزمرة S^1 تحقق الشرطين السابقين أيضاً . ذلك لأن S^1 لها نفس مجموعة المثاليات الرئيسية اليسارية واليمينية لنصف الزمرة S بالاضافة إلى $L(1) = S^1$.

إذاً لافرق في مناقشة البرهان بين S تملك أو لا تملك عنصراً حيادياً . فلنفرض أن S تملك عنصراً حيادياً .

إن $a\mathcal{J}b$ $(a,b\in S)$ يقضي بوجود $p, q, r, s \in S$ بحيث :

$$paq = b \quad \text{و} \quad rbs = a$$

وهكذا فإن المجموعة :

$$A = \{ x\in S \ : (\exists\, y \in S) (xay = b) \}$$

مجموعة غير خالية . وبالتالي فإن المجموعة :

$$B = \{ L_x \ : x\in A \}$$

مجموعة غير خالية وهي مجموعة جزئية من $S/\mathcal{L}$.

إن S تحقق الشرط $\min_L$ فرضاً .

إذاً B تحوي عنصراً أصغرياً وليكن L_u مثلاً .

وبالتالي يوجد $v \in S$ بحيث أن :

$$uav = b$$

أي أن

$$uruavsv = b \qquad \text{و} \qquad ruavs = a$$

وبالتالي فإن $L_{uru} \in B$.

ثم إن $L_{uru} \leqslant L_u$ (انظر التمرين السابق)

لكن L_u أصغري في B . إذاً $L_{uru} = L_u$

وبالتالي فإن

$$L_u = L_{uru} \leqslant L_{ru} = L_u$$

أي أن $L_{ru} = L_u$ وهكذا فإن $ru \mathcal{L} u$.

إذاً $\qquad rauv \mathcal{L} uav \qquad$ ($\mathcal{L}$ توافق يميني على S) .

أي أن $\qquad rb \mathcal{L} b$

بطريقة مشابهة يمكن الوصول إلى النتيجة التالية $bs \mathcal{R} b$ وبالتالي :

$$rbs \mathcal{R} rb \qquad \text{أي} \qquad a \mathcal{R} rb$$

إذاً $\qquad a \mathcal{D} b$

وبالتالي $\mathcal{J} \subset \mathcal{D}$ لكن $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$

إذاً $\qquad \mathcal{D} = \mathcal{J}$

تعريف (٤) :

إن نصف زمرة مـا تسمى بسيطة (بسيطة يسارياً ، بسيطة يمينياً) إذا حوت على $\mathcal{J}$ — ($\mathcal{L}$— , $\mathcal{R}$—) صف واحد فقط .

نقول عن نصف زمرة أنهـا **ثنائية البساطة** Bisimple إذا حوت على $\mathcal{D}$ - صف واحد فقط .

ملاحظة (٦)

يمكن بعد ملاحظة أن $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$ أن نقول :

« إن كل نصف زمرة ثنائية البساطة هي نصف زمرة بسيطة » (تحقق من ذلك)

لكننا يجب أن نلاحظ أن العكس غير صحيح . إذ أن $\mathcal{D} \neq \mathcal{J}$ في الحالة العامة .

كذلك بما أن $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}$ و $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$ فإن بالامكان القول أن :

« كل نصف زمرة بسيطة يسارياً هي ثنائية البساطة وبالتالي فهي بسيطة »

« كل نصف زمرة بسيطة يمينياً هي ثنائية البساطة وبالتالي فهي بسيطة »

١ - ٣ - ٩ نصف الزمرة النظامية Regular Semigroup

تعريف (٥)

نقول عن عنصر a من نصف زمرة S أنه **عنصر نظامي** إذا حوت S على عنصر x بحيث : $axa = a$.

أي $[\, a \in aSa \,] \Leftrightarrow [\,$ a عنصر نظامي من S $\,]$

نقول عن $\mathcal{D}$- صف D (أو بالأحرى عن أية مجموعة جزئية من S) أنه **نظامي** . إذا كان كل عنصر في D عنصراً نظامياً .

نقول عن نصف زمرة S أنها **نظامية** إذا كانت كل عناصرها نظامية .

اعتماداً على التعريف نلاحظ أن كل عنصر جامد $e \in S$ هو عنصر نظامي في S .

كما نلاحظ أنه إذا كان a عنصراً نظامياً في S فـإنه يوجد $x \in S$ بحيث :

$axa = a$ وبالتالي فإن :

$e = ax$ و $f = xa$ عنصران جامدان في S . ذلك لان :

$$e^2 = (ax)(ax) = (axa)x = ax = e$$

$$f^2 = (xa)(xa) = x(axa) = xa = f$$

كما أن

$$ea = axa = a \quad \text{و} \quad af = axa = a$$

هذا وإن المثالي اليساري الرئيسي المولد من عنصر نظامي a في نصف زمرة S :

$$L(a) = Sa \cup a = Sa$$

(ذلك لأنه يوجد $e \in S$ بحيث $ea = a$) .

كذلك إن

$$R(a) = aS \cup a = aS$$

ذلك لأنه يوجد $f \in S$ بحيث $af = a$.

أما المثالي الرئيسي :

$$J(a) = a \cup Sa \cup aS \cup SaS = SaS$$

ذلك لأن $f \in S$ يقضي بأن :

$$Sa = Saf \subseteq SaS$$

كذلك $e \in S$ يقضي بأن

$$aS = eaS \subseteq SaS$$

مبرهنة (٢٠)

إن عنصراً ما a من نصف زمرة S يكون نظامياً ، إذا وفقط إذا ، كان المثالي الرئيسي اليميني (اليساري) لـ S ، المولد من a ، يملك على الأقل عنصراً جامداً مولداً واحداً e .

البرهان :

١) إذا كان a نظامياً فإنه يوجد $x \in S$ بحيث $axa = a$ وبالتالي $ax = e$ عنصر جامد في S بحيث $ea = a$.

إن $e \in aS$ و $a \in eS$ إذاً :

$$R(a) = R(e)$$

كذلك $xa = f$ عنصر جامد في S بحيث $af = a$ إذاً :

$$L(a) = L(f)$$

٢) نفرض العكس أنه يوجد $e \in S$ بحيث

$$e^2 = e \quad \text{و} \quad R(a) = R(e)$$

إذاً يوجد $x, y \in S^1$ بحيث

$$a = ex \quad \text{و} \quad e = ay$$

وبالتالي

$$ea = e^2x = ex = a$$

أي $$a = ea = aya$$

بما أن $y \in S^1$ فنميز حالتين :

آ) $y = 1$ وبالتالي $e = a$ فهو نظامي لأنه عنصر جامد .

ب) $y \in S$ فيكون $a \in aSa$ فهو نظامي ▯

نتيجة (٢)

اعتماداً على المبرهنة السابقة يمكن استنتاج النتيجة التالية (التي يمكن اعتبارها صياغة جديدة لنص المبرهنة السابقة) :

إن عنصراً ما a من نصف زمرة S يكون عنصراً نظامياً إذا وفقط إذا كان R_a (L_a) يملك عنصراً جامداً e .

مبرهنة (٢١)

١) إذا حوى $\mathcal{D}$ – صف D في نصف زمرة S على عنصر نظامي a فإن اي عنصر في D عنصر نظامي .

٢) إذا كان D صفاً نظامياً فان أي $\mathcal{L}$ ـ صف وأي $\mathcal{R}$ ـ صف محتوى في D يملك عنصراً جامداً .

البرهان :

١) إذا كان a عنصراً نظامياً في S فإنه يوجد عنصر جامـد $e \in S$ بحيث

$$R(a) = R(e) \qquad \text{أي أن} \qquad R_a = R_e$$

مهما يكن $b \in D$ فإنه يوجد عنصر $c \in S$ بحيث $a \mathcal{R} c$ و $c \mathcal{L} b$

أي أن $\qquad R_c = R_a$ و $L_c = L_b$

وبالتالي $R_c = R_e$ وهذا يقضي بأن c عنصر نظامي في S . إذاً يوجد عنصر جامد f بحيث $L_c = L_f$ لكن $L_c = L_b$ إذاً $L_b = L_f$ و b عنصر نظامي في S .

٢) ليكن R أي $\mathcal{R}$– صف محتوى في D. و L أي $\mathcal{L}$ – صف محتوى في D أيضاً . فإن $R \cap L \neq \Phi$ (مبرهنة ١٠) . لنفرض $a \in R \cap L$ فإن :

$$L = L_a \qquad \text{و} \qquad R = R_a$$

إن a عنصر نظامي في S لأن D صف نظامي .

إذاً يوجـد عنصران جامدان $e,f \in S$ (نتيجة المبرهنة ٢٠) بحيث :

$$L_a = L_e \qquad \text{و} \qquad R_a = R_f$$

إذاً $e \in L$ و $f \in R$.

١ ـ ٣ ـ ١٠ نصف الزمرة المتناظرة Invers Semigroup

تعريف (٦)

نقول عن عنصرين a و b من نصف زمرة S أنهما **متناظران** (أي أن كل

منهما نظـير للآخر) إذا كان :

$$aba = a \quad \text{و} \quad bab = b$$

مبرهنة (٢٢)

إن عنصراً a من نصف زمرة S نظامي ، إذا وفقط إذا ، كان يملك نظيراً واحداً على الأقل في S .

البرهان :

١) إذا كان a يملك نظيراً b في S فإن $aba = a$ فهو نظامي

٢) إذا كان a عنصراً نظامياً في S فـإنه يوجـد في S عنصر x بحيث $axa = a$
بفرض $b = xax$ فإن :

$$aba = a(xax)a = ax(axa) = axa = a$$

$$bab = (xax)a(xax) = x(axa)xax = x(axa)x = xax = b$$

وبالتالي b نظير للعنصر a ▯

مبرهنة (٢٣)

إن عنصرين ما a و b في نصف زمرة S ،متناظران في زمرة جزئية G من S إذا وفقط إذا كانا متبادلين ومتناظرين في S . اي إذا كان :

$$aba = a \quad \wedge \quad bab = b \quad \wedge \quad ab = ba$$

البرهان :

١) إذا كان a و b متناظرين في زمرة جزئية G من S حياديها e فإن :

$$ab = ba = e$$

وبالتالي : $aba = a$ و $bab = b$

٢) إذا كان :

$$aba = a \quad \text{و} \quad bab = b \quad \text{و} \quad ab = ba$$

فإن $ab = ba = e$ عنصر جامد في S .

وإن

$$ea = ae = a \quad \text{و} \quad eb = be = b$$

لأن $aba = a$ و $bab = b$

إذاً $a, b \in Se$.

وحيث أن $ab = ba = e$

فإن a و b عنصران متناظران في الزمرة الجزئية H_e (مبرهنة ١١) ▯

تعريف (٧)

نقول عن نصف زمرة S أنها **متناظرة** إذا كان كل عنصر من S يملك نظيراً واحداً في S .

لقد أطلق V.V.Vagner عام ١٩٥٢ اسم **زمرة معممة** generalized group على نصف الزمرة المتناظرة . إن موضوع نصف الزمرة المتناظرة هو اليوم من أهم الأبحاث التي تجري حوله الدراسات الآن نظراً لأنها ليست بعيدة عن نظرية الزمرة.

توطئة (٣)

إذا كانت e , f , ef , fe **عناصر جامدة في نصف زمرة** S **فان** fe و ef **عنصران متناظران في** S .

البرهان :

$$ef(fe)ef = ef^2e^2f = efef = ef$$

$$fe(ef)fe = fe^2f^2e = fefe = fe$$

مبرهنة (٢٤)

إن الشروط الثلاث الآتية متكافئة على نصف زمرة S :

١) S نظامية وأي عنصرين جامدين فيها متبادلان .

٢) أي مثالي رئيسي يساري وأي مثالي رئيسي يميني يملك عنصراً جامداً مولداً وحيداً .

٣) S نصف زمرة متناظرة .

البرهان :

آ) بفرض S نظامية وأي عنصرين جامدين فيها متبادلان فإن :

كل مثالي رئيسي يساري (يميني) لـ S يملك على الأقل عنصراً جامداً مولداً واحداً (مبرهنة ٢٠) .

نفرض أن e , f عنصران جامدان مولدان لنفس المثالي الرئيسي اليميني (مثلا R) فيكون :

$$R = eS = fS$$

لكن

$$f = f^2 \in fS \quad \text{و} \quad e = e^2 \in eS$$

إذاً يوجد $x, y \in S$ بحيث :

$$f = ey \quad \text{و} \quad e = fx$$

وبالتالي :

$$ef = e^2y = ey = f \quad \text{و} \quad fe = f^2x = fx = e$$

لكن $ef = fe$ إذاً $e = f$.

ب) بفرض تحقق الشرط الثاني فإن S نظامية (مبرهنة ٢٠) .

إذاً كل عنصر في S يملك نظيراً واحداً على الأقل (مبرهنة ٢٢) .

ليكن b و c نظيرين لعنصر a من S فإن :

$$aba = a \quad , \quad bab = b \quad , \quad cac = c \quad , \quad aca = a$$

إذاً ab , ac , ba , ca عناصر جامدة وبالتالي :

$$abS = aS = acS \quad \text{و} \quad Sba = Sa = Sca$$

إذاً $ab = ac$ و $ba = ca$ (اعتماداً على الشرط الثاني)

وبالتالي

$$b = bab = bac = cac = c$$

جـ) إذا كانت S نصف زمرة متناظرة فإن S نظامية (مبرهنة ٢٢) .

لنفرض أن e و f عنصران جامدان في S . ولنفرض أن a النظـير الوحيد للعنصر ef . إذاً

$$(ef)a(ef) = ef \quad \text{و} \quad a(ef)a = a$$

لنفرض أن $b = ae$ فيكون :

$$(ef)b(ef) = efae^2f = efaef = ef$$
$$b(ef)b = ae^2fae = aefae = ae = b$$

وبالتالي فإن b نظير آخر للعنصر ef .

لكن S نصف زمرة متناظرة . إذاً

$$ae = b = a$$

كذلك لنفرض أن $fa = e$ فنجد أن :

$$(ef)c(ef) = ef^2aef = efaef = ef$$
$$c(ef)c = faef^2a = faefa = fa = c$$

وبالتالي فإن c نظير آخر للعنصر ef .

لكن S نصف زمرة متناظرة . إذاً

$$fa = c = a$$

ينتج أن

$$a^2 = (ae)(fa) = a(ef)a = a$$

وهذا يعني أن a نظير نفسه إذن $ef = a$ فهو عنصر جامد في S .

نستنتج مما سبق أنه مهما يكن العنصران الجامدان e و f من S فإن ef و fe عنصران جامدان في S أيضاً .

وحسب التوطئة السابقة (٣) فإن ef و fe متناظران . لكن كل منهما نظير نفسه و S متناظرة إذاً $ef = fe$ ▯

مبرهنة (٢٥)

١) مهما يكن العنصران a و b من نصف زمرة متناظرة S وبفرض a^{-1} نظير a و b^{-1} نظير b فإن :

$$(a^{-1})^{-1} = a \quad \text{و} \quad (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$$

٢) إذا كان e و f عنصرين جامدين في نصف زمرة متناظرة S فإن :

$$Se \cap Sf = Sef = Sfe$$

البرهان :

١) بما أن a و a^{-1} متناظران و S نصف زمرة متناظرة فإن $(a^{-1})^{-1} = a$.

كذلك :

$$(ab)(b^{-1}a^{-1})ab = a(bb^{-1})(a^{-1}a)b = a(a^{-1}a)(bb^{-1})b = ab$$

$$(b^{-1}a^{-1})(ab)(b^{-1}a^{-1}) = b^{-1}(a^{-1}a)(bb^{-1})a^{-1}$$

$$= b^{-1}(bb^{-1})(a^{-1}a)a^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

(لأن $a^{-1}a$ و bb^{-1} عنصران جامدان في S فهما متبادلان)

إذاً ينتج أن

$$b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1}$$

٢) إذا كان $a \in Se \cap Sf$ فإن $ae = af = a$ وبالتالي

$$aef = af^2 = af = a$$

أي $a \in Sef$ أي ان

$$Se \cap Sf \subseteq Sef$$

بالعكس إذا كان $a \in Sef$ فإن $aef = afe = a$ (لأن ef عنصر جامـد في S و $ef = fe$ لأن S متناظرة) ومنه ينتج أن :

$$af = aef^2 = aef = a$$

كذلك

$$ae = afe^2 = afe = a$$

أي أن $a \in Se \cap Sf$ ومنه $Sef \subseteq Se \cap Sf$

إذاً $Sef = Se \cap Sf$. لكن $fe = ef$ إذاً $Se \cap Sf = Sfe$ ▯

١ ــ ٣ ــ ١١ العلاقة بين عناصر $\mathcal{D}$ ــ صف

مبرهنة (٢٦)

١) إذا ملك عنصر a نظيراً b في نصف زمرة S فإنــه ونظيـره ينتميـان لـ $\mathcal{D}$ ــ صف واحد ويكون هذا الصف نظامياً .

٢) إذا كان a و b متناظرين في S فإن ab عنصر جامد في S ينتمي إلى $R_a \cap L_b$ و ba عنصر جامد في S ينتمي إلى $R_b \cap L_a$.

٣) إذا كان a و c ينتمي إلى $\mathcal{D}$- صفاً نظامياً D بحيث $R_a \cap L_c$ يحوي عنصراً جامداً e ، و $L_a \cap R_c$ يحوي عنصراً جامداً f فإن H_c يحوي نظيراً a' لـ a بحيث ان :

$$aa' = e \qquad \text{و} \qquad a'a = f$$

٤) أي $\mathcal{H}$ ــ صف لايحوي أكثر من نظير واحد للعنصر a .

البرهان :

١) بما أن a و b متناظران في S فان $aba = a$ و $bab = b$

إن $a\in abS$ و $ab\in aS$. إذاً $R(a)= R(ab)$

ثم $b\in Sab$ و $ab\in Sb$. إذاً $L(a)=L(ab)$

ينتج أن $a\mathcal{R}\, ab$ و $b\mathcal{L}ab$ وبالتالي $a\mathcal{D}b$.

إن a عنصر نظامي (مبرهنة ٢٢) وبالتالي D_a صف نظامي (مبرهنة ٢١).

٢) بما أن $aba=a$ و $bab=b$ فإن ab و ba عنصران جامدان في S

وإن $ab\in\mathbf{R}_a\cap L_b$ كما مر في برهان الفقرة الأولى .

كذلك إن $b\in baS$ و $ba\in bS$ • إذاً $R(b)=R(ba)$

وإن $a\in Sba$ و $ba\in bS$. إذاً $L(a)=L(ba)$

إذاً $ba\in R_b\cap L_a$

٣) بما أن $e\in R_a\cap L_e$ إذاً $ea=a$ (مبرهنة ١٧)

كذلك بما أن $f\in L_a\cap R_e$ فإن $af=a$ (مبرهنة ١٧)

بما أن $e\mathcal{R}a$ ، إذاً يوجد عنصر $x\in S^1$ بحيث أن $ax=e$ وبالتالي فإن :

$$a(fxe)a = afxea = axa = ea = a$$

$$(fxe)a(fxe) = fxeafxe = fxafxe = fxaxe = fxe^2 = fxe$$

وبالتالي فإن $a'=fxe$ نظير للعنصر a في S .

وإن

$$aa' = afxe = axe = e^2 = e$$

ثم إن $a\mathcal{L}f$ وبالتالي يوجد $y\in S^1$ بحيث $f=ya$. إذاً

$$a'a = fxea = fxa = yaxa = yea = ya = f$$

ينتج من ذلك أن $a'\in L_e$ و $a'\in R_f$. إذاً :

$$a' \in L_e \cap R_f = L_c \cap R_c = H_c$$

٣) نفرض جدلاً أن a يملك نظيرين a' و a'' ينتميان إلى $\mathcal{H}$ – صف H_q . إن aa' و $a''a$ عنصران جامدان في S ينتميان إلى $R_a \cap L_q$ لأن a'' و a' ينتميان إلى $H_q = L_q \cap R_q$.

و

$$aa' \in R_a \cap L_{a'} = R_a \cap L_q$$

كما أن

$$aa'' \in R_a \cap L_{a''} = R_a \cap L_q$$

وبالتالي $aa' = aa''$ (نتيجة المبرهنة ١٧) .

كذلك $a'a$ و $a''a$ عنصران جامدان في S ينتميان إلى $R_q \cap L_a$ (لماذا ؟)

وبالتالي :

$$a''a = a'a$$ (لماذا ؟)

إذاً :

$$a' = a'aa' = a'aa'' = a''aa'' = a''$$

مبرهنة (٢٧)

إذا كان e و f عنصرين جامدين في نصف زمرة S فإنهما ينتميان لـ $\mathcal{D}$ ـ صف واحد D إذا وفقط إذا وجد عنصران متناظران a و a' ينتميان للصف D نفسه ، بحيث :

$$a'a = f \quad و \quad aa' = e$$

البرهان :

لزوم الشرط : إذا كان e و f في صف واحد D فإن D صف نظامي (لأن e عنصر نظامي في D) وإن :

$R_e \cap L_f \neq \Phi$ و $R_f \cap L_e \neq \Phi$ (مبرهنة ١٠)

نفرض أن a عنصر ما من $R_e \cap L_f$ و c عنصر ما من $R_f \cap L_e$.

إن $a \in D$ وإن $L_e = L_c$ و $R_f = R_c$ و $L_f = L_a$ و $R_e = R_a$

بالتالي

$$f \in L_f \cap R_f = L_a \cap R_c$$

و
$$e \in L_e \cap R_e = R_a \cap L_c$$

وحسب المبرهنة السابقة فإن H_c يحوي نظيراً وحيداً a' للعنصر a بحيث أن:

$$a'a = f \quad \text{و} \quad a a' = e$$

(واضح أن $H_c \subseteq D$ وبالتالي $a' \in D$) .

كفايــة الشرط : إذا كان a و a' عنصرين متناظرين في S بحيث $aa' = e$ و $a'a = f$ فإن :

$$e = aa' \in R_a \cap L_{a'} \quad \text{(مبرهنة ٢٦)}$$

$$f = a'a \in R_{a'} \cap L_a \quad \text{(مبرهنة ٢٦)}$$

وبالتالي $e\mathcal{R}a$ و $f\mathcal{L}a$ ومنه $e\mathcal{D}f$.

لكن $R_a \subseteq D_a$ و $L_a \subseteq D_a$ إذاً $e,f \in D_a$ كذلك $R_{a'} = R_f \subseteq D_a$ وبالتـــالي f, e, a', a في $\mathcal{D}$ — صف واحد .

مبرهنة (٢٨)

(١) إذا كان a **و** b **عنصرين في نصف زمرة** S **فإن :**

$ab \in R_a \cap L_b$ **إذا وفقط إذا حوت** $R_b \cap L_a$ **عنصراً جامداً .**

(٢) إذا حوى $R_b \cap L_a$ **على عنصر جامد فإن :**

$$aH_b = H_a b = H_a H_b = H_{ab} = R_a \cap L_b$$

البرهان :

١) **لزوم الشرط** : نفرض أن $ab \in R_a \cap L_b$ وينتج أن $ab \in R_a$ ·

وبالتالي يوجد عنصر $b' \in S$ بحيث $(ab)b' = a$.

إن $a\mathcal{R}ab$ يقضي بوجود تقابلين متعاكسين (مبرهنة ١٢) :

$$\varphi : L_a \longrightarrow L_{ab} \quad ; \quad x \longrightarrow xb$$

$$\psi : L_{ab} \longrightarrow L_a \quad ; \quad x \longrightarrow xb'$$

لكن $ab \in L_b$ وبالتالي $L_{ab} = L_b$ وبالتالي :

$$\varphi : L_a \longrightarrow L_b \qquad \text{و} \qquad \psi : L_b \longrightarrow L_a$$

إن $\psi(b) = bb' \in L_a$ ثم إن $b\mathcal{R}\psi(b) = bb'$ (مبرهنة ١٢)

وبالتالي فإن $bb' \in L_a \cap R_b$.

مهما يكن $x \in L_a$ فإن :

$$x = \psi\varphi(x) = \psi(xb) = xbb'$$

عندما $x = bb'$ فإن $bb'bb' = bb'$

وبالتالي bb' عنصر جامد في S ينتمي إلى $L_a \cap R_b$

كفاية الشرط : إذا كان $R_b \cap L_a$ يحوي عنصراً جامداً e فإن :

$e\mathcal{R}b$ وبالتالي يوجد تقابل :

$$\varphi : L_e \longrightarrow L_b \quad ; \quad x \longrightarrow xb \qquad \text{(مبرهنة ١٢)}$$

بما أن $a \in L_e$ فإن $ab \in L_b$.

لكن $ab \in R_a$ (لأن $a\mathcal{R}\varphi(a)$ حسب المبرهنة ١٢) .

إذاً $ab \in R_a \cap L_b$

٢) نفرض أن $R_b \cap L_a$ يحوي عنصراً جامداً e .

مهما كان $x \in H_a$ و $y \in H_b$ فإن $e \in R_y \cap L_x$

(لأن $R_y = R_b$ و $L_x = L_a$) وبالتالي :

$$xy \in R_x \cap L_y = R_a \cap L_b$$

وهذا يقضي إلى أن :

$$H_a H_b \subseteq R_a \cap L_b$$

إذاً $ab \in R_a \cap L_b$ وبالتالي $H_{ab} = R_a \cap L_b$

بما أن $ab \mathcal{R} a$ فيوجد تقابل (مبرهنة ١٢)

$$\varphi : L_a \longrightarrow L_{ab} \quad ; \quad x \longrightarrow xb$$

وإن $x \mathcal{R} \varphi(x)$ مهما تكن $x \in L_a$.

وحسب المبرهنة (١٥) فإن مقصور φ على H_a هو تقابل من H_a على H_{ab} .

أي أن : $H_a b = H_{ab}$

كذلك $ab \mathcal{J} b$ فيوجد تقابل (مبرهنة ١٢)

$$\sigma : R_b \longrightarrow R_{ab} \quad ; \quad x \longrightarrow ax$$

وإن مقصور σ على H_b هو تقابل من H_b على H_{ab} . أي أن :

$$aH_b = H_{ab}$$

ثم إن

$$H_a b \subseteq H_a H_b \subseteq R_a \cap L_b = H_{ab} = H_a b$$

إذاً $H_a b = H_a H_b$

وبالتالي :

$$aH_b = H_a b = H_{ab} = H_a H_b = R_a \cap L_b$$

مبرهنة (٢٩)

إذا كان e و f عنصرين جامدين في نصف زمرة S بحيث $e\mathcal{D}f$ فإن :

١) مهما يكن a من $R_e \cap L_f$ فإن $R_f \cap L_e$ يحوي نظيراً a' لـ a بحيث :

$$aa' = e \quad \text{و} \quad a'a = f$$

٢) مهما يكن $x \in H_e$ ومهما يكن $a \in R_e \cap L_f$ فإن $xa \in H_a$

ومهما يكن $y \in H_f$ فإن $ay \in H_a$. وإن :

$$a'xa \in H_f \quad \text{و} \quad aya' \in H_e$$

٣) إن الدالة $\theta : H_e \longrightarrow H_f \ ; \ x \longrightarrow a'xa$ تشاكل تقابلي من H_e على H_f .

٤) إذا كانت H و K زمرتي $\mathcal{H}$-صفوف في نفس الـ $\mathcal{D}$- صف فإن H و K متماثلتان .

البرهان :

١) إن $R_f \cap L_e \neq \Phi$ لأن $e\mathcal{D}f$ (مبرهنة ١١) . فلنفرض أن $R_f \cap L_e = H_c$.
مهما يكن $a \in R_e \cap L_f$ فإن $a\mathcal{D}c$ وإن :

$$e \in R_e \cap L_e = R_a \cap L_c \quad \text{و} \quad f \in R_f \cap L_f = R_c \cap L_a$$

إذاً H_c يحوي نظيراً a' لـ a (مبرهنة ٢٦) بحيث :

$$aa' = e \quad \text{و} \quad a'a = f$$

٢) مهما يكن $x \in H_e$ ومهما يكن $a \in R_e \cup L_f = H_a$ فإن :

$$a' \in H_c = R_f \cap L_e$$

إذاً $L_x = L_e = L_{a'}$ و $R_x = R_e = R_a$

إن $e \in R_e \cap L_e = R_a \cap L_a$ وبالتالي فإن :

$$xa \in R_x \cap L_a = R_e \cap L_f = H_a \quad \text{(مبرهنة ٢٨)}$$

كذلك فإن

$$e \in R_e \cap L_e = R_a \cap L_{a'} = R_{xa} \cap L_{a'}$$

وبالتالي فإن

$$a'xa \in R_{a'} \cap L_{xa} = R_f \cap L_f = H_f \quad \text{(مبرهنة ٢٨)}$$

بنفس الطريقة نجد أنه مهما يكن $y \in H_f$ فإن $a\,y \in H_a$ وإن $aya' \in H_e$

٣) لدينا $e\mathcal{R}a$ وبالتالي يوجد تقابل

$$\varphi : L_e \longrightarrow L_{ea} \; ; \; x \longrightarrow xa$$

(وذلك بفرض a عنصر معين من $R_e \cap L_f$) .

لكن $ea = a$ لأن e حيادي يساري لصف التكافؤ R_e .

إذاً مقصور الدالة φ على H_e هو تقابل من H_e على H_a

كذلك $a\mathcal{J}f$ فيوجد تقابل :

$$\sigma : R_a \longrightarrow R_{a'a} \; ; \; x \longrightarrow a'x$$

$(a'a = f)$ وإن مقصور الدالة σ على H_a هو تقابل من H_a على H_f . وبالتالي فإن تركيب مقصوري الدالتين السابقتين (ولنسمه θ مثلاً) هو تقابل من H_e على H_f أي أن :

$$\theta : H_e \longrightarrow H_f \; ; \; x \longrightarrow a'xa$$

هو تقابل من H_e على H_f .

والآن مهما يكن $x_1, x_2 \in H_e$ وإن :

$$\theta(x_1x_2) = a'x_1x_2a = a'x_1ex_2a = a'x_1aa'x_2a = \theta(x_1)\theta(x_2)$$

إذاً $H_f \approx H_e$ أي H_e و H_f متماثلتان .

٤) إذا كانت H، K زمرتي $\mathcal{H}$ – صفوف في نفس الـ $\mathcal{D}$ – صف فإن H تملك حيادياً وليكن e و K تملك حيادياً وليكن f .

إذن $H = H_e$ و $K = H_f$ متماثلتان .

ملاحظة (٧)

سبق وأوضحنا أنه في حالة نصف زمرة نظامية S فإن (انظر فقرة (٩) نصف الزمرة النظامية) :

$a \mathcal{L} b$	إذا وفقط إذا كان	$Sa = Sb$
$a \mathcal{R} b$	إذا وفقط إذا كان	$aS = bS$
$a \mathcal{J} b$	إذا وفقط إذا كان	$SaS = SbS$

لنرمز بـ $V(a)$ لمجموعة كل نظائر العنصر a من نصف الزمرة S .

واضح أنه في حالة نصف زمرة نظامية S فإن $V(a) \neq \Phi$ وذلك مهما يكن العنصر a من S ، وهي خاصة مميزة لنصف الزمرة النظامية .

مبرهنة (٣٠)

إذا كان a و b عنصرين من نصف زمرة نظامية S فإن :

١) $a \mathcal{L} b$ **إذا وفقط إذا وجد** $a' \in V(a)$ **و** $b' \in V(b)$ **بحيث** $a'a = b'b$

٢) $a \mathcal{R} b$ **إذا وفقط إذا وجد** $a' \in V(a)$ **و** $b' \in V(b)$ **بحيث** $aa' = bb'$

٣) $a \mathcal{H} b$ **إذا وفقط إذا وجد** $a' \in V(a)$ **و** $b' \in V(b)$ **بحيث :**

$$aa' = bb' \quad \text{و} \quad a'a = b'b$$

البرهان :

١) إذا كان $a \mathcal{J} b$ و $a' \in V(a)$ فإن $a'a$ عنصر جامد في $L_b = L_a$.

إن الـ R – صف R_b يحوي عنصراً جامداً واحداً على الأقل e .

إن الـ $\mathcal{H}$ – صف $R_e \cap R_{a'a}$ تحوي نظيراً b' للعنصر b بحيث :

$$(b'b = e)\ a'a = b'b$$

وهكذا فقد برهنا مايلي :

$$a \mathcal{J} b \Rightarrow [\forall a' \in V(a)][\exists b' \in V(b)]\ (b'b = a'a)$$

وعلى العكس إذا فرضنا $a'a = b'b$ من أجل عنصرين $a' \in V(a)$ و $b' \in V(b)$ فإن :

$$a \mathcal{J} a'a \qquad \text{و} \qquad b'b \mathcal{J} b$$

وهكذا فإن $a \mathcal{J} b$

٢) بطريقة مشابهة نثبت صحة المطلوب .

٣) لنفرض أن $a \mathcal{H} b$ وأن $a' \in V(a)$ عندئذ :

$$aa' \in R_a = R_b \qquad \text{و} \qquad a'a \in L_a = L_b$$

وبالتالي فان الـ $\mathcal{H}$– صف $R_{a'a} \cap L_{aa'}$ يحوي نظيراً b' للعنصر b بحيث

$$b\,b' = aa' \qquad \text{و} \qquad b'b = a'a$$

أي أنه :

$$a \mathcal{H} b \Rightarrow [\forall a' \in V(a)][\exists b' \in V(b)][a'a = b'b \wedge aa' = bb']$$

وعلى العكس إذا فرضنا أنه من أجل عنصر ما $a' \in V(a)$ و $b' \in V(b)$ كان

$$a'a = b'b \qquad \text{و} \qquad a\,a' = b\,b'$$

فمن الواضح أن :

$$a \mathcal{J} b \quad \text{و} \quad a \mathcal{R} b \quad \text{وبالتالي} \quad a \mathcal{H} b$$

(تمارين ٣ ـ ٣)

١) إذا كانت $|A| = n$ فأثبت أن :

$$|P(A)| = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} n^r \quad و \quad |\mathcal{R}(A)| = 2^{n^2} \quad , \quad |\mathcal{F}(A)| = n^n$$

٢) لتكن $\mathcal{E}(A)$ مجموعة كل علاقات التكافؤ المعرفة على مجموعة ما A أثبت أن :

$$\mathcal{E}(A) \cap P(A) = \{ i \}$$

٣) إذا كانت ρ و σ علاقتين متناظرتين على مجموعة A بحيث :

$$\rho o \sigma \subseteq \sigma o \rho$$

فأثبت أن $\rho o \sigma = \sigma o \rho$

٤) لتكن S نصف زمرة تبديلية ولنعرف علاقة ρ على S كما يلي :

$a \rho b$ $(a, b \in S)$ إذا وفقط إذا كان كل من a و b يقسم قوة معينة للآخر أي أن :

$$[a \rho b] \Leftrightarrow [(\exists m, n \in N)(a \mid b^m \wedge b \mid a^n)]$$

أثبت أن ρ توافق على S .

٥) لتكن S نصف زمرة تبديلية ولنعرف علاقة ρ على S كما يلي :

$$[a \rho b] \Leftrightarrow [(\exists n \in N)(a b^n = b^{n+1} \wedge b a^n = a^{n+1})]$$

اثبت ان ρ توافق على S .

٦) ليكن I و J مثاليين لنصف زمرة S بحيث أن : $I \subseteq J$. برهن ان :

$$(S/J) \approx (S/I)/(J/I)$$

٧) ليكن I و J مثاليين لنصف زمرة S . برهن أن $I \cap J$ و $I \cup J$ مثاليان لـ S .

(لاحظ أن $IJ \subseteq I \cap J$ وبالتالي $I \cap J \neq \Phi$) . ثم برهن أيضاً أن :

$$(I \cup J)/J \approx I/(J \cap I)$$

٨) ليكن φ تشاكلاً غامراً من نصف زمرة دوارة لانهائية إلى زمرة ما G . برهن أن G زمرة دوارة منتهية . ثم برهن أن أي زمرة دوارة منتهية G يمكن اعتبارها صورة لنصف زمرة دوارة لانهائية تحت تشاكل ما φ يطلب تعيينه.

٩) إذا كانت e, f, ef, fe عناصر جامدة في نصف زمرة S فبرهن أن ef و fe عنصران متناظران .

١٠) برهن أنه إذا ملكت نصف زمرة نظامية S عنصراً جامداً وحيداً فإنها زمرة .

١١) ليكن a عنصراً في نصف زمرة S ولتكن $A=\{x \in S : axa = a\}$

آ) برهن أن AaA هي مجموعة كل نظائر a في S .

ب) برهن أن S نظامية إذا وفقط إذا كان $AaA \neq \Phi$ وذلك $\forall a \in S$.

١٢) ليكن R أحد الـ $\mathcal{R}$ ـ صفوف في نصف زمرة S و L أحد الـ $\mathcal{L}$ ـ صفوف في S بحيث أن $R \cap L$ يحوي عنصراً جامداً . ليكن D الـ $\mathcal{D}$ ـ صف في S الذي يحوي كلاً من L و R . برهن أن $D = LR$.

١٣) لتكن S نصف زمرة واحدية حياديها 1 وليكن :

$$P = \{ p \in S : (\exists q \in S)(pq = 1) \}$$
$$Q = \{ q \in S : (\exists p \in S)(pq = 1) \}$$

برهن أن P و Q أنصاف زمر جزئية من S وأن :

$$P = R_1 \quad \text{و} \quad Q = L_1$$

واستنتج أن S ثنائية البساطة إذا وفقط إذا كانت $S = QP$

١٤) برهن أن نظير أي عنصر جامد g في نصف زمرة S (وليكن g') هو جداء عنصرين جامدين e و f حيث $e = gg'$ و $f = g'g$.

١٥) هل نظير أي عنصر جامد في نصف زمرة S هو عنصر جامد في S ؟
(ارشاد : تحقق من صحة الخاصة التجميعية في النظام الرياضي التالي ثم أعط مثالاً يؤيد اجابتك) .

	e	f	g	a	o
e	e	a	e	a	o
f	o	f	g	o	o
g	g	f	g	f	o
a	o	a	e	o	o
o	o	o	o	o	o

١٦) ليكن e و f عنصرين جامدين في $\mathcal{D}$ – صف من نصف زمرة S . برهن أن :

آ) نظير أي عنصر $x \in R_e \cap L_f$ (وليكن x') ينتمي للمجموعة $R_f \cap L_e$.

ب) بفرض $x, y \in R_e \cap L_f$ فإن :

$$xy', yx' \in H_e \quad \text{و} \quad x'y, y'x \in H_f$$

وأن $xx' = e$ و $x'x = f$

ﺟ) إن نظير xy' في H_e هو yx' . ونظير $x'y$ في H_f هو $y'x$

د) لتكن $A = R_e \cap L_f$ و $A' = R_f \cap L_e$

وليكن a عنصراً معيناً من A ونظيره a' .

نعرف قانون التشكيل o على A بحيث $(x, y \in A)$ $\quad xoy = xa'y$

وقانون التشكيل $*$ على A' بحيث $(u, v \in A')$ $\quad u_* v = uav$

برهن أن (A,o) زمرة وكذلك $(A',*)$ زمرة أيضا .

ه) إن كلا من الدالتين :

$$\varphi : A' \longrightarrow H_e \; ; \; x \longrightarrow ax$$
$$\psi : A' \longrightarrow H_f \; ; \; x \longrightarrow xa$$

تشاكل تقابلي (تماثل) واستنتج أن H_e و H_f متماثلتان . واستنتج أن أي زمرتي $\mathcal{H}$ - صفوف في $\mathcal{D}$ - صف متماثلتان .

١٧) لتكن S نصف زمرة اختزالية لاتملك عنصراً حيادياً . بين أنه لا يمكن إيجاد أي عنصرين a و e من S بحيث $ea = a$ أو $ae = a$.

استنتج أن

$$\mathcal{J} = \mathcal{R} = \mathcal{D} = \{ (x,x) : x \in S \}$$

١٨) بين أن :

$$S = \{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \; ; \; a, b > o \}$$

مع عملية ضرب المصفوفات تشكل نصف زمرة اختزالية بدون عنصر حيادي.

ثم بين أن :

$\mathcal{J} = S \times S$ وبالتالي فإن $\mathcal{D} \neq \mathcal{J}$ وهي محتواة حقيقية في $\mathcal{J}$. كذلك بين أن S ليست دورية .

[ارشاد : بين أن $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$]

ثم بين أن S لاتحقق شرط الأصغرية $\min_L$.

[ارشاد : بفرض $s_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ بين أن

$$L(s_1) \supset L(s_2) \supset \ldots \supset L(s_n) \supset \cdots\cdots]$$

١٩) إذا كان f, e عنصرين جامدين في نصف زمرة S فبين أن :

ا) $e \mathcal{J} f$ إذا وفقط إذا كان $ef = e$ و $fe = f$

ب) $e \mathcal{R} f$ إذا وفقط إذا كان $ef = f$ و $fe = e$

٢٠) نقول عن نصف زمرة أنهـا اختزالية يمينية (يسارية) إذا تحقق مـا يلي $\forall a, b, c \in S$ فإن

$$[\, ca = cb \Rightarrow a = b \,] \quad ac = bc \Rightarrow a = b$$

برهن أن

آ) S بسيطة يمينياً (يسارياً) إذا وفقط إذا كانت

$$(\mathcal{J} = S \times S)\, \mathcal{R} = S \times S$$

ب) كل نصف زمرة صفرية يسارية هي بسيطة يسارياً واختزالية يمينية ولكنها ليست أبداً بسيطة يمينياً واختزالية يسارية .

جـ) نصف الزمر بسيطة يمينياً وبسيطة يسارياً إذا وفقط إذا كانت زمرة .

د) نصف الزمرة المنتهية اختزالية يمينية ويسارية إذا وفقط إذا كانت زمرة .

هـ) أعط مثالاً لنصف زمرة غير منتهية تحقق شرط الاختزال يمينياً ويسارياً ولكنها ليست زمرة لتبين أن كلمة منتهيـــة في الطلب السابق لايمكن الاستغناء عنها .

٢٠) نقول عن نصف زمرة أنها زمرة يمينية (right group) إذا كانت بسيطة يمينياً واختزالية يسارية . كما نقول إنها زمرة يسارية (left group) إذا كانت بسيطة يسارية واختزالية يمينية .

برهن أن :

آ) نصف زمرة ما S تكون زمرة يمينية إذا حققت الشرط التالي :

$$(\forall a, b \in S)(\exists !\, x \in S)(ax = b)$$

(مع العلم أن المقصود بالرمز $\exists !$ هو أنه يوجد عنصر وحيد) .

ب) كل عنصر جامد في نصف زمرة بسيطة يمينياً S هو حيادي يساري في S .

جـ) نصف الزمرة البسيطة يمينياً S هي زمرة يمينية إذا وفقط إذا حوت على عنصر جامد .

د) الجداء المباشر $G\times E$ لزمرة G ونصف زمرة صفرية يمينياً E هو زمرة يمينية .

هـ) مجموعة العناصر الجامدة E في زمرة يمينية S هي مجموعة غير خالية .

و) مجموعة العناصر الجامدة E في زمرة يمينية S هي نصف زمرة جزئية صفرية يمينياً من S .

ز) إذا كانت $e\in E$ فإن Se هو زمرة جزئية من S .

ح) إذا كان e عنصراً ثابتاً من E و G هي الزمرة Se فإن الدالة :

$$\varphi : G\times E \longrightarrow S \;؛\; (g,e) \longrightarrow ge$$

هو تماثل . ($G\times E$ الجداء المباشر) .

ط) إن نصف زمرة ما S هي زمرة يمينية إذا وفقط إذا كانت تشاكل تقابلياً الجداء المباشر لزمرة صفرية يمينية .

٢١) إذا كان A مثالياً يسارياً و B مثالياً يمينياً في نصف زمرة S فبرهن أن : $BA\subseteq B\cap A$ ثم برهن أن $BA=B\cap A$ إذا كانت S نظامية .

٢٢) لتكن $\mathscr{F}(A)$ مجموعة كل الدوال من A إلى A . برهن مايلي :

آ) بفرض ψ , φ من $\mathscr{F}(A)$ فإنه يوجد $\rho\in\mathscr{F}(A)$ بحيث $\psi=\varphi\rho$ إذا وفقط إذا كان $\varphi(A)\supseteq\psi(A)$. وبالتالي $\varphi\mathscr{I}\psi$ إذا وفقط إذا كان

$$\varphi(A)=\psi(A)$$

ب) بفرض φ, ψ من $\mathscr{F}(A)$ فإنه يوجد $\rho\in\mathscr{F}(A)$ بحيث $\psi=\rho\varphi$ إذا وفقط إذا كان $\varphi o\varphi^{-1}\subseteq\psi o\psi^{-1}$ وبالتالي $\varphi\mathscr{R}\psi$ إذا وفقط إذا كان :

$$\varphi o\varphi^{-1}=\psi o\psi^{-1}$$

المراجع

[1] AL - LAHHAM , A . T . , « On B - semigroups »
J . univ . Gdansk 34 . 1980

[2] CLIFFORD . A . H . , PRESTON , G.B. , « The algebraic theory of semigroups » Vol . I , Amer . Math . Soc . 1961

[3] CLFFORD , A . H . , PRESTON , G.B , « The algebraic theory of semigroups » Vol . II , Amer . Math . Soc . 1967

[4] HOWIE , J.M. , « An introducion to semigroup theory »
Academic press 1976

[5] LJAPIN , E.E. , « Semigroup »
Amer . Math . Soc . 1968

الباب الثاني

نظرية الحقل

الفصل الأول

الحقــول

٢ ـ ١ ـ ١ تمهيد

واجهت الرياضيات عقبات كثيرة أثناء تقدمها عـــبر عصور التاريخ . كان لبعضها أثر كبير على خلق منعطفات جـــديدة في مسيرة التقدم ، ساعدت على وجود فروع جديدة في الرياضيات كان لها أكبر الأثر في تطور هذا العلم والعلوم الأخرى . وعلى سبيل المثال (لا الحصر) سنذكر أمثلة ثلاثة تلقي بعض الضوء على نشوء نظرية غالوا ومفهوم المثالي (الذي مر معنا في نظرية نصف الزمرة ونظرية الحلقة) .

١ ـ المعادلات الحدودية :

إن أي طالب في المرحلة الإعدادية يمكنه حل معادلة الدرجة الثانية :

$$a x^2 + bx + c = o \qquad (a \neq o)$$

ويحفظ دستورها :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

لكنه لم يسمع شيئاً عن معادلة الدرجة الثالثة نظراً لصعوبة حلها . فقد كانت مثار بحث لمئات من السنين جهد الرياضيون لايجاد قانون (مشابه لدستور معادلة الدرجة الثانية) لحلها . وكان أول من تمكن من حلهـــا هو الرياضي الايطالي

مع أن الحل ينسب تاريخياً للعالم الايطالي الذي نشر أعمال Tartaglia (1506 – 1557) تارتاجيليا وهو cardan (1501 — 1576) . فقد أخذ تارتاجيليا معادلة الدرجة الثالثة بشكلها العام :

$$x^3 + bx^2 + cx + d = o$$

وأجرى التحويل التالي :

$$y = x + \frac{b}{3}$$

فأصبحت المعادلة من الشكل :

$$y^3 + p\,y + q = o$$

وبمناقشات ذكية أجراها تارتاجيليا تمكن من إيجاد الجذور الثلاث للمعادلة العامة وهي :

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

$$x_2 = \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

$$x_3 = \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

حيث :

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

وبحيث تكون الجذور التكعيبية المذكورة في x_3 , x_2 , x_1 حقيقية دوماً .

(أجر التحويل $y = z - \frac{p}{3z}$ ثم تابع الحل) .

إن هـذه القوانين لمعادلة الدرجـة الثالثة تبدو غريبة ، وخاصة لظهور الاعداد العقدية فيها ، وتبدو معقدة جداً بالمقارنة مع بساطة دستور معادلة الدرجة الثانية .

ولكن للأسف ليس هناك قانون أبسط .

وفي عـام ١٥٤٥ تمكن الرياضي الايطالي Ferrari (1565 - 1522) ـ أحـد تلامذة كاردان ـ من الوصول إلى قانون لحل معادلة الدرجة الرابعة بشكلها العام ، وخطوات حله تشابه خطوات تارتاجليا ، إلا أنها أكثر تعقيداً .

بعد نجاح كل من تارتاجليا وفيراري في ايجاد قانوني المعادلة الثالثة والرابعة ، ظهر تفاؤل عنـــد الرياضيين بإمكانية ايجاد قانون عام لحل المعادلة الحدودية (polynomial equation) بشكلها العام

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = o \qquad (a_n \neq o)$$

وذلك خلال فترة وجيزة . من الطبيعي أن يتبادر إلى الذهن بأن هذا القانون العام سيعطينا حلول المعادلة الحدودية بدلالة الأمثال $a_0, a_1, \dots, a_n$. وهنـا ظهر التحدي الكبير للرياضيين :

هل يمكن التعبير عن حلول المعادلة الحـدودية من الدرجـة الخامسة فما فوق بدلالة تراكيب جبرية للأمثال $a_0, a_1, \dots a_n$ لاتحوي إلا عمليات جمـع وضرب وطرح وقسمة وجذور على أن ترد كل من هذه العمليات الحسابية عـدداً محدوداً من المرات ؟

لنطلق على تلك المعادلات التي تقبل حلولاً مطابقة لما ذكرناه اسم « المعادلات القابلة للحل جذرياً » solvable by radicals .

إن أول محاولة ناجحة في اتجاه حل هـــذه المسألة كانت للرياضي الافرنسي Joseph Lagrange (1813 - 1736) الذي قـدم في نهاية القرن الثامن عشر طريقة منظمة لايجاد الحل العام للمعادلات الحدودية التي لاتتجاوز الدرجة الرابعة . وكانت فكرته الأساسية إرجاع حل المعادلة المعطاة إلى حل معادلات مساعدة . وقد تبين له أن هذه المعادلات المساعدة هي من درجة أقل (في حالة $n \leqslant 4$) من درجة

المعادلة المعطاة . أما في حالة $n = 5$ فقد ظهر عقم طريقة لاغرانج لأن المعادلات المساعدة كانت من الدرجة السادسة .

إن فشل طريقة لاغرانج في حل معادلة الدرجة الخامسة أدى إلى ظهور اعتقاد بعدم امكانية ايجاد قانون عام لمعادلة الدرجة الخامسة . وهذا ما أثبته Neils Heinrik Abel (1802 – 1829) عام ١٨٢٨ (وكان قد سبقه Ruffini عام ١٨١٣ ونشر برهاناً تبين فيما بعد أنه ناقص وتم تعديله عام ١٨٧٦) . وقد جاء في مبرهنة آبل أنه من المستحيل إيجاد قانون عام لحلول معادلة الدرجة الخامسة جذرياً .

وهنا ظهرت مشكلة جديدة :

« كيف نحكم على معادلة حدودية بأنها قابلة للحل جذرياً أم لا ؟ »

لقد أجاب على هذا السؤال فتى رياضي لامع قتل في مبارزة قبل أن يتم عامه الحادي والعشرين إنه Evariste Galois (1811 – 1832) الرياضي الفرنسي المعجزة، الذي أعطى الشرط اللازم والكافي لتكون المعادلة الحدودية قابلة للحل جذرياً ، والذي وضع أسس النظرية الحديثة في حل المعادلات ، لقد كانت الفكرة الأساسية التي بنى عليها غالوا نظريته ، هي أن كل حدودية :

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

يمكن أن نوفقها بزمرة جزئية G من زمرة التباديل S_n تعتمد على أمثال هذه الحدودية ندعوها حالياً (**زمرة غالوا**) Galois group لهذه الحدودية . وقد بين غالوا أن الخصائص الجبرية لهذه الحدودية تنعكس على زمرة غالوا لها . وبين أن قابلية الحل جذرياً للمعادلة الحدودية الناتجة عنها

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

تكافىء قابلية الزمرة G للحل . أي إمكانية ايجاد متتالية من الزمر الجزئية الناظمية للزمرة G من الشكل :

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \ldots \triangleright G_n = \{e\}$$

حيث $G_i \neq G_{i+1}$ وحيث G_{i-1}/G_i زمر دوارة من مراتب أولية .

إن مسألة حل المعادلات الحدودية قادت الرياضيين إلى دراسة موضوع الزمرة. وهنا يجب أن ننوه إلى أن ما قام به غالوا كان حجر الأساس لما يدعى اليوم (نظرية غالوا) . إن أفكار غالوا لم تنل حقها من الاهتمام إلا بعد مضي عدة عقود على نشرها . إن نظرية غالوا اليوم تدرس زمر التماثل الذاتي للحقول الممددة . وليست البرهنات المتعلقة بقابلية الحل جذرياً للمعادلات الحـــدودية إلا جزءاً خاصاً من نظرية غالوا العامة .

٢ ــ الانشاءات الهندسية :

اهتم الرياضيون القدامى من اليونان بمسائل الإنشاءات الهنـــدسية ، بواسطة مسطرة غير مدرجة وفرجار . وقد تم التعرف على الكثير من طرق الانشاءات فمثلاً أيام اقليدس كانت هناك مسائل كثيرة معروفـــة منها مسألة انشاء منصف زاوية ، وتنصيف قطعة مستقيمة ، وانشاء عمود من نقطة على مستقيم معلوم . وحتى انشاء مخمس منتظم . لكن ثلاث مسائل انشاء تحدت الرياضيين منذ القرن الخامس قبل الميلاد وهذه المسائل الثلاث هي :

آ ــ تثليث زاوية . أي تقسيمها إلى ثلاثة أقسام متساوية .

ب ــ انشاء مكعب حجمه يعادل ضعف حجم مكعب مفروض .

ج ــ انشاء مربع مساحته تعادل مساحة دائرة مفروضة .

إن هـذه المسائل الثلاث بقيت بدون حل حتى القرن التاسع عشر حـين تم البرهان على استحالة إنشاء أي منها . ومع أن هذه المسائل هندسية إلا أن البرهان كان جبرياً .

أضف إلى أن مفتاح الحل لهذه المشكلة كان نفسه مفتاح الحل لمشكلة المعادلات

الحدودية . أي أن البرهان اعتمد على نظرية غالوا أيضاً

٣ ـ نظرية الأعداد :

إن الدافع للتعمق في دراسة الحلقة ، جاء من مصدر آخر مختلف جداً عن مشاكل الحلقة . نذكر أن فيثاغورث أثبت أن مربع الوتر في مثلث قائم يساوي مجموع مربعي ضلعيه القائمين . وقد سميت ثلاثيات الأعداد الصحيحة (x, y, z) التي تحقق المساواة $x^2+y^2=z^2$ بثلاثيات فيثاغورث (Pythagorean triples) مثل $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ .. الخ . وقد أوجد الرياضي اليوناني Diophantus طريقة لتعيين كل هذه الثلاثيات حوالي ٢٥٠ قبل الميلاد (مع العلم أن البابليين أوجدوا العديد من هذه الثلاثيات حوالي ١٥٠٠ قبل الميلاد) :

$$x=c\,(a^2-b^2) \quad , \quad y=2\,abc \quad , \quad z=c\,(a^2+b^2) \qquad a, b, c \in Z$$

وحدث يوماً أن محامياً Pierre Fermat (1601 – 1665) كان يقرأ في كتاب ديوفانتيس (Arithmetica) وهو رياضي هاوٍ مولع بحل معادلات ديوفانتس ، وغالباً مايعلق على حواشي نسخته من هذا الكتاب ، وكعادته علق على الحاشية بالكلمات التالية « إذا كانت $n > 2$ فإن المعادلة $x^n+y^n=z^n$ لاتملك حلاً $(x, y, z) \in Z^3$ مغايراً للصفر » واضاف إلى ذلك مدعياً « لقد وجدت برهاناً مدهشاً لذلك ، لكن ضيق الحاشية لم يتسع لكتابته » لقد خلق هذا التعليق معضلة رياضية لاتزال حتى اليوم تتحدى علماء الرياضيات ألا وهي :

« هل يوجد $(x, y, z) \in Z^3$ مغايرة للصفر بحيث $x^n+y^n=z^n$ عندما : $n > 2$ $(n \in N)$ ؟ » .

إن سمعة فرما الرياضية تترك المرء في شك من كذب ادعائه ، لذا فإن ادعاءه هذا (الذي يسمى مبرهنة فرما الأخيرة) ترك كبار الرياضيين يحارون في اثبات صحة أو كذب هذا الادعاء (معلوم اليوم أن ادعاءه صحيح من أجل $n < 10^5$) :

إن مسألة فرما هذه ساعدت على خلق فرع جديـــد من الرياضيات هو (النظرية الجبرية للأعداد Algebraic number theory) التي تقع على الحدود بـــين الجـبر ونظرية الأعداد . كما ساعدت على خلق النظرية الحديثة للحلقات ، فقد كانت إحدى المحاولات الناجحة في حل مسألة فرما للرياضي الألماني Ernst Kummer (1810-1893) عام ١٨٣٥ ، ولكن لحسن حظ الرياضيات جاء برهانه خاطئاً . لذا عاد كومر يدرس برهانه لتصحيحه مما حداه لإدخال مفهوم المثالي في نظرية الحلقة . وكانت نتـائجه المعمقة في هذا الاتجاه بداية النظرية الحديثة في الحلقات .

٢ ــ ١ ــ ٢ الحقل The field

تعريف (١)

الحقل $(F, +, .)$ هو مجموعة غير خالية F معرف عليهـــا قانونا تشكيل داخلي + و . بحيث :

١) $(F,+)$ زمرة تبديلية .

٢) مهما يكن $a, b, c \in F$ فإن :

$$a(b+c) = ab + ac \quad \text{و} \quad (a+b)c = ac + bc$$

٣) $(\overset{*}{F}, .)$ زمرة تبديلية . $[\, F^* = F - \{0\} \,]$

وإذا تذكرنا أن حلقة القسمة D هي حلقة فيها $(\overset{*}{D}, .)$ زمرة أمكننـــا تعريف الحقل بأنه حلقة قسمة تبديلية (Commutative division ring) .

كذلك إذا تذكرنا أن المنطقة التكاملية (integarl domain) هي حلقــة واحدية تبديليــة لاتملك قواسم للصفر ، أمكننا أن نعرف الحقل بأنـــه منطقة تكاملية فيها كل عنصر مختلف عن الصفر يملك نظيراً بالنسبة لعملية الضرب .

هذا ويمكننا أن نكتب علاقة الاحتواء الحقيقي التالية بين صفوف الحلقات :

الحلقات ⊂ الحلقات التبديلية ⊂ المناطق التكاملية ⊂ الحقول

مبرهنة (١)

لتكن $(S, +, .)$ حلقة . إن $(\overset{*}{S}, .)$ نصف زمرة اختزالية إذا وفقط إذا لم تملك S قواسم للصفر

البرهان :

لزوم الشرط : بفرض $(\overset{*}{S}, .)$ نصف زمرة اختزالية . فمهما يكن $a, b \in \overset{*}{S}$ فإن $ab \neq o$ لأن $ab \in \overset{*}{S}$ وبالتالي S لاتملك قواسم للصفر .

كفاية الشرط : بفرض S لاتملك قواسم للصفر وبفرض $a, b, c \in S$ بحيث $ab = ac$ $(a \neq 0)$ فإن $ab - ac = a(b - c) = 0$ وبالتالي $b - c = 0$ أي $b = c$
كذلك $ba = ca$ يقضي بأن $ba - ca = (b - c)a = 0$ وبالتالي
$b - c = 0$ أي $b = c$

ثم مهما يكن $a, b \in \overset{*}{S}$ فإن $ab \in \overset{*}{S}$ لأن S لاتملك قواسم للصفر .
وبالتالي $(\overset{*}{S}, .)$ نصف زمرة اختزالية .

نتيجة (١)

إن كل منطقة تكاملية D فيها $(\overset{*}{D}, .)$ نصف زمرة اختزالية .

مبرهنة (٢)

كل منطقة تكاملية منتهية تشكل حقلاً .

البرهان :

لتكن D منطقة تكاملية منتهية ، وليكن a عنصراً ما من $\overset{*}{D}$ (ولكنه معين) ولنصطنع الدالة :

$$\varphi_a : D \longrightarrow D \; ; \; x \longrightarrow a x$$

إن φ_a دالة متباينة ذلك لأن $\varphi_a(x_1) = \varphi_a(x_2)$ حيث $x_1, x_2 \in D$ يقضي بأن $ax_1 = ax_2$
وهنا نميز حالتين $x_1 = x_2 = 0$

أو $x_1 \neq o \neq x_2$ وبالتالي $x_1 - x_2$ (لأن D^* اختزالية) .

كذلك φ_a غامره لأنها دالة متباينة من مجموعة منتهية D إلى D نفسها .

بما أن $1 \in D$ (لأن D منطقة تكاملية) فإنه يوجد $b \in \overset{*}{D}$ بحيث $ab = 1$.

وبالتالي فإن $(\overset{*}{D}, .)$ زمرة تبديلية ، و D حقل .

مبرهنة (٣)

Z_n حقل إذا وفقط إذا كان n عدداً أولياً .

البرهـــان :

لزوم الشرط : نفرض أن Z_n حقل .

نفرض جدلاً أن n غير أولي . إذن يوجد $a \in Z_n^*$ $(a \neq 1)$ بحيث يقبل n القسمة على a . وليكن $\frac{n}{a} = k$. ينتج عن ذلك أن :

$$k \in Z_n \qquad \text{و} \qquad ak = 0$$

مع $a \neq 0$ و $k \neq 0$. وهذا يناقض الفرض بأن Z_n حقل . إذاً n أولي .

كفاية الشرط : نفرض أن n عدد أولي .

نعلم أن Z_n حلقة تبديلية . نفرض جـدلاً أنـه يوجد عنصران $a, b \in Z_n^*$ بحيث $ab = 0$.

فينتج أن $n | a$ أو $n | b$ وهذا مستحيل لأن $o < a, b < n$ وبالتالي فإن Z_n لاتملك قواسم للصفر . فهي منطقة تكاملية ولكنها منتهية فهي حقل .

تعريف (٢)

إن مجموعة جزئية غير خالية K من حقل F تسمى **حقلاً جزئياً** من F إذا كان K مع مقصور قانوني التشكيل المعرفين على F ، حقلاً .

مبرهنة (٣)

إن مجموعة جزئية غير خالية K من حقل F ، حقل جزئي من F ، إذا وفقط إذا حققت الشرطان التاليان :

١) $a - b \in K$

٢) $a b^{-1} \in K$ وذلك مهما يكن $a,b \in K^*$.

البرهــان :

١) إذا كان K حقلاً جزئياً من F فإن الشرط محقق وضوحاً .

٢) إذا تحقق الشرطان فإن $0 \in K$ و $(K, +)$ زمرة تبديلية (لماذا ؟)

كذلك فإن $1 \in K$ و $(K^*, .)$ زمرة تبديلية أيضاً (لماذا ؟)

وخاصية التوزيع محققة . إذاً K حقل جزئي من F .

مثال (١) :

إن $Q(\sqrt{2}) = \{ a + b\sqrt{2} : a, b \in Q \}$

حقل جزئي من R .

تمرين (١)

أثبت أن الجداء المباشر للحقلين Z_2 ـ Z_3 ليس حقلاً .

٢ ـ ١ ـ ٣ مميز حقل The characteristic of a field

قبل أن نذكر بتعريف مميز حلقة S نود أن نذكر بأن الرمز na (حيث $n \in N$ و a عنصر من S) يعني $a + a + \dots + a$ (n حد) .

بعد ذلك سنورد تعريفاً لمميز حلقة ثم نستنتج منه تعريف مميز الحلقة الواحدية .

وبما أن كل حقل يمكن اعتباره حلقة واحدية (طبيعي العكس غير صحيح) فمفهوم مميز الحقل سنأخذه من مميز الحلقة الواحدية .

تعريف (٣)

لتكن S حلقة . فإذا أمكن أن نجد لكل عنصر $a\in S$ عـــدداً طبيعياً $n\in N$ بحيث $na = 0$ فإن أصغر هذه الأعداد الطبيعية يسمى **مميـــز** Characteristic الحلقة S . وإذا لم يمكن إيجـاد مثل هـذه الأعداد الطبيعية قيل إن مميز S هو الصفر .

نلاحظ أنه إذا كانت S حلقة واحدية ذات مميز $k\neq 0$ فإن $k.1 = 0$ وبالعكس إذا كان $k.1 = 0$ و a أي عنصر من S فإن :

$$ka = k(1.a) = (k.1)a = 0a = 0$$

تعريف (٤)

لتكن S حلقة واحدية . فإن أصغر عدد طبيعي $n\in N$ يحقق المساواة $n.1=0$ يسمى **مميـــز** الحلقة S . وإذا لم يمكن ايجاد مثل هذا العدد الطبيعي قيل إن مميز S هو الصفر .

مثال (٢)

إن مميز الحلقة Z هو الصفر لأنه لا يوجد عدد طبيعي $n\in N$ بحيث $n.1=0$.
كذلك لنفس السبب فإن مميز كل من الحقلين $\mathbb{R}$ و Q هو الصفر أيضاً . بينما مميز الحلقة Z_n هو n لأن $n.1 = 0$

مبرهنة (٤)

مميز كل منطقة تكاملية هو إما عدد اولي أو الصفر .

البرهـــان :

إذا لم يكن مميز الحلقة التكاملية D هو الصفر فلنبرهن أنه عـدد أولي .
لنفرض $n\neq 0$ مميز المنطقة التكاملية D ، ولنفرض جـــدلاً أن n ليس أولياً.

أي نفرض أن $n = km$ حيث :

$$0 < m < n \quad \text{و} \quad 0 < k < n$$

إن $1 \in D$ وبالتالي $n.1 = 0$ أي أن :

$$k\,m\,.\,1 = 0$$

إذاً
$$0 = km(1.1) = (k.1)(m.1)$$

لكن D لاتملك قواسم للصفر وهذا يقضي أن $m1 = 0$ أو $k1 = 0$ وهذا مناقض لفرضنا n مميز D . إذاً n عدد أولي .

نتيجة (٢)

مميز اي حقل هو صفر أو عدد أولي .

تعريف (٥)

نقول عن دالة $f : M \to S$ من حلقة M إلى حلقة S أنها تشاكل إذا حققت مايلي :

١) $f(a + b) = f(a) + f(b)$

٢) $f(a.b) = f(a)f(b)$

وذلك مهما يكن $a,b \in M$.

تمرين (٢)

لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة كل الحقول ولنعرف عليها العلاقة $\approx$ كما يلي :

$A \approx B$ $(A, B \in \mathcal{F})$ إذا وفقط إذا كان يوجد تشاكل تقابلي (تماثل) من A على B .

أثبت أن $\approx$ علاقة تكافؤ على $\mathcal{F}$.

مبرهنة (٥)

إذا كانت D منطقة تكاملية مميزها صفر فإن D تحوي حلقة جزئية تماثل Z

البرهـــان :

ليكن e العنصر الحيادي في D بالنسبة لعملية الضرب . ولنصطنع الدالة :

$$f : Z \rightarrow D \; ; \; n \rightarrow ne$$

إن f دالة متباينة لأن $f(n_1) = f(n_2)$ يقضي بـــأن $n_1 e = n_2 e$ أي $(n_1 - n_2) e = 0$ وبالتالي $n_1 - n_2 = 0$ أي $n_1 = n_2$ (لماذا ؟)

كذلك f تشاكل لأن :

$$f(m+n) = (m+n)e = me + ne = f(m) + f(n)$$

$$f(m.n) = (n.n)e = (me)(ne) = f(m)f(n)$$

وبالتالي فإن $f(Z)$ هو حلقة جزئية من D تماثل Z .

مبرهنة (٦)

إذا كانت D منطقة تكاملية مميزها p عدد أولي ، فإن D تحوي حلقة جزئية تماثل Z_p .

البرهـــان :

نصطنع الدالة :

$$f : Z_p \rightarrow D \; ; \; n \rightarrow n e$$

وذلك بفرض e العنصر الحيادي في D بالنسبة لعملية الضرب . وبصورة مماثلة لبرهان المبرهنة السابقة نثبت أن $f(Z_p)$ هو حلقة جزئية من D تماثل Z_p (تحقق من ذلك) .

تمرين (٢)

إذا كانت D منطقة تكاملية مميزها n . فاثبت أن أي منطقة جزئية من D مميزها n أيضاً . هل يمكن تعميم ذلك على الحقول ؟

٢ ـ ١ ـ ٤ دالة أولر Euler 's function

إن مجموعة العناصر غير الصفرية F^* من حقل F تشكل زمرة تبديلية بالنسبة لعملية الضرب (لماذا ؟)

ففي الحقل Z_p (حيث P عدد أولي) نجد أن :

$$Z_p^* = \{ 1 , 2 , 3 , \dots , P - 1 \}$$

تشكل زمرة بالنسبة لضرب من المرتبة $p-1$. وإذا تذكرنا أن مرتبة أي عنصر في زمرة ما تقسم مرتبة الزمرة (مبرهنة لاغرانج) فإن بالامكان أن نقول : مهما يكن $a \in Z_p$ فإن : $a^{p-1} = 1$ في Z_p .

إذا كان p عدداً أولياً وكانت :

$$pZ = \{ pz : z \in Z \}$$

فإن :

$$K = \{ a + pZ : a \in Z \}$$

مجموعة منتهية عدد عناصرها p . لنعرف على K قانون التشكيل الداخلي :

$$(a + pZ) + (b + pZ) = (a + b) + pZ$$

$$(a + pZ)(b + pZ) = (a b) + pZ \qquad a, b \in Z$$

فإن $(K , + , .)$ حقل (تحقق من ذلك) . لنصطنع الدالة :

$$f : K \rightarrow Z_p ; \ (a + pZ) \rightarrow a \ (\mathrm{mod}\ p)$$

إن f تماثل من K على Z_p (تحقق من ذلك) .

إن هذا التماثل يقودنا مباشرة إلى المبرهنة التالية (التي تدعى مبرهنة فرما) :

مبرهنة (٧)

إذا كان $a \in Z$ و p عدداً أولياً لايقسم a فإن $a^{p-1} - 1$ يقبل القسمة على p ،

أي ان $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ عندما $a \not\equiv 0 \pmod p$.

نتيجة (٣)

إذا كان $a \in Z$ **فإن** $a^p \equiv a \pmod p$ **وذلك مهما يكن العدد الأولي** p .

البرهــان :

إذا كان $a \not\equiv 0 \pmod p$ فإن $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ وبالتالي :

$a^p \equiv a \pmod p$ أما إذا كان $a \equiv 0 \pmod p$ فإن :

$a^p \equiv 0 \pmod p$ وبالتالي $a^p \equiv a \pmod p$.

إن هذه النتيجة لها أهمية خاصة في دراستنا للحقول المنتهية .

مثال (٣) :

لنحسب باقي قسمة 8^{103} على 13 . باستخدام مبرهنة فرما نجد أن :

$$\begin{aligned} 8^{103} &= (8^{12})^8(8^7) \equiv (1^8)(8^7) \pmod{13} \equiv (8^2)(8^2)(8^2)(8) \pmod{13} \\ &\equiv (-1)(-1)(-1)(-5) \pmod{13} \\ &\equiv 5 \pmod{13} \end{aligned}$$

وكتطبيق على مبرهنة فرما نذكر المبرهنة التالية الرياضي الانكليزي John wilson (1714 — 1793) :

مبرهنة (٨)

الشرط اللازم والكافي لتحقق العلاقة :

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p$$

هو ان يكون p **عدداً أولياً .**

البرهــان :

لزوم الشرط : إذا كانت $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ فإن p أولي .

لبرهان ذلك :

نفرض جدلاً أن p غير أولي . إذاً يوجد عددان $k,m \in Z_p$ بحيث :

$$p = km \quad \text{و} \quad m \neq 1 \neq k$$

إن $k < p$ و $m < p$ يقضي بأنه يوجد $i, j \in Z_p$ بحيث :

$$m = p - j \quad \text{و} \quad k = p - i$$

وبالتالي $p = km \mid (p-1)!$ أي :

$(p-1)! \equiv 0 \pmod p$ وهذا يناقض الفرض . إذاً p أولي .

كفاية الشرط : إذا كان p عدداً أولياً فإن $(\overset{*}{Z}_p , .)$ زمرة من المرتبة p-1

وبالتالي مهما يكن $x \in Z^*_p$ فإن $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ أي $x^p \equiv x \pmod p$ إذاً :

$$x^p - x \equiv x(x-1)(x-2)(x-3) \ldots\ldots (x-p+1)$$

بالمطابقة بين أمثال x في الطرفين نجد أن :

$$(-1)^{p-1}(p-1)! \equiv -1 \pmod p$$

لكن $(-1)^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

[لأن $-1 \equiv (p-1) \pmod p$ و $(p-1)^{p-1} \equiv 1 \pmod p$]

إذاً $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$

تمرين (٤)

أثبت أن 1 و p − 1 العنصران الوحيدان في Z_p حيث :

$$1^{-1} = 1 \quad \text{و} \quad (p-1)^{-1} = p-1$$

[ارشاد حل المعادلة $x^2 - 1 = 0$ في الحقل Z_p]

تمرين(٥)

أثبت أن الشرط اللازم الكافي ليكون العدد $p > 2$ أولياً هو أن يكون :

$$(p-2)! \equiv 1 \pmod p$$

تمرين محلول :

أثبت أنه مهما يكن $n \in Z$ فإن $n^{11} - n$ يقبل القسمة على 462 .

الحـل

إن (2) (11) (7) (3) = 462 وبتطبيق مبرهنة فرما نجد أن :

$$n^{31} = (n^{15})^2 n \equiv n^{16} \pmod 2 \equiv n^8 \pmod 2 \equiv n^4 \pmod 2 \equiv n^2 \pmod 2 \equiv n \pmod 2$$

$$n^{31} = (n^{10})^3 n \equiv n^{11} \pmod 3 \equiv (n^3)^3 n^2 \equiv n^5 \pmod 3 \equiv n^3 \pmod 3 \equiv n \pmod 3$$

$$n^{31} = (n^4)^7 n^3 \equiv n^7 \pmod 7 \equiv n \pmod 7$$

$$n^{31} = (n^2)^{11} n^9 \equiv n^{11} \pmod{11} \equiv n \pmod{11}$$

وبالتالي $n^{31} - n$ تقبل القسمة على 11 , 7 , 3 , 2 . إذاً :

$n^{31} - n$ تقبل القسمة على 462 مهما يكن $n \in Z$.

مبرهنة (٩)

مجموعة كل العناصر غير الصفرية G_n من Z_n والتي ليست قواسم للصفر تشكل زمرة جزئية من $(Z_n , .)$.

البرهــان :

ليكن $a, d \in G_n$ ولنفرض جدلاً أن $ab \notin G_n$ فيوجد $c \in Z_n$ بحيث :

$(ab)c = o$ وهذا يؤدي إلى أن $a(bc) = o$ ، لكن $b \in G_n$ و $c \neq 0$ إذاً

$bc \neq o$ وبالتالي $a \notin G_n$ وهذا خلاف الفرض . إذاً $ab \in G_n$.

إن $1 \in G_n$.

لننظر في الحلقة $(Z_n, +, .)$ حيث $(Z_n, .)$ نصف زمرة .

ليكن a عنصراً ما من G_n (ولكنه معين) ولنصطنع الدالة :

$$f_a : G_n \longrightarrow G_n \; ; \; x \longrightarrow ax$$

إن f_a متباينة لأن $f_a(x_1) = f_a(x_2)$ يقضي بأن $ax_1 = ax_2$ وبالتالي :

$a(x_1 - x_2) = o$ لكن $a \in G_n$ وبالتالي $x_1 - x_2 = o$ أي $x_1 = x_2$.

وحيث أن $1 \in G_n$ إذاً يوجد $b \in G_n$ بحيث $ab = 1$. وبالتـــالي $(G_n, .)$ زمرة جزئية من $(Z_n, .)$.

تريف (٦) :

إن الدالة $\varphi : N \longrightarrow N$ حيث $\varphi(n)$ تدل على عـدد الاعـدد الطبيعية التي هي أقل من n $(n \in N)$ أو تساوي n ، وأوليـــة نسبياً مع n تسمى **دالة أولـــر .**

مثال (٤) :

بفرض $n = 12$ فإن الأعداد الطبيعية التي أقل أوتـاوي 12 وأولية نسبياً مع 12 هي 1 , 5 , 7 , 11 وبالتالي فإن $\varphi(12) = 4$.

نتيجة (٤) :

إن $\varphi(n)$ هو عدد عناصر الزمرة الجزئية G_n من Z_n .

لقد أعطى Leonard Euler (1707 — 1783) تعميماً لمبرهنة فرما نـــذكرها فيما يلي :

مبرهنة (١٠)

إذا كان a عدداً طبيعياً أولياً نسبياً مع n فإن $a^{\varphi(n)} - 1$ يقبل القسمة على n؛ أي أن ، $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$ (*)

البرهـــان :

إذا كان a أولياً نسبياً مع n فإن $a + nZ$ تحوي عـــدداً صحيحاً $b < n$ وأولياً نسبياً مع n وبالتالي فإن $b \in Z_n$ لكن b أولي نسبياً مـــع n وبالتالي $b \in G_n$ (انظر مبرهنة ٨) . لكن $|G_n| = \varphi(n)$ إذاً $b^{\varphi(n)} \equiv 1 (\mod n)$.

لكن $a \equiv b (\mod n)$ لأن $b \in a + nZ$ وبالتالي :

$$a^{\varphi(n)} \equiv b^{\varphi(n)} (\mod u) \quad \text{أي أن} \quad a^{\varphi(n)} \equiv 1 (\mod n)$$

نتيجة (٥) :

إذا كان p عدداً أولياً فإن $\varphi(p) = p - 1$. بفرض p لايقسم a (فيكون p, a أوليان نسبياً) وبالتالي $a^{p-1} \equiv 1 (\mod p)$ وهي مبرهنة فرما السابقة .

مثال (٥) :

لايجاد باقي قسمة 7^{1000} على 24 باستخدام مبرهنة أولر فنجد أن $\varphi(24) = 8$ وبالتالي :

$$7^{1000} \equiv (7^8)^{125} \equiv (1)^{125} (\mod (24)) \equiv 1 (\mod 24)$$

٢ ـ ١ ـ ٥ المثاليــات The ideals

تعريف (٧) :

إذا كانت $(S, +, .)$ حلقة و A مجموعة جزئية غير خالية من S . فإن A تدعى **مثالياً (يسارياً) يمينياً الحلقة S إذا حققت الشرطين :**

١) A حلقة جزئية من S .

٢) مهما يكن $x \in S$ ومهما يكن $a \in A$ فإن $(xa \in A)$ $ax \in A$.

إذا كانت A مثالياً يسارياً ويمينياً بآن واحد فإنها تدعى **مثالياً ثنائي الجانب** أو اختصاراً **مثاليــاً** الحلقة S .

نتيجة (٦) :

إذا كان A مثاليا للحلقة $(S,+,.)$ فإن $(A,+)$ زمرة جزئية ناظمية من $(S,+)$.

مبرهنة (١١)

إذا كان A مثاليا للحلقة S وكانت $K=\{x+A : x\in S\}$ مزودة بالقانونين :

$$(x+A)+(y+A)=(x+y)+A$$

$$(x+A)(y+A)=xy+A \quad \text{حيث} \quad x,y\in S$$

فإن K حلقة تسمى حلقة الخارج S/A.

البرهـان :

لنثبت أولاً أن القانونين معرفين جيداً . لنفرض أن :

$$x_1+A=x_2+A \quad \text{و} \quad y_1+A=y_2+A$$

فيوجد $a_1,a_2\in A$ بحيث

$$x_1=a_1+x_2 \quad \text{و} \quad y_1=a_2+y_2$$

إن :

$$x_1+y_1=(a_1+a_2)+(x_2+y_2)$$

وبالتالي :

$$(x_1+A)+(y_1+A)=(x_2+A)+(y_2+A)$$

كذلك :

$$x_1y_1=a_1a_2+a_1y_2+x_2a_2+x_2y_2$$

لكن : $a_3=a_1a_2+a_1y_2+x_2a_2\in A$ لأنه مثالي .

إذاً : $x_1y_1+A=x_2y_2+A$

ينتج عن هذا أن القانونين معرفان جيداً ونترك بقية خطوات البرهـان كتمرين للطالب نظراً لسهولتها .

مثال (٦)

لتكن $n \in Z$. إن nZ مثالي للحلقة Z . ذلـك لأنه مهما يكن $z \in Z$ ومهما يكن $a \in nZ$ فإن $az \in nZ$. ذلك لأن $a \in nZ$ يقضي بوجود عنصر $b \in Z$ بحيث $a = nb$ وبالتالي :

$$az = nbz = n (bz) \in nZ$$

لكن Z حلقة تبديلية . إذاً $az = za \in nZ$ ينتج أن nZ مثـالي للحلقة Z . وبالتالي Z/nZ حلقة . وهي حلقة خارج القسمة .

لنصطنع الدالة :

$$f : Z_n \longrightarrow Z/nZ \; ; \; x \longrightarrow x + nZ$$

فنجد أن f تماثل (تحقق من ذلك) وبالتالي فإن Z/nZ تماثل Z_n .

هذا واذا كان n عدداً أولياً فإن Z/nZ حقل (لأنه يماثل Z_n) .

مثال (٧)

إن $A = \{0,3\}$ هو مثالي للحلقة Z_6 (تحقق من ذلك) وإن :

$$Z_6/A = \{ 0 + A \ , 1 + A \ , 2 + A \}$$

حقل يماثل الحقل Z_3 (تحقق من ذلك) .

تعريف (٨) :

نقول عن مثالي A لحلقة S بأنه حقيقي proper إذا كان :

$$A \neq \{0\} \qquad \text{و} \qquad A \neq S$$

مبرهنة (١٢)

إذا كانت S حلقة واحدية و A مثاليا لها يحوي عنصراً عكوساً في S فإن $S = A$.

البرهـــان :

إذا فرضنا أن a هو العنصر المعكوس في S فإنه يوجد $b \in S$ بحيث :

$$ab = ba = 1$$

إذاً $1 \in A$.

لكن :

$$S = S.1 \subseteq SA \subseteq A \subseteq S$$

وبالتالي : $A = S$

نتيجة (٧) :

الحقل لايملك اي مثالي حقيقي .

البرهـــان :

ان كل عنصر $a \neq 0$ في الحقل F يملك نظيراً في F . وبالتالي هناك مثاليان فقط لحقل F هو $\{0\}$ و F .

تعريف (٩) :

اذا كان A مثالياً لحلقة S ، مختلفاً عن S ، وغير محتوى حقيقيـة في أي مثالي حقيقي لـ S فيدعى مثالياً **أعظميـاً** للحلقة S

مبرهنة (١٣)

إذا كانت S حلقة تبديلية واحدية . فإن A مثالي اعظمي في S إذا وفقط إذا كان S/A حقـلاً .

البرهـــان :

لزوم الشرط : نفرض أن A مثالي أعظمي للحلقة S .

ان من السهل أن نبرهن أن S/A حلقة تبديلية واحدية (تحقق من ذلك) .

ليكن :

$$(a \notin A) \quad a + A \in S/A$$

ان $a + A$ ليس حيادي الجمع في S/A فلنبرهن أن له نظير في S/A .

لتكن :

$$B = \{ xa + b : x \in S , b \in A \}$$

ان $(B,+)$ زمرة لأن :

$$(x_1 a + b_1) + (x_2 a + b_2) = (x_1 + x_2) a + (b_1 + b_2) \in B$$

كذلك $o = oa + o \in B$

و $$-(xa + b) = (-x) a + (-b)$$

والآن مهما تكن $y \in S$ فإن :

$$y (xa + b) = (yx) a + yb \in B$$

لكن S تبديلية وبالتالي B مثالي للحلقة S .

ان $$a = 1 a + 0 \in B$$

ثم مهما تكن $b \in A$ فإن :

$$b = ob + b \in B$$

وبالتالي $$A \subseteq B$$

ان $a \in B$ و $a \notin A$ اذن $A \neq B$. لكن A أعظمياً . وهذا يقضي بأن

$$B = S$$

ان $1 \in B$ وبالتالي يوجد $b \in S$ و $c \in A$ بحيث $1 = ba + c$

اذاً $$1 + A = ba + A = (b + A)(a + A)$$

وبالتالي فإن $b + A$ هو نظير $a + A$. اذاً S/A حقل .

كفاية الشرط : نفرض أن S/A حقل .

نصطنع الدالة :

$$f : S \longrightarrow S/A ; x \longrightarrow x + A$$

فهي تشاكل (تحقق من ذلك) . بفرض M مثالي للحلقة S فإن $f(M)$ مثالي للحلقة S/A (تحقق من ذلك) .

نفرض جدلاً أن A ليس أعظمياً ولنفرض أنه يوجد مثالي حقيقي M يحوي حقيقة A أي :

$$A \subset M \subset S \quad \text{اذاً} \quad f(A) \subset f(M) \subset f(S)$$

لكن f غامر و $f(A) = \{ o + A \}$

اذاً : $\{ o + A \} \subset f(M) \subset S/A$

وهذا يخالف فرضنا بأن S/A حقل فهو لايملك أي مثالي حقيقي . اذاً لايوجد أي مثالي حقيقي M يحوي حقيقة A . وبالتالي A أعظمي .

نتيجة (٨) :

الشرط اللازم والكافي لتكون حلقة واحدية تبديلية S حقلاً هو ان لاتملك مثاليات حقيقية .

البرهـــان :

لزوم الشرط : اذا كانت S حقلاً فهي لاتملك مثاليات حقيقية .

كفايـــة الشرط : اذا كانت S لاتملك مثاليات حقيقية فيكون $\{o\}$ مثاليـاً أعظمياً وبالتالي $S/\{o\}$ حقل ، لكن $S/\{o\}$ تماثل S (تحقق من ذلك) وبالتالي فإن S حقل .

مثال (٨)

ان مثاليات الحلقة Z هي من الشكل $nZ \ (n \in Z)$. وكما بينا سابقاً فـإن Z/nZ تماثل Z_n . فإذا كان p عدداً أولياً فإن Z_p حقل وبالتـــالي pZ مثالي اعظمي .

تعريف (١٠) :

اذا كان A مثالياً لحلقة تبديلية S ($A \neq S$) فـــإنه يدعى أوليـــاً اذا كان $ab \in A$ يقضي بأنه اما $a \in A$ أو $b \in A$ وذلك مهما يكن $a, b \in S$.

مبرهنة (١٤)

إذا كانت S حلقة واحدية تبديلية وكان A ($A \neq S$) مثالياً للحلقة S فـإن S/A منطقة تكاملية إذا وفقط إذا كان A مثاليا أوليا في S .

البرهـــان :

ان S/A حلقة واحدية تبديلية (تحقق من ذلك) . وهي منطقة تكاملية اذا وفقط اذا لم تملك قواسم للصفر .

ان صفر S/A هو A (لماذا ؟) وبالتالي S/A منطقة تكاملية اذا وفقط اذا كان :

$$(a + A)(b + A) = A$$

يقضي بأن

$$a + A = A \quad \text{أو} \quad b + A = A$$

لكن :

$$(a + A) . (b + A) = ab + A$$

اذاً $a b \in A$ يقضي بأن $a \in A$ و $b \in A$. وبالتالي A مثالي اولي في S .

S/A منطقة تكاملية اذا وفقط اذا كان A مثالياً أولياً في S .

نتيجة (٩) :

كل مثالي اعظمي A في حلقة تبديلية واحدية S هو مثالي اولي .

البرهـــان :

اذا كان A مثالياً أعظمياً في S فإن S/A حقل فهي منطقـــة تكاملية .

وبالتالي A مثالي اولي .

يمكن أن نخلص من المبرهنات السابقة الى مايلي :

في حلقة تبديلية واحدية S :

١) المثالي A في S عظمي إذا وفقط إذا كان S/A حقلاً .

٢) المثالي A في S أولي إذا وفقط إذا كانت S/A منطقة تكاملية .

٣) كل مثالي أعظمي في S هو مثالي أولي .

مبرهنة (١٥)

إذا كان F حقلاً مميزه n فإنه :

١) إذا كان $n=p$ عدداً أولياً فإن F يحوي حقلاً جزئياً مماثلاً لـ Z_p .

٢) إذا كان $n = o$ فإن F يحوي حقلاً جزئياً مماثلاً لـ Q .

البرهـــان :

نظراً لسهولة البرهان (انظر مبرهنة ٦) فسنتركه كتمرين للطالب .

تعريف(١١)

الحقل Z_p (p عدد أولي) و Q يسميان **حقلين أوليين .**

تمرين (٦)

اذا كان $\varphi: S \longrightarrow S'$ تشاكلاً من حلقة S الى حلقة S' فأثبت أن $\varphi(S)$ حلقة جزئية من S' .

مبرهنة (١٦)

إذا كانت $\varphi : S \longrightarrow S'$ تشاكلاً من حلقة S إلى حلقة S فإن :

آ) $\ker \varphi$ مثالي في S

ب) $\varphi(S)$ تماثل $S/\ker \varphi$

البرهــان :

آ) مهما يكن $x \in S$ ومهما يكن $k \in \ker \varphi$ فإن :

$$\varphi(xk) = \varphi(x)\,\varphi(k) = \varphi(x)\,.\,o = o \Rightarrow xk \in \ker \varphi$$

$$\varphi(kx) = \varphi(k)\,\varphi(x) = o.\varphi(x) = o \Rightarrow kx \in \ker \varphi$$

ب) نصطنع الدالة :

$$f : S/\ker \varphi \longrightarrow \varphi(S) \; ; \; (a + \ker \varphi) \longrightarrow \varphi(a)$$

ان f معرفة جيداً اذ لو فرضنا :

$$a + \ker \varphi = b + \ker \varphi$$

فإنه يوجد $k \in \ker \varphi$ بحيث :

$$a = b + k$$

وبالتالي :

$$\varphi(a) = \varphi(b + k) = \varphi(b) + \varphi(k)$$

لكن $k \in \ker \varphi$ اذاً $\varphi(k) = o$

اذاً $\varphi(a) = \varphi(b)$

وبالتالي :

$$f(a + \ker \varphi) = f(b + \ker \varphi)$$

لنفرض

$$f(x + \ker \varphi) = f(y + \ker \varphi)$$

فإن $\varphi(x) = \varphi(y)$

وبالتالي $\varphi(x) - \varphi(y) = o$

لكن $-\varphi(y) = \varphi(-y)$ (لماذا ؟)

اذاً $\varphi(x-y)=0$ ومنه $x-y \in \ker \varphi$

وهذا يعني أن :

$x \in y+\ker \varphi$ أي $x+\ker \varphi = y+\ker \varphi$

فالدالة f متباينة وهي غامره وضوحاً (لماذا ؟) .

ثم ان

$$
\begin{aligned}
f[(a+\ker \varphi)+(b+\ker \varphi)] &= \varphi(a+b) \\
&= \varphi(a)+\varphi(b) = f(a+\ker \varphi)+f(b+\ker \varphi)
\end{aligned}
$$

كذلك

$$
\begin{aligned}
f[(a+\ker \varphi)(b+\ker \varphi)] &= f(ab+\ker \varphi) \\
&= \varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b) \\
&= f(a+\ker \varphi)\,.\,f(b+\ker \varphi)
\end{aligned}
$$

اذاً f تماثل (تماكل)(هذا التماثل يدعى عادة **التماثل القانوني**) .

* * *

تمارين (٢ ـ ١)

١) لتكن S مجموعة غير خالية معرفة عليها قانونى تشكيل داخلي + و . بحيث :

آ) $(S, +)$ زمرة

ب) $(S^*, .)$ زمرة تبديلية

حـ) $a(b+c) = ab + ac$ وذلك مهما يكن $a, b, c \in S$

برهن أن $(S, +, .)$ حقل .

[ارشاد : استخدم خاصية التوزيع على $(1+1)(a+b)$ تثبت أن $(S, +)$ تبديلية] .

٢) لتكن S مجموعة غير خالية ، $\mathcal{F}(S)$ مجموعة أجزاء S ، نعرف قانوني التشكيل الداخلي على $\mathcal{F}(S)$ كما يلي :

$$A + B = (A \cup B) - (A \cap B)$$
$$A . B = A \cap B$$

هل تشكل $(\mathcal{F}(S), +, .)$ حقلاً أم حلقة بول ؟

٣) هل الدالة $f : Q(\sqrt{2}) \to Q(\sqrt{3})$

حيث $f(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{3}$

هي تماثل (تما كل) أم لا ؟ أثبت أن $Q(\sqrt{2})$ لايماثل $Q(\sqrt{3})$

٤) إذا كان F و S حقلين متماثلين فأثبت أن لهما نفس المميز .

٥) إذا كان F حقلاً مميزه n فأثبت أن أي حقل جزئي من F مميزه n أيضاً .

٦) إذا كانت D منطقة تكاملية حيادها الضربي e فأثبت أن :

$$K = \{ ne : n \in Z \}$$

منطقة تكاملية جزئية من D محتواة في أية منطقة تكاملية جزئية من D .

هل يمكن تعميم ذلك على الحقول ؟

٧) اكتب جدولاً لزمرة العناصر الأولية نسبياً مع 12 في نصف الزمرة $(Z_{12}, .)$ وبين أن هذه الزمرة تماثل الزمرة $(Z_2 \times Z_2, .)$.

٨) احسب قيم $\varphi(n)$ من أجل $n \leqslant 30$.

٩) أثبت باستخدام مبرهنة فرما أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن :

آ) $n^{25} - n$ يقبل القسمة على 210 .

ب) $n^{37} - n$ يقبل القسمة على 383838 .

[ارشاد : $383838 = (37)(19)(13)(7)(3)(2)$]

١٠) أثبت أنه إذا كان p عدداً أولياً فإن $\varphi(p) = p^{-1}$ وإذا كان n عدداً غير أولي فإن $\varphi(n) < n - 1$.

١١) إذا كانت S حلقة تبديلية و $a \in S$ فأثبت أن :

$A = \{ x \in S : ax = o \}$ مثالي الحلقة S .

١٢) أثبت أن تقاطع مجموعة مثاليات الحلقة S هو مثالي الحلقة S .

١٣) إذا كانت S حلقة وكان A و B مثاليين للحلقة S فإن :

آ) $A + B = \{ a+b : a \in A , b \in B \}$ مثالي الحلقة S و

$A \subseteq A + B$ و $B \subseteq A + B$

ب) $AB = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i : a_i \in A , b_i \in B , n \in N \}$

مثالي الحلقة S و $AB \subseteq A \cap B$

١٤) لتكن $(D+,.)$ منطقة تكاملية ولتكن $S = D \times \overset{*}{D}$. لنعرف العلاقة التالية على S :

$$[(a,b) \sim (c,d)] \Leftrightarrow ad = dc$$

آ) أثبت أن $\sim$ هي علاقة تكافؤ .

ب) لنفرض $F = S/\sim$ ولنعرف عليها قانوني التشكيل الداخلي :

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(ad+bc), bd]$$

$$[(a,b)][(c.d)] = [(ac,bd)]$$

حيث $[(x,y)]$ هو صف تكافؤ (x,y) .

أثبت أن هذين القانونين معرفين جيداً على F . ثم أثبت أن F حقل .

جـ) نصطنع الدالة $f: D \to F ; x \to [(x,1)]$

بين أن f تماثل من D على $f(D)$ وبالتالي $f(D)$ منطقة تكاملية جزئية من F .

د) ماذا نستنتج ؟ (ملاحظة : إن الحقل F يسمى حقل خارج القسمة للمنطقة التكاملية D .

هـ) هل Q هو حقل خارج القسمة للمنطقة التكاملية Z ؟

١٥) إذا كانت S و M حلقتين وكان $f: M \to S$ تشاكلاً فأثبت أن :

آ) $f(M)$ هو حلقة جزئية من S

ب) نواة f هو مثالي في M .

جـ) f متباين إذا وفقط إذا كانت $\ker f = \{o\}$

١٦) لتكن S حلقة واحدية تبديلية ، $\mathfrak{a}$ مجموعة غير خالية من مثاليات S .

أثبت أن :

$M = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A$ مثالي في S

١٧) بفرض A و B ، C مثاليات لحلقة واحدية تبديلية S وبفرض :

$$A.B = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i \ : \ a_i \in A \ , b_i \in B \ , n \in N \}$$

$$A + B = \{ a + b : a \in A \ , b \in B \}$$

أثبت أن :

آ) $B + A = A + B$

ب) $A + (B + C) = A + B) + C$

جـ) $A . B = B . A$

د) $A . (B . C) = (A . B) . C$

هـ) $A . (B + C) = A . B + A . C$

و) B مثالي للحلقة $A + B$. و $B \cap A$ مثالي للحلقة A

ز) $A/A \cap B$ تماثل $(A + B)/B$.

[ارشاد : خذ $\varphi : A \to (A + B)/B$ بحيث $\varphi (x) = x + B$ وأثبت أن $\ker \varphi = A \cap B$] .

* * *

الفصل الثاني

تمديد الحقول

٢ ـ ٢ ـ حلقة الحدوديات

تعريف (١)

إذا كانت S حلقة . فإن المجموع الاعتباري التالي :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots\cdots$$

ونرمز له بالرمز $f(x)$ يسمى **حدودية** polynomial أمثالها من S حيث $a_i \in S$ و $a_i = 0$ من أجل جميع قيم i عدا عدد محدود منها .

إن أكبر قيمة لـ i تجعل $a_i \neq 0$ تسمى **درجة** degree الحدودية

إذا كانت درجة الحدودية صفراً سميت **حدودية ثابتة** Constant polynomial .

سوف نعرف عمليتي الجمع والضرب التاليتين على مجموعة كل الحدوديات في المجهول x التي أمثالها من الحلقة S كما يلي :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right) x^i$$

وسنرمز لمجموعة كل الحدوديات في المجهول x والتي أمثالها من S بالرمز : .

$$S[x] = \{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i : a_i \in S \}$$

يمكن البرهنة بسهولة على أن $S[x]$ حلقة (تحقق من ذلك) . وإذا كانت S تبديلية فإن $S[x]$ تبديلية أيضاً . وإذا كانت واحدية فإن $S[x]$ واحدية أيضاً (تحقق من ذلك) .

مثال (١) :

إن $Z[x]$ مجموعة الحدوديات في المجهول x والتي أمثالها من Z . و $Q[x]$ أمثالها من Q أما $R[x]$ فأمثالها من R .

في الحلقة $Z_2[x]$ نجد أن :

$$(x+1)^2 = x^2 + (1+1)x + 1 = x^2 + 1$$

$$(x+1) + (x+1) = (1+1)x + (1+1) = 0$$

تمرين (١) :

إذا كانت D منطقة تكاملية فاثبت أن $D[x]$ منطقة تكاملية أيضاً . وإذا كان F حقلاً فإن $F[x]$ منطقة تكاملية وليست حقلاً .

[ارشاد : إن $x \in F[x]$ وليس لها نظير في $F[x]$] .

تمرين (٢) :

(انظر في تمارين ٢ - ١ رقم ١٤) أنشىء حقل خـــارج القسمة $F[x]$ من $F[x]$ وإن :

$$F(x) = \{ \frac{f(x)}{g(x)} : f(x) , g(x) \in F[x] \text{ و } g(x) \neq 0 \}$$

مبرهنة (١) :

ليكن F حقلاً جزئياً من حقل E و ليكن a عنصراً ما من E و x مجهول . إن الدالة :

$$\varphi_\alpha : F[x] \to E \quad ; \quad f(x) \to f(\alpha)$$

تشاكل من $F[x]$ إلى E . ومقصور φ_α على F هو تماثل من F على F . (يدعى هذا التشاكل عادة التشاكل الأساسي basic homomorphism)

البرهـان :

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ من $F[x]$ وكان :

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \ , \quad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \ x^i$$

فإن

$$\varphi_\alpha (f(x) + g(x)) = \varphi_\alpha \left(\sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) \alpha^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i \alpha^i$$

$$= \varphi_\alpha (f(x)) + \varphi_\alpha (g(x))$$

كذلك

$$\varphi_\alpha (f(x)\, g(x)) = \varphi_\alpha \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right) x^i \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j \, b_{i-j} \right) \alpha^i$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha^i \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i \alpha^i \right) = \varphi_\alpha (f(x)) \varphi_\alpha (g(x))$$

فالدالة φ_α تشاكل .

إن مقصور φ_α على F هو التطبيق المطابق (تحقق من ذلك) فهو تماثل من F على F .

مثال (٢) :

إن الدالة $\varphi_0 ; Q[x] \to R$ هي تشاكل بحيث :

$$\varphi_0 \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) = a_0$$

لاحظ أن $\ker \varphi_0$ مثالي وهو مجموعة الحدوديات التي فيها $a_0 = 0$ كما أن

$$\varphi_0 (Q[x]) = Q$$

وبالتالي فإن Q تماثل $Q[x]/\ker \varphi_0$.

مثال (٣) :

إن الدالة $\varphi_2 : Q[x] \longrightarrow R$ تعطي مثلاً :

$$\varphi_2 (x^2 + x - 6) = 2^2 + 2 - 6 = 0$$

وبالتالي فإن

$$f(x) = x^2 + x - 6 \in \ker \varphi_2$$

إن من الواضح أن :

$$\ker \varphi_2 = \{(x-2) f(x) : f(x) \in Q[x]\}$$

كذلك فإن

$$\varphi_2 (Q[x]) = Q$$

وبما أن $\ker \varphi_2$ مثالي في $Q[x]$ فإن Q تماثل :

$$Q[x]/\ker \varphi_2$$

مثال (٣)

إن الدالة $\varphi_i : Q[x] \to C$ (حيث C حقل الاعدد العقدية و $i = \sqrt{-1}$)

تعطي :

$$\varphi_i (x^2 + 1) = -1 + 1 = 0$$

وبالتالي فإن

$$\ker \varphi_i = \{ (x^2+1) f(x) : f(x) \in Q[x] \}$$

إن $\ker \varphi_i$ مثالي في $Q[x]$ وبالتالي فإن :

$$\varphi_i(Q[x]) \approx Q[x]/\ker \varphi_i$$

كما أن :

$$\varphi_i(Q[x]) = \{ a + b\,i : a,b \in Q \} \qquad (\text{لماذا ؟})$$

وهو حقل جزئي من C .

تعريف (٢)

ليكن F حقلا جزئياً من حقل E وليكن a عنصراً من E ولتكن

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in F[x]$$

وليكن

$$\varphi_\alpha : F[x] \longrightarrow E \quad ; \quad f(x) \longrightarrow f(\alpha)$$

فإن α يدعى صفراً للحدودية $f(x)$.

على ضوء هذا التعريف فإن مسألة حل المعادلة الحدودية $f(x) = o$ في الحقل E هو إيجاد كافة أصفار الحدودية $f(x)$ في E .

نعلم من دراستنا السابقة أنه إذا كان F حقلاً وكانت $f(x), g(x) \in F[x]$ حيث :

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad ; \quad a_n \neq 0$$

$$g(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0 \quad ; \quad b_m \neq 0 , m > 0$$

فإنه توجد حدوديتان

$p(x), r(x) \in F[x]$ بحيث $\deg r(x) < \deg g(x)$

بحيث :

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

ونعلم أن الشرط اللازم والكافي ليكون عنصراً $a \in F$ صفراً للحدودية $f(x)$ هو أن يكون $x - a$ عاملا من عوامل $f(x)$. أي أن يوجد $q(x) \in F[x]$ بحيث :

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x)$$

كذلك نعلم أن الحدودية $f(x) \in F[x]$ ذات الدرجة n $(n \neq 0)$ تملك على الأكثر n صفراً في F .

مثال (٤) :

لتكن

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4x - 1 \quad \text{و} \quad g(x) = x^2 - 2x + 3$$

حيث

$$f(x), g(x) \in Z_5[x]$$

إن :

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4x - 1 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - x - 3) + (x + 3)$$

(تحقق من ذلك) .

مثال (٥) :

لتكن :

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x + 4 \in Z_5[x]$$

فإن

$$x^4 + 3x^3 + 2x + 4 = (x - 1)^3 (x + 1)$$

فلها صفران 1 و 4 في Z_5 (تحقق من ذلك) .

٢ ـ ٢ ـ ٢ الحدوديات الخزولة reducible polynomials

تعريف (٣)

يقال عن حدودية $f(x) \in F[x]$ أنها **غير خزولة** irreducible **على** F إذا لم يمكن كتابتها بشكل جداء $g(x)\, h(x)$ لحـــدوديتين $g(x), h(x) \ni k[x]$ من درجتين موجبتين وأقل من درجة $f(x)$.

لاحظ قولنا « غير خزولة على F » حيث لم نقل غـير خزولة . إذ أن حدودية ما $f(x)$ قد لا تكون خزولة في F ولكنها قد تكون خزولة في حقل E يحوي F .

مثال (٦)

إن $x^2 - 2 \in Q[x]$ غير خزولة على Q لكنها خزولة على R . فـإذا نظرنا إلى $x^2 - 2$ على أنها عنصر من $R[x]$ فإن :

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

مثال (٧) :

إن $x^3 + 3x + 2 \in Z_5[x]$ غير خزولة على Z_5 لأنهـا لو قبلت التحليل لوجب أن يكون أحد عواملها من الدرجة الأولى أي $x - a$ حيث $a \in Z_5$ وبالتالي a صفر لها . لكن :

$$f(1) = f(2) = 1 \quad \text{و} \quad f(4) = f(3) = 3 \quad \text{و} \quad f(0) = 2$$

إذاً فهي غير خزولة في Z_4 .

مبرهنة (٢)

إذا كانت $f(x)$ حدودية من الدرجة الثانية أو الثالثة بحيث $f(x) \in F[x]$

فإنها خزولة على F إذا وفقط إذا كانت تملك صفراً في F .

البرهـــان :

١) إذا كانت $f(x)$ خزولة على F فيمكن كتابتها بالشكل $f(x) = g(x)\,h(x)$ حيث $g(x)$ و $h(x)$ حدوديتان من $F[x]$ من درجتين موجبتين أقل من درجـــة $f(x)$.

بما أن $f(x)$ من الدرجة الثانية أو الثالثة فإن إحدى الحدوديتين $g(x)$ أو $h(x)$ من الدرجة الأولى . (لنفرض $g(x)$ من الدرجة الأولى مثلا) فتكون

$$f(x) = (x - a)\,h(x)$$

وهذا يقضي بأن $f(a) = 0$ أي أن $f(x)$ تملك صفراً في F .

٢) على العكس إذا كانت $f(x)$ تملك صفراً $\bar{a}$ في F فإن $f(a) = 0$ وبالتالي

$$f(x) = (x - a) . q(x) \quad \text{حيث} \quad q(x) \in F[x]$$

ومن درجة أقل من درجـــة $f(x)$.

مبرهنة (٣)

إذا كانت $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ تنتمي إلى $Z[x]$ مع $a_n \neq 0$. وكانت تملك صفراً في Q من الشكل $\frac{a}{b}$ (a و b اوليان فيما بينهما) فإن a تقسم a_0 و b تقسم a_n .

البرهـــان :

إن $f(\frac{a}{b}) = 0$ يقضي $b^n f(\frac{a}{b}) = 0$ أي أن :

$$a_0 b^n + a_1 b^{n-1} a + a_2 b^{n-2} a^2 + \dots + a_{n-1} b a^{n-1} + a_n a^n = 0$$

وبالتالي :

$$-a_n a^n = a_0 b^n + \ldots + a_{n-1} b a^{n-1}$$

إن b تقسم كل حد في الطرف الأيمن فهي تقسم الطرف الأيسر . لكن a و b أوليان فيما بينهما إذاً b تقسم a_n .

كذلك

$$-a_0 b^n = a_1 b^{n-1} a + \ldots + a_n a^n$$

إن a تقسم كل حد في الطرف الأيمن فهي تقسم الطرف الأيسر . وبالتالي a تقسم a_0 .

نتيجة (١)

إذا كانت $f(x) = x^n + a_{n-1} x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ من $Z[x]$ مع $a_0 \neq 0$ وكانت تملك صفراً في Q فإنها تملك صفراً في Z يقسم a_0 .

البرهـــان :

إذا كانت $f(x)$ تملك صفراً من الشكل $\frac{a}{b}$ (a و b أوليـان فيما بينهما) في Q . فإن a تقسم a_0 و b وتقسم 1 وبالتالي $b = 1$

أي أن $f(x)$ تملك صفراً $Z \ni a$ يقسم a_0 .

مثال (٨) :

إن $x^2 - 2 \in Z[x]$ غير خزولة في $Q[x]$. لأنهـا إذا كانت خزولة في $Q[x]$ فيمكن كتابتها بشكل جداء حدوديتين في $Q[x]$ كل منهما من الدرجة الأولى . أي أن لها صفراً في Q . وبالتالي فهي تملك صفراً في Z يقسم العدد 2 لكن قواسم 2 في Z هي ∓ 1 و ∓ 2 فقط ولايصلح أي منها صفراً للحدودية $x^2 - 2$.

تمرين (٢)

أثبت أن $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x + 1$ غير خزولة على Q .

بينما $g(x) = x^4 - 2x^3 - 3x + 6$ خزولة على Q . أوجد جميع أصفارها في Q .

مبرهنة (٤)

إذا كانت $f(x) \in Z[x]$ فيمكن تحليل $f(x)$ في $Q[x]$ إلى جداء حدوديتين من درجتين موجبتين أقل من درجة $f(x)$ إذا وفقط إذا كان بالامكان تحليلها إلى جداء حدوديتين في $Z[x]$ من نفس الدرجتين .

البرهـــان :

نتركه كتمرين للطالب نظراً لسهولته .

من المعايير الهامة لخزولية حدودية نذكر مبرهنة الرياضي النمساوي Gotthold Eisenstein (1823 — 1852)

مبرهنة (٥)

إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ من $Z[x]$ وكان $a_n \neq 0$ و p عدداً أولياً من Z لايقسم a_n بينما يقسم كلاً من a_i $(i < n)$ وكان p^2 لايقسم a_0 . فإن $f(x)$ غير خزولة على Q .

البرهـــان :

نفرض جدلاً أن $f(x)$ خزولة على Q وبالتالي فهي خزولة على Z (حسب المبرهنة السابقة) إذاً يوجد حدوديتان في $Z[x]$ من درجتين موجبتين أقل من درجة $f(x)$ بحيث :

$$f(x) = (b_r x^r + \dots + b_0)(c_s x^s + \dots + c_0)$$

إن $b_r \neq 0$ و $c_s \neq 0$ و $0 < r , s < n$

إن $a_n = b_r c_s$ و p لايقسم a_n إذاً p لايقسم أياً من b_r أو c_s .

كذلك $a_0 = b_0 c_0$ و p^2 لاتقسم a_0 و p تقسم a_0 إذاً واحدة فقط منهما تقبل القسمة على p . أي p تقسم b_0 أو c_0 (وليس كليهما) . لنفرض أن p تقسم c_0 (مثلا) .

نفرض أن m أصغر عدد طبيعي يجعل c_m لاتقبل القسمة على p عندئذ :

$$a_m = b_0 c_m + b_1 c_{m-1} + \dots + b_m c_0$$

إن كلا من b_0 و c_m لايقبل القسمة على p بينما كل من $c_0 , \dots , c_{m-1}$ تقبل القسمة على p وبالتالي a_m لايقبل القسمة على p وبالتالي $m = n$. ينتج عن ذلك أن $s = n$ وهذا يناقض فرضنا بأن $s < n$.

إذاً $f(x)$ غير خزولة على Z فهي غير خزولة على Q (حسب المبرهنة السابقة) .

مثال (٩) :

إن $x^2 - 2 \in Z[x]$ و $a_0 = -2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$

إذاً $p = 2$ يقسم a_0 و a_1 ولا يقسم a_2 كما أن 4 لا تقسم a_0 وبالتالي $x^2 - 2$ غير خزولة على Q .

كذلك

$$Z[x] \ni 25 x^5 - 9 x^4 + 3x^2 - 12$$

و $p = 3$ تقسم $a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4$ ولا تقسم $a_5 = 25$ كذلك 9 لا تقسم $a_0 = -12$. إذاً فهي غير خزولة على Q .

نتيجة (٢)

إن الحدودية

$$f(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} - x^{p-1} + x^{p-2} + ,.. + x + 1$$

غير خزولة على Q وذلك مهما يكن العدد الأولي p .

البرهــان :

نفرض

$$g(x) = f(x+1) = \frac{1}{x} [(x+1)^p - 1]$$

وبالتالي

$$g(x) = x^{p-1} + \binom{p}{1} x^{p-2} + ... + \binom{p}{r} x^{p-r} + ... + p$$

إن جميع الأمثال تقبل القسمة على p عدا أمثال x^{p-1} كذلك الحد الثابت لا يقبل القسمة على p^2 وبالتالي g (x) غير خزولة على Q .

إذا فرضنا جدلاً أن f(x) خزولة على Q فإنه يوجد حدوديتان $q(x)), h(x) \in Z[x]$ بحيث :

$$f(x) = h(x) \ q(x)$$

وبالتالي

$$f(x+1) = h(x+1) q(x+1) = h_1(x) \ q_1(x)$$

أي أن

$$g(x) = h_1(x) q_1(x)$$

وهذا مناقض لمابرهناه قبل قليل . إذاً f(x) غير خزولة على Q .

٢ ـ ٢ ـ ٣ مثاليــات F [x]

تعريف (٤)

إذا كانت S حلقة تبديلية واحدية وكان $a \in S$ فإن $\{sa : s \in S\}$

هو مثالي لـ S يسمى **مثالياً رئيسياً مولده** a ونرمز له بـ (a) .

كما أن المثالي A للحلقة S يدعى **مثالياً رئيسياً** إذا وجد عدد $a \in S$ بحيث $A = (a)$.

تمرين (٣)

تحقق أن $\{sa : s \in S\}$ مثالي للحلقة S .

مثال (١٠) :

إن (x) هو مثالي رئيسي لـ $F[x]$ مؤلف من جميع الحدوديات :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x$$

مبرهنة (٦)

إذا كان F حقلاً ، فإن كل مثالي في $F[x]$ هو مثالي رئيسي .

البرهــان :

ليكن A مثالياً للحلقة $F[x]$. إذا كان $A = \{0\}$ فإن $A = (0)$ وإذا كان $A \neq \{0\}$ ، فلنفرض أن $g(x)$ حدودية غير صفرية من A ذات الدرجة الأصغر بين عناصر A . اذا كانت درجة $g(x)$ صفراً فإن $g(x) \in F$ وبالتالي له نظير في F وبالتالي $A = F[x] = (1)$. اذا كانت درجة $g(x)$ أكبر من الصفر ، فلنفرض $f(x)$ أي عنصر من A وبالتالي :

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

حيث $\deg r(x) < \deg g(x)$.

ان

$f(x) \in$ و $g(x) \in A$

ينتج أن $g(x)\, q(x) \in A$ وبالتالي :

$$f(x) - g(x)\,q(x) = r(x)$$

تنتمي الى A . لكن A ذات الدرجة الأصغر بين عناصر A . اذاً :

$$r(x) = 0$$

اذاً $f(x) = g(x)\,q(x)$ وبالتالي $A = (g(x))$

مبرهنة (٧)

إذا كان $A = (p(x))$ $(A \neq \{0\})$ مثالياً للحلقة $F[x]$، فإن A اعظمي إذا وفقط إذا كانت $p(x)$ غير خزولة على F.

البرهـــان :

لزوم الشرط

نفرض أن $A \neq \{0\}$ مثالي أعظمي للحلقة $F(x)$. اذاً $A \neq F[x]$

وبالتالي $p(x) \notin F$.

لنفرض جدلاً أن $p(x)$ خزولة . أي أن :

$$p(x) = f(x)\;g(x)$$

حيث يكون $p(x), g(x) \in F[x]$

بما أن A أعظمي فهو أولي . بما أن $f(x)\,g(x) \in A$ فإن :

$f(x) \in A$ أو $g(x) \in A$. وبالتـالي اما $f(x)$ أو $g(x)$ عـامل من عوامل $p(x)$. وهذ يناقض كون درجتي $f(x)$ و $g(x)$ أصغر من درجة $p(x)$.

اذاً $p(x)$ غير خزولة على F .

كفاية الشرط : اذا كانت $p(x)$ غير خزولة على F ، فلنفرض أنه يوجـــد مثالي B للحلقة $F[x]$ بحيث $A \subseteq B \subseteq F[x]$ ، ان B مثالي رئيسي (مبرهنة ٦) للحلقة $F[x]$. وبالتالي يوجد $g(x) \in B$ بحيث $B = (g(x))$.

لكن $A \subseteq B$ يقضي بـأن $p(x) \in B$ وبالتالي توجد حدودية $q(x) \in F[x]$ بحيث أن

$$q(x) = g(x) \cdot q(x)$$

لكن $p(x)$ غير خزولة . إذا إما $g(x)$ أو $q(x)$ من الدرجة صفر .

اذا كانت $g(x)$ من الدرجة صفر فإنها تنتمي الى F (ولا تساوي الصفر) ولها نظير في F . وبالتالي $B = F[x]$.

أما اذا كانت $q(x)$ من الدرجـة صفر فإن $q(x) = c \in F$ وبالتـــالي $g(x) = c^{-1} \cdot p(x)$ تنتمي الى $A = (p(x))$ وبالتالي $B = A$. اذا لا يوجد مثالي B يحوي A حقيقة وبالتالي فإن A أعظمي .

مثال (١١) :

ان $f(x) = x^3 + 3x + 2$ غير خزولة على Z_5 (انظر مثال ٧) .

وبالتالي $Z_5[x]/(f(x))$ حقل (لماذا ؟)

كذلك $g(x) = x^2 - 2$ غير خزولة في $Q[x]$ وبالتالي $Q[x]/(g(x))$ حقل (لماذا ؟) .

مبرهنة (٨)

إذا كانت $p(x)$ حدودية على حقل F من الدرجة n وكان $A = (p(x))$ مثالياً رئيسياً للحلقة $F[x]$ فإن كل عنصر من $F[x]/A$ يمكن التعبير عنه بشكل وحيد :

$$A + (b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}) \quad , \quad b_i \in F$$

إضافة إلى ان $K = \{a + A : a \in F\}$ **حقل جزئي من** $F[x]/A$ **يماثل** F .

البرهــان :

١) إن كل عنصر من $F[x]/A$ يمكن التعبير عنـــه بالشكل $A+f(x)$ حيث

$$f(x) \in F[x]$$

لكن بالتقسيم نجد أن

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

حيث $p(x), r(x) \in F[x]$ مع $r(x) \equiv c$

أو $\deg r(x) < \deg p(x)$

أن $f(x) - r(x) = p(x)q(x) \in A$

اذاً $f(x) \in A + r(x)$

أي أن كل عنصر من $F(x)/A$ يمكن التعبير عنه بالشكل :

$$f(x) = A + (b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}) \qquad b_i \in F$$

لنبرهن أن هذا الشكل وحيد . نفرض جدلاً أن :

$$f(x) = A + (b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}) = A + (c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1})$$

اذا

$$g(x) = (b_0 - c_0) + (b_1 - c_1)x + \dots + (b_{n-1} - c_{n-1})x^{n-1} \in A$$

وبالتالي فان $p(x)$ تقسم $g(x)$. لكن $p(x)$ من الدرجة n اذاً $g(x) \equiv 0$

وبالتالي $b_i = c_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$

٢) نصطنع الدالة :

$$\varphi : F \to F[x]/A \,;\, a \to a + A$$

ان هذه الدالة معرفة جيداً (تحقق من ذلك) كما أنها تقابل (تحقق من ذلك).

كما أن

$$\varphi(a+b) = (a+b) + A = (a+A) + (b+A) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$\varphi(ab) = ab + A = (a+A)(b+A) = \varphi(a)\varphi(b)$$

اذاً φ تماثل ، و F تماثل $\varphi(F[x]/A)$ أي تماثل الحقل الجزئي

$$K = \{ a + A : a \in A \}$$

٢ ـ ٢ ـ ٤ التحليل إلى عوامل Factorization of polynomials

تعريف (٥)

اذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ حدوديتين على حقل F فاننا نقول أن $g(x)$ تقسم $f(x)$) ونرمز لذلك بـ $g(x) \mid f(x)$ اذا وجدت $q(x) \in F[x]$ بحيث :

$$f(x) = g(x)\, q(x)$$

مبرهنة (٩)

إذا كانت $p(x)$ و $h(x)$ و $g(x)$ حدوديات على حقل F وكانت $p(x)$ غير خزولة و $p(x) \mid h(x) g(x)$ فإن $p(x) \mid h(x)$ أو $p(x) \mid g(x)$ ،

البرهـــان :

بفرض $p(x)$ تقسم $h(x)\, g(x)$ فإن $h(x)\, g(x) \in (p(x))$ إن $(p(x))$ مثـــالي أعظمي للحلقة $F[x]$ (مبرهنة ٧) وبالتالي فهو أولي إذاً إما $h(x) \in (p(x))$ أو $g(x) \in (p(x))$ وبالتالي :

$p(x)$ تقسم $h(x)$ أو $p(x)$ تقسم $g(x)$.

نتيجة (٣)

إذا كانـــت $p(x)$ حدوديـــة غـــير خزولـــة في $F[x]$ و $p(x)$ تقسم الجـــداء $h_1(x)\, h_2(x) \cdots h_n(x)$ حيث $h_i(x) \in F[x]$ فإن $p(x)$ تقسم $h_i(x)$ لقيمة واحدة على الأقل لـ $i \in \{1, 2, 3, \dots n\}$.

مبرهنة (١٠)

إذا كانت F حقلاً فإن كل حدودية غير ثابتة $f(x) \in F[x]$ يمكن تحليلها إلى جداء حدوديات غير خزولة في $F[x]$. وهذا التحليل وحيد .

البرهـــان :

لتكن $f(x) \in F[x]$ حدودية غير ثابتة في $F[x]$. إذا كانت $f(x)$ خزولة فإنه يوجد $g(x), h(x) \in F[x]$ بحيث :

$$f(x) = g(x)\, h(x)$$

مع درجتي $h(x)$ و $g(x)$ أصغر من درجة $f(x)$.

إذا كانت $h(x)$ و $g(x)$ غير خزولتين فنقف هنا . أما إذا كانت أياً منهما خزولة نحللها .. وهكذا ... فنصل إلى :

$$f(x) = p_1(x)\, p_2(x) \ldots p_n(x)$$

حيث $p_i(x)$ غير خزولة .

لنفرض أن

$$f(x) = p_1(x) \ldots\ldots p_n(x) = q_1(x) \ldots\ldots q_m(x)$$

وبالتالي فإن $p_1(x)$ تقسم إحدى $q_i(x)$ ولنفرض مثلاً $q_1(x)$ لكن $q_1(x)$ غير خزولة .

إذاً $q_1(x) = a_1 \cdot p_1(x)$ حيث $F \ni a_1 \neq 0$. نعوض ونختصر فنحصل على :

$$p_2(x) \ldots\ldots p_n(x) = a_1 q_2(x) \ldots\ldots q_m(x)$$

بمناقشة مشابهة نكتب $q_2(x) = a_2 p_2(x)$ وهكذا

$$p_3(x) \ldots\ldots p_n(x) = a_1 a_2 q_3(x) \ldots\ldots q_m(x)$$

أخيراً نصل إلى :

$$1 = a_1 a_2 \ldots a_n q_{n+1}(x) \ldots q_m(x)$$

وهذا يحقق فقط إذا كانت $n = m$ أي أن

$$1 = a_1 a_2 \ldots a_n$$

إذاً فالحدوديات $p_i(x)$ و $q_j(x)$ غير الخزولة هي نفسها . إلا أنـه قد يكون ترتيبها مختلف أو قد تختلف عن بعضها بالثوابت .

مثال (١٢) :

إن $x^4 + 3x^3 + 2x + 4 = (x - 1)^3 (x + 1)$

في $Z_5[x]$. كذلك :

$$x^4 + 3x^3 + 2x + 4 = (x - 1)^2 (2x - 2)(3x + 3)$$

ونرى أن الاختلاف بالثوابت فقط .

مثال (١٣) :

إن الدالة $f(x) = 3x^4 - 3x^2 - 6 \in F[x]$ يمكن تحليلها إلى عوامل :

في $Q[x]$ $\quad f(x) = 3(x^2 - 2)(x^2 + 1)$

في $R[x]$ $\quad f(x) = 3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 1)$

في $C[x]$ $\quad f(x) = 3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x + i)(x - i)$

٢ ـ ٢ ٥ تمديد الحقول Fields extensions

تعريف (٦)

الحقل E هو ممدد (Extension) الحقل F إذا كان F حقلاً جزئيـاً من E .

مثال (١٢) :

إن R ممدد الحقل Q كذلك C ممدد الحقل R وممدد الحقل Q .

كما أن كل حقل مميزه العدد الأولي p هو ممدد للحقل Z_p (لماذا ؟) كما أن كل حقل مميزه الصفر هو ممدد للحقل Q (لماذا ؟) .

مبرهنة (١١)

إذا كان F حقلاً وكانت $p(x)$ حدودية غير خزولة على F فإن $F[x]/(p(x))$ هي حقل ممدد للحقل F و $p(x)$ لها صفر في $F[x]/(p(x))$.

البرهان

إن المثالي الرئيسي $A = (p(x))$ أعظمي للحلقة $F[x]$ (مبرهنة ٧) وبالتالي $F[x]/A$ حقل (مبرهنة ١٢ من الفصل السابق) .

إن $K = \{a + A : a \in F\}$ حقل جزئي من $F[x]/A$ (مبرهنة ٨) يماثل F . وبالتالي فإن $F[x]/A$ هو ممدد الحقل K .

لنفرض أن

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

ولنرمز للعنصر $x + A \in F[x]/A$ بالرمز α . إن :

$$p(\alpha) = a_0 + a_1(A + x) + \ldots + a_n(A + x)^n$$

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= A + (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) \\ &= A + p(x) \\ &= A \end{aligned}$$

لكن A هو صفر الحقل $F[x]/A$. إذاً α صفر للحدودية $p(x)$ في $F[x]/A$.

نتيجة (٢)

إذا كان F حقلاً و $f(x) \in F[x]$ وذات درجة موجبة . فإن $f(x)$ تملك صفراً في احد الحقول الممددة للحقل F .

البرهـــان :

إذا كانت $f(x)$ غـير خزولة على F فـــإن $f(x)$ تملـك صفراً في الحقل $F[x]/(p(x))$ ممدد الحقل F (المبرهنة السابقة) .

أما إذا كانت $f(x)$ خزولة على F فيوجد $p(x)\in F[x]$ غير خزولة على F بحيث

$$f(x) = p(x)\,q(x) \qquad (q(x)\in F[x])$$

وحسب المبرهنة السابقة $p(x)$ تملك صفراً في ممدد الحقل F وهو $F[x]/(p(x))$ لكن هذا الصفر هو صفر للحدودية $f(x)$ أيضاً (لماذا ؟) .

إن المبرهنة السابقة مهمة جداً إذ أنها توضح لنا كيفية بناء حقل يملك صفراً لحدودية $p(x)$ انطلاقاً من حقل F ومن $p(x)$.

مثال (١٣) :

الحدودية $f(x) = x^2 - 2$ غــير خزولة على Q وبالتالي $Q[x]/A$ [حيث $A = (f(x))$] ممدد للحقل Q ويحوي جذراً للحدودية $f(x) = x^2 - 2$

نعلم أن كل عنصر من $Q[x]/A$ يمكن التعبير بصورة وحيـــدة بالشكل $(a + bx) + A$ (مبرهنة ٨) حيث $a,b\in Q$ لنصطنع الدالة :

$$\varphi : Q[x]/A \longrightarrow Q(\sqrt{2})\ ;\ (a + bx) + A \longrightarrow a + b\sqrt{2}$$

فنجد أنها تماثل (تحقق من ذلك ولا تنسى دومـاً أن تعوض عن x^2-2 بصفر) .

مثال (١٤) :

الحدودية $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$ خزولة على Q إذ أن :

$$f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$$

إن كلاً من

$$q(x) = x^2 - 3 \quad \text{و} \quad p(x) = x^2 - 2$$

غير خزولة على Q .

إذن يمكن إيجاد ممدد للحقل Q بطريقتين مختلفتين . فإذا أخذنا $A = (p(x))$ حصلنا على الممدد $Q[x]/A$ المماثل للحقل $Q(\sqrt{2})$ كما في المثال السابق .

أما إذا أخذنا $B = (q(x))$ فإننا نحصل على الحقل الممدد $Q[x]/B$ المماثل للحقل $Q(\sqrt{3})$ (تحقق من ذلك) وكل من $Q(\sqrt{2})$ و $Q(\sqrt{3})$ يحوي صفراً للحدودية $f(x)$.

تمرين (٤) :

هل يمكنك بناء الحقل C من R والحدودية $p(x) = x^2 + 1$ ؟ جرب ذلك .

٢ ـ ٢ ـ ٦ العناصر الجبرية والمتسامية

Algebraic and transcedental elements

تعريف (٧)

يسمى العنصر α في الحقل الممدد E للحقل F **جبرياً** على F . إذا وجدت حدودية غير صفرية $f(x) \in F[x]$ بحيث $f(\alpha) = 0$.

إذا لم يكن α جبرياً على F فإن α يدعى **متسامياً** على F .

مثال (١٥) :

إن C حقل ممدد للحقل Q . إن $\sqrt{3}$ جبري على Q (لماذا ؟) كذلك i جبري على Q (لماذا ؟) .

إن

$$\pi = 3.1415926 \ldots\ldots \quad \text{و} \quad e = 2.71828 \ldots\ldots$$

متساميان على Q .

إن برهان ذلك صعب وليس مجال كتابنا هذا . لقد تم البرهان على أن π متسام على Q عام ١٨٨٢ وقد برهن ذلك الرياضي النمساوي (1939 — 1852) Ferdinand Lindemann بينما برهن الرياضي الأفرنسي charles Hermite (1822–1901) عام ١٨٧٣ على أن e متسام على Q . وموضوع الأعداد المتسامية لايزال مجال بحث ودراسة حتى اليوم فمثلا معلوم اليوم أن e^{π} متسام على Q بينما π^{e} لايزال سؤالاً مفتوحاً هل هو متسام على Q أم لا ؟

وسنذكر المبرهنة التالية بدون برهان وهي من أهم المبرهنات المتعلقة بالأعداد المتسامية وأول من حدس بها أولر في القرن الثامن عشر وكانت احدى المسائل الثلاثة والعشرين الشهيرة التي طرحها Hillert في المؤتمر الدولي للرياضيات عام ١٩٠٠ في باريس وقد برهن عليها كل من Gelfond و Schneider (مستقلين) عام ١٩٣٤ .

مبرهنة (١٢)

إذا كان α ($0 \neq \alpha \neq 1$) جبرياً على Q وكان β جبرياً على Q أيضاً ($\beta \neq 0$) فإن α^{β} متسام على Q .

مثال (١٦) :

$2^{\sqrt{2}}$ متسام على Q. $7^{\sqrt[3]{5}}$ متسام على Q أيضاً .

تمرين (٤)

أثبت أن $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ جبري على Q .

تعريف (٨)

إن كل عنصر من C جبري على Q يدعى **عدداً جبرياً** وكل عنصر من C متسام على Q يدعى **عدداً متسامياً** .

مبرهنة (١٣)

ليكن E حقلاً ممدداً للحقل F ولتكن $\alpha \in F$. وليكن :

$$\varphi_\alpha : F[x] \longrightarrow E \; ; \; f(x) \longrightarrow f(\alpha)$$

التشاكل الأساسي للحلقة $F[x]$ إلى E . إن α متسام على F إذا وفقط إذا كان φ_α متباينا .

البرهـان :

إن α متسام على F إذا وفقط إذا كان $f(\alpha) \neq 0$ وذلك مهما تكن $f(x) \in F[x]$ (حيث $f(x)$ حدودية غير ثابتة) . أي أن α متسام على F إذا وفقط إذا كانت $\ker \varphi = \{0\}$. لكن $\ker \varphi = \{0\}$ إذا وفقط إذا كان φ متباينا .

مبرهنة (١٤)

إذا كان E ممدد الحقل F وكان $\alpha \in E (\alpha \neq 0)$ جبرياً على F . فإنه توجد حدودية غير خزولة $p(x) \in F[x]$ بحيث $p(\alpha) = 0$. إن هذه الحدودية $p(x)$ تتعين بشكل وحيد (إلا بالنسبة للثابت) . وهي الحدودية ذات الدرجة الأصغر (أكبر أو تساوي الواحد) في $F[x]$ التي تقبل α صفراً لها . وإذا كانت $f(\alpha) = 0$ حيث $f(x) \in F[x]$ (مع $f(x) \neq 0$) فإن : $p(x) \mid f(x)$.

البرهان :

ليكن

$$\varphi_\alpha : F[x] \longrightarrow E \; ; \; f(x) \longrightarrow f(\alpha)$$

التشاكل الأساسي للحلقة $F[x]$ في E .

إن $\ker \varphi = A$ مثالي للحلقة $F[x]$ (لماذا ؟) فهو مثالي رئسي (لماذا ؟)

إذاً توجد $p(x) \in F[x]$ بحيث $A = (p(x))$.

واضح أن A يتألف من كل الحدوديات $f(x) \in F[x]$ التي تقبل α صفراً لها (لماذا ؟) . إذاً إذا كانت $f(\alpha) = 0$ حيث $f(x) \neq 0$ فإن $f(x) \in A$ وهكذا $p(x) \in f(x)$

إذاً $p(x)$ الحدودية ذات الدرجة الأصغر في $F[x]$ التي تقبل α صفراً لها ودرجتها أكبر أو تساوي الواحد . إن كل حدودية أخرى من نفس الدرجة وتقبل α صفراً لها هي من الشكل $a \cdot p(x)$ $(a \in F)$.

والآن لنثبت أن $p(x)$ غير خزولة . لنفرض جدلاً أن $p(x)$ خزولة . أي لنفرض وجود $r(x), s(x) \in F[x]$ بحيث :

$$p(x) = r(x)\, s(x)$$

إن $p(\alpha) = 0$ يقضي بأن :

$$r(\alpha) = 0 \qquad \text{أو} \qquad s(\alpha) = 0$$

وهذا تناقض لأن $r(x)$ و $s(x)$ أقل درجة من $p(x)$ و $p(x)$ هي الحدودية ذات الدرجة الأصغر التي تقبل α جذراً لها . إذاً $p(x)$ غير خزولة .

تعريف (٩)

ليكن E حقل ممدد للحقل F . وليكن $\alpha \in E$ جبري على F . إن الحدودية الوحيدة :

$$p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

المذكورة في المبرهنة السابقة تدعى **الحدودية غير الخزولة لـ α على F** ونرمز لها بالرمز

$$\operatorname{irr}(\alpha, F)$$

إن درجة $irr(\alpha, F)$ تدعى **درجة α على F** ونرمز لها بالرمز $\deg(\alpha,E)$.

مثال (١٧) :

إن
$$irr(\sqrt{2}, Q) = x^2 - 2$$

و $\deg(\alpha, Q) = 2$ كذلك إذا كانت $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{3}} \in R$ فإن α صفر للحدودية $x^4 - 2x^2 - 2 \in Q[x]$ (لماذا ؟)

إن $x^4 - 2x^2 - 2$ غير خزولة على Q (لأنه يوجد $p=2$ يقسم أمثال x^2 والحد الثابت ولا تقسم أمثال x^4 كما أن p^2 لاتقسم الحد الثابت -2) .

إذاً :

$$irr(\sqrt{1+\sqrt{3}}, Q) = x^4 - 2x^2 - 2$$

وبالتالي

$$\deg(\sqrt{1+\sqrt{3}}, Q) = 4$$

كذلك

$$irr(\sqrt{2}, R) = x - \sqrt{2}$$
$$\deg(\sqrt{2}, R) = 1$$

٢ ــ ٢ ــ ٧ التمديد البسيط Simple extension

ليكن E حقل ممدد للحقل F . وليكن $\alpha \in E$. وليكن φ_α التشاكل الأساسي للحلقة $F[x]$ في E . أي

$$\varphi_\alpha : F[x] \longrightarrow E \ ; \ f(x) \longrightarrow f(\alpha)$$

لنميز الحالتين التاليتين :

١) نفرض أن α جبري على F . فيكون :

$$A = \ker \varphi_\alpha = (irr (\alpha , F))$$

مثالياً أعظمياً للحلقة $F[x]$ (لماذا ؟) وبالتالي :

$F[x]/A$ حقل مماثل لـ $\varphi_\alpha(F[x]) \subseteq E$. إذاً فالحقل الجزئي $\varphi_\alpha(F[x])$ من E هو أصغر حقل من E يحوي F و α وسوف نرمز له بالرمز $F(\alpha)$

٢) لنفرض أن α متسام على F . فيكون φ_α متبايناً من $F[x]$ على E لماذا ؟) وبالتالي $\varphi_x(F[x])$ ليس حقلا (لماذا ؟) ولكنه منطقة تكاملية سوف نرمز لها بالرمز $F[\alpha]$ ويمكن أن نبني حقلا منها وهو حقل خارج القسمة :

$$K = \{ \frac{f[\alpha]}{g(\alpha)} : f(\alpha) , g(\alpha) \in F[\alpha] ; g(\alpha) \neq 0 \}$$

إن E يحوي K و K أصغر حقل جزئي من E يحوي كلا من F و α .
وسنرمز لهذا الحقل K بالرمز $F(\alpha)$ أيضاً .

مثال (١٨) :

بما أن π متسام على Q وبالتالي الحقل $Q(\pi)$ يماثل الحقل :

$$Q(x) = \{ \frac{f(x)}{g(x)} : f(x) , g(x) \in Q[x] ; g(x) \neq 0 \}$$

تعريف (١٠)

الحقل الممدد E للحقل F **ممدد بسيط** Simple extension **للحقل** F إذا كان:

$$E = F(\alpha) \quad \text{حيث} \quad \alpha \in E$$

مبرهنة (١٥)

إذا كان E ممدداً بسيطاً $F(\alpha)$ للحقل F . وكان α جبرياً على F . وكانت $\deg(\alpha, F) \geq 1$ فإن كل عنصر $\beta \in E = F(\alpha)$ يمكن كتابته بشكل وحيد :

$$\beta = b_0 + b_1 \alpha + \cdots + b_{n-1} \alpha^{n-1} \qquad b_i \in F$$

البرهـــان :

ليكن $\varphi_\alpha : F[x] \rightarrow E \; ; \; f(x) \rightarrow f(\alpha)$

التشاكل الأساسي للحلقة $F[x]$ في الحقل E . لنفرض أن :

$$irr(\alpha,F) = p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

إن $p(\alpha) = o$ يقضي بأن :

$$\alpha^n = -a_{n-1}\alpha^{n-1} - \cdots - a_1 \alpha - a_0$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} \alpha^{n+1} &= \alpha\alpha^n = -a_{n-1}\alpha^n - \cdots - a_1\alpha^2 - a_0\alpha \; . \\ &= -a_{n-1}(-a_{n-1}\alpha^{n-1} - \cdots - a_0) - a_{n-2}\alpha^{n-2} - \cdots - a_0\alpha \\ &= c_{n-1}\alpha^{n-1} + c_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + c_0 \end{aligned}$$

وبالتدرج نجد أي عنصر $\beta \in F(\alpha)$ يمكن التعبير عنه بشكل وحيد :

$$\beta = b_0 + b_1 \alpha + \cdots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$$

ذلك لأنه لو كتب بشكلين مختلفين :

$$\beta = b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_{n-1}\alpha^{n-1} = b'_0 + b'_1\alpha + \cdots + b'_{n-1}\alpha^{n-1}$$

حيث $b_i, b'_i \in F$ فإن :

$$(b_0 - b'_0) + (b_1 - b'_1)\alpha + \cdots + (b_{n-1} - b'_{n-1})\alpha^{n-1} = o$$

أي أنه يوجد $g(x) \in F[x]$ حيث :

$$g(x) = (b_0 - b'_0) + (b_1 - b'_1)x + \cdots + (b_{n-1} - b'_{n-1})x^{n-1}$$

تقبل α صفراً لها مع أن درجتها أقل من درجة $p(x)$ وهذا يقضي بأن $g(x) = 0$ أي أن :

$b_i - b'_i = 0$ أي $b_i = b'_i$.

مثال (١٩) :

إن $Z_2[x] \ni p(x) = x^2 + x + 1$ غير خزولة على Z_2 (لماذا ؟) .

يوجد حقل E ممدد للحقل Z_2 يحوي α صفر للحدودية $p(x)$.

إن

$$E = Z(\alpha) = \{ a + b\alpha : a,b \in Z_2 \}$$

أي

$$Z(\alpha) = \{ 0 , 1 , \alpha , 1 + \alpha \}$$

تمرين (٥) :

اكتب جدولين للعمليتين + و . على E .

ارشاد تذكر أن :

$\alpha^2 = -1\alpha - 1 = \alpha + 1$ و $(1+\alpha)^2 = 1 + (1+1)\alpha + \alpha^2 = \alpha$

* * *

تمارين (٢ — ٢)

١) ليكن $\varphi_3 : Z_5[x] \to Z_5 \; ; f(x) \to f(3)$ تشاكلا أساسياً . احسب باستخدام مبرهنة فرما

$$\varphi_3(x^{231} + 3x^{117} - 2x^{53} + 1)$$

أوجد جميع أصفار الحدودية $2x^{219} + 3x^{74} + 2x^{57} + 3x^{44}$ في Z_5 .

٢) أثبت أن الحدوديات التالية في $Q[x]$ غير خزولة :

آ) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x + 3$

ب) $g(x) = x^5 - 5x^3 + 15$

جـ) $h(x) = 3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$

د) $k(x) = 12x^7 - 15x^4 + 10x - 35$

هـ) $f(x) = 2x^5 + \frac{3}{5}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 9x + \frac{15}{7}$

و) $f(x) = \frac{5}{11}x^{13} + \frac{36}{7}x^9 - 21x + \frac{3}{5}$

٣) إذا كانت

$$F[x] \ni f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

(حيث F حقل) مع $a_0 \neq 0 \neq a_n$ تملك صفراً a في F فإن

$$g(x) = a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n$$

تملك صفراً أيضاً في F .

٤) إذا كان F حقلا و $f(x), g(x) \in F[x]$ فأثبت أن $f(x)$ تقسم $g(x)$ إذا وفقط إذا كانت $g(x) \in ((f(x)))$.

٥) إذا كان F حقلا و $f(x), g(x) \in F[x]$ فأثبت أن :

$$A = \{ h(x) f(x) + q(x) g(x) : h(x), q(x) \in F[x] \}$$

مثالي الحلقة $F[x]$ وبين أنه إذا كانت $g(x)$ و $f(x)$ من درجتين مختلفتين و $A \neq F[x]$ فإنه لا يمكن أن تكونا معاً غير خزوليتين على F .

٦) إذا كانت $g(x)$ و $f(x)$ حدوديتين على حقل F (ليستا صفريتين معاً) فإنه توجد حدودية واحدة $h(x)$ [أمثال حدها الأكبر درجة هو الواحد] على F بحيث :

آ) $h(x)$ تقسم كلا من $f(x)$ و $g(x)$.

ب) إذا كانت $k(x) \in F[x]$ وكانت تقسم كلا من $f(x)$ و $g(x)$ فإن $k(x)$ تقسم $h(x)$. أثبت صحة ذلك .

إن $h(x)$ تسمى **القاسم المشترك الأعظم** لهما (common divisor (greatest

٧) إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ حدوديتين على حقل F (ليستا صفرتين معاً) وكان $h(x)$ القاسم المشترك الأعظم لهما فإنه يوجد $u(x) v(x) \in F[x]$ بحيث تكون :

$$h(x) = f(x) . u(x) + g(x) . v(x)$$

٨) إذا كانت $p(x)$ حدودية على حقل F و $A = (p(x))$ وأثبت أن :

$F[x]/A$ حقل إذا وفقط إذا كانت $p(x)$ غير خزولة على F .

ب) إذا كانت $p(x) = 1 + x^2$ وكانت $F = R$ حقل الأعداد الحقيقية فأثبت أن كل عنصر من الحقل $R[x]/A$ يمكن التعبير عنه بشكل وحيد :

$$(a + bx) + A \quad \text{حيث} \quad a, b \in F$$

حـ) إذا كانت :

$$\varphi : R[x] / A \to C \; ; \; (a + bx) + A \to a + bi$$

فأثبت أن φ تماثل .

٩) إذا كان F حقلا فأثبت أن :

$$K = \{ \frac{f(x)}{g(x)} : f(x), g(x) \in F[x] \; ; \; g(x) \neq 0 \}$$

حقل بالنسبة لعملية جمع الكسور العادية . إن K يسمى حقل **خارج القسمة الملحقة** ($F[x]$) .

١٠) أي الاعداد التالية جبري على Q وأيها متسامي ؟

$$\sqrt{1 + \sqrt[3]{2}} \quad , \quad 1 + i \quad , \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad , \quad 1 + \sqrt{2}$$

$$\pi^2 \quad , \quad \sqrt{\pi} \quad , \quad \sqrt{2} + i \quad , \quad \sqrt{\tfrac{1}{3} + \sqrt{7}} \quad , \quad \sqrt{\sqrt[3]{2} - i}$$

عين في كل مرة $irr(\alpha, F)$ و $deg(\alpha, F)$ في حالة α جبري على Q .

١١) هل $Z_3[x] \ni p(x) = x^2 - x + 2$ خزولة أم لا ؟ بفرض α صفر لهـــا في ممدد للحقل Z_3 أوجد الحقل $Z_3(\alpha)$

١٢) بيــن أن $p(x) = x^3 + x^2 + 1$ غير خزولة على Z_2 . بفرض α صفر للحدودية $p(x)$ في ممدد للحقل Z_2 . أوجد $Z_2(\alpha)$.

١٣) أوجد شرط قابلية القسمة للعدد $b \in Z$ على كل من الأعداد :

$$11 , 10 , \ldots\ldots , 4 , 3 , 2$$

[ارشاد اكتب b على شكل حدودية $b = a_0 + a_1 (10) + \ldots\ldots + a_n (10)^n$
ثم احسب $b \pmod{n}$] .

* * *

الفصل الثالث

الحقــول المنتهيــة

٢ ـ ٣ ـ التمديد الجبري Algebraic extension

مبرهنة (١)

ليكن E حقلاً ممدداً للحقل F وليكن $\alpha \in E$ جبرياً على F . إذا كانت :
$\deg(\alpha, F) = n$ فإن $F(\alpha)$ فضاء متجهي على F ذو بعد n ، قاعدته :
$\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$. بالاضافة إلى أن كل عنصر $\beta \in E$ هو جبري على F و $\deg(\beta, F) \leqslant \deg(\alpha, F)$.

البرهــان :

١) إن $F(\alpha)$ فضاء متجهي على F (تحقق من ذلك) .
وإن كل عنصر $\beta \in E$ يمكن كتابته بصورة وحيدة :

$$\beta = b_0 + b_1 \alpha + \dots + b_{n-1} \alpha^{n-1} \quad , \quad b_i \in F$$

إذا جعلنا $\beta = o$ وجب أن تكون $b_i = o$ لأن :

$$o = o + o\alpha + \dots + o\alpha^{n-1}$$

إذاً فالمجموعة $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$ مستقلة خطياً وتولد الفضاء المتجهي

$F(\alpha)$ فهي قاعدة للفضاء المتجهي E على F وبالتالي E فضاء متجهي على F ذو بعد n

٢) لتكن β عنصراً ما من E إن :

$$1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^n$$

مجموعة غير مستقلة خطياً في E (لأن عددها $n < n+1$) وبالتالي توجد $a_i \in F$ بحيث :

$$a_0 + a_1 \beta + \dots + a_n \beta^n = 0$$

مع a_i ليست جميعها أصفار . فالحدودية :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

غير صفرية في $F[x]$ و $f(\beta) = 0$. إذاً β جبري على F وإن $\deg(\beta, F)$ تساوي على الأكثر n (لماذا ؟) .

تعريف (١) :

إن حقلا ممدداً E للحقل F يدعى **ممدداً جبرياً لـ** F إذا كان كل عنصر من E جبرياً على F .

تعريف (٢) :

إذا كان E حقلا ممدداً للحقل F وكان E فضاء متجهياً ذا بعد n على F فإن E يسمى **ممدداً منتهياً من الدرجة n على** F وسوف نرمز بـ $[E:F]$ إلى درجة الفضاء المتجهي E على الحقل F .

ملاحظة (١) :

يجب الانتباه جيداً إلى أن كون E ممدداً منتهياً لحقل F لايعني البتة أن E حقل منته ، مثال ذلك $Q(\sqrt{2})$ مثلا .

نتيجة (١) :

كل حقل ممدد منته E من الدرجة n على حقل F هو حقل ممدد جبري للحقل F

البرهـــان :

إذا كانت $\beta \in E$ جبرية على F فإن : $1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^n$ مجموعة غير مستقلة خطياً في E (لأن E فضاء متجهي على F ذو بعد n) . وبالتالي يوجد $a_i \in F$ بحيث :

$$a_0 + a_1 \beta + \dots + a_n \beta^n = 0$$

مع a_i لاتساوي الصفر جميعها . إذاً توجد حدودية $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ من $F[x]$ بحيث $f(\beta) = 0$ وبالتالي β جبرية على F و E تمديد جبري لـ F $\square$

مبرهنة (٢)

إذا كان E ممدداً منتهياً لحقل F و K ممدداً منتهياً للحقل E فــإن K ممـــددمنته للحقل F وإن :

$$[K : F] = [K : E][E : F]$$

البرهـــان :

نفرض أن $\{\alpha_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ قاعدة للفضاء المتجهي E على F ولنفرض أن $\{\beta_j : J = 1, 2, \dots, m\}$ قاعدة للفضاء المتجهي K على E . ولنفرض أن γ عنصر ما من K . إن :

$$\gamma = b_1\beta_1 + \dots + b_m \beta_m \qquad b_j \in E$$

لكن

$$b_j = a_{1j}\, \alpha_1 + \dots + a_{nj}\, \alpha_n \quad \text{مع} \quad \alpha_{ij} \in F$$

إذاً

$$\gamma = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \alpha_i \right) \beta_j = \sum_{i,j} a_{ij} (\alpha_i \beta_j)$$

وبالتالي فإن المجموعة $\alpha_i \beta_j$ (وعددها mn) تولد الفضاء المتجهي K على F .

لنفرض أن $\sum_{i,j} c_{i,j} (\alpha_i \beta_j) = 0$) حيث $c_{ij} \in F$ اي أن :

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, \alpha_i \right) \beta_j = 0$$

حيث $(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, \alpha_i) \in E$. لكن β_j مستقلة خطياً على E إذاً :

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, \alpha_i = 0$$

لكن α_i مستقلة خطيا أيضاً على F وبالتالي $c_{ij} = 0$ مهما تكن i و j .

فالمجموعة $\alpha_i \beta_j$ قاعدة للفضاء المتجهي K على F وبالتالي :

$$[K : F] = [K : E] [E : F]$$

نتيجة (٢)

إذا كان F_{i+1} ممدداً منتهيا للحقل F_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ فـإن F_n ممـدد منته للحقـل F_1 وإن :

$$\left[F_n : F_1 \right] = \left[F_n : F_{n-1} \right] \left[F_{n-1} : F_{n-2} \right] \cdots \left[F_2 : F_1 \right]$$

نتيجة (٣)

إذا كان E حقلاً ممدداً للحقل F وكانت $\alpha \in E$ جبرية على F وكانت $\beta \in F(\alpha)$ فـإن $\deg(\beta, F)$ تقسم $\deg(\alpha, F)$.

البرهـــان :

إن $\deg(\alpha, F) = \deg[F(\alpha) : F]$ (مبرهنة ١) وإن :

$$\deg(\beta, F) = \deg[F(\beta) : F]$$

إن F فضاء جزئي من $F(\beta)$ الذي هو بـدوره فضاء جزئي من $F(\alpha)$ وبالتالي حسب المبرهنة السابقة نجد أن :

$$[F(\beta) : F] \text{ يقسم } [F(\alpha) : F]$$

مثال (١)

اعتماداً على النتيجة (٣) نجـد أن $Q(\sqrt[3]{2})$ لا تملك صفراً للحـــدودية $x^3 - 2 \in Q[x]$ لأن $\deg(\sqrt[3]{2}, Q) = 2$ (لماذا ؟) بينما صفر الحدودية $x^3 - 2$ من الدرجة الثالثة والعدد 3 لايقسم العدد 2 .

ليكن E حقلا ممدداً للحقل F ولتكن $\alpha_1, \alpha_2 \in E$ (ليستا بالضرورة جبريتين على F) . نعلم أن $F(\alpha_1)$ هو أصغر حقل ممـدد لـ F يحوي α_1 وهو محتوى في E . كذلك فإن $(F(\alpha_1))(\alpha_2)$ هو أصغر حقل ممـــدد للحقل $F(\alpha_1)$ ويحوي α_2 و α_1 وهو أيضاً محتوى في E ، وهو نفسه $(F(\alpha_2))(\alpha_1)$ لذا فـنرمز لهـذا الحقل بالرمز $F(\alpha_1, \alpha_2)$. وبصورة مشابهة فـإن الحقل $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ حيث $\alpha_i \in E$. هو أصغر حقل ممدد للحقل F يحوي α_i $(i = 1, 2, \dots, n)$.

يمكن الحصول على $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ من F باضافة العناصر α_i للحقل F .

نعلم أن تقاطع حقلين جزئين من الحقل E هو حقل جزئي من E (تحقق من ذلك) . إن من الواضح أن $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ هو تقاطع كل الحقول الجزئية من E التي تحوي F وجميع α_i $(i = 1, 2, \dots, n)$.

مثال (٢)

إن $\{1,\sqrt{2}\}$ قاعدة للحقل $Q(\sqrt{2})$ على Q . كما أن $\{1,\sqrt{3}\}$ قاعدة للحقل $Q(\sqrt{2},\sqrt{3}) = (Q(\sqrt{2}))(\sqrt{3})$ على $Q(\sqrt{2})$. وبالتالي فإن :
$\{1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}\}$ قاعدة للحقل $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ على Q .

مثال (٣)

لاحظنا في مثال (١) أن $\sqrt[3]{2} \notin Q(\sqrt{2})$. إذاً :

$$\left[Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2}) : Q(\sqrt{2}) \right] = 3 \quad \text{(لماذا ؟)}$$

إن $\{1,\sqrt{2}\}$ قاعدة للحقل $Q(\sqrt{2})$ على Q . بينما $\{1,\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2^2}\}$ قاعدة للحقل $Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})$ على الحقل $Q(\sqrt{2})$ وبالتالي :
$\{1,\sqrt{2},\sqrt[3]{2},\sqrt[6]{2^5},\sqrt[3]{2^2},\sqrt[6]{2^7}\}$ قاعدة للحقل $Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})$ على Q .

واضح أن $\sqrt[6]{2^7} = 2\sqrt[6]{2}$ وأن $\sqrt[6]{2} \in Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})$.

ثم ان $\sqrt[6]{2}$ صفر للحدودية $x^6 - 2 \in Q[x]$ غير الخزولة على Q (لماذا ؟) وبالتالي : Q حقل جزئي من $Q(\sqrt[6]{2})$ الذي هو بدوره حقل جزئي من $Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})$.

إذاً

$$6 = \left[Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2}):Q\right] = \left[Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2}):Q(\sqrt[6]{2})\right]\left[Q(\sqrt[6]{2}):Q\right]$$
$$= \left[Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2}):Q(\sqrt{2})\right](6)$$

وبالتالي فإن

$$\left[Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2}):Q(\sqrt[6]{2})\right] = 1$$

إذاً

$$Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = Q(\sqrt[6]{2})$$

إن المثال السابق يوضح لنا بأنه من الممكن أن يكون $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ممدداً بسيطاً للحقل F مع أن $n > 1$.

مبرهنة (٣)

إذا كان E ممدداً جبريا للحقل F فإنه يوجد عدد محدود من العناصر $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ من E بحيث $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ إذا وفقط إذا كان E فضاء منجهياً على F . اي إذا وفقط إذا كان E ممدداً منتهياً للحقل F .

البرهـــان :

١) فرض $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. بما أن E ممدد جبري للحقل F ، فـإن α_1 جبري على F . وبالتالي كل α_i جبري على أي ممـــدد للحقل F في E .
وهكذا فإن $F(\alpha_1)$ ممدد جبري للحقل F . وبصورة عامة $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j)$ ممدد جبري للحقل $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1})$ $(j = 2, \ldots, n)$ فحسب النتيجة (٢) نجد من المتتالية :

$$F, F(\alpha_1), F(\alpha_1, \alpha_2), \ldots, F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = E$$

أن E ممدد منته للحقل F

٢) نفرض أن E ممدد جبري منته للحقل F .
إذا كان $[E : F] = 1$ فإن $E = F(1) = F$.
إذا كان $E \neq F$ فليكن $\alpha_1 \in E$ $(\alpha_1 \notin F)$ فإن $[F(\alpha_1) : F] > 1$.
إذا كان $F(\alpha_1) = E$ انتهى البرهان وإلا نأخذ $\alpha_2 \in E$ $(\alpha_2 \notin F(\alpha_1))$
ونتابع الطريقة .. بما أن $[E : F]$ عدد محدود فيجب أن نصل إلى عنصر α_n حيث :

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = E$$

٢ ـ ٣ ـ ٢ الحقول المغلقة جبرياً Algebraically closed fields

تعريف (٣)

نقول عن حقل F أنه **مغلق جبرياً** إذا كانت كل حدودية (غير ثابتة) من $F[x]$ تملك صفراً في F .

تمرين (١) :

أثبت أن الشرط اللازم والكافي ليكون الحقل F مغلقاً جبرياً هو أن تكون كل حدودية $f(x)$ من $F[x]$ قابلة للتحليل إلى مضارب كلها من الدرجة الأولى .

توطئة (١)

ليس لحقل مغلق جبرياً F أي تمديد جبري حقيقي .

(أي ليس للحقل F المغلق جبرياً ممدد جبري E بحيث $F \subset E$) .

البرهــان :

نفرض أن E ممدد جبري للحقل F المغلق جبرياً . إن $\alpha \in E$ يقضي بأن : $irr(\alpha, F) = x - \alpha$ (لأن F مغلق جـــبرياً) . إذاً $\alpha \in F$ وبالتـالي $E \subseteq F$ لكن $F \subseteq E$. إذاً $E = F$.

تعريف (٤)

نقول عن حقل $\overline{F}$ أنه **لصاقه جبرية** (algebraic closure) **للحقل** F إذا حقق الشرطين التاليين :

آ) $\overline{F}$ مغلق جبرياً .

ب) $\overline{F}$ ممدد جبري للحقل F .

سوف نقبل المبرهنة التالية بدون برهان :

مبرهنة (٤)

كل حقل F يملك لصاقة جبرية $\bar{F}$.

مبرهنة (٥)

حقل الأعداد العقدية C حقل مغلق جبرياً .

البرهـــان :

نفرض أن $f(z) \in C[z]$ حدودية لاتملك صفراً في C . وبالتالي فـــإن $\frac{1}{f(z)}$ تابع تحليلي على C . إذا لم تكن f(z) حدودية ثابتة [اي إذا لم تكن $f(z) \in C$] فإن :

$$\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = \infty \quad \text{وبالتالي فإن} \quad \lim_{|z| \to \infty} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = 0$$

إذا $\frac{1}{f(z)}$ محدود في المستوى C . وبالرجوع إلى مبرهنة ليوفيل في الدوال العقدية نجد أن $\frac{1}{f(z)}$ ثابت ومنه ينتج أن f(z) حدودية ثابتة .

أي أن كل حدودية غـــير ثابتة في C(z) تملك صفراً في C وبالتالي C مغلق جبرياً .

نتيجة (٣)

C لصاقة جبرية للحقل R .

تمرين (٢)

أثبت أن C ليس لصاقة جبرية للحقل Q .

[**ارشاد :** أثبت عدم تحقق الشرط الثاني في تعريف اللصاقة الجبرية] .

٢ ـ ٣ ـ ٣ الانشاءات الهندسية

كلنا يذكر الانشاءات الهندسية في المرحلة الاعدادية والثانوية ، ولكن أي الأشكال المستوية يمكن انشاؤها باستخدام فرجار ومسطرة غير مدرجة فقط ؟

لنفرض أن هناك قطعة مستقيمة نعتبر طولها واحدة الأطوال . نقول عن عدد حقيقي α أنه قابل للانشاء (Constructible) إذا كان بالإمكان انشاء قطعة مستقيمة طولها $|\alpha|$ بعدد محدود من خطوات الإنشاء معتمدين على واحدة الطول المفروضة وفرجار وحافة مسطرة .

إن مسألة إنشاء شكل هندسي يمكن إرجاعها إلى مسألة إنشاء عدد محدود من النقاط (مثلاً إنشاء مربع يتطلب انشاء أربع نقاط التي هي رؤوسه) ثم انشاء عدد من القطع المستقيمة وانشاء عدد من الأقواس الدائرية . إن انشاء قطعة مستقيمة يراد إلى انشاء نهايتيها . كذلك انشاء قوس دائرية يرد إلى انشاء مركز الدائرة ونهايتي القوس وانشاء طول يساوي نصف قطر الدائرة.

قبل أن نستمر في موضوع الأعدد الحقيقية القابلة للانشاء دعنا نذكر بعض الانشاءات الهندسية المعروفة من المرحلة الأعدادية والثانوية .

١) تنصيف زاوية .

٢) انشاء مستقيم L' من نقطة P يوازي مستقيماً مفروضاً L .

٣) انشاء قطعة مستقيمة طولها $l\,l'$ بعد معرفة القطعتين المستقيمتين اللتين طولاهما l و l' .

٤) انشاء قطعة مستقيمة طولها $\frac{l}{l'}$ بعد معرفـــة القطعتين المستقيمتين التين طولهما l و l' ($l' \neq 0$) .

٥) انشاء قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{l}$ بعد معرفة القطعة المستقيمة التي طولها l .

٦) انشاء زاوية تساوي مجموع زاويتين .

مبرهنة (٤)

إن مجموعة كل الأعداد الحقيقية القابلة للانشاء تشكل حقلاً F جزئياً من حقل الأعداد الحقيقية .

البرهـــان :

إذا كان α ، β عددين حقيقيين قابلين للانشاء فإن بالامكان إنشاء :

$$\beta + \alpha \quad و \quad \alpha - \beta \quad و \quad \alpha\beta \quad و \quad \frac{\alpha}{\beta}\ (\beta \neq 0)$$

اعتماداً على ماسبق وذكرناه من عمليات الانشاء (تحقق من ذلك) :

إذاً F حقل جزئي من R .

نتيجة (٤)

كل عدد من Q قابل للانشاء .

البرهـــان :

Q أصغر حقل جزئي في R وبالتالي فهو محتوى في F .

لننتقل الآن إلى المستوى الديكارتي oxy إن جميـــع النقاط $(q_1 , q_2) \in Q^2$ يمكن تعيينها بالفرجار والمسطرة كذلك فإن جميع النقاط التالية يمكن تعيينها بالفرجار وحافة المسطرة .

١) نقطة تقاطع مستقيمين يمر كل منهما من نقطتين احداثياتها من Q .

٢) نقطة تقاطع مستقيم ودائرة . حيث يمر المستقيم من نقطتين احداثياتها من Q واحـــداثيات مركز الدائرة من Q أيضاً ، ومربـع نصف قطرها من Q أيضاً .

٣) نقطة تقاطع دائرتين . احـداثيات مركز كل منهما من Q ومربـع نصف

قطر كل منها من Q .

تمرين (٢)

عين نقطة تقاطع لدائرة التي مركزها $(\frac{2}{5}, \frac{3}{2})$ ومربع نصف قطرها $\frac{5}{7}$ والمستقيم المار بالنقطتين $(\frac{3}{4}, \frac{2}{5})$ و $(\frac{7}{5}, \frac{5}{3})$ مستخدماً الفرجار والمسطرة فقط .

لو فسرنا الكلام السابق تحليلياً بالانتقال إلى معادلتي كل من المستقيم والدائرة :

$$ax + by + c = o$$

$$x^2 + y^2 + kx + ey + f = o$$

فإن كلا من المستقيم والدائرة يمكن انشاؤه هندسياً (بالفرجار والمسطرة) إذا كانت $a, b, c, k, e, f \in Q$ (لماذ ؟) .

وإن تقاطع دائرتين :

$$x^2 + y^2 + k_1x + e_1y + f_1 = o$$

$$x^2 + y^2 + k_2x + e_2y + f_2 = o$$

يقودنا إلى الوتر المشترك لهما

$$(k_1 - k_2) + (e_1 - e_2)y + (f_1 - f_2) = o$$

وهذا بدوره يقودنا إلى أن الحالة (٣) المذكورة سابقاً يمكن ردها إلى الحالة (٢) .

إن حديثنا السابق قادنا إلى مجموعة نقاط يمكن انشاؤها في المستوي R^2 لكنها ليست جميع النقاط التي يمكن انشاؤها . ونقدم المبرهنة التالية بدون برهان ونترك البرهان عليها كتمرين للطالب .

مبرهنة (٥)

إذا كانت $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ اعداداً حقيقية بحيث :

$$\alpha_1^2 \in Q$$
$$\alpha_i^2 \in Q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}) \qquad (2 \leqslant i \leqslant n)$$

فإن كل عنصر من $Q(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ عدد قابل للانشاء .

وعلى العكس إذا كان $\beta \in R$ عدداً قابلا للانشاء فإنه يوجد مجموعة من الأعداد الحقيقية $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ بحيث :

$$\alpha_1^2 \in Q$$
$$\alpha_i^2 \in Q(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}) \qquad (2 \leqslant i \leqslant n)$$

وبحيث $\beta \in Q(\alpha_1 \dots, \alpha_n)$. وبالتالي إذا كان β قابلا للانشاء فإنه يوجد $k \in N$ بحيث .

$$\deg(\beta, Q) = 2^k$$

والآن بعد ذكر هذه المبرهنة لنعد إلى المسائل الشهيرة الثلاث :

مبرهنة (٦)

إذا علمنا ضلع مكعب ، فليس بالامكان دوماً إنشاء ضلع مكعب آخر حجمه يساوي ضعف حجم المكعب الأصلي (بالفرجار والمسطرة) .

البرهـــان :

نفرض طول ضلع المكعب الأصلي واحدة الأطوال فحجمه واحدة الحجوم ، بينما حجم المكعب الجديد يساوي واحدتي حجم وبالتالي طول ضلعه $\sqrt[3]{2}$. ولكن :

$$\operatorname{irr}(\sqrt[3]{2}, Q) = x^3 - 2$$

وبالتالي :

$$\deg(\sqrt[3]{2}, Q) = 3$$

لكنه لايوجد $k \in N$ بحيث $2^k = 3$ ولتالي فإن $\sqrt[3]{2}$ غير قابل للانشاء .

مبرهنة (٧)

ليس بالامكان دوماً تثليث اي زاوية (بالفرجار والمسطرة) .

البرهــان :

لدينا من المثلثات أن $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

لنفرض الزاوية 3θ مرسومة في دائرة مثلثية . إن امكانية تثليث هذه لزاوية يكافىء انشاء الطول $|\cos\theta|$.

لنفرض أن $3\theta = 60^\circ$ وبالتالي $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$ ولنفرض أن $\cos 20^\circ = \alpha$

فنجد أن :

$$4\alpha^3 - 3\alpha = \frac{1}{2}$$

أي

$$8\alpha^3 - 6\alpha - 1 = 0$$

وبالتالي α صفر للحدودية $f(x) = 8x^3 - 6x - 1 \in Q[x]$. لكن $f(x)$ غير خزولة على Q (لماذا ؟) إذن :

$$\operatorname{irr}(\alpha, Q) = x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$$

وبالتالي $\deg(\alpha, Q) = 3$

إذاً من المستحيل تثليث الزاوية 60° بالفرجار والمسطرة لأنه لايوجـد $k \in N$ بحيث $2^k = 3$.

وهكذا فليس بالامكان دوماً تثليث أي زاوية بالفرجار والمسطرة .

تمرين (٣) :

أثبت (جبرياً) أن بالامكان تثليث الزاوية 45° بالفرجار والمسطرة .

مبرهنة (٨)

ليس بالامكان دوماً إنشاء مربع مساحته تساوي مساحة دائرة معطاة (بالفرجار والمسطرة) .

البرهـان :

نفرض أن نصف قطر الدائرة واحدة الأطوال وبالتالي مساحتها π وحدة مربعة .

إذاً المطلوب إنشاء الطول $\sqrt{\pi}$ لكن π متسام على Q . وبالتالي $\sqrt{\pi}$ متسام أيضاً على Q .

٢ ـ ٣ ـ ٤ التماثلات الداخلية في الحقول : Automorphisms of fields

تعريف (٥)

ليكن E ممدداً جبرياً للحقل F نقول عن عنصرين $\alpha , \beta \in E$ أنهما **مترافقان على** F .

إذا كانت $irr(\alpha, F) = irr(\beta, F)$.

أي إذا كان كل من α و β صفراً لحدودية واحدة غير خزولة على F .

مثال (٤)

إن $a + ib$ و $a - ib$ من حقل الأعداد العقدية C مترافقان على R لأن :

$$irr(a + ib, R) = (x - a)^2 + b^2 = irr(a - ib, R)$$

كما أن $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ مترافقين على Q لأن :

$$irr(\sqrt{2}, Q) = x^2 - 2 = irr(-\sqrt{2}, Q)$$

مبرهنة (٩)

إذا كان α و β عنصرين جبريين على حقل F وكانت $\deg(\alpha, F) = n$. فإن :

$$\varphi : F(\alpha) \to F(\beta) ; (b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1}) \to (b_0 + b_1\beta + \ldots + b_{n-1}\beta^{n-1})$$

تماثل إذا وفقط إذا كان α و β مترافقين على F .

البرهـــان :

لزوم الشرط : نفرض أن φ تماثل .

نفرض أن :

$$\operatorname{irr}(\alpha, F) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

فينتج أن

$$\alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

وبالتالي $\beta^n + a_{n-1} \beta^{n-1} + \dots a_1 \beta + a_0 = 0$ (لماذا ؟)

وهذا يقضي بأن $\operatorname{irr}(\beta ; F)$ تقسم $\operatorname{irr}(\alpha, F)$ (لماذا ؟)

ثم إن التماثل $\varphi^{-1} : F(\beta) \longrightarrow F(\alpha)$ يقودنا بمناقشة مشابهة إلى أن :

$$\operatorname{irr}(\alpha, F) \text{ تقسم } \operatorname{irr}(\beta, F)$$

وبما أن أمثال x^n في $\operatorname{irr}(\alpha, F)$ و $\operatorname{irr}(\beta, F)$ هو الواحد . إذاً :

$$\operatorname{irr}(\alpha, F) = \operatorname{irr}(\beta, F)$$

وبالتالي α, β مترافقان .

كفاية الشرط : نفرض أن

$$\operatorname{irr}(\alpha, F) = \operatorname{irr}(\beta, F) = p(x)$$

إن التشاكلين الأساسيين :

$$\psi_\alpha : F[x] \longrightarrow F(\alpha) \; ; \; f(x) \longrightarrow f(\alpha)$$

$$\psi_\beta : F[x] \longrightarrow F(\beta) \; ; \; f(x) \longrightarrow f(\beta)$$

لهما نفس النواة

$$\ker \psi_\alpha = \ker \psi_\beta = (p(x))$$

وبالتالي يوجد تماثلان طبيعيان :

$$\theta_\alpha : F[x]/(p(x)) \longrightarrow F(\alpha) \; ; \; f(x) + (p(x)) \longrightarrow f(\alpha)$$

$$\theta_\beta : F[x]/(p(x)) \longrightarrow F(\beta) \; ; \; f(x) + (p(x)) \longrightarrow f(\beta)$$

نفرض أن $\varphi = \theta_\beta \theta_\alpha^{-1}$. إن φ تماثل لأنه تركيب تطبيقين . أي أن :

$$\varphi : F(\alpha) \longrightarrow F(\beta)$$

كذلك فإن :

$$b_0 + b_1 \alpha + \ldots + b_{n-1} \alpha^{n-1} \in F(\alpha)$$

يقضي بأن :

$$\theta_\beta \theta_\alpha^{-1}(b_0+b_1\alpha + \ldots+b_{n-1}\alpha^{n-1}) = \theta_\beta \left[b_0+b_1x+\ldots+ b_n x^{n-1}+(p(x))\right]$$

$$= b_0 + b_1 \beta + \ldots + b_{n-1}\beta^{n-1}$$

فهو التماثل المطلوب .

نتيجة (٥)

إذا كان α جبرياً على حقل F ، فإن كل تشاكل احادي φ للحقل $F(\alpha)$ في $\bar{F}$ بحيث $\varphi(a) = a$ $(a \in F)$ يصوّر α على مرافق لها β على F. وعلى العكس لكل مرافق β للعنصر α على F، يوجد تشاكل احادي ψ . للحقل $F(\alpha)$ في $\bar{F}$ يصوّر α على β .

البرهـان :

١) ليكن φ تشاكلاً احادياً من $F(\alpha)$ إلى F بحيث $\varphi(a) = a$ $(a \in F)$

ولنفرض أن :

$$irr(\alpha, F) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

وبالتالي

$$a_0 + a_1\alpha + .. + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \alpha^n = o$$

وهكذا

$$o = \varphi(\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + .. + a_1\alpha + a_0)$$

$$= [\varphi(\alpha)]^n + a_{n-1}[\varphi(\alpha)]^{n-1} + .. + a_1[\varphi(\alpha)] + \alpha_0$$

وبفرض $\beta = \varphi(\alpha)$ نجد أن β مرافق للعنصر α على F .

٢) على العكس لكل مرافق β للعنصر α على F فإن التماثل φ المذكور في المبرهنة السابقة يحقق المطلوب .

نتيجة (٦)

إذا كانت $f(x) \in F[x]$ **وكان** $f(a+bi) = o$ **حيث** $a,b \in R$, $a+bi \in C$ **فإن** $f(a-bi) = o$. **اي ان الأصفار العقدية لحدودية امثالها اعداد حقيقية مترافقة مثنى مثنى .**

البرهـــان :

سبق أن بينا أن $C = R(i)$ وبالتالي $C = R(-i)$. ثم ان :

$$irr(i, R) = x^2 + 1 = irr(-i, R)$$

وبالتالي i و $-i$ مترافقان على R . إذاً فحسب المبرهنة السابقة :

$$\varphi : C \longrightarrow C ; a + bi \longrightarrow a - bi$$

تشا كل أحادي . وهكذا إذا كان $a_i \in R$ وكان :

$$f(a+bi) = a_0 + a_1(a+bi) + .. + a_n(a+bi)^n = o$$

فـــإن

$$o = \varphi(f(a+bi)) = a_0 + a_1(a-bi) + \dots + a_n(a-bi)^n$$
$$= f(a-bi)$$

مثال (٥)

إن صفري $irr(\sqrt{2}, Q) = x^2 - 2$ هما $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$.

وبالتالي $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ مترافقان على Q وبالتالي فإن :

$$\varphi : Q(\sqrt{2}) \longrightarrow Q(\sqrt{2}) \; ; \; a + b\sqrt{2} \longrightarrow a - b\sqrt{2}$$

تشاكل أحادي من $Q(\sqrt{2})$ على $Q(\sqrt{2})$ نفسه .

تعريف (٦)

نقول عن عنصر a من حقل E أنه بقي **ثابتـــاً** تحت تأثير التشاكل الأحادي الداخلي :

$$\sigma : E \longrightarrow E$$

إذا كان $\sigma(a) = a$.

نقول عن مجموعة S من التشاكلات الأحادية الداخلية للحقل E في E بأنها تبقي الحقل $F \subseteq E$ **ثابتـــاً** إذا كان كل $a \in F$ يبقى ثابتاً تحت تأثير كل $\sigma \in S$.

مبرهنة (١٠)

لتكن $S = \{ \sigma_i : i \in I \}$ مجموعة من التشاكلات الأحادية الداخلية من الحقل E إلى E . إن مجموعة كل العناصر $a \in E$ التي تبقى ثابتة تحت تأثير كل σ_i $(i \in I)$ تشكل حقلاً جزئياً F من E (نرمز له بالرمز E_s) .

البرهـــان :

إذا كان $\sigma_i(a) = a$ و $\sigma_i(b) = b$ وذلك $\forall i \in I$

فإن :

$$\sigma_i(a \mp b) = \sigma_i(a) \mp \sigma_i(b) = a \mp b$$

$$\sigma_i(a\,b) = \sigma_i(a)\,\sigma_i(b) = a\,b$$

$$\sigma_i(a\,b^{-1}) = \sigma_i(a)\,\sigma_i(b^{-1}) = a\,b^{-1}$$

وذلك $\forall i \in I$ وبالتالي F حقل جزئي من E .

تعريف (٧)

الحقل $E_\circ$ في المبرهنة (١٠) يدعى **الحقل الثابت للمجموعة** S .

مثال (٦)

في المثال السابق (٥) :

$$\varphi : Q(\sqrt{2}) \to Q(\sqrt{2})\ ;\ a + b\sqrt{2} \to a - b\sqrt{2}$$

إن $\varphi(x) = x \Leftarrow a + b\sqrt{2} = a - b\sqrt{2} \Leftarrow b = o$

فالحقل الثابت للدالة φ هو Q .

مبرهنة (١١)

مجموعة كل التماثلات الداخلية للحقل E تشكل زمرة بالنسبة لعملية تركيب الدوال .

البرهـــان

تركيب تماثلين هو تماثل وتركيب الدوال تجميعي . والدالة المطابقة :

$$i : E \to E\ ;\ a \to a$$

هي العنصر الحيادي لهذه الزمرة . كما أنه كل تماثل σ له نظير σ^{-1} .

مبرهنة (١٢)

إذا كان F حقلاً جزئيا من حقل E فإن مجموعة كل التماثلات الداخلية على E التي تترك F ثابتاً ، تشكل زمرة $G(E/F)$ جزئية من زمرة كل التماثلات الداخلية على E . اضف إلى ذلك أن F حقل جزئي من $E_{G(E/F)}$.

البرهان :

١) مهما يكن $\varphi,\psi \in G(E/F)$ ومهما يكن $x \in F$ فإن :

$$\varphi\psi(x) = \varphi(\psi(x)) = \varphi(x) = x$$

وبالتالي $\varphi\psi \in G(E/F)$.

ثم إن $i \in G(E/F)$ (لماذا ؟)

مهما يكن $\varphi \in G(E/F)$ ومهما يكن $x \in F$ فإن $x = \varphi(x)$

وبالتالي $\varphi^{-1}(x) = x$

إذاً $G(E/F)$ زمرة جزئية من زمرة كل التماثلات الداخلية على E .

٢) بما أن كل عنصر $x \in F$ يبقى ثابتاً تحت تأثير كل عنصر $\varphi \in G(E/F)$ فإن من الواضح أن الحقل $E_{G(E/F)}$ المؤلف من كل عناصر E التي تبقى ثابتة المجموعة $G(E/F)$ يحوي F .

تعريف (٨)

الزمرة $G(E/F)$ في المبرهنة السابقة تدعى **زمرة التماثلات الداخلية على E التي تترك F ثابتا** . أو اختصاراً **زمرة غالوا للحقل E على F**

وتكتب أحيانا $Cal(E/F)$.

ويجب أن ننتبه جيداً إلى أن E/F هنا لايعني مطلقاً حقل خارج القسمة

مثال (٧)

ليكن $K = Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ إن قاعدة الفضاء المتجهي K على Q هي $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ فكل عنصر من K يكتب بالشكل :
$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ حيث $a, b, c, d \in Q$.

إن مجموعة كل التماثلات الداخلية على K التي تترك Q ثابتاً هي :

i : التطبيق المطابق

φ : التطبيق الذي يصور $\sqrt{2}$ على $-\sqrt{2}$ ، و $\sqrt{6}$ على $-\sqrt{6}$ ويترك بقية العناصر ثابتة .

ψ : التطبيق الذي يصور $\sqrt{3}$ على $-\sqrt{3}$ ، و $\sqrt{6}$ على $-\sqrt{6}$ ويترك بقية العناصر ثابتة .

σ التطبيق الذي يصور $\sqrt{2}$ على $-\sqrt{2}$ ، و $\sqrt{3}$ على $-\sqrt{3}$ ويترك بقية العناصر ثابتة . وبالتالي فإن زمرة تماثلات K تعطي بالجدول التالي ، ونلاحظ أن :

$\circ$	i	φ	ψ	σ
i	i	φ	ψ	σ
φ	φ	i	σ	ψ
ψ	ψ	σ	i	φ
σ	σ	ψ	φ	i

$K_G = Q$ حيث $G = \{i, \varphi, \psi, \sigma\}$

$K_{H_1} = Q(\sqrt{3})$ حيث $H_1 = \{i, \varphi\}$

$K_{H_2} = Q(\sqrt{2})$ حيث $H_2 = \{i, \psi\}$

$H_3 = \{ i , \sigma \}$ حيث $K_{H_3} = Q(\sqrt{6})$

$H_4 = \{ i \}$ حيث $K_{H_4} = Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = K$

لاحظ أن G من المرتبة الرابعة وأن $[Q(\sqrt{2},\sqrt{3}) : Q] = 4$

إن هذه النتيجة ليست من قبيل المصادفة ولكنها حالة عامة . وسنرى ذلك فيما بعد .

مبرهنة (١٣)

إذا كان F حقلاً منتهياً مميزه p ، فإن الدالة :

$$\varphi : F \longrightarrow F \; ; \; a \longrightarrow a^p$$

تماثل داخلي (وتدعى تماثل Frobenius) على الحقل F .

كذلك فإن $F_{\{\varphi\}} \approx Z_p$

البرهـــان :

إذا كان $a , b \in F$ فباستخدام دستور (أبي بكر الكرجي لمفكوك ذي الحدين نجد أن :

$$(a + b)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} b + .. + \binom{p}{r} a^{p-r} b^r + .. + b^p$$

حيث :

$$\binom{p}{r} = \frac{p\,!}{r\,!\,(p-r)\,!} = \frac{(p-1)\,!}{r\,!\,(p-r)\,!}\,(p.1)$$

لكن $p . 1 = o$ (لأن F حقل مميزه p) . إذاً في الحقل F :

$$(a + b)^p = a^p + b^p$$

وبالتالي :

$$\varphi(a+b)=(a+b)^p=a^p+b^p=\varphi(a)+\varphi(b)$$

كذلك

$$\varphi(ab)=(ab)^p=a^p b^p=\varphi(a)\varphi(b)$$

إذاً φ تشاكل . لكن $\varphi(a)=o$ يقضي بأن : $a^p=o$

إذاً $a=o$ وبالتالي $\ker\varphi=\{o\}$. إذاً φ متباين .

لكن F منته ، إذاً φ غامر وبالتالي φ تماثل داخلي .

بما أن F منته ومميزه p فهو يحوي على حقل جزئي مماثل للحقل Z_p .

إن $c\in Z_p$ تقضي بأن $\varphi(c)=c^p=c$ (اعتماداً على مبرهنة فرما) .

إذاً فالحدودية $x^p-x\in F[x]$ تملك p صفراً في F (عناصر Z_p) .

لكن x^p-x تملك على الأكثر p صفراً في F وبالتالي فإن العناصر الثابتة من F تحت تأثير φ هي عناصر Z_p فقط . إذاً :

$$F_{\{\varphi\}}\approx Z_p$$

٢ ــ ٣ ــ ٥ حقول التفريق Splitting fields

تعريف (٩)

نقول عن حدودية $f(x)$ أنها تتفرق في حقل F إذا أمكن كتابتها بالشكل :

$$f(x)=a(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n)$$

حيث $b_i\in F$ ، $o\neq a\in F$ و n درجة $f(x)$.

ونقول عن حقل E أنه **حقل تفريق** Splitting field للحدودية $f(x)\in F(x)$ على F إذا كان $E\supseteq F$ وكانت $f(x)$ تتفرق في E وكان :

$$E=F(b_1,b_2,\dots,b_n)$$

مثال (٨)

إذا كانت ω الجذر التكعيبي للعدد 1 (في C) فإن $\sqrt[3]{2}, \omega\sqrt[3]{2}, \omega^2\sqrt[3]{2}$ هي أصفار الحدودية $f(x) = x^3 - 2 \in Q[x]$ وبالتالي فإن الحقل $E = Q(\sqrt[3]{2}, \omega)$ هو حقل تفريق للحدودية $f(x)$ على Q

كذلك فإن حقل تفريق $g(x) = x^2 - 2 \in Q[x]$ على Q هو $Q(\sqrt{2})$.

تعريف (١٠)

إذا كانت $\bar{F}$ اللصاقة الجبرية للحقل F وكانت : $S = \{ f_i(x) : i \in I \}$ مجموعة حدوديات من $F[x]$. فإننا نقول عن الحقل الجزئي $E \subseteq \bar{F}$ بأنه حقل تفريق لـ S على F إذا كان E الحقل الجزئي الأصغر في $\bar{F}$ الذي يحوي F وجميع أصفار الحدوديات $f_i(x)$ ($i \in I$).

ونقول عن حقل جزئي $K \subseteq \bar{F}$ أنه حقل تفريق على F إذا كان حقل تفريق لمجموعة من الحدوديات من $F[x]$.

وسنقبل المبرهنة التالية بدون برهان :

مبرهنة (١٤)

إن حقلاً E (حيث $F \subseteq E \subseteq \bar{F}$) حقل تفريق على F إذا وفقط إذا كان مقصور كل تماثل داخلي للحقل $\bar{F}$ يترك F ثابتاً ، على E ، هو تماثل داخلي على E يترك F ثابتاً .

نتيجة (٧)

إذا كان $E \subseteq \bar{F}$ حقل تفريق على F ، فإن كل حدودية غير خزولة في $F[x]$ تملك صفراً في E ، تتفرق في E .

البرهــان :

إذا كان E حقل تفريق على F في $\bar{F}$ فإن مقصور كل تماثل داخلي للحقل $\bar{F}$ على E هو تماثل داخلي للحقل E كما أن E (حسب المبرهنة السابقـة) هو حقل تفريق على F لمجموعة كل الحـدوديات غـير الخزولة في $F[x]$ التي تملك صفراً في E وبالتالي فإن حدودية $f(x)$ في $F[x]$ تملك صفراً في E ، تملك كل أصفارها الموجودة في $\bar{F}$ في E وبالتالي فإن $f(x)$ في $E[x]$ تتفرق في E .

تعريف (١١)

إذا كان E تمديداً منتهياً لحقل F ، فإن عدد التشاكلات الأحادية من F إلى $\bar{F}$ التي تترك F ثابتاً يـدعى دليـل (index) E على F ونرمز له بالرمز $\{E:F\}$.

نتيجة (٨)

إذا كان $E \subseteq \bar{F}$ حقل تفريق على F فإن كل تشاكل احادي من E إلى $\bar{F}$ يترك $\bar{F}$ ثابتاً ، هو تماثل داخلي على E .

وبصورة خاصة إذا كان E حقل تفريق على F من درجة منتهية فإن :

$$\{E \cdot F\} = |G(E/F)|$$

البرهــان :

كل تشاكل أحادي $\varphi : E \to F$ يترك F ثابتاً يمكن تمديده إلى تماثـــل داخلي $\sigma : \bar{F} \to \bar{F}$

إذا كان E حقل تفريق على F فإن مقصور σ على E (أي φ) هو تماثل داخلي على E . وبالتالي فمن أجل حقل تفريق E على F نجـــد أن كل

تشاكل أحادي من F الى $\bar{F}$ يترك F ثابتاً هو تماثل داخلي على E كما أن $\{E:F\} = |G(E/F)|$ تنتج مباشرة من تعريف $\{E:F\}$ و $G(E/F)$

مثال (٩)

من الواضح أن $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ هو حقل تفريق على Q المجموعة :

$$\{x^2-2,\ x^2-3\}$$

وقد وجدنا في المثال (٧) أنه يوجد أربع تماثلات داخلية على $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ فقط ، تترك Q ثابتاً أي أن :

$$\{Q(\sqrt{2},\sqrt{3}):Q\} = |G(Q(\sqrt{2},\sqrt{3})/Q)| = 4$$

تمرين (٤)

ليكن $E = Q(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$ أوجد كل التماثلات الداخلية على E والتي تترك Q ثابتاً وبين أن عددها ثمانية واكتب جدولاً لزمرة غالوا $G(E/Q)$.

٢ ـ ٣ ـ ٦ الحقول المنتهية Finite fields

مبرهنة (١٥)

إذا كان E تمديداً منتهياً من الدرجة n على حقل منته F . وإذا كان q عدد عناصر F فإن عدد عناصر E هو q^n .

البرهان :

ليكن $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ قاعدة للفضاء المتجهي E على الحقل F ، فكل عنصر β من E يمكن كتابته بشكل وحيد :

$$\beta = b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + \ldots + b_n \alpha_n \quad , \quad b_i \in F$$

أي أنه يمكن اختيار b_i كواحد من q عنصر (عناصر F وإن بالامكان اختيار $b_1 , b_2 , \ldots , b_n$ معاً بـ q^n طريقة . أي يوجد q^n عنصر في E .

نتيجة (٩)

إذا كان E حقلاً منتهياً مميزه p فإنه يوجد $n \in N$ بحيث عدد عناصر E هو p^n .

البرهـان :

إن كل حقل منته E هو ممدد منته لحقل أولي يشاكل أحاديـاً Z_p ، حيث p هو مميز الحقل E ، وبالتالي فإن عدد عناصر E هو p^n .

تمرين (٥)

إذا كان K و L حقلين منتهيين مميزهما p فيهما p^r و p^s عنصراً على الترتيب وكان $K \subseteq L$ فإن $r \mid s$. وإن $rn = s$ حيث $n = [L : K]$ أثبت ذلك .

مبرهنة (١٦)

إذا كان E حقلاً منتهياً ، عدد عناصره p^n ، فإن E هو حقل تفريق للحدودية $x^{(p^n)} - x$ على حقله الأولي المماثل لـ Z_p .

البرهـان :

لتكن $E^* = E - \{o\}$. إن E^* تشكل مع عملية الضرب زمرة من المرتبة $p^n - 1$ ، وبالتالي فمرتبة أي عنصر α من E^* تقسم $p^n - 1$. وبالتالي مهما يكن $\alpha \in E^*$ فإن $\alpha^{(p^n - 1)} = 1$ وهذا يقضي بأن $\alpha^{(p^n)} = \alpha$.

اذاً كل عنصر من E هو صفر للحدودية $x^{(p^n)} - x$.

أن الحدودية $x^{(p^n)} - x$ تملك على الأكثر p^n صفراً وبالتالي فإن E هو حقل تفريق للحدودية $x^{(p^n)} - x$ على حقله الأولي المماثل لـ Z_p .

تعريف (١٢)

نقول عن عنصر $\alpha \in E$ أنه **جذر نوني للواحد** nthroot of unity إذا كان $\alpha^n = 1$. ونقول عنه أنـــه **جذر نوني أولي للواحد** primitive nth root of unity إذا كان $\alpha^n = 1$ و $\alpha^m \neq 1$ متى كانت $0 < m < n$.

تمرين (٥)

ليكن F حقلاً ما . ولتكن $S = \{ \alpha \in F : \alpha^n = 1 \}$ مجموعة الجذور النونية للواحد . أثبت أن S زمرة جزئية من $(\overset{*}{F}, .)$ وأنها دوارة .

مبرهنة (١٧)

إذا كان F حقلاً وكانت G زمرة جزئية منتهية من $(F^*, .)$ فإن G زمرة جزئية دوارة .

البرهـــان :

G زمرة جزئية تبديلية (لأن F حقل) فيوجد $m_1, m_2, .., m_r \in N$ بحيث :

$$G \approx Z_{m_1} \times Z_{m_2} \times \cdots \times Z_{m_r} \quad \text{و} \quad m_i \mid m_{i+1}$$

إذا نظرنا إلى Z_{m_i} على أنها زمرة ضربية دوارة من المرتبـة m_i أمكن أن نقول انه مهما تكن $a \in Z_{m_i}$ فإن $a^{m_i} = 1$ وبالتالي $a^{m_r} = 1$) لأن $(m_i \mid m_r$.

وبالتالي مهما يكن $\alpha \in G$ فإن $\alpha^{m_r}=1$ وهكذا فإن كل من G هو صفر للحدودية $x^{m_r}-1$. لكن $|G| = \prod_{i=1}^{r} m_i$.

بينما $x^{m_r}-1$ تملك على الأكثر m_r صفراً في F . إذاً $r=1$ وبالتالي فإن G دوارة .

نتيجة (١٠)

إذا كان F حقلاً منتهياً فإن $(F^*, .)$ زمرة دوارة .

تمرين (٦)

أثبت أن أي حقلين من مرتبة واحدة متماثلان .

نتيجة (١١)

إذا كان E ممدداً منتهياً لحقل منته F فإن E ممدد بسيط للحقل F .

البرهــان :

ليكن α مولداً للزمرة الدوارة $(E^*, .)$ فإن من الواضح أن $E=F(\alpha)$.

مثال (١٠)

إن Z_{11} حقل منته وبالتالي $(Z^*_{11}, .)$ زمرة دوارة . فإن 2 مولد للزمرة Z^*_{11} (تحقق من ذلك) وبالتالي 2 جذر عاشر أولي للواحد في Z_{11} (حاول أن تجد غيره) .

٢ ــ ٣ ــ ٧ حقل غالوا $GF(p^n)$ Galois field hf order p^n

مبرهنة (١٨)

إذا كان F حقلاً منتهياً مميزه p فإن $x^{(p^n)}-x$ تملك p^n صفراً متمايزاً في حقل التفريق $K \subseteq \bar{F}$ للحدودية $x^{(p^n)}-x$ على F .

البرهـان :

إذا كان F حقلاً منتهياً مميزه p وليكن $K \subseteq F$ حقـل التفريق للحدودية $x^{(p^n)} - x$ على F .

إن o صفر للحدود المفروضة . والآن لنفرض $\alpha \neq o$ صفر للحدودية المفروضة وبالتالي فإن α صفر للحـدودية :

$$f(x) = x^{(p^n)-1} - 1$$

إذاً $x - \alpha$ عامل من عوامل $f(x)$ في $K[x]$ وبالتالي :

$$\frac{f(x)}{x-\alpha} = g(x) = x^{(p^n)-2} + \alpha x^{(p^n)-3} + \dots + \alpha^{(p^n)-3} x + \alpha^{(p^n)-2}$$

إذاً :

$$g(\alpha) = \alpha^{(p^n)-2} + \alpha^{(p^n)-2} + \dots + \alpha^{(p^n)-2}$$

$$= (p^n - 1)\,\alpha^{(p^n)-2}$$

لكن α صفر للحدودية $f(x)$ أي أن :

$$\alpha^{(p^n)-2} = \frac{1}{\alpha} \Leftarrow \alpha^{(p^n)-1} - 1 = o$$

وبالتالي :

$$g(\alpha) = (p^n - 1)\frac{1}{\alpha}$$

لكن مميز F هو p أي $p.1 = o$ أي $p^n - 1 = -1$ وبالتالي :

$$g(\alpha) = -\frac{1}{\alpha}$$

إذاً $g(\alpha) \neq o$ وبالتالي α صفر بسيط للحدودية $f(x)$ وبالتالي فــإن $x^{(p^n)} - x$ تملك p^n صفراً متمايزاً في حقل التفريق $K \subseteq \overline{F}$ للحــدودية $x^{(p^n)} - x$ على F .

تعريف (١٣)

إذا كان p عدداً أولياً و n عدداً طبيعياً فإن الذي عـدد عناصره p^n يسمى **حقل غاوا من الرتبة p^n** ونرمز له بالرمز $GF(p^n)$.

مبرهنة (١٩)

من اجل كل عدد طبيعي n وكل عدد اولي p يوجد $GF(p^n)$.

البرهــان :

لتكن $K \subseteq \overline{Z}_p$ حقل التفريق للحدودية $f(x) = x^{(p^n)} - x$ على Z_p . ولتكن F مجموعة جزئية من K تحوي كل أصفـار $f(x)$ في K . إذاً مهما تكن $\alpha, \beta \in F$ فإن :

$$(\alpha \mp \beta)^{(p^n)} = \alpha^{(p^n)} \mp \beta^{(p^n)} = \alpha + \beta$$

$$(\alpha\beta)^{(p^n)} = \alpha^{(p^n)}\beta^{(p^n)} = \alpha\beta$$

تدل على أن F مغلقة مع الجمع والطرح والضرب . واضح أيضاً أن 0 و 1 تنتمي إلى F . وإذا كانت $\alpha \neq o$ فإن $\alpha^{(p^n)} = \alpha$ يقضي بأن :

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{(p^n)} = \frac{1}{\alpha}$$

إذاً F حقل جزئي من K يحوي Z_p . وبما أن K اصغر ممدد للحقل Z_p يحوي أصفار $f(x)$ فإن $K = F$. وبما أن $f(x)$ تحوي p^n صفراً متمايزاً

في $\bar{Z}_p$ فإن F تحوي p^n عنصراً .

نتيجة (١٢)

إذا كان F حقلاً منتهياً ، فإنه من أجل كل عدد طبيعي $n \in N$ ، توجد حدودية غير خزولة في $F[x]$ ذات درجة n .

البرهــان :

إذا كان F يحوي p^r عنصراً (حيث p مميز F) فإنه يوجد حقل $K \subseteq \bar{F}$ يحوي Z_p (مع مراعاة التماثل) ويتألف من جميع أصفار الحـــدودية

$$f(x) = x^{(p^{rn})} - x$$

إن كل عنصر من F صفر الحدودية $g(x) = x^{(p^r)} - x$.

لدينا $p^{rn} = p^r p^{r(n-1)}$ ولدينا $\alpha^{(p^r)} = \alpha$ ($\alpha \in F$)

إذاً $\alpha^{(p^{rn})} = \alpha^{(p^{r(n-1)})} = \alpha^{(p^{r(n-2)})} = \dots = \alpha^{(p^r)} = \alpha$

وبالتالي $F \subseteq K$. لكننا نعلم أن $[K:F] = n$ كما نعلم أن K ممدد بسيط للحقل F وبالتالي توجد $\beta \in K$ بحيث $K = F(\beta)$ إذاً فإن $\overline{\deg}(\beta, F) = n$.

٢ ـ ٣ ـ ٨ التمديد الانفصالي Separable extension

تعريف (١٤)

لتكن $f(x) \in F[x]$ وليكن $a \in \bar{F}$ بحيث $f(a) = 0$. نقول عن a أنه صفر من تعددية n (zero of multpjicity) للحدودية $f(x)$ إذا كان n أكبر عدد طبيعي بحيث $(x-a)^n$ عامل من عوامل $f(x)$ في $\bar{F}[x]$. نقول عن a أنه صفر بسيط (sinple zero) للحدودية $f(x)$ إذا كانت تعـــدديته $n = 1$.

سنقبل المبرهنة التالية بدون برهان :

مبرهنة (٢٠)

إذا كانت $f(x)$ حدودية غير خزولة في $F[x]$ فإ كل اصفار $f(x)$ في $\overline{F}$ لها نفس التعددية .

نتيجة (١٣)

إذا كانت $f(x)$ حدودية غير خزولة في $F[x]$ فإن بالامكان كتابتها في $\overline{F}[x]$ بالشكل

$$a \prod_i (x - a_i)^n$$

حيث a_i هي أصفار $f(x)$ المختلفة في $\overline{F}$ و $a \in F$ و n تعددية هذه الأصفار .

تعريف (١٥)

نقول عن حدودية $f(x) \in F[x]$ من الدرجة n بأنها **انفصالية** separable على F إذا كانت تملك n صفراً مختلفاً في $\overline{F}$ ، أو بتعبير آخر إذا كانت لاتملك أي صفر من تعددية $m > 1$.

نذكر من المبرهنة (٩) أنه إذا كان α جبرياً على حقل F وكان β مرافقاً له على F فإنه يوجد تماثل من $\varphi : F(\alpha) \to F(\beta)$ يمكن تمديده إلى تشاكل أحادي $\psi : F(\alpha) \to \overline{F}$ حيث $\psi(\alpha) = \beta$ وهذا التشاكل الأحادي يترك F ثابتاً .

وبالتالي فإن $\{F(\alpha) : F\}$ يساوي عدد الأصفار المتمايزة في $irr(\alpha, F)$.

مبرهنة (٢١)

إذا كان F ممدداً منتهياً لحقل F فإن $\{E : F\}$ يقسم $[E : F]$.

البرهان :

بما أن E ممدد منته للحقل F فإنه يوجد عدد محدود $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ من E بحيث

$E = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (مبرهنة ٣) .

لتكن $irr(\alpha_i, F(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}))$ ذات n_i صفراً متمايزاً تعددية كل منها k_i .

وبالتالي فإن :

$$[F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i) : F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1})] = n_i k_i$$

$$= \{F(\alpha_1, \dots, \alpha_i) : F(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})\} . k_i$$

ثم إن $[F : F] = \prod_i n_i k_i$ (مبرهنة (٢)) و $\{E : F\} = \prod_i n_i$

وبالتالي فإن $\{F : F\}$ يقسم $[E : F]$.

نتيجة (١٤) :

آ) إذا كان F ممدداً منتهياً لحقل F فإ $[E : F] \geqslant \{E : F\}$

ب) إذا كان E حقل تفريق على F من درجة منتهية فإن :

$$[E : F] \geqslant |G(E/F)|$$

البرهـان :

اعتماداً على المبرهنة السابقة والنتيجة (٨) ينتج المطلوب ▯

تعريف (١٦)

تقول عن ممدد منته E لحقل F بأنه ممدد **انفصالي** للحقل F إذا كان :

$$\{E : F\} = [E : F]$$

ونقول عن عنصر $a \in \bar{F}$ بأنه **انفصالي** على F إذا كان $F(a)$ ممدداً انفصالياً للحقل F .

نتيجة (١٥) :

إذا كان E ممدداً منتهياً للحقل F ، فإن E ممدد انفصالي للحقل F إذا وفقط إذا كان :

$$[E : F] = |G(E/F)|$$

البرهـــان :

من النتيجة (٨) والتعريف (١٦) ينتج المطلوب ▯

ذكرنا أن $\{F(\alpha) : F\}$ يساوي عدد الأصفار المتمايزة في الحدودية $irr(\alpha, F)$ فإذا كان α ذاتعددية k فإن $[F(\alpha) : F] = nk$ وبالتالي فإن :

$$\{F(\alpha) : F\} = [F(\alpha) : F]$$

إذا وفقط إذا كان $k = 1$. لكن جميع أصفار $irr(\alpha, F)$ ذات تعددية واحدة . إذاً يمكن صياغة تعريف العنصر الانفصالي بالصورة التالية :

تعريف (١٧)

نقول عن عنصر $\alpha \in \bar{F}$ أنه إنفصالي على F إذا كان كل أصفار $irr(\alpha, F)$ من تعددية تساوي الواحد . وبالتالي فإن حدودية غير خزولة $f(x) \in F[x]$ تدعى **انفصالية** على F إذا كان كل صفر من أصفارها صفر بسيط .

مبرهنة (٢٢)

إذا كان K ممدداً منتهياً للحقل E وكان E ممدداً منتهياً للحقل F $(F \subseteq E \subseteq K)$ فــإن K ممدد انفصالي للحقل F إذا وفقط إذا كان K ممدداً انفصالياً للحقل E و E ممدداً انفصالياً للحقل F .

البرهـــان :

لدينا $[K : F] = [K : E][E : F]$

و $\{K : F\} = \{K : E\}\{E : F\}$

١) إذا كان K ممدداً انفصالياً للحقل F فإن :

$$[K:F]=\{K:F\}$$

ثم إن $\{E\ \ F\}$ يقسم $[E:F]$ و $\{K:E\}$ يقسم $[K:E]$

إذاً $[E:F]=[E:F\}$ و $[K:E]=\{K:E\}$

٢) إذا كان $[K:E]=\{K:E\}$ و $[E:F]=\{E\ \ F\}$

فإن $[K:E][E:F]=\{K:E\}\{E:F\}$

إذاً $[K:F]=\{K:F\}$

نتيجة (١٦)

إذا كان E ممدداً منتهياً للحقل F فــإن E ممدداً انفصالياً للحقل F إذا وفقط إذا كان كل عنصر $a\in E$ انفصالياً على F .

البرهــان :

١) إذا كان E ممدداً انفصالياً للحقل F وكانت $a\in E$ فإن :

$$F\subsetneq F(a)\subseteq E$$

وبالتالي فإن $F(a)$ ممدد انفصالي للحقل F وبالتالي a انفصالي على F .

٢) إذا كان كل عنصر $\alpha\in E$ انفصالياً على F فلنبرهن أن E ممدد انفصالي للحقل F.

إن E ممدد منته للحقل F . إذن يوجد $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ في E بحيث $E=F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ لكن :

$$F\subseteq F(\alpha_1)\subseteq F(\alpha_1,\alpha_2)\subseteq\ldots\subseteq F(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$$

بما أن α_i انفصالي على F فهو انفصالي على $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1})$ وضوحاً .

وبما أن :

$$q(x) = \operatorname{irr}(\alpha_i , F(\alpha_1 , \ldots , \alpha_{i-1}))$$

تقسم $\operatorname{irr}(\alpha_i , F)$ فإن α_i صفر بسيط للحدودية $q(x)$ وبالتالي فإن :

$F(\alpha_1 , \ldots , \alpha_i)$ ممدد انفصالي للحقل $F(\alpha_1, \ldots , \alpha_{i-1})$.

إذاً E ممدد انفصالي للحقل F .

نتيجة (١٧)

إن حقل التفريق E لحدودية انفصالية $f(x) \in F[x]$ هو ممدد انفصالي للحقل F .

البرهـــان :

إذا كانت $a_1 , \ldots , a_n$ كل أصفار $f(x)$ في $\bar{F}$ (وهي أصفار بسيطة لأن $f(x)$ انفصالية) فإن $E = F(a_1 , \ldots , a_n)$ فهو ممدد منته للحقل F وكل عنصر من عناصره انفصالي على F وبالتالي E ممدد انفصالي للحقل F .

تمرين (٧)

إذا كان E حقل تفريق لحدودية انفصالية $f(x) \in F[x]$ فأثبت أنه يوجد $[E : F]$ تماثلاً داخلياً على E يترك F ثابتاً . وبالتالي فإن :

$$|G(E/F)| = [E : F]$$

تعريف (١٨)

إذا كانت $f(x) \in F[x]$ وكان E حقل تفريق للحدودية $f(x)$ فـإن $G(E/F)$ تدعى **زمرة غالوا للحدودية** $f(x)$ على F .

مثال (١١)

إن حقل التفريق الانفصالي للحدودية $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ هو $C = \mathbb{R}(i)$.

إن $[C : \mathbb{R}] = 2$. إذاً يوجد تماثلان داخليان فقط من C إلى $\mathbb{R}$ تـترك

$\mathbb{R}$ ثابتاً وهما :

$$\sigma : C \longrightarrow C , a+ib \longrightarrow a+ib \qquad (a, b \in R)$$

و

$$\varphi : C \longrightarrow C ; a+bi \longrightarrow a-bi$$

وبالتالي فإن زمرة غالوا للحدودية x^2+1 على $\mathbb{R}$ هي :

$$G (C / \mathbb{R}) = \{ \sigma , \varphi \}$$

وهي تماثل زمرة تباديل الجذرين $\{ i , -i \}$ للمعادلة $x^2+1=0$.

مثال (١٢)

إن حقل التفريق الانفصالي للحدودية $f(x) = x^3 - 2$ على Q هو :

$$Q (\sqrt[3]{2} , \omega)$$

حيث ω هو الجذر التكعيبي العقدي للواحد إن :

$$[Q (\sqrt[3]{2} , \omega) : Q] = 6$$

وبالتالي فزمرة غالوا للحدودية $f(x)$ علي Q من المرتبة السادسة . وهي تماثل زمرة تباديل اجذور $\{ \sqrt[3]{2} , \omega \sqrt[3]{2} , \omega^2 \sqrt[3]{2} \}$ للمعادلة $x^3 - 2 = 0$.

تمرين (٨) :

اكتب جميع عناصر زمرة غالوا للحدودية $x^3 - 2$ على Q ثم اكتب جدول هذه لزمرة .

مبرهنة (٢٣)

إذا كانت $f(x) \in F[x]$ حدودية انفصالية من الدرجة n على F . فإن كل عنصر من عناصر زمرة غالوا لهذه الحدودية يبادل أصفار $f(x)$ في حقل التفريق E للحدودية $f(x)$ كما أنه يوجد تماثل من $G (E/F)$ إلى مجموعة كل تباديل اصفار $f(x)$.

البرهـان :

إذا كانت $a_1, \dots, a_n$ جميع أصفار $f(x)$ المتمايزة في $\bar{F}$ (وكلها بسيطة لأن f انفصالية) فإن $E = F(a_1, \dots, a_n)$ بما أن كل عنصر من عناصر $G(E/F)$ يترك F ثابتاً وبما أن $f(a_i) = 0$ فإذا كان $\varphi \in G(E/F)$ فـإن :

$$o = \varphi(f(a_i)) = f(\varphi(a_i))$$

وبالتالي فإن $\varphi(a_i)$ أيضاً هو صفر للحدودية $f(x)$. لكن φ تماثل على E إذاً يجب أن يصور الأصفار المتايزة بصور متمايزة . فلنفرض أن :

$$\theta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \varphi(a_1) & \varphi(a_2) & \varphi(a_3) & \dots & \varphi(a_n) \end{pmatrix}$$

بما أن E مولد من F و $\{a_1, \dots, a_n\}$ فإن φ تعيين تماماً متى عرفت الدالة θ.

إذا أخذنا مجموعة كل الدوال θ على $\{a_1, \dots, a_n\}$ وهي S_n فإن :

$$\sigma, G(E/F) \longrightarrow S_n ; \varphi \longrightarrow \theta$$

تماثل (تحقق من ذلك) .

نتيجة (١٨)

إن زمرة غالوا للحدودية $f(x)$ الانفصالية على F ذات الدرجة n ، تمـاثل زمرة جزئية من S_n .

نتيجة (١٩)

إن زمرة غالوا للحدودية الانفصالية $f(x)$ على F ذات الدرجـة n ، ذات مرتبة أقل أو تساوي $n!$.

مثال (١٣)

إن حقل التفريق الانفصالي للحدودية $x^4 - 7$ على Q هو $E = Q(\sqrt[4]{7}, i)$

وإن $8 = [E : Q]$ وبالتالي فإن $|G(E/Q)| = 8$

لكن مجموعة جذور المعادلة $x^4 - 7 = 0$ هي $\{\sqrt[4]{7}, -i\sqrt[4]{7}, i\sqrt[4]{7}, -\sqrt[4]{7}\}$ وبالتالي $|S_4| = 24$.

حاول أن تجد جميع عناصر $G(E/F)$ وبين أنها تماثل زمرة تناظرات المربع .

مبرهنة (٢٤)

إن الحدودية $f(x) \in F[x]$ انفصالية إذا وفقط إذا كان القاسم المشترك الأعظم للحدوديتين $f(x)$ و $\frac{df}{dx}$ يساوي الواحد في الحلقة $F[x]$

البرهــان :

نفرض أن E حقل التفريق للحدودية $f(x)$.

١) إذا كانت $f(x)$ انفصالية فإن :

$$f(x) = a(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

حيث $a_1, \ldots, a_n$ جميع أصفار $f(x)$. لنفرض جــدلاً أن القاسم المشترك الأعظم للحدوديتين $f(x)$ و$\frac{df}{dx}$ لايساوي الواحد في الحلقة $F[x]$ ، أي لنفرض وجود عامل مشترك $(x - a_i)$ في الحدوديتين أي نفرض :

$$f(x) = (x - a_i)\, g(x) \quad \text{و} \quad f'(x) = (x - a_i)\, h(x)$$

لكن $$f'(x) = g(x) + (x - a_i)\, g'(x)$$

إذاً $$g(x) = (x - a_i)[h(x) - g'(x)]$$

إذاً $g(a_1)=o$ وبالتالي a_1 ليس صفراً بسيطاً للحدودية $f(x)$ وهـذا يناقض كونها انفصالية .

٢) نفرض أن $f(x)$ غير انفصالية فيوجد صفر b للحدودية $f(x)$ تعدديته $m > 1$.

أي أن
$$f(x) = (x-b)^m g(x)$$

وبالتالي
$$f'(x) = (x-b)^{m-1}[m \cdot g(x) + (x-b) g'(x)]$$

إذاً $(x-b)^{m-1}$ قاسم للحدودتين $f(x)$ و $f'(x)$ يختلف عن الواحد وهذا خلاف الفرض .

إذاً $f(x)$ انفصالية .

تمرين (٩) :

أثبت أنه إذا انعدمت $f(x) \in F[x]$ و $f'(x)$ معاً من أجل $x=a$ فإن a صفر غير بسيط للحدودية $f(x)$.

مبرهنة (٢٥)

إذا كان F حقلاً مميزه o فكل حدوديه $f(x)$ غير خزولة على F هي انفصالة .

البرهـان :

لتكن

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \qquad , \qquad (a_i \in F \text{ و } a_n \neq 0)$$

فإن :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_{n-1} x^{n-1}$$

إن $f'(x)$ من الدرجة $n-1$. وإن $f(x)$ غير خزولة فهي لاتملـك أي

عامل . وبالتالي لاتملك أي عامل مشترك مع $f'(x)$ (إلا بالثابت) . فحسب المبرهنة السابقة $f(x)$ انفصالية .

ملاحظة (٢)

إن المبرهنة السابقة غير صحيحة في حالة F مميزة $p \neq 0$ فمثلاً الحدودية $f(x) = x^p - a$ على الحقل F يكون مشتقها $f'(x) = px^{p-1}$ لكن $p.1 = 0$ إذاً $f'(x) = 0$ مهما يكن x فهي غير انفصالية .

وهذا واضح أيضاً لأننا لو فرضنا b صفراً للحدودية $f(x)$ في $\bar{F}$ فإن $a = b^p$ فإن :

$$(x - b)^p = x^p - a$$

(انظر برهان المبرهنة ١٣ .

كذلك إذا كانت $f(x) = g(x^p)$ على حقل F مميزة $p \neq 0$ فإن $f(x)$ غيرا انفصالية على F لأن :

$$f'(x) = p\, x^{p-1} g'(x^p)$$

وبالتالي $f'(x) = 0$ مهما تكن x (لأن $p.1 = 0$) . وهكذا فليست أصفار $f(x)$ بسيطة .

٢ ـ ٣ ـ ٩ التمديد الناظمي Normal extension

تعريف (٩)

إذا كان F حقلاً جزئياً من الحقل E ، فإن E يدعى **ممدداً ناظمياً للحقل** F أو اختصاراً E **ناظمي** على F إذا تحقق مايلي :

من أجل كل عنصر $a \in K - F$ يوجد تماثل داخلي φ من $G(K/F)$ بحيث $\varphi(a) \neq a$.

أو بتعبير أخر كل عنصر $a\in K-F$ يتحرك بواسطة أحد عناصر $G(K/F)$.

مثال (١٣)

إن $Q(\sqrt[3]{2})$ ليس ممدداً ناظمياً للحقل Q . كذلك $Q(\sqrt[3]{2},\sqrt{7})$ ليس ممدداً ناظميــاً للحقل Q ، لأن $G(Q(\sqrt[3]{2})/Q)$ تحوي الدالة المطابقة فقط . وكذلك $G(Q(\sqrt[3]{2},\sqrt{7})/Q)$ تحوي فقط الدالتين : المطابقة والدالة التي تصور $\sqrt{7}$ على $-\sqrt{7}$ - بينما $\sqrt[3]{2}$ على $\sqrt[3]{2}$.

تمرين (١٠)

إذا كان F حقلاً جزئياً من E وكان :

$$A=\{a\in E:\varphi\in G(E/F) \text{ لكل } \varphi(a)=a\}$$

فأثبت أن A حقل جزئي من E وإن $F\subseteq A\subseteq E$ وأن E ممدد ناظمي للحقل F اذاوفقط اذا كان $A=F$.

وسنقبل المبرهنة التالية بدون برهان ونترك البرهان كتمرين للطالب .

مبرهنة (٢٦)

إذا كان E ممدداً منتهياً للحقل F فــإن الخواص التالية متكافئة :

آ) E هو حقل تفريق على F لحدودية انفصالية $f(x)\in F[x]$.

ب) E ممدد ناظمي للحقل F .

جـ) E ممدد انفصالي للحقل F ، وكل حدودية $q(x)$ غير خزولة في $F[x]$ وتملك صفراً واحداً فقط في E تتفرق في E .

د) $[E:F]=\{E:F\}$

مبرهنة (٢٧)

ليكن K ممدداً ناظمياً منتهياً لحقل F وليكن E ممدداً للحقل F أيضاً حيث :

$F \subseteq E \subseteq K \subseteq \bar{F}$. فــإن K ممدد ناظمي منته للحقل E و $G(K/E)$ هي زمرة جزئية من $G(K/F)$ تحوي جميع التماثلات الداخلية على K التي تترك E ثابتاً .

اضف إلى ان تماثلا ينداخليين σ و τ من $G(K/F)$ تؤدي إلى نفس التشاكل الأحادي من E إلى F إذا وفقط إذا كانا في نفس المجموعة المرافقة اليسارية للزمرة الجزئية $G(K/E)$ في $G(K/F)$.

البرهــان :

اذا كان K حقل تفريق على F لمجموعة حـدوديات $\{ f_i(x) : i \in I \}$ من $F[x]$ فإن من الواضح أن K هو حقل تفريق على E لنفس المجموعات من الحدوديات (لأن $F \subseteq E$) .

إن K انفصالي على F (مبرهنة ٢٦) وبالتالي K انفصالي على E و E انفصالي على F (مبرهنة ٢٢) .

ان من الواضح أن كل عنصر من $G(K/E)$ هو تماثل على K يـترك E ثابتاً وبالتالي يترك F (المحتوى في E) ثابتاً أي $G(K/E)$ مجموعة جزئية من $G(K/F)$. لكن كلًا منهما زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات وبالتالي $G(K/E)$ جزئية من الزمرة $G(K/F)$.

أخيراً ان $\sigma, \tau \in G(K/F)$ مع وجودهما في نفس المجموعة المرافقة اليسارية للزمرة الجزئية $G(K/E)$ ، إذاً وفقط اذا ، كانت $\tau^{-1}\sigma \in G(K/E)$ أو بتعبير أخر اذاً وفقط اذا وجد $\mu \in G(K/E)$ بحيث $\sigma = \tau\mu$.

والآن مهما يكن $\alpha \in E$ فإن :

$$\sigma(\alpha) = \tau\mu(\alpha) = \tau(\mu(\alpha)) = \tau(\alpha)$$

(لأن $\alpha \in E$, $\mu \in G(K/E)$) .

على العكس اذا كان $\sigma(\alpha) = \tau(\alpha)$ لكل $\alpha \in E$ فـإن $\tau^{-1}\sigma(\alpha) = \alpha$

وبالتالي $\tau^{-1}\sigma$ تترك E ثابتاً أي أن $\tau^{-1}\sigma \in G(K/E)$ وهكذا فإن :

σ و τ ينتميان لنفس المجموعة المرافقة اليسارية للزمرة الجزئية $G(K/E)$ في الزمرة $G(K/F)$ ▯

ان المبرهنة السابقة تدل على أنه يوجد تقابل بين المجموعات المرافقـة اليسارية للزمرة الجزئية $G(K/E)$ في $G(K/F)$ والتشاكلات الاحادية من E الى F والتي تترك F ثابتاً . لاحظ أنه لايمكن القول بأن المجموعات المرافقة اليسارية المذكورة تقابل مجموعـة التماثلات من E على F ، لأنـه قـد لايكون E حقل تفريق على F . ولكن بالطبع اذا كان E ممدداً نظامياً للحقل F فإن هـذه التشاكلات الأحادية يمكن النظر اليها على أنهـا تماثلات من E على F . وهذا يحدث اذا وفقط اذا كانت $G(K/E)$ زمرة جزئية ناظمية من $G(K/F)$.

اي أنه اذا كان E ممدداً ناظمياً لحقل F فـإن المجموعات المرافقة اليسارية الزمرة الجزئية الناظمية $G(K/E)$ في $G(K/F)$ يمكن النظر اليها على أنها عناصر في زمرة خارج القسمة $G(K/F)/G(K/E)$ التي هي زمرة تماثلات على E وتترك F ثابتاً .

٢ ـ ٣ ـ ١٠ نظرية غالوا Galois theory

مبرهنة (٢٨) « مبرهنة غالوا الأساسية »

ليكن K ممدداً ناظمياً منتهياً لحقل F , $\mathcal{A}$ مجموعة كل الحقول الجزئية E من K والحاوية على F (اي $F \subseteq E \subseteq K$) ، $\mathcal{B}$ مجموعة كل الزمر الجزئية H من $G(K/F)$ ، ثم :

$$K_H = \{ a \in K : \varphi(a) = a \; ; \; \forall \varphi \in H \}$$

فــإن :

$$\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B} ; E \to G(K/E)$$

$$\beta : \mathcal{B} \to \mathcal{A} ; H \to K_H$$

تقابلان متعاكسان .

البرهـــان :

واضح أن كلاً من α و β معروف جيداً .

ثم انه مهما تكن $E \in \mathcal{A}$ لدينا من المبرهنة (١٢) أن :

$$E \subseteq K_{G(K/E)}$$

ومن تعريف (١٩) نجـد أن :

$$K_{G(K/E)} \subseteq E$$

اذاً

$$E = K_{G(K/E)}$$

والآن مهما تكن $E \in \mathcal{A}$ فإن :

$$\beta\alpha(E) = \beta(G(K/E)) = K_{G(K/E)} = E$$

أي أن $\beta\alpha$ هو التطبيق المطابق من $\mathcal{A}$ على $\mathcal{A}$ ، وبالتالي فـإن α و β تقابلان متعاكسان .

نتيجة (٢٠)

مهما تكن $E \in \mathcal{A}$ ومهما تكن $H \in \mathcal{B}$ فــإن :

آ) $E = K_{G(K/E)}$ **(انظر المبرهنة السابقة)**

ب) $H = G(K/K_H)$ **(انظر المبرهنة السابقة)**

جـ) $[K:E] = |G(K/F)|$ (انظر نتيجة ١٥)

د) $[E:F] = \{G(K/F) : G(K/E)\}$ وهو عدد المجموعات المرافقة للزمرة الجزئية $G(K/E)$ في الزمرة $G(K/F)$. (انظر المبرهنة ٢٦ والمبرهنة ٢٧)

مبرهنة (٢٩)

إذا كان K ممدداً ناظمياً منتهياً لحقل F ، وكان E حقلاً جزئياً من K يحوي F (أي $F \subseteq E \subseteq K$) فإن E ممدد ناظمي للحقل F إذا وفقط إذا كانت $G(K/E)$ زمرة جزئية ناظمية من $G(K/F)$ أضف إلى ذلك أنه إذا كان E ممدداً ناظميا للحقل F فإن :

$$G(E/F) \quad \text{تماثل} \quad G(K/F)/G(K/E)$$

البرهان :

١) من المبرهنة (٢٦) نجد أن K ممدد انفصالي للحقل F .

ومن المبرهنة (٢٢) نجد أن E ممدد انفصالي للحقل F .

وحتى يكون E ناظمياً على F يلزم ويكفي أن يكون حقل تفريق على F (مبرهنة ٢٦) .

لكننا نعلم أن كل تشاكل أحادي من E إلى $\bar{F}$ يترك F ثابتاً ، يمكن تمديده إلى تماثل داخلي على K (لأن K ممدد ناظمي للحقل F) . وبالتالي فإن مجموعة التماثلات الداخلية $G(K/F)$ هي مجموعة كل التشاكلات الأحادية من E إلى $\bar{F}$ التي تترك F ثابتاً . وحسب المبرهنة (١٤) فإن E حقل تفريق على F . وبالتالي E ناظمي على F إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

مهما يكن $\sigma \in G(K/F)$ ومهما تكن $a \in E$ فإن $\sigma(a) \in E$.

لكنه من النتيجة (٢٠) $E = K_{G(K/E)}$.

إذاً $\sigma(a) \in E$ إذا وفقط إذا تحقق مايلي :

مهما تكن $\tau \in G(K/E)$ فإن $\tau(\sigma(a)) = \sigma(a)$

وهذا محقق إذا وفقط إذا كان $\sigma^{-1}\tau\sigma(a) = a$ وذلك مهما تكن $a \in E$

ومهما تكن $\sigma \in G(K/F)$ ومهما تكن $\tau \in G(K/E)$.

ولكن هـذا يعني أنه $\forall \sigma \in G(K/F)$ و $\forall \tau \in G(K/E)$ فإن $\sigma^{-1}\tau\sigma$

تترك كل عنصر $E \ni a$ ثابتاً أي أن : $\sigma^{-1}\tau\sigma \in G(K/E)$

وهذا الشرط محقق إذا وفقط إذا كانت $G(K/E)$ زمرة جزئيـة ناظمية من $G(K/F)$.

٢) والآن لنفرض أن E ممدد ناظمي للحقل F .

ليكن $\sigma \in G(K/F)$ وليكن σ_E مقصور σ على E فهو تماثل داخلي على E (لأن E مدد ناظمي للحقل F) يترك F ثابتاً وبالتالي :

$$\sigma_E \in G(E/F)$$

لنصطنع الدالة :

$$\varphi : G(K/F) \longrightarrow G(E/F) ; \sigma \longrightarrow \sigma_E$$

إن φ دالة غامرة ، لأنه مهما تكن $\tau_E \in G(E/F)$ فيمكن تمديد هـــذا التماثل الداخلي على E الذي يترك F ثابتاً إلى تماثل داخلي على K وليكن $\tau \in G(K/F)$.

ثم من الواضح أن نواة الدالة φ هي $\ker \varphi = G(K/E)$

وبالتالي فإن $G(E/F)$ تماثل $G(K/F)/G(K/E)$

مبرهنة (٣٠)

إذا كان K ممدداً منتهياً (من الدرجة n) ، لحقل F فيــه p^r عنصر ، فإن $G(K/F)$ زمرة دوارة من المرتبة n مولدها :

$$\sigma : K \longrightarrow K \; ; \; a \longrightarrow a^{(p^r)}$$

البرهــان :

بما أن $[K : F] = n$ فان K حقل منته من المرتبة p^{rn} ، فهو حقل تفريق للحدودية $f(x) = x^{(p^{rn})} - x$ على F (مبرهنة ١٦) وبالتالي فـإن K ممـدد ناظمي للحقل F (انظر المبرهنة ١٨ و ٢٦) .

إن الدالة :

$$\sigma : K \longrightarrow K \; ; \; a \longrightarrow a^{(p^r)}$$

هو تماثل على K يترك F ثابتاً (لماذا ؟) .

لتكن $b \in K$ فإن : $\sigma^{\lambda}(b) = \left[b^{(p^r)} \right]^{\lambda} = b^{(p^{\lambda r})}$

فإن أصغر قيمة للعدد λ تجعل $b^{(p^{\lambda r})} = b$ هي $\lambda = n$ وذلـك مهما تكن $b \in K$.

وبما أن :

$$| G (K/F) | = [K : F] = n$$

فينبغي أن تكون $G (K/F)$ زمرة دوارة مولدها σ

مثال (١٤)

إذا كان $F = Z_p$ وكان $K = GF (p^{12})$ فإن $[K : F] = 12$

وبالتالي فإن $G (K/F)$ زمرة دوارة مولدها :

$$\sigma : K \longrightarrow K \; ; \; a \longrightarrow a^p$$

وهي تماثل الزمرة $(Z_{12} , +)$.

٢ – ٣ – ١١ التمديد الدوار Cyclotomic extension

سبق وعالجنا في الفقرتين السابعة والثامنة مسألة تمديد الحقول المنتهية وذلك بإضافة بعض جذور الواحد لها . وسنعالج في هذه الفقرة نفس المسألة ولكن بالنسبة للحقول غير المنتهية . وقبل أن نبدأ بتعريف التمديد الدوار . سنتعرض لدالة أولر التي لها دور كبير في فقرتنا هذه .

تعريف (٢٠)

تسمى الدالة $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ **دالة أولر** عندما يكون $\varphi(n)$ ممثلاً لعدد الأعداد الطبيعية التي لاتزيد عن n والتي هي أولية نسبياً مع n .

مثال (١٥)

$$\varphi(1) = 1 \;,\; \varphi(2) = 1 \;,\; \varphi(3) = 2 \;,\; \varphi(4) = 2 \;,\; \varphi(5) = 4 \;, \ldots$$

توطئة (٢)

إذا كان n عدداً طبيعياً من N ، فإن مجموعة كل الأعداد من Z_n الأولية نسبياً مع n تشكل زمرة جزئية من نصف الزمرة $(Z_n, .)$ نرمز لها بالرمز $G(n)$

البرهــان :

مهما يكن $x, y \in G(n)$ فإن $(x, n) = 1$ و $(y, n) = 1$ وبالتالي $(xy, n) = 1$ أي أن $xy \in G(n)$.

إن $(1, n) = 1$ وبالتالي فإن $1 \in G(n)$.

إذا كان $(x, n) = 1$ فإنه يوجد $\alpha, \beta \in Z$ بحيث $\alpha x + \beta n = 1$

وبالتالي $(\alpha x + \beta n) \bmod n = 1 \bmod n$

أي $(\alpha \bmod n)(x \bmod n) = 1$

لأن $(\beta n) \bmod n = 0$

وهذا يعني أنه مهما يكن $x \in G(n)$ فإن له نظيراً في $G(n)$.

نتيجة (٢١)

١) **إن** $\varphi(n) = |G(n)|$

٢) **إذا كان** $(\alpha, n) = 1$ **فإن** $\alpha^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

٣) **إذا كان** $p = n$ **عدداً اولياً فإن** $\varphi(p) = p - 1$

٤) **إذا كان** p **عدداً اولياً لايقسم** a **فإن** $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

توطئة (٣)

إذا كان p **عدداً اولياً فإن** :

$$\varphi(p^r) = p^{r-1}(p-1)$$

البرهان :

إن عناصر $Z_{(p^r)}$ التي ليست أولية مع p^r هي التي تقبل القسمة على p أي هي :

$$p, 2p, 3p, \ldots, p^{r-1} p = p^r$$

وواضح أن عدد هذه العناصر هو p^{r-1} وبالتالي فإن :

$$\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1} = p^{r-1}(p-1)$$

توطئة (٤)

إذا كان $n = \alpha\beta$ **حيث** α **و** β **اوليان فيما بينهما فإن**

$$\varphi(n) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$$

البرهان :

إن نصف الزمرة $(Z_n, .)$ تماثل الجداء المباشر لنصفي الزمرتين $(Z_\alpha, .)$

و $(Z_\beta , .)$ لأن الدالة :

$$f \; . Z_n \to Z_\alpha \times Z_\beta \;\; ; \;\; a \to (a \bmod \alpha , a \bmod \beta)$$

معرفة تماماً حيث $a = b$ يقضي :

$$a(\bmod \alpha) \equiv b(\bmod \alpha) \quad \text{و} \quad a(\bmod \beta) \equiv b(\bmod \beta)$$

كذلك f تحقق ما يلي :

١) $f(a) = f(b)$ يقضي بأن :

$$a - b \equiv o \bmod \alpha \quad \Leftarrow \quad a(\bmod \alpha) \equiv b(\bmod \alpha)$$

$$a - b \equiv o \bmod \beta \quad \Leftarrow \quad a(\bmod \beta) \equiv b(\bmod \beta)$$

وبالتالي $a - b \equiv o(\bmod \alpha\beta)$ أي $a - b \equiv o(\bmod n)$

لكن $a , b < n$ وبالتالي $a = b$ فالدالة متباينة .

٢) بما أن :

$$|Z_n| = n \quad \text{و} \quad |Z_\alpha \times Z_\beta| = \alpha\beta = n$$

فالمنطلق والمستقر لهما نفس العدد الرئيسي و لدالة متباينة فهي غامرة .

٣)
$$\begin{aligned} f(ab) &= [ab(\bmod \alpha) , ab(\bmod \beta)] \\ &= [a(\bmod \alpha) b(\bmod \alpha) , a(\bmod \beta) b(\bmod \beta)] \\ &= [a(\bmod \alpha) , a(\bmod \beta)][b(\bmod \beta) , b(\bmod \beta)] \\ &= f(a) f(b) \end{aligned}$$

إذاً نصف الزمرة $(Z_n , .)$ تماثل الجداء المباشر لنصفي الزمرتين $(Z_\alpha , .)$ و $(Z_\beta , .)$.

وبما أن $G(\alpha)$ زمرة الأعداد الأولية مع α في Z_α

$G(\beta)$ زمرة الأعداد الأولية مع β في Z_β

$G(n)$ زمرة الأعداد لأولية مع n في Z_n

فإن الزمرة $G(n)$ تماثل الجداء المباشر للزمرتين $G(\alpha)$ و $G(\beta)$.

وبالتالي $|G(n)| = |G(\alpha) \times G(\beta)|$

أي $\varphi(n) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$

نتيجة (٢٢)

١) إذا كانت $n = n_1 n_2 n_3 \cdots n_r$

حيث $(n_i . n_j) = 1$ **عندما** $(i \neq j)$ **فإن :**

$$\varphi(n) = \varphi(n_1)\varphi(n_2) \cdots \varphi(n_r)$$

٢) إذا كانت p_i **أعداداً أولية وكانت :**

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$$

فإن

$$\varphi(n) = p_1^{r_1-1} p_2^{r_2-1} \cdots p_k^{r_k-1} (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1)$$

تعريف (٢١)

إن حقل التفريق للحدودية $(x^n - 1)$ على الحقل F يسمى **العدد النوني الدوار** للحقل F n^{th} Cyclotomic extension .

نفرض أن $f(x) = (x^n - 1) \in F[x]$ ، ولنفرض أن α صفر للحدودية $f(x)$، ولنأخذ $g(x) = (x^n - 1)/(x - \alpha)$ فيمكن أن نثبت أن $g(\alpha) = (n.1)(1/\alpha) \neq 0$ شريطة أن لايكون مميز الحقل F قاسماً للعدد الطبيعي n .

تحت هذا الشرط نجد أن حقل التفريق K للحدودية $f(x)$ هو ممدد انفصالي وبالتالي ناظمي للحقل F (مبرهنة ٢٦) .

نفرض خلال هـــذه الفقرة أن الحقل F يحقق الشرط السابق ، وليكن K حقل تفرق الحدودية $f(x) = x^n - 1$ على F . إن $f(x)$ تملك n صفراً متمايزاً في K ، وهذه الأصفار تشكل زمرة دوارة من المرتبة n (تحت عملية الضرب في الحقل F) وهي تملك $\varphi(n)$ عنصراً مولداً (حيث $\varphi(n)$ هي دالة اولر) ، وهذه المولدات هي بالتأكيد الجذور النونية الأولية للواحد (انظر تعريف ١٢ وتمرين ٥) .

تعريف (٢٢)

الحدودية
$$\Phi_n(x) = \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - \alpha_i)$$

حيث α_i هي الجذور النونية الأولية للواحد في $\overline{F}$ ، تدعى **الحدودية النونية الدوارة على** F . n^{th} cyclotomic polynomial .

بما أن كل تماثل على K من زمرة غالوا $G(K/F)$ يجب أن يبادل بين الجذور النونية الأولية للواحـد ، فإننا نرى أن $\Phi_n(x)$ تبقى ثابتة تحت تأثير ممـدد أي عنصر من $G(K/F)$ على $F(x)$.

أي أن $\Phi_n(x) \in F[x]$. وبصورة خاصة إذا كان $F = Q$ فإن $\Phi_n(x) \in Q[x]$ وإن $\Phi_n(x)$ قاسم للحدودية $(x^n - 1)$. وهكذا فعندما $F = Q$ نجد أن $\Phi_n(x) \in Z[x]$.

سبق أن رأينا أن $\Phi_p(x)$ غير خزولة على Q بينما $\Phi_n(x)$ يمكن أن تكون خزولة على حقل Z_p . كما نلاحظ أن $\Phi_n(x)$ غير خزولة على Q .

لنفرض الآن أن F ذو مميز يساوي الصفر ولنفرض أن$F \subseteq C$ ، نعلم من دستور موافر أن :

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

وبالتالي :

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

هو الجذر النوني للواحد ، بل هو جذر أولي لأن $1 \neq \alpha^m$ إذا كانت $m \neq n$.

مثال (١٦)

الجذر الثامن الأولي للواحد في حقل الأعداد العقدية C هو :

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{8} + i\sin\frac{2\pi}{8} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

كما أن جميع الجذور الأولية الثامنة للواحد هي α و α^3 و α^5 و α^7 أي أن :

$$\Phi_8(x) = (x-\alpha)(x-\alpha^3)(x-\alpha^5)(x-\alpha^7)$$

وبالحساب ينتج أن :

$$\Phi_8(x) = x^4 + 1$$

مع ملاحظة أن $\alpha^8 = 1$ و $\alpha^4 = -1$.

تمرين (١٢)

أوجد $\Phi_n(x)$ على Q من أجل $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

دعنا نستمر في الفرض $F = Q$ ولنقبل ، بدون برهان (حاول أن تـــبرهن

ذلك) أن $\Phi_n(x)$ غير خزولة على Q وليكن :

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

فإن α هو الجذر النوني الأولي للواحد . وهو مولد الزمرة الضربية الدوارة من المرتبة n المؤلفة من جميع الجذور النونية للواحد . كما أن كل جذر نوني أولي للواحد هو مولد لهذه الزمرة . أي أن α^m ($1 \leqslant m < n$) حيث m هو عدد أولي نسبياً مع n . إن $Q(\alpha)$ هو حقل تفريق الحدودية $(x^n - 1)$ على Q . لنفرض أن $K = Q(\alpha)$ ، فإذا كان α^m أي جذر نوني أولي للواحد ، وبما أن α و α^m مترافقان على Q فإنه يوجد تماثل داخلي τ_m من $G(K/Q)$ يصور α على α^m .

ليكن τ_r تماثل داخلي من $G(K/Q)$ يصور α على α^r (حيث α^r جذر نوني أولي للواحد) فيكون :

$$\tau_m\,\tau_r(\alpha) = \tau_m(\alpha^r) = (\alpha^r)^m = \alpha^{rm}$$

وهذا يبين أن زمرة غالوا $G(K/Q)$ تشاكل أحادياً الزمرة $G(n)$ (انظر تواطئة ٢) . ويمكن تلخيص هذه النتائج التي توصلنا إليها بالمبرهنة التالية :

مبرهنة (٣١)

إن زمرة غالوا للمدد النوني الدوار للحقل Q تملك $\varphi(n)$ عنصراً ، وهي تماثل الزمرة $G(n)$.

مثال (١٧)

إن حقل تفريق الحدودية $(x^4 + 1)$ على Q هو نفس حقل تفريق الحدودية $(x^8 - 1)$ على Q ذلك لأن :

$$\Phi_8(x) = x^4 + 1$$

نتيجة (٢٣)

إن زمرة غالوا للعدد النوني الدوار للحقل Q ، عندما n أولي ، هي زمرة دوارة ذات مرتبة $n - 1$.

البرهــان :

اعتماداً على المبرهنة (٣١) فإن زمرة غلوا تملك $\varphi(n)$ عنصراً ، لكن n أولي ، وبالتالي $\varphi(n) = n - 1$ (انظر نتيجة ٢١) وهي تمـاثل الزمرة $G(n)$ التي هي الزمرة ($Z^*_n, .$) ، وهي دوارة من المرتبـة $n - 1$.

٢ ـ ٣ ـ ١٢ المضلعات المنتظمة القابلة للانشاء هندسياً

Constructible polygons

كتطبيق على ما ورد في الفقرة السابقة يمكن أن نعين المضلعات المنتظمة التي يمكن انشاؤها هندسياً بالفرجار وحافة المسطرة .

سبق أن قلنا أن المضلع النوني المنتظم يمكن انشاؤه إذا وفقط إذا كان $\cos \frac{2\pi}{n}$ عدداً قابلاً للانشاء . والآن لنفرض أن :

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

وبالتالي فإن :

$$\frac{1}{\alpha} = \cos \frac{2\pi}{n} - i \sin \frac{2\pi}{n}$$

ومنه ينتج أنه :

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2 \cos \frac{2\pi}{n}$$

وهكذا فإن هذا المضلع النوني قابل للانشاء إذا كان $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ يولد ممـــدداً

للحقل Q من درجة هي قوة من قوى العدد 2 .

إذا فرضنا أن K حقل تفريق المحدودية $(x^n - 1)$ على Q فإن :

$$[K : Q] = \varphi(n)$$

ثم إن $\sigma \in G(K/Q)$ بحيث $\sigma(\alpha) = \alpha^r$ يعطينا :

$$\sigma\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha^r + \frac{1}{\alpha^r} = 2\cos\frac{2\pi r}{n}$$

ولكن $1 < r < n$ وبالتالي فإن $\cos\frac{2\pi r}{n} = \cos\frac{2\pi}{n}$ فقط عندما $r = n - 1$.

أي أن التماثلين الوحيدين من $G(K/Q)$ الذين يصوران $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ على نفسه هما : التماثل المطابق والتماثل τ الذي يصور α على $\alpha^{n-1} = \frac{1}{\alpha}$. وهذا يبين أن الزمرة الجزئية من $G(K/Q)$ الذي يترك $Q\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$ ثابتاً هي من المرتبة الثانية وهكذا فإن :

$$\left[Q\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) : Q\right] = \frac{\varphi(n)}{2}$$

إذاً يمكن إنشاء المضلع النوني المنتظم فقط إذا كان $\frac{\varphi(n)}{2}$ (وبالتالي $\varphi(n)$) قوة للعدد 2 ، أي إذا وجد عدد $k \in N$ بحيث $\varphi(n) = 2^k$ وهذا محقق عندما $n = 2^s$.

لكن عندما :

$$n = 2^s p_1^{r_1} \ldots\ldots p_i^{r_i}$$

فإن :

$$\varphi(n) = 2^{s-1} p_1^{r_1-1} \cdots\cdots p_i^{r_1-1}(p_1-1) \cdots\cdots (p_i-1)$$

وحتى تكون $\varphi(n)$ من الشكل 2^k وجب أن تكون :

$$(j = 1, 2, \ldots\ldots, i) \quad r_j = 1$$

أي أن تكون n من الشكل $n = 2^s p_1 p_2 \cdots\cdots p_i$

وأن يكون : $p_j = 2^{m_j} + 1$ مع العلم أن p_j عدد أولي .

لكننا يجب أن ننتبه هنا إلى أنه إذا كانت $m_j = uq$ حيث q عدد فردي فإن :

$$p_j = (2^u)^q + 1$$

وهذا واضح أنه غير أولي لأنه يقبل القسمة على $2^u + 1$ ، اذا تذكرنا أن الحدودية $x^q + 1$ تقبل القسمة على $x + 1$ متى كانت q عدداً فردياً .

اذاً حتى يكون p_j أولياً ينبغي أن لا تقبل m_j القسمة على أي عدد فردي وبالتالي فإن m_j من الشكل 2^{λ_j} أي أن يكون :

$$p_j = 2^{(2^{\lambda_j})} + 1 \qquad j = 1, 2 \ldots\ldots, i$$

وهذا العدد الأولي يدعى عادة **« أولي فرما »** Fermat prime .

إذ كان فرما قد ادعى أن هذه الأرقام أولية مهما تكن $\lambda_j \in N^0$. لكن Euler بين أن من أجل $\lambda_j = 0, 1, 2, 3, 4$ نجد الأعداد الأولية :

$$3, 5, 17, 257, 65537$$

لكن من أجل $\lambda_j = 5$ نجد أن $2^{(2^5)} + 1$ يقبل القسمة على 641 .

كما جرى التحقق من أنه من أجل $5 \leqslant \lambda_j \leqslant 16$ فإن الناتج عدد غير أولي .

ولازال السؤال التالي مطروحاً للبحث هل أوليات فرما مجموعة منتهية أم لا ؟ ،

وهكذا فقد تبين لنا أن جميع المضلعات النونية المنتظمة حيث $n = 2^s$ قـابلة للانشاء هندسياً . وكذلك عندما تكون العوامل الأولية p_j الفردية في n هي أوليات فرما .

مثال (١٨)

المسبع المنتظم غير قابل للانشاء هندسياً لأن العدد 7 ليس من أوليات فرما .

كذلك المضلع المنتظم حيث $n=18$ غير قابل للانشاء لأن $n = 2(3)^2$ فالعدد 3 من أوليات فرما ولكنها جاءت بأس لايساوي الواحد .

إن المناقشة السابقة يمكن تلخيصها بالمبرهنة التالية :

مبرهنة (٣٢)

يكون المضلع النوني المنتظم قابلاً للانشاء هندسياً إذا وفقط إذا كانت n من الشكل :

$$n = 2^s \quad \text{أو} \quad n = 2^s p_1 \cdot p_2 \cdots p_i$$

حيث p_j $(j = 1, 2, \ldots, i)$ ينتمي الى مجموعة أوليات فرما .

مثال (١٩)

المضلع المنتظم حيث $n = 60$ قابل لـلانشاء هندسياً لأن : $n = 2^2 (3)(5)$ وكلًا من 3 و 5 من أوليات فرما .

تمرين (١١)

عين المضلعات المنتظمة القابلة للانشاء من المجموعة $3 \leqslant n \leqslant 100$.

٢ ـ ٣ ـ ١٣ التمديد بالجذور Extension by radicals

تعريف (٢٣)

نقول عن الممدد K للحقل F بأنه **ممدد بالجذور** للحقل F إذا وجدت عناصر $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in K$ وأعداد طبيعية $n_1, \ldots, n_r \in N$ بحيث :

$$\alpha_1^{n_1} \in K \quad \text{و} \quad K = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$$

$$\text{،} \quad \alpha_i^{n_i} \in F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}) \quad (1 < i \leqslant r) .$$

كما نقول عن حدودية $f(x) \in F[x]$ بأنها **قابلة للحل بالجذور** « by radicals Solvable » على F إذا كان حقل التفريق K للحدودية $f(x)$ على F ممدداً بالجذور للحقل F .

أي أننا نقول أن الحدودية $f(x) \in F[x]$ قابلة للحل بالجذور على F إذا كان بالامكان الحصول على كل صفر للحدودية $f(x)$ باستخدام عدد محدود من العمليات (جمع ، طرح ، ضرب ، قسمة ، جذر نوني) على بعض عناصر F .

مثال (٢٠)

الحدودية $(x^5 - 1)$ قابلة للحل بالجذور على Q لأن حقل التفريق K للحدودية $(x^5 - 1)$ على Q هو $K = Q(\alpha)$ حيث α هو الجذر الخامس الأولي للعدد 1 $(1 = \alpha^5 \in Q)$.

كذلك فإن الحدودية $(x^5 - 2)$ قابلة للحل بالجذور على Q لأن حقل التفريق E لها هو :

$$E = Q(\sqrt[5]{2}, \alpha) \, . \, [1 = \alpha^5 \in Q \quad \text{و} \quad 2 = [\sqrt[5]{2}]^5 \in Q(\alpha)]$$

مبرهنة (٣٣)

ليكن F حقلاً مميزه صفر ، وليكن a عنصراً من F . إذا كان K حقل التفريق للحدودية $(x^n - a)$ علـى F فـإن $G[K/F]$ هي زمرة قابلة لحل « Solvable group » ،

البرهـان :

لنناقش الحالتين التاليتين :

١) بفرض F تحوي جذراً نونياً أولياً α للواحد فهي تحوي جميع الجـذور النونية للواحد :

$$1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$$

فإن $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ زمرة جزئية دوارة من $(F^*, .)$ مولداتها الجذور النونية الأولية للواحد .

إذا فرضنا $\beta \in \bar{F}$ صفر للحدودية $(x^n - a) \in F(x)$ فـإن جميـع أصفـار $x^n - a$ هي :

$$\beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta, \ldots, \alpha^{n-1}\beta$$

ثم بما أن $K = F(\beta)$ فإن أي تماثل داخلي σ على K من $G(K/F)$ يتعين تماماً بعـد معرفة $\sigma(\beta)$. لنفرض $\sigma, \tau \in G(K/F)$ بحيث :

$$\tau(\beta) = \alpha^j\beta \quad ; \quad \sigma(\beta) = \alpha^i\beta$$

فإن :

$$\tau\sigma(\beta) = \tau(\alpha^i\beta) = \alpha^i\tau(\beta) = \alpha^i\alpha^j\beta$$

$$\sigma\tau(\beta) = \sigma(\alpha^j\beta) = \alpha^j\sigma(\beta) = \alpha^j\alpha^i\beta$$

وبالتالي :

$$\sigma\tau = \tau\sigma$$

أي أن $G(K/F)$ تبديلية فهي قابلة للحل .

٢) بفرض F لاتحوي جذراً نونياً أولياً للواحد .

ليكن α جذراً نونياً أولياً للواحد . إن :

$$\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$$

زمرة جزئية دوارة من $(\bar{F}^*, .)$. ولنفرض أن β صفر للحدودية $(x^n - a)$.

بما أن β و $\alpha\beta$ ينتميان لحقل التفريق K للحدودية $(x^n - a)$ فإن $\alpha = (\alpha\beta)/\beta$ ينتمي إلى الحقل K.

لنفرض أن $E = F(\alpha)$ فإن $F \subset E \subseteq K$.

إن E ممدد ناظمي للحقل F لأن E حقل تفريق للحدودية $x^n - 1$.

بما أن $E = F(\alpha)$ فإن أي تماثل داخلي η من $G(E/F)$ يتعين تماماً بعد معرفة $\eta(\alpha)$.

لنفرض أن η و μ من $G(E/F)$ بحيث :

$$\eta(\alpha) = \alpha^i \quad \text{و} \quad \mu(\alpha) = \alpha^j$$

فـــإن :

$$\eta\mu(\alpha) = \eta(\alpha^j) = \alpha^{ij}$$

$$\mu\eta(\alpha) = \mu(\alpha^i) = \alpha^{ji}$$

وبالتالي $\mu\eta = \eta\mu$ والزمرة $G(E/F)$ تبديلية . وبالتالي :

$$\{i\} \lhd G(K/E) \lhd G(K/F)$$

سلسلة زمر جزئية ناظمية . وحسب المبرهنة (٢٩) فإن :

$$G(E/F) \quad \text{تماثل} \quad G(K/F)/G(K/E)$$

واعتماداً على نظرية الزمرة فإن $G(K/F)$ زمرة قابلة للحل . ▯

مبرهنة (٣٤)

إذا كان الحقل K ممدداً ناظمياً بالجذور لحقل F، مميزة صفر ، فإن $G(K/F)$ زمرة قابلة للحل .

البرهــان :

نعلم أنه يوجد $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in K$ و $n_1, n_2, \dots, n_r \in N$ بحيث :

$$\alpha_1^{n_1} \in F \quad \text{و} \quad \alpha_i^{n_i} \in F(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}) \quad (1 < i \leqslant r)$$

ليكن $K_0 = F$ و K_i حقل التفريق للحدودية $(x^{n_i} - \alpha_i^{n_i})$ على K_{i-1} .

فإن $K_r = K$ و $G(K_i/K_{i-1})$ زمرة قابلة للحل (حسب المبرهنة السابقة).
والسلسلة الناظمية :

$$\{i\} \lhd G(K_r/K_{r-1}) \lhd G(K_r/K_{r-2}) \lhd \dots \lhd G(K_r/K_0) = G(K/F)$$

حيث $G(K_r/K_{i-1})/G(K_r/K_i)$ تماثل $G(K_i/K_{i-1})$

حسب المبرهنة (٢٩) ، وحسب مبرهنات نظرية الزمرة ، تؤدي بنا إلى أن :

$G(K|F)$ هي زمرة قابلة للحل .

٢ ـ ٣ ـ ١٤ معادلة الدرجة الخامسة

رأينا في المثال (٢٠) أن بعض معادلات الدرجة الخامسة قابلة للحل بالجذور ، وكل مانريد قوله في هذه الفقرة أن معادلة الدرجة الخامسة ليست بصورة عامة قابلة للحل بالجذور . لإثبات ذلك علينا أن نجد حدودية من الدرجـة الخامسة ذات أمثال حقيقية ونبين أنها غير قابلة للحل بالجذور . أي علينا أن نجد حقلاً جزئياً $F \subseteq \mathbb{R}$ وحدودية $f(x) \in F[x]$ من الدرجة الخامسة بحيث أن حقل التفريق K لها على F يملك زمرة غالوا $G(K/F)$ تماثل الزمرة التناظرية S_5 .

ليكن $y_1 \in \mathbb{R}$ عـــدداً متسامياً على Q و $y_2 \in \mathbb{R}$ متساميا على $Q(y_1)$ ...
وهكذا حتى $y_5 \in \mathbb{R}$ متسامياً على $Q(y_1, y_2, y_3, y_4)$.

إن هذه الأعداد المتسامية المعرفة بالطريقة السابقة أعداد متسامية مستقلة على Q.

ليكن $K = Q(y_1, \ldots, y_5)$ ولتكن :

$$f(x) = \prod_{i=1}^{5} (x - y_i)$$

فـإن $f(x) \in K[x]$. إن أمثال $f(x)$ هي (بغض النظر عن الاشارة) :

$$S_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$$

$$S_2 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_1y_4 + y_1y_5 + y_2y_3 + y_2y_4 + y_2y_5 + y_3y_4 + y_3y_5 + y_4y_5$$

$$\vdots$$

$$S_5 = y_1y_2y_3y_4y_5$$

ليكن $F = Q(S_1, \ldots, S_5)$ فإن $f(x) \in F[x]$. من الواضح أن K هو حقل التفريق على F للحدودية $f(x)$. بما أن y_i يعمل كمجهول على Q ، فمن أجل كل $\sigma \in S_5$ (حيث S_5 الزمرة التناظرية أي زمرة تباديل المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$)، نجد تماثلاً داخلياً σ على K معرفاً كما يلي :

$$\bar{\sigma}(y_i) = y_{\sigma(i)} \text{ و } (a \in Q)\ \bar{\sigma}(a) = a$$

بما أن الحدودية $\prod_{i=1}^{5} (x - y_i)$ هي نفس الحدودية $\prod_{i=1}^{5} (x - y_{\sigma(i)})$

فإن $\bar{\sigma}(S_i) = S_i$ وذلك مهما تكن $i \in \{1,2,\ldots,5\}$

وهكذا نرى أن $\bar{\sigma}$ يترك F ثابتاً وبالتالي فإن $\bar{\sigma} \in G(K/F)$.

نعلم أن $|S_5| = 5!$ وبالتالي فان :

$$|G(K/F)| \geqslant 5!$$

لكن K حقل تفريق الحدودية $f(x)$ على F ، و $f(x)$ من الدرجة الخامسة، فحسب النتيجة (١٩) نجد أن :

$$|G(K/F)| \leqslant 5!$$

وهذا يؤدي بدوره إلى أن :

$$|G(K/F)| = 5!$$

وبالتالي $\bar{\sigma}$ المعرفة بالطريقة السابقة هي كل التماثلات الداخلية في $G(K/F)$.

إذاً $G(K/F)$ تماثل S_5 .

لكن S_5 غير قابلة للحل لأن :

$$\{i\} \subseteq A_5 \subseteq S_5$$

و A_5 غير تبديلية . إذاً $G(K/F)$ غير قابلة للحل . وحسب المبرهنة (٣٤) فان $f(x)$ غير قابلة للحل بالجذور على F . يمكن تلخيص ما برهناه بالمبرهنة التالية :

مبرهنة (٣٥)

ليكن $y_1, \dots, y_5$ أعداد حقيقية متسامية مستقلة على Q فإن الحدودية :

$$f(x) = \prod_{i=1}^{5} (x - y_i)$$

غير قابلة للحل بالجذور على $F = Q(s_1, s_2, \dots, s_5)$ حيث s_i هي امثال $f(x)$.

إن مناقشة مماثلة تقودنا إلى التعميم بأن الحدوديات ذات الدرجة $n \geqslant 5$ ليست بالحالة العامة قابلة للحل بالجذور .

* * *

تمـارين (٢ ــ ٣)

١) أثبت أن الشرط اللازم والكافي ليكون الحقل F مغلقاً جبريـاً هو أن يكون أي ممدد جبري E للحقل F يساوي F .

٢) ليكن E ممدداً للحقل F ولتكن :

$K = \{ \alpha \in E :$ جبري على F $\alpha \}$

أثبت أن K حقل جزئي من E يحوي F

[**ارشاد :** خذ α, β عنصرين ما من K ثم أثبت أن كل عنصر من $F(\alpha, \beta)$ جبري على F] .

٣) أوجد درجة تمديد كل من الحقول التالية :

$Q(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ على Q و $Q(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$ على Q .

$Q(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ على Q و $Q(\sqrt{2}\sqrt{3})$ على Q .

$Q(\sqrt{3}, \sqrt[3]{5})$ على Q و $Q(\sqrt{2}, \sqrt{6})$ على $Q(\sqrt{3})$.

٤) أثبت أن $x^2 - 3$ غير خزولة على $Q(\sqrt[3]{2})$.

٥) أثبت (جبرياً) أن بالامكان تثليث الزاوية 45° بالفرجار والمسطرة .

٦) أثبت (جبرياً) أنه من غير الممكن إنشاء متسع منتظم بالفرجار والمسطرة فقط .

[ارشاد : بين أنه لايمكن انشاء الزاوية 40°] .

٧) آ) أثبت (جبرياً) أن بالامكان انشاء الزاوية 36° بالفرجار والمسطرة فقط .

[ارشاد : ارسم مثلثاً متساوي زاوية رأسه 36° ونصف زاوية القاعدة ثم أثبت أن طول القاعدة قابل] .

ب) استنتج أن الخمس المنتظم والمعشر المنتظم قابلان للانشاء .

٨) إذا كان a متسامياً على حقل F . فأثبت أن كل عنصر $b\in F(a)$ جبري على F ينتمي إلى F .

٩) أوجد جميع مرافقات كل من الأعداد :

آ) $3+\sqrt{2}$ على Q ب) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ على Q

ح) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ على Q د) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ على $Q(\sqrt{2})$

ه) $\sqrt{2}+i$ على Q و) $\sqrt{2}+i$ على R

١٠) آ) أثبت أن :

$$f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\dots+x+1$$

غير خزولة على Q (وذلك مهما يكن العدد الأولي p) .

[ارشاد : ادرس $f(x+1)$] .

ب) بفرض ζ صفر للحدودية $f(x)$. بين أن $\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \dots, \zeta^{p-1}$ هي جميع أصفار $f(x)$ وكلها متمايزة .

ج) أثبت أن زمرة غالوا $G(Q(\zeta)/Q)$ تبديلية من المرتبة $p-1$.

د) برهن أن الحقل الثابت للزمرة $G(Q(\zeta)/Q)$ هو Q .

[**ارشاد :** أثبت أن $\alpha = \zeta + \zeta^2 + \ldots + \zeta^{p-1}$ ينتمي إلى Q وذلك بتحليل $f(x)$ إلى عواملها في $(Q(\zeta))[x]$ وإثبات أن α أحد أمثال $f(x)$] .

١١) آ) أوجد عدد الجذور الأولية من المرتبة الثامنة ، للواحد في $GF(9)$.

ب) أوجد عدد الجذور الأولية من المرتبة الثامنة عشرة للواحد في $GF(19)$.

١٢) إذا كان F حقلاً منتهياً فيه p^n عنصراً ويحوي الحقل الجزئي Z_p . فبين أنه إذا كان $\alpha \in F$ مولداً للزمرة الدوارة $(F^*, .)$ فإن $\deg(\alpha, Z_p) = 0$.

١٣) إذا كان F حقلاً منتهياً فيها p^n عنصراً فبين أنه يحوي حقلاً جزئياً واحداً فقط فيه p^m عنصراً لكل m تقسم n .

١٤) بين أن أي حقلين منتهيين من نفس المرتبة متماثلان .

١٥) أثبت أن حقل تفريق الحدودية $x^p - 1$ على Q هو $Q(\zeta)$ ؛ من الدرجة $p - 1$ ؛ حيث ζ هو جذر أولي من المرتبة p للواحد .

[**ارشاد :** انظر تمرين ١٠] .

١٦) إذا كان E حقلاً منتهياً من المرتبة p^n ويحوي Z_p فأثبت أن :

آ) $\varphi : E \longrightarrow E \; ; \; a \longrightarrow a^p$

تماثل يترك Z_p ثابتاً فهو ينتمي إلى زمرة غالوا $G(E/Z_p)$.

ب) إن φ من المرتبة n في $G(E/Z_p)$.

ﺣ) إن $G(E/Z_p)$ زمرة دوارة من المرتبة n و φ مولدها .

١٧) إذا كان $f, g \in K[x]$ وكان $a \in K$ وكان f' مشتق f بالنسبة إلى x فإن :

آ) $(f+g)' = f' + g'$ ب) $(af)' = af'$

ﺣ) $(fg)' = f'g + fg'$ د) $(f^n)' = n f^{n-1} . f'$ حيث $n \in N$

ﻫ) $(fog)' = (f'og) . g'$.

١٨) إذا كان K حقلاً مميزه p $(p\neq 0)$ وكانت $f\in K[x]$ فإن f' مشتق f بالنسبة إلى x يساوي الصفر إذا وفقط إذا كانت $f\in K[x^p]$.

١٩) إذا كان F حقلاً مميزه p $(p\neq 0)$ وكانت :

$$f_n(x) = x^{p^n} \quad x\in F[x]$$

فأثبت أن :

آ) إذ كان $r\mid s$ فإن $f_r \mid f_s$.

ب) $f_n(a+b) = f_n(a) + f_n(b)$

حـ) $f_n(-a) = -f_n(a)$

د) $f_n(ab) = f_n(a)\, f_n(b) + a\, f_n(b) + b\, f_n(a)$

هـ) $f_n(a^{-1}) = -a^{-1-p^n} f_n(a)$ مع $\alpha\neq 0$.

و) $K = \{a\in F : f_n(a) = 0\}$ حقل جزئي من F .

٢٠) إذا كانت $f(x) = g(x^p)$ على حقل F مميزه $p\neq 0$ فأثبت أن $f(x)$ غير انفصالية على F وأن تعددية كل صفر لها هو إحدى مضاعفات p .

٢١) بين ان الحقل $K = Q(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$ ممدد ناظمي منته للحقل Q .
وباستخدام المبرهنة (٢٨) ونتائجها أوجد قيمة ما يلي :

آ) $[K:Q]$ ب) $|G(K/Q)|$ حـ) $|\alpha(Q)|$

د) $|\alpha Q(\sqrt{3},\sqrt{3}))|$ هـ) $|\alpha(Q(\sqrt{6})|$

و) $|\alpha(Q(\sqrt{30}))|$ ز) $|\alpha(Q(\sqrt{2}+\sqrt{6}))|$

ح) $|\alpha(K)|$.

٢٢) لتكن الحدودية $f(x) = x^4 - 2 \in Q[x]$.

آ) أثبت أن $f(x)$ انفصالية .

ب) بفرض K حقل تفريق للحدودية $f(x)$ أثبت أن K ممدد ناظمي للحقل Q وأوجد $[K:Q]$.

حـ) اكتب جدول الزمرة $G(K/Q)$.

٢٣) ليكن K حقل تفريق الحدودية $(x^{12}-1)$. على Q .

آ) أوجد $\Phi_{12}(x)$ على Q .

ب) اوجد $[K:Q]$

حـ) بين أنه إذا كان $\sigma \in G(K/Q)$ فإن σ^2 هو التماثل الداخلي المطابق على K .

د) إكتب جدول الزمره $G(K/Q)$.

٢٤) اكتب جدول الزمرة $G(K/Q)$ حيث K هو حقل تفريق الحـــدودية $(x^{20}-1)$ على Q .

* * *

المراجـــع

[1] ARTIN , E. , « Galois theary » ; Notre Dam 1953

[2] BIRKHOF , G . , Mac LANE , S. , « Algebra » 1979

[3] BOURBAKI , N. , « Algèbre » Paris 1970

[4] BROWKIN , J. , « Teoria Cial » Warszawa 1977

[5] COHN , P.M. , « Algebra Vol.II New york 1974

[6] DURBIN , J. , « Modern algebra » Newyork 1979

[7] FRALEIH , J. , « Afirst Course in abstract algebra » 1970

[8] GAAL , L. , « Classical Galois theory with examples » Newyork 1973

[9] GLEICHGEWICHT , B. , « Algebra » Warszawa 1976

[10] GOLDSTEIN , I. , « Abstract algebra » New Jersey 1973

[11] JACOBSON , N. , « Basic algebra » Vol. II San Francisco 1976

[12] LANG , S. « Algebra » Reding 1965

[13] MOSTOWSKI , A. , STARK , M. « Elementy algebry wyzszej » wyd V III Warszawa 1975

[14] NARKIEWICZ , W. , « Teoria liczb » Warszawa 1977

❋ ❋ ❋

الباب الثالث

الفضاءات الحلقية

الفصل الأول

الفضاءات المتجهية الحلقية

MODULE S

٣ ـ ١ ـ ١ تعاريف

بفرض أن R حلقة واحدية ، نقول عن المجموعة غير الخالية M أنها فضاء متجهي حلقي على R من اليسار اذا حققت الشروط التالية :

أولاً : M زمرة تبادلية بالنسبة لقانون تشكيل داخلي رمز له بالجمع .

ثانياً : M مزودة بقانون تشكيل خارجي من اليسار مجموعة مؤثراته R :

$$R \times M \longrightarrow M$$

$$(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$$

حيث يكون :

١ ـ $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \; ; \; (\forall x, y \in M), (\forall \lambda \in R)$

٢ ـ $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \; ; \; (\forall x \in M), (\forall \lambda, \mu \in R)$

٣ ـ $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x \; ; \; (\forall x \in M), (\forall \lambda, \mu \in R)$

٤ ـ $1_R\, x = x \quad (\forall x \in M)$

ونقول أن M فضاء حلقي على R من اليسار .

بطريقة مشابهة تكون M فضاء متجهياً حلقياً من اليمين على الحلقة الواحدية R

إذا حققت الشروط التالية :

أولاً : M زمرة تبادلية بالنسبة لقانون تشكيل داخلي رمز له بالجمع .

ثانياً : M مزودة بقانون تشكيل خارجي من اليمين مجموعة مؤثراته R :

$$M \times R \longrightarrow M$$
$$(x, \lambda) \longrightarrow x\lambda$$

حيث يكون :

١ - $(\forall \lambda \in R)$ ، $(\forall x, y \in M)$ ؛ $(x+y)\lambda = x\lambda + y\lambda$

٢ - $(\forall \lambda, \mu \in R)$ ، $(\forall x \in M)$ ؛ $x(\lambda+\mu) = x\lambda + x\mu$

٣ - $(\forall \lambda, \mu \in R)$ ، $(\forall x \in M)$ ؛ $(x\lambda)\mu = x(\lambda\mu)$

٤ - $(\forall x \in M)$ ، $1_R\, x = x$

تسمى عناصر الحلقة الواحدية R سلميات ، كما تسمى عناصر الفضاء المتجهي الحلقي M ، متجهات .

تكون M فضاء متجهياً إذا كانت الحلقة حقلاً F ونقول عندها أن M فضاء متجهي على الحقل F . (١)

نلاحظ مما سبق أن الفضاءات المتجهية الحلقية تعميم للفضاءات المتجهية على حقل F .

يعرف بعض المؤلفين الفضاء المتجهي الحلقي M على حلقة ما R ، على أننا وفيما يلي سنفرض أن R حلقة واحدية أي أننا سندرس الفضاءات المتجهية على حلقة واحدية R .

---

(١) راجع كتابي الجبر(٢) والجبر(٤) تأليف د. الهام حمصي

مثال (٣ ــ ١ ــ ١)

كل حلقة واحدية R هي فضاء متجهي حلقي على ذاتها حيث يكون قانون التشكيل الخارجي هو عملية الضرب الداخلية في R ، كذلك فــإن كل حقل فضاء متجهي على ذاته .

مثال(٣ ــ ١ ــ ٢)

كل زمرة جمعية تبادلية M هي فضاء متجهي حلقي على حلقة الاعداد الصحيحة Z حيث يكون قانون التشكيل الخارجي هو :

$$Z \times M \longrightarrow M$$

$$(m , x) \longrightarrow mx$$

وذلك بفرض أن :

$$m x = \begin{cases} x + x + \ldots + x & m \geqslant 1 \\ 0 & \text{إذا كان } m = 0 \\ |m| x & ; m \leqslant -1 \end{cases}$$

وبذلك تحوي نظرية الفضاءات الحلقية ، نظرية الزمر التبادلية .

مثال (٣ ــ ١ ــ ٣)

نرمز بـ R^S لمجموعة جميع التطبيقات لمجموعة S في الحلقة R . فـإذا كان f, g عنصرين من R^S فإن مجموعهما $f + g$ هو تطبيق لـ S في R معرف بـ $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ، $(\forall x \in S)$. وإذا كان $\lambda \in R$ فـإن λf تطبيق لـ S في R معرف بـ $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ ، $(\forall x \in S)$. إن R^S فضاء حلقي على R .

مثال (٣ ـ ١ ـ ٤)

بفرض أن R حلقة واحدية وأن n عدد صحيح موجب فإن R^n فضاء متجهي حلقي على R حيث يكون قانونا التشكيل الداخلي والخارجي معرفين كما يلي :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1 y_2 \ldots y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\lambda (x_1, x_2, \ldots x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

مثال (٣ ـ ١ ـ ٥)

إذا كانت R حلقة واحدية وكانت S حلقة جزئية من R وتحوي 1_R ، فإن R فضاء حلقي على S حيث يكون قانون التشكيل الخارجي هو عملية الضرب العادية في R .

٣ ـ ١ ـ ٢ الفضاء المتجهي الحلقي الجزئي The Submodule

تعريف

تكون المجموعة الجزئية غير الخالية N من الفضاء المتجهي الحلقي M على R، فضاء متجهياً جزئياً اذا واذا فقط كان :

آ . $x - y \in N$ ، $(\forall\ x, y \in N)$.

ب. $\lambda x \in N$ ، $(\forall\ x \in N)$ ، $(\forall \lambda \in R)$.

بتعبير آخر تكون N فضاء حلقيا جزئيـــاً اذا واذا فقط كانت N زمرة جزئية من الزمرة الجمعية M كما أن $\lambda x \in N$ $(\forall x \in N)$ ، $(\forall \lambda \in R)$ أي ان N مغلقة بالنسبة لقانون التشكيل الخارجي .

اذا كانت الحلقة R حقلا فاننا نحصل على مفهوم الفضـــاء المتجهي الجزئي المعرف سابقاً .

يمكن اختزال الشرطين السابقين إلى شرط واحد ، فنبرهن أنـه يكون N فضاء متجهياً حلقياً جزئياً من M اذا واذا فقط كان :

$$\lambda x+\mu y\in N\ ,\quad (\forall\, x, y\in N\,)\quad ,\ (\,\forall\lambda\ ,\ \mu\in R\,)$$

مثال (٣ ــ ١ ــ ٦)

كل زمرة جزئية من زمرة جمعية تبادلية G هي فضـــاء حلقي جزئي من الفضاء الحلقي G على Z .

مثال (٣ ــ ١ ــ ٧)

كل مثالي I من اليسار للحلقة الواحدية R هو فضاء حلقي جزئي من الفضاء الحلقي R على ذاته من اليسار .

كذلك فإن كل مثالي I من اليمين للحلقة الواحدية R هو فضاء حلقي جزئي من الفضاء الحلقي R على ذاته من اليمين .

مثال (٣ ــ ١ ــ ٨)

رأينا في المثال (٣ـ ١ ـ ٣) أن R^s هو الفضاء الحلقي على R لمجموعة تطبيقات S في الحلقة الواحدية R . لنرمز بـ $R^{(s)}$ لمجموعة التطبيقات $f\in R^s$ ، بحيث يكون عدد العناصر $f(x)\neq o$ ، $x\in S$ ، منتهياً . ان $R^{(s)}$ فضاء حلقي جزئي من الفضاء الحلقي R^s .

مثال (٣ ــ ١ ــ ٩)

بفرض أن N', N فضاءين حلقيين جزئيين من الفضـاء الحلقي M على الحلقـه الواحدية R ؛ فإن المجموعة والتي نرمز لها بـ $N + N'$ والمعينة بـ :

$$N + N' = \{\, n + n' \mid (\, n\ ,\ n'\,) \in N\times N'\,\}$$

هي فضاء جزئي من M .

مبرهنة (٣ ـ ١ ـ ١)

تقاطع جماعة فضاءات جزئية من الفضاء المتجهي الحلقي M على R هو فضاء حلقي جزئي من M .

البرهان :

لتكن $(M_i)_{i\in I}$ جماعة فضاءات جزئية حلقية من الفضاء المتجهي الحلقي M على R .

$$\forall x, y \in \bigcap_{i\in I} M_i \Rightarrow x, y \in M_i \;,\; \forall i\in I$$

$$\Rightarrow \lambda x+\mu y \in M_i \;,\; \forall i\in I$$

لأن M_i فضاء جزئي حلقي من M .

$$\Rightarrow \lambda x + \mu y \in \bigcap_{i\in I} M_i$$

وينتج بالتالي أن $\bigcap_{i\in I} M_i$ فضاء حلقي جزئي من M .

تعريف

إذا كانت S مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء الحلقي M على R . نقول عن $x\in M$ أنه تركيب خطي لعناصر S ، اذا وجدت $x_1, x_2, \ldots x_n \in S$ و $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n \in R$ بحيث يكون :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

ان تقاطع الفضاءات الجزئية من الفضاء الحلقي M والتي تحوي S هو فضاء حلقي جزئي من M وهو أصغر فضاء حلقي جزئي يحوي S ويرمز له بـ $<S>$ وهو مجموعة التراكيب الخطية لـ S . إذا كانت $S=\Phi$ فإن $<S>=\{0\}$.

إن الفضاء الجزئي المولد بـ $\underset{i\varepsilon I}{\cup} N_i$ مؤلف من المجاميع $\underset{i\varepsilon J}{\Sigma} n_i$ حيث يكون :

(I) $J\in P^*$ ، $n_i \in N_i$ ، $\forall\, i\in J$. ترمز $P^*(I)$ لمجموعة الاجزاء المنتهية وغير الخالية من I .

٣ ــ ١ ــ ٢ شبكة الفضاءات الجزئية .

بفرض أن M فضاء حلقي على الحلقة الواحدية R وأن $S(M)$ جماعة جميع الفضاءات الجزئية الحلقية من M مرتبة جزئياً بعلاقة الاحتواء . فـــإذا كانت $\{N_i : i\in J\}$ مجموعة فضاءات جزئية من M فإن $\underset{i\varepsilon J}{\cap} N_i$ فضاء جزئي حلقي من M (وإذا كانت $J=\Phi$ فان التقاطع الخال $\underset{i\varepsilon J}{\cap} N_i$ معرف بأنه M) ، وهو أكــبر فضاء جزئي حلقي من M محتوى في جميـــع الفضاءات الجزئية N_i أي أن $\underset{i\,\varepsilon J}{\cap} N_i$ هو الحد الأدنى الأعظمي لـ $\{N_i \mid i\in J\}$ بالنسبة لعلاقة الاحتواء . للمجموعة $\{N_i \mid i\in J\}$ حد أعلى أصغري وهو الفضاء الجزئي المولد باتحـــادها وهو $\underset{i\varepsilon J}{\Sigma} N_i$ ، وهو أصغر فضاء جزئي يحوي جميع الفضاءات الجزئية N_i ، بصورة خاصة فان الحد الأعلى الأصغري للفضاءين الجزئيين N_1, N_2 هو :

$$N_1 + N_2 = \{ n_1 + n_2 \mid n_1\in N_1 \;\; n_2 \in N_2 \}$$

وهكذا نجد أن المجموعة $S(M)$ مرتبة بعلاقة الاحتواء هي بحيث يكون لكل مجموعة جزئية منها حداً أعلى أصغرياً وحدا أدنى أعظمياً وينتج بالتالي أن $S(M)$ شبكة وتتصف هذه الشبكة بأنها قياسية كما تبين ذلك المبرهنة التالية :

مبرهنة (٣ ــ ١ ــ ٢)

اذا كان M فضاء متجهيا حلقيـــاً على R وبفرض ان A,B,C فضاءات حلقية جزئيه من M بحيث يكون $C\subseteq A$ ، لنبرهن ان :

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$$

البرهـان :

عرفنا في المثال (٣-١-٩) مجموع فضاءين متجهين جزئيين من M وبذلك يكون لدينا :

$$A \cap B \subseteq A \Rightarrow (A \cap B) + C \subseteq A + C$$

$$A \cap B \subseteq B \Rightarrow (A \cap B) + C \subseteq B + C$$

ومنه يكون :

$$(A \cap B) + C \subseteq (A + C) \cap (B + C)$$

$$(A \cap B) + C \subseteq A \cap (B + C)$$

لأن $C \subseteq A$ فرضاً .

من ناحية ثانية ، اذا كانت $a \in A \cap (B + C)$ فان $a \in A$ كما أن $a \in (B+C)$ وبالتالي نكتب a على الشكل $a = b + c$ حيث يكون $b \in B$ ، $c \in C$.

لدينا $b = a - c$ وبما أن $c \in C \subseteq A$ ينتج أن $b \in A$ وبالتالي يكون : $b \in A \cap B$ ومن ذلك ينتج أن :

$$a \in (A \cap B) + C$$

أي أن :

$$A \cap (B + C) \subseteq (A \cap B) + C$$

ومن الاحتوائين تنتج المساواة .

* * *

تمارين (٣ ـ ١)

٣ - ١ - ١ إذا كان M فضاء متجهياً حلقياً على R وبفرض أن S مجموعة جزئية غير خالية من M ، يعرف العادم لـ S في R والذي يرمز له بـ $Ann_R(S)$ كما يلي :

$$Ann_R(S) = \{ \lambda \in R ; (\forall x \in S), \lambda x = o \}$$

برهن أن $Ann_R(S)$ مثالي من اليسار لـ R كما أنه مثالي ثنائي الجانب لـ R اذا كان S فضاء حلقياً جزئياً من M .

٣ - ١ - ٢ يكون الفضاء المتجهي الحلقي M على R بسيطاً اذا كانت الفضاءات الحلقية الجزئية منه هي فقط $\{o\}, M$. برهن انه يكون M بسيطا اذا واذا فقط كان من أجل كل $o \neq x \in M$:

$$M = Rx = \{ r x \mid r \in R \}$$

٣ - ١ - ٣ بفرض أن R حلقة واحدية . برهن انه تكون R فضاء حلقيا بسيطا على R اذا واذا فقط كانت الحلقة R حقلا متخالفاً (حلقة قسمة) .

٣ - ١ - ٤ بفرض N, P, ψ فضاءات جزئية حلقية من الفضاء الحلقي M برهن أن:

$$N + (P \cap \psi) = (N + P) \cap (N + \psi)$$

$$(N \cap P) + (P \cap \psi) + (\psi \cap N) = (N + P) \cap (P + \psi) \cap (\psi + N)$$

الفصل الثاني

التشاكلات

Homomorphismes

٣ ــ ٢ ــ ١ تشاكل فضاءين حلقيين .

اذا كان N,M فضاءين متجهين حلقيين على الحلقة الواحدية R . يكون التطبيق $N \longrightarrow f: M$ تشاكلا (هومومورفيزم) اذا واذا فقط كان :

آ . $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ؛ $(\forall\, x,y \in M)$

ب. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ ؛ $(\forall x \in M), (\forall\, \lambda \in R)$

اذا كان R حقلا F ، سمي التشاكل بين الفضاءين المتجهين N,M على الحقل F ، تطبيقاً خطياً .

اذا كان التشاكل f متبايناً سمي تباكلا (مونومورفيزم) واذا كان غامراً سمي تغاكلا (ايبيمورفيزم) واذا كان f تقابلا سمي تماكلا (ايزومورفيزم) واخيراً سمي التشاكل $f: M \longrightarrow M$ تداكلا (اندومورفيزم) كما يسمى تذاكلا كل تداكل تقابلي .

يمكن ان نبرهن بسهولة ، انه يكون التطبيق $f: M \longrightarrow N$ تشاكلا اذا واذا فقط كان :

$$(\forall x, y \in M), (\forall \lambda, \mu \in R); f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

نلاحظ من التعريف السابق للتشاكل بين فضاءين حلقيين مايلي :

آ . $f(o_M) = o_N$

ب . $(\forall x \in M) ; f(-x) = -f(x)$

حـ . $(\forall x, y \in M) ; f(x - y) = f(x) - f(y)$

د . $(\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in M), (\forall \lambda_1, \lambda_1, \ldots \lambda_n \in R)$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

مثال (٣ ـ ٢ ـ ١)

لتكن الزمرتان الجمعيتان التبادليتان M,N واللتان يمكن اعتبارهما كفضاءين حلقيين على Z . ان كل تشاكل زمري $f: M \to N$ هو تشاكل بين الفضاءين الحلقيين N,M وذلك لأن :

$$(\forall x, y \in M) \qquad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

كذلك فان :

$$(\forall x \in M), (\forall n \in z^+), \quad f(nx) = nf(x)$$

اما إذا كانت n عدداً صحيحاً سالباً ، نضع $n = -n'$ فيكون لدينا :

$$f(nx) = f(-n'x) = -f(n'x) = -n' f(x)$$

$$= n f(x) \; ; \; (A\, n \in z^-)$$

مثال (٣ ـ ٢ ـ ٢)

اذا كان M فضاء متجهياً على الحلقة الواحدية R ، وبفرض أن n عدد صحيح موجب . ان M^n فضاء متجهي حلقي على R ؛ لنأخذ التطبيق :

$$f : M^n \longrightarrow M$$
$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longrightarrow x_i$$

ان التطبيق السابق تغاكل (ايبيمورفيزم) ويسمى بالاسقاط i لـ M^n على M .

مثال (٣-٢-٣)

اذا كان M فضاء متجهياً حلقياً على الحلقة الواحدية التبادلية R ، وبفرض أن $a \in R$ عنصر ثابت . ان التطبيق :

$$h_a : M \longrightarrow M$$
$$x \longrightarrow ax$$

هو تداكل (اندومورفيزم) على M ومن السهل التحقق أن :

$$h_a(x+y) = h_a(x) + h_a(y)$$
$$h_a(\lambda x) = \lambda\, h_a(x)$$

نرمز بـ $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ لمجموعة التشاكلات للفضاء الحلقي M في الفضاء الحلقي N ، كما سنرمز بـ $\mathrm{End}_R(M)$ لمجموعة التداكلات على الفضاء الحلقي M على R .

اذا كان $f,g \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ يعرف المجموع $f+g$ لهذين التشاكلين والمضاعف السلمي λf ، $(\lambda \in R)$ كما يلي :

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \; ; \; (\forall x \in M)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda\, f(x) \qquad ; \; (\forall x \in M)$$

مبرهنة (٣ - ٢ - ١)

اذا كان M,N فضاءين متجهيين حلقيين على R وبفرض ان $f,g \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ فان $f+g \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$.

على القارىء برهانها كتمرين وكما ورد في كتاب الجبر (٢) .

كذلك يمكن للقارىء ان يبرهن بسهولة على المبرهنات التالية :

مبرهنة (٣ ــ ٢ ــ ٢)

اذا كان $f \in Hom(M,N)$ ، $g \in Hom(N,P)$ حيث تكـون M, N, P ثــلاث فضاءات متجهية حلقية على حلقة واحدية R لنبرهن ان $gof \in Hom(M,P)$.

مبرهنة (٣ ــ ٢ ــ ٣)

اذا كان $f_1, f_2, f \in Hom(M,N)$ ، $g_1, g_2, g \in Hom(N,P)$

لنبرهن ان :

$$go(f_1 + f_2) = gof_1 + gof_2$$

$$(g_1 + g_2)of = g_1of + g_2of$$

$$go(-f) = (-g)of = -(gof)$$

اذا كانت الحلقة R واحدية وتبادلية وبفرض ان $f \in Hom_R(M,N)$ ، فــان $\lambda f \in Hom_R(M,N)$ وفي هذه الحالة تكون المجموعة $Hom_R(M,N)$ فضاء متجهياً حلقيا على الحلقة الواحدية التبادلية R . كذلك فانالمجموعة $End_R(M)$ زمرة تبادلية جمعية وهي ايضا حلقة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات ، بالاضافة الى ذلك فان :

$$(\forall \lambda \in R), \forall (f,g \in End_R(M)) ; \lambda(gof) = (\lambda g)of = go(\lambda f)$$

مما يجعل $End_R(M)$ ، تشكل جبرا تجميعياً وواحديا على R . نلاحظ ان المجموعــة $Hom(M,N)$ هي بشكل عام فضاء متجهي حلقي على Z إذا كانت الحلقة R غير تبادلية .

يجب ان يلاحظ ما يلي وذلك بفرض ان $f \in Hom(M,N)$, $g \in Hom(N,P)$:

١ ــ اذا كان كل مــن g, f تباكــلا (مونومورفيزم) فــان gof تباكــل (مونومورفيزم) ايضا .

٢ ــ اذا كان كل من g, f تفاكلا (ايبيمورفيزم) فــان gof تفاكــل (ايبيمورفيزم) ايضا .

٣ ـ اذا كان كل من g , f تماكلا (ايزومورفيزم) فان gof تماكل ايضا.

٤ ـ اذا كان gof ابيمورفيزم فان g ابيمورفيزم أيضا .

٥ ـ اذا كان $g\ o\ f$ تباكلا (مونومورفيزم) فان f مونومورفيزم ايضا .

٣ ـ ٢ ـ ٢ خواص التشاكلات بين فضائين حلقيين

مبرهنة (٣ ـ ٢ ـ ٤)

اذا كان M , N فضاءين متجهين على الحلقة الواحدية R ، وبفرض أن $f \in Hom_R(M, N)$ لنبرهن :

١ ـ اذا كان M_1 فضاء حلقيا جزئيا من M فان $f(M_1)$ فضاء حلقي جزئي من N .

٢ ـ اذا كان N_1 فضاء حلقيا جزئيا من N فان $f^{-1}(N_1)$ فضاء حلقي جزئي من M .

البرهان :

أولاً) نلاحظ أولاً أن $f(M_1) \neq \phi$ وذلك لأن $o \in M_1$ وبالتالي يحوي $f(M_1)$ العنصر $f(o_M) = o_N$.

$$\forall\, y_1, y_2 \in f(M_1)\ ,\ \exists\, x_1, x_2 \in M_1$$

$$y_1 = f(x_1) \qquad y_2 = f(x_2)$$

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

وبما أن $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in M_1$ ينتج أن $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in f(M_1)$.

ثانياً) نلاحظ هنا أيضاً أن $f^{-1}(N_1) \neq \phi$ لأن $o_M \in f^{-1}(N_1)$ حيث يكون $f(o_M) = o_N \in N_1$.

$$\forall\, x_1, x_2 \in f^{-1}(N_1) \Rightarrow f(x_1)\ ,\ f(x_2) \in N_1$$

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in N_1$$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in f^{-1}(N_1) \quad , \quad \forall\ \lambda_1 , \lambda_2 \in R \quad .$$

هذا يبرهن أن $f^{-1}(N_1)$ فضاء حلقي جزئي من M .

نتيجة

١ ـ اذا كان $M_1=M$ فإن $f(M) = I m f$ فضاء حلقي جزئي من N .

٢ ـ اذا كان $N_1 = \{o_N\}$ فان $f^{-1}(N_1) = f^{-1}\{o_N\}$ فضاء حلقي جزئي من M ، يسمي نواة f ويرمز لها بـ ker f (kernel f) أي نواة f .

مثال (٣ ـ ٢ ـ ٤)

ان مجموعة الأعداد الصحيحة Z فضاء متجهي حلقي على ذاتها ؛ وان التطبيق $f : Z \longrightarrow Z$ المعين بـ $f(x) = 4x$ تشاكل على Z ونلاحظ أن :

$$\operatorname{Im} f = \{ 4x \mid x \in Z\} = 4Z$$

$$\ker f = \{o\}$$

وكل منهما فضاء حلقي جزئي من الفضاء الحلقي Z .

كذلك فإن 2Z فضاء حلقي جزئي من Z صورته وفق هـذا التشاكل هي 8Z وهي بدورها فضاء حلقي جزئي من Z .

مبرهنة (٣ ـ ٢ ـ ٥)

يكون التشاكل $f : M \longrightarrow N$ متباينا اذا واذا فقط كان $\text{kre } f = \{o_M\}$.

البرهـان :

أولاً) إذا كان f متبايناً ، وبفرض أن $x \in \ker f$ يكون لدينا :

$$f(x) = f(o_M) = o_N$$

وبما ان f متباين ، فان $x = o_M$ أي أن $\ker f \subseteq \{o\}$.

كذلك فإن $\{o_M\} \subseteq \ker f$ وبالتالي تنتج المساواة .

ثانياً) إذا كان $\ker f = \{o_M\}$ وبفرض أن :

$$f(x_1) = f(x_2)$$

ينتج أن :

$$f(x_1 - x_2) = o_N \quad \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f = \{o_M\}$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = o$$

والتشاكل f متباين إذن .

ان المبرهنة التالية تحدد الصورة العكسية لـ $f(M_1)$ والصورة المباشرة لـ $f^{-1}(N_1)$ وذلك وفق التشاكل $f \in Hom(M,N)$.

مبرهنة (٣ ـ ٢ ـ ٦)

إذا كان M,N فضاءين متجهيين على الحلقة الواحدية R ، وبفرض ان $f \in Hom(M,N)$ وان M_1 فضاء حلقي جزئي من M لنبرهن أن :

$$f^{-1}[f\ M_1] = M_1 + \text{kre}\ f$$

كذلك اذا كان N_1 فضاء حلقياً جزئياً من N فان :

$$f[f^{-1} N_1] = N_1 \cap Im\ f$$

البرهان

إذا كان $a \in M_1$ فان $f(a) \in f(M_1)$ وبالتالي $a \in f^{-1}[f(M_1)]$ ، يكون لدينا إذن :

$$M_1 \subseteq f^{-1}[f(M_1)] \qquad (1)$$

كذلك فإن :

$$\{o_N\} \subseteq f(M_1) \Rightarrow f^{-1}\{o_N\} \subseteq f^{-1}[f(M_1)]$$

$$\ker f = f^{-1}\{o_N\} \subseteq f^{-1}[f(M_1)] \qquad (2)$$

من (1) , (2) ينتج أن :

$$M_1 + \ker f \subseteq f^{-1}[f(M_1)] \qquad (3)$$

من ناحية ثانية .

$$b \in f^{-1}[f(M_1)] \Rightarrow f(b) \subseteq f(M_1)$$

$$\Rightarrow \exists a \in M_1 , \; f(b) = f(a)$$

$$\Rightarrow f(b-a) = o \Rightarrow b - a \in \ker f$$

$$\Rightarrow b \in M_1 + \ker f$$

$$\Rightarrow f^{-1}[f(M_1)] \subseteq M_1 + \ker f \qquad (4)$$

من (3) , (4) تنتج المساواة :

$$f^{-1}[f(M_1)] = M_1 + \ker f$$

ثانياً)

$$b \in N_1 \cap \operatorname{Im} f \Rightarrow b \in N_1 \wedge b \in \operatorname{Im} f$$

$$\Rightarrow \exists a \in M , \; b = f(a) \in N_1 \Rightarrow a \in f^{-1} N_1)$$

$$\Rightarrow b = f(a) \in f[f^{-1}(N_1)]$$

$$N_1 \cap \operatorname{Im} f \subseteq f[f^{-1}(N_1)] \qquad (5)$$

من ناحية ثانية فإن :

$$f[f^{-1}(N_1)] \subseteq N_1$$

$$f^{-1}(N_1) \subseteq M \Rightarrow f[f^{-1}(N_1)] \subseteq f(M) = \operatorname{Im} f$$

يكون لدينا إذن :

$$f[f^{-1}(N_1)] \subseteq N_1 \cap \mathrm{Im} f \qquad (6)$$

من (5) و (6) تنتج المساواة :

$$f[f^{-1}(N_1)] = N_1 \cap \mathrm{Im} f$$

نتيجة

مع نفس شروط المبرهنة (٣ - ٢ - ٦) يكون :

$$f^{-1}[f(M_1)] = M_1$$

اذا وإذا فقط كان $\ker f \subseteq M_1$ كما يكون $f[f^{-1}(N_1)] = N_1$

اذا وإذا فقط كان $N_1 \subseteq \mathrm{Im} f$.

* * *

تمارين (٣ ــ ٢)

٣ - ٢ - ١ بفرض أن A,B,C ثلاث مجموعات غير خالية ، ليكن التطبيقان $f : A \longrightarrow B$ ، $g : A \longrightarrow C$ برهن على تكافؤ القضيتين التاليتين .

١ - يوجد تطبيق $h : B \longrightarrow C$ بحيث يكون $hof = g$

٢ - $\forall x , y \in A \ , \ f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)$

٣ - ٢ - ٢ بفرض أن A , B , C ثلاث مجموعات ، ليكن التطبيقان $f : B \rightarrow A$ ، $g : C \rightarrow A$ برهن على تكافؤ القضيتين التاليتين :

١ - يوجد تطبيق $h : C \longrightarrow B$ بحيث يكون $foh = g$.

٢ - $Img \subseteq Im f$

٣ - ٢ - ٣ بفرض أن A , B مجموعتان غير خاليتين ، ليكن التطبيق $f : A \rightarrow B$.

برهن على تكافؤ القضايا التالية :

١ - f متباين .

٢ - يوجد تطبيق $g : B \longrightarrow A$ بحيث يكون $gof = id_A$.

٣ - f عنصر منتظم من اليسار ، أي يكون من أجل أية مجموعة غير خالية C والتطبيقين $h , k : C \longrightarrow A$:

$$foh = fok \Rightarrow h = k$$

٣ - ٢ - ٤ بفرض أن A,B مجموعتان غير خاليتين ، ليكن التطبيق $f : A \rightarrow B$.

برهن على تكافؤ القضايا التالية :

١ - f غامر .

٢ - يوجد تطبيق $g : B \to A$ بحيث يكون $fog = id_B$.

٣ - f عنصر منتظم من اليمين ، أي يكون من أجل أية مجموعة غير خالية C والتطبيقين $h , k : B \to C$.

$$hof = kof \Rightarrow h = k$$

٣ - ٢ - ٥ بفرض أن A,B,C فضاءات حلقيـــة على R وإن $f \in Hom_R(A,B)$ تغاكل . $g \in Hom_R(A,C)$. برهن على تكافؤ القضيتين :

١ - يوجد تشاكل وحيد $h \in Hom(B,C)$ بحيث يكون $hof = g$.

٢ - $\ker f \subseteq \ker g$.

بالاضافة الى ذلك يكون f تباكلا اذا واذا فقط كان $\ker f = \ker g$,

٣ - ٢ - ٦ بفرض أن A,B,C فضاءات حلقيـة على R وأن $f \in Hom_R(B,A)$ تباكل ، $g \in Hom_R(C,A)$ برهن على تكافؤ القضيتين :

١ - يوجد تشاكل وحيد $h : C \to B$ بحيث يكون $foh = g$.

٢ - $Img \subseteq Imf$.

بالاضافة الى ذالـــك ، يكون h تغاكلا اذا واذا فقط كان $Img = Imf$.

٣ - ٢ - ٧ بفرض أن M,N فضاءان حلقيان على R برهن أنـه إذا كان M بسيطاً (راجع التمرين ٣ - ١ - ٢) فإن كل تشاكل غـير صفري $f : M \to N$ هو تباكل ، وإذا كان N بسيطاً فإن كل تشاكل غير صفري $f : N \to N$ هو تغاكل . نستنتج أنه إذا كان M بسيطا فان الحلقة $(End_R(M), +, .)$ للتشاكـــلات $g : M \to M$ حلقة قسمة .

٣ - ٢ - ٨ بفرض أن $f : M \to N$ تشاكل بين الفضاءين الحلقيين M , N .
برهن انه إذا كان A فضاء حلقياً جزئياً من M وكان B فضاء حلقياً جزئياً من N فان :

$$f[A \cap f^{-1}(B)] = f(A) \cap B$$

★ ★ ★

الفصل الثالث

فضاء الخارج الحلقي ومبرهنات التماكل

QUOTIENT MODULES & ISOMORPHISM THEOREMS

٣ ـ ٣ ـ ١ فضاء الخارج الحلقي .

ليكن M فضاء متجهيا على الحلقة الواحدية R كما ليكن N فضاء جزئياً منه. نعرف على M العلاقة الثنائية التالية E :

$$xEy \Leftrightarrow x - y \in N$$

ونكتب عندهـــا أن $x \equiv y(\text{mod } N)$ ونقرأ x تطابق y مقـــاس N .

وتتصف العلاقة السابقة E بما يلي :

آ . منعكسة $x \equiv x(\text{mod} N)$, $\forall x \in M$.

ب . متناظرة : $x \equiv y(\text{mod} N) \Rightarrow y \equiv x(\text{mod } N)$.

حـ متعدية : $x \equiv y(\text{mod } N) \wedge y \equiv z(\text{mod } N) \Rightarrow$

$$x \equiv z(\text{mod } N)$$

والعلاقة السابقة E هي علاقة تكافؤ ، تشكل صفوف تكافئها تجزئة لـ M ، يرمز لصف التكافؤ لـ $x \in M$ بـ $\frac{x}{N}$ وهي المجموعة المرافقـــة $x+N$ كما نرمز

لمجموعة صفوف التكافؤ بالرمز M/N . يسمى التطبيق :

$$\pi : M \longrightarrow M/N$$
$$x \longrightarrow x/N$$

بتطبيق الغمر القانوني .

تمهيد (٣ ـ ٣ ـ ١)

إذا كان N فضاء متجهيا جزئيا من الفضاء المتجهي الحلقي M على R لنبرهن أن علاقة التكافؤ E على M والمعينة ب :

$$xEy \Leftrightarrow x \equiv y \ (\mathrm{mod} N) \Leftrightarrow x - y \in N$$

متوائمة مع قانوني التشكيل الداخلي والخارجي على M/N والمعينين ب :

$$\left.\begin{array}{l} x/N + y/N = (x+y)/N \\ \lambda\,(x/N) = (\lambda x)/N \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall\, x/N,\, y/N \in M/N \\ \forall\, \lambda \in R \end{array}$$

البرهـــان :

يجب أن نبرهن أن :

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv x' \ (\mathrm{mod} N) \\ y \equiv y' \ (\mathrm{mod} N) \end{array}\right\} \Rightarrow x + y \equiv (x' + y') \ (\mathrm{mod} N)$$

$$x \equiv x' \ (\mathrm{mod} N) \Rightarrow \lambda x \equiv (\lambda x') \ (\mathrm{mod} N)$$
$$. \ \forall \lambda \in R$$

لدينا :

$$x \equiv x' \ (\mathrm{mod} N) \Leftrightarrow x - x' \in N$$

$$y \equiv y' \ (\mathrm{mod} N) \Leftrightarrow y - y' \in N$$

والتي نجد منها :

$$(x+y)-(x'+y')\in N \Rightarrow (x+y)\equiv(x'+y')\ (\mathrm{mod}N)$$

كذلك فإن :

$$x\equiv x'\ (\mathrm{mod}N) \Leftrightarrow x-x'\in N \Rightarrow$$
$$\lambda(x-x')\in N \Rightarrow \lambda x\equiv(\lambda x')\ (\mathrm{mod}N)$$

مبرهنة (٣ ـ ٣ ـ ١)

إذا كان N فضاء جزئيا من الفضاء المتجهي الحلقي M علـى R ، لنبرهن ان M/N فضاء متجهي حلقي على R بالنسبة لقانوني التشكيل الداخلي والخارجي المعرفين في التمهيد (٣ ـ ٣ ـ ١) كذلك فان التطبيق :

$$\pi : M \longrightarrow M/N$$

تفاكل (ايبيمورفيزم) . يسمى M/N فضاء الخارج لـ M علـى N .

البرهـان :

أولاً) إن $(M/N,+)$ زمرة تبادلية لأنه مهما كان $x/N, y/N, z/N\in M/N$ ومهما كان $\lambda\in R$ فإن :

آ ـ الجمع تجميعي :

$$(x/N+y/N)+z/N=(x+y)/N+z/N=$$
$$[(x+y)+z]/N=[x+(y+z)]/N=$$
$$x/N+(y+z)/N=x/N+(y/N+z/N)$$

ب ـ يوجد عنصر محايد وهو o/N لأن :

$$x/N+o/N=o/N+x/N=x/N$$

ﺣ - مهما يكن $x/N \in M/N$ فإن له نظير بالنسبة للجمع وهو $(-x)/N$
بحيث يكون :

$$x/N + (-x)/N = (-x)/N + x/N = o/N$$

د - الجمع تبادلي :

$$x/N + y/N = (x+y)/N = (y+x)/N = y/N + x/N$$

ثانيا) يحقق قانون التشكيل الخارجي من اليسار والذي مجموعة مؤثراتـه R المبادىء التالية وذلك مهما كان $\forall \lambda, \mu \in R, x/N, y/N \in M/N$:

آ . $$\lambda (x/N + y/N) = \lambda \frac{x}{N} + \lambda \frac{y}{N}$$

ب . $$(\lambda+\mu)(x/N) = \lambda \frac{x}{N} + \mu \frac{x}{N}$$

ﺣ . $$\lambda (\mu . x/N) = (\lambda\mu)(x/N)$$

د . $$1_R . (x/N) = (x/N)$$

ينتج مما سبق أن M/N فضاء متجهي حلقي على R .

نبرهن أن تطبيق الغمر القانوني $\pi : M \to M/N$ تشاكل وذلك لأن :

$$x \to x/N$$

$$\pi(x+y) = (x+y)/N = x/N + y/N$$
$$= \pi(x) + \pi(y)$$

كذلك فإن :

$$\pi(\lambda x) = (\lambda x)/N = \lambda . (x/N)$$
$$= \lambda \pi(x)$$

يضاف إلى ذلك أن π غامر ولذلك فهو تغاكل (إبيمورفيزم) .

نحاول الآن مطابقة الفضاءات الجزئية من فضاء الخارج الحلقي M/N مع الفضاءات الجزئية الحلقية من M ، وذلك ماتوضحه المبرهنة التالية :

مبرهنة (٣ ـ ٣ ـ ٢)

إذا كان N فضاءحلقياً جزئياً من الفضاء المتجهي على الحلقة الواحدية R. نبرهن على وجود تقابل يحافظ على الاحتواء بين مجموعة الفضاءات الجزئية من M/N وبين مجموعة الفضاءات الجزئية A من M بحيث يكون $N \subseteq A \subseteq M$.

البرهـــان :

ليكن A فضاء متجهياً جزئياً من M بحيث يكون $N \subseteq A \subseteq M$. إن المجموعة :

$$A/N = \{ a/N \mid a \in A \}$$

هي فضاء جزئي من فضاء الخارج الحلقي M/N وذلك لأن :

$$\forall \; a/N \,,\; b/N \in A/N \;;\; a/N + b/N = (a+b)/N \in A/N$$

وذلك لأن $a + b \in A$ (A فضاء جزئي من M) .

$$\forall \lambda \in R \,,\, \forall \; a/N \in A/N \;;\; \lambda \,.\, (a/N) = (\lambda a)/N \in A/N$$

لأن $\lambda a \in A$.

لنأخذ التطبيق f الذي يطبق مجموعة الفضاءات الجزئية A من M في فضاء الخارج الحلقي الجزئي A/N والمعين بـ $f(A) = A/N$. ان f متباين لأنـه إذا كان $f(A) = f(B)$ حيث يكون $N \subseteq A \subseteq B \subseteq M$ فإن $A/N = B/N$ وهـــذا يقتضي وجود $a \in A \,,\, b \in B$ بحيث يكون :

$$\Leftarrow a - b \in N \Leftarrow (a-b)/N = o/N \Leftarrow a/N = b/N$$

$$a = b + n \quad , \quad n \in N$$

وبما أن $n \in N \subseteq B$ إذن $a \in B \Leftarrow A \subseteq B$

بطريقة مشابهة نبرهن أن $B \subseteq A$ وبالتالي $A = B$ والتطبيق f متباين اذن .

لنبرهن أن f غامر ، أي إذا كان P فضاء جزئياً من M/N :

$$P = \{ x/N \mid x \in X \}$$

لنبرهن أن X فضاء جزئي حلقي من M ويحوي N .

$$\forall x,y \in X,\ \forall \lambda, \mu \in R \ ,\ \lambda (x/N) + \mu (y/N) =$$
$$(\lambda x)/N + (\mu y)/N = (\lambda x + \mu y)/N \in P$$

لأن P فضاء جزئي حلقي من M/N .

ومنه $\lambda x + \mu y \in X$ أي أن x فضاء جزئي من M .

$$\forall n \in N \ ,\ \frac{n}{N} = \frac{0}{N} \in P \Rightarrow n \in X \Rightarrow N \subseteq X$$

أي أن $f(X) = P$ والتطبيق f غامر . نلاحظ أن f هو المقصور لتطبيق الغمر القانوني π على مجموعة الفضاءات الجزئية من M والتي تحوي N .

نتيجة (٣ ــ ٣ ــ ١)

كل فضاء جزئي من فضاء الخارج الحلقي M/N هو من الشكل A/N بحيث يكون $N \subseteq A \subseteq M$.

٣ ــ ٣ ــ ٢ مبرهنات التماكل (الايزومورفيزم)

سندرس الآن بعض النتائج الخاصة بالتماكل بين فضاءين حلقيين .

مبرهنة التماكل الاولى (٣ ــ ٣ ــ ٣)

إذا كان $f: M \longrightarrow N$ تشاكلا للفضاءين الحلقيين M, N لنبرهن أن

$$M/\ker f \approx \mathrm{Im}\, f$$

البرهان :

ليكن M' فضاء جزئياً من M بحيث يكون $M' \subseteq \ker f$ ولنأخذ التطبيق :

$$\zeta : M/M' \longrightarrow \mathrm{Im}\, f$$

$$x/M' \longrightarrow f(x) \quad , \quad x \in M$$

هذا التطبيق تشاكل لأن :

$$\zeta[\lambda(x/M') + \mu(y/M')] = \zeta[(\lambda x + \mu y)/M']$$

وبما أن $x, y \in M$ إذن $\lambda x + \mu y \in M$ وبالتالي $(\lambda x + \mu y)/M' \in M/M'$. إن نواة ζ هي $\ker f/M'$ ، كذلك واضح أن ζ غامر اذن فهو إيبيمورفيزم.

إذا أخذنا $M' = \ker f$ يصبح عندها ζ متبايناً وبالتالي يصبح تماكلا أي أن $M/\ker f \approx \mathrm{Im} f$.

مبرهنة التماكل الثانية (٣ ــ ٣ ــ ٤)

إذا كان P, N فضاءين جزئيين من الفضاء الحلقي M على R بحيث يكون $P \subseteq N$ لنبرهن ان : $M/N \approx (M/P) / (N/P)$.

البرهــان :

لنأخذ التطبيق :

$$h : M/P \longrightarrow M/N$$

$$x/P \longrightarrow x/N$$

من الواضح أن h تغاكل نواته N/P وبتطبيق المبرهنة الأولى في التماكل ينتج أن :

$$(M/P)/(N/P)\approx M/N$$

وأخيراً نأت إلى المبرهنة الثالثة في التماكل وهي كما يلي .

مبرهنة التماكل الثالثة (٣ ــ ٣ ــ ٥)

إذا كان A,B فضاءين جزئيين من الفضاء الحلقي M على الحلقة الواحدية R لنبرهن أن :

$$(A+B)/A\approx B/(A\cap B)$$

البرهــان :

لنأخذ الغمر القانوني $\pi: A+B\longrightarrow (A+B)/A$ والتباكل (المونومورفيزم): $f: B\longrightarrow A+B$. ان πof تغاكل نواته هي $A\cap B$ وصورته هي $(A+B)/A$ وبتطبيق المبرهنة الأولى في التماكل ينتج أن :

$$B/(A\cap B)\approx (A+B)/A$$

بعد ذلك نأت إلى مبرهنة Zassenhaus التالية :

مبرهنة Zassenhaus (٣ ــ ٣ ــ ٦)

إذا كانت N, P, N', p' فضاءات جزئية من الفضــاء الحلقي M على R بحيث يكون $N\subseteq P$ و $N'\subseteq P'$ لنبرهن أن :

$$\frac{N+(P\cap P')}{N+(P\cap N')}\approx\frac{P\cap P'}{(N\cap P')+(N'\cap P)}\approx\frac{N'+(P\cap P')}{N'+(N\cap P')}$$

البرهــان :

بما أن $P\cap N'\subseteq P\cap P'$ يكون لدينا :

$$(P\cap P')+N+(P\cap N')=(P\cap P')+N$$

وبتطبيق المبرهنة (٣ - ١ - ٢) نجد :

$$(P \cap P') \cap [N + (P \cap N')] = (P \cap P' \cap N) + P \cap N'$$
$$= (P' \cap N) + (P \cap N')$$

نطبق المبرهنة الثالثة في التماكل (٣ - ٣ - ٥) وذلك بأخذ $A = P \cap P'$ و $B = N + (P \cap N')$ نحصل على التماكل :

$$\frac{P \cap P'}{(N \cap P') + (N' \cap P)} \approx \frac{N + (P \cap P')}{N + (P \cap N')}$$

بطريقة مشابهة نبرهن على التماكل الثاني .

★ ★ ★

تمارين (٣ ــ ٣)

٣ ـ ٣ ـ ١ بفرض أن R حلقة واحدية برهن أن التطبيق :

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1, x_2)$$

تغاكل للفضاء الحلقي R^3 في R^2 ، اذا رمزنا بـ $D \subset R^3$ للمجموعة :

$$D = \{ (0, 0, x_3) \mid x_3 \in R \}$$

استنتج أن D فضاء حلقي جزئي من R^3 وأن $R^3/D \approx R^2$.

٣ـ٣ـ٢ بفرض أن A, A' فضاءان حلقيان وأن $f \in Hon(A, A')$ برهن على مايلي :

١ ـ إذا كان f تباكلا فإن $A \approx \ker(A' \longrightarrow A'/Imf)$.

٢ ـ إذا كان f تغاكلا فــإن $A' \approx \operatorname{coker}(\ker f \longrightarrow A)$ حيث $\operatorname{coker} f = A'/Imf$.

★ ★ ★

الفصل الرابع

المتتاليات التامة

EXACT SEQUENCES

٣ ـ ٤ ـ ١ المخططات التبادلية .

إذا كان لدينا مخططاً من المجموعات والتطبيقات ، نقول عن هذا المخطط أنه تبادلي إذا كانت التطبيقات المركبة اعتباراً من نقطة انطلاق واحدة إلى نقطة وصول واحدة متساوية .

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

المخطط (١)

مثال ذلك إن المثلث في المخطط (١) تبادلي اذا واذا فقط كان :

$$g = h \circ f$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \end{tikzcd}$$

المخطط (٢)

كذلك يكون المخطط (٢) تبادلياً إذا واذا فقط كان :

$$f' \circ \alpha = \beta \circ f \ , \quad g' \circ \beta = \gamma \circ g$$

أي اذا واذا فقط كان كل مربع تبادلياً .

سنطبق المخططات التبادلية فيما يلي في المتتاليات التامة

٣ ـ ٤ ـ ٢ المتتاليات التامة

إن متتالية الفضاءات الحلقية على R والتشاكلات هي المخطط التالي

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

وتكون هذه المتتالية تامة بالتعريف اذا وفقط اذا كان :

$$\ker f_i = \operatorname{Im} f_{i-1}$$

وذلك مهما كان الدليل i .

مبرهنة (٣ ـ ٤ ـ ١)

إذا كان M,N فضاءين متجهيين على الحلقة الواحدية R وكان $f\in Hom(M,N)$ وبفرض :ن $o \longrightarrow M$, $N \longrightarrow o$ يرمزان للتشاكل الصفري والاحتواء القانوني على الترتيب ، لنبرهن :

آ ـ f تباكل إذا وإذا فقط كانت المتتالية $o \rightarrow M \xrightarrow{f} M$ تامة

ب ـ f تفاكل إذا وإذا فقط كانت المتتالية $M \xrightarrow{f} N \rightarrow o$ تامة

جـ ـ f تماكل إذا وإذا فقط كانت المتتالية :

$$o \rightarrow M \xrightarrow{f} N \rightarrow o$$

تامـة

البرهـــان :

آ ـ تكون المتتالية $o \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ تامة اذا واذا فقط كان $\ker f = \{o\}$ أي إذا واذا فقط كان f تباكلا (مونومورفيزماً) .

ب ـ تكون المتتالية $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow o$ تامة اذا واذا فقط كان $Imf = N$

اي اذا وإذا فقط كان f تغاكلا .

حـ – تكون المتتالية $o \to M \xrightarrow{f} N \to o$ تامـــة اذا واذا فقط كانت المتتاليتان $o \to M \xrightarrow{f} N$ ، $M \xrightarrow{f} N \to o$ تامتين أي اذا واذا فقط كان f متباينا وغامراً أي واذا فقط كان f تقابلا بالاضافـة الى كونه تشاكلا أي إذا واذا فقط كان f تماكلا .

نتيجه (٣ – ٤ – ١)

إذا كان A فضاء جزئياً من الفضاء المتجهي M على الحلقة الواحدية R فإن المتتالية :

$$o \to A \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/A \to o$$

تامة حيث يرمز i لتطبيق التباين القانوني ويرمز π لتطبيق الغمر القانوني .

البرهــان :

إن π غامر وبالتالي فالمتتالية $M \to M/A \to o$ تامة كذلك فإن المتتالية $A \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/A$ تامة لأن $\mathrm{Im}\, i = \ker \pi = A$ ، واخيراً وبما أن i متباين فالمتتالية $o \to A \xrightarrow{i} M$ تامة وبالتالي فالمتتالية المفروضة تامة .

نتيجه (٣ – ٤ – ٢)

اذا كان M, N فضاءين حلقيين على R وكان $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$ فإن المتتالية التالية تامة :

$$o \to \ker f \xrightarrow{i} M \to N \xrightarrow{\pi_N} N/f(M) \to o$$

البرهــان :

المتتالية $o \to \ker f \xrightarrow{i} M$ تامة لأن i متباين .

والمتتالية $\ker f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N$ تامة لأن $\operatorname{Im} i = \ker f$.

كذلك فالمتتالية $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} N/f(M)$ تامة لأن $\ker \pi_N = \operatorname{Im} f$ واخــيراً فإن المتتالية $N \xrightarrow{\pi_N} N/f(M) \longrightarrow o$ تامة لأن π_N غامر وينتج بالتالي أن المتتالية المفروضة تامة .

مثال (٣ ـ ٤ ـ ١)

إذا كان V_1, V_2 فضاءين متجهين على حقل k برهن ان المتتاليـــة $o \longrightarrow V_1 \xrightarrow{i_1} V_1 \times V_2 \xrightarrow{p_2} V_2 \longrightarrow o$ تامة حيث يكون :

$$i_1 : V_1 \longrightarrow V_1 \times V_2$$
$$x_1 \longrightarrow (x_1, o)$$

$$p_2 : V_1 \times V_2 \longrightarrow V_2$$
$$(x_1, x_2) \longrightarrow x_2$$

البرهـــان :

ان i_1 متباين فالمتتالية $o \longrightarrow V_1 \xrightarrow{i_1} V_1 \times V_2$ تامة كذلـــك فإن p_2 غامر والمتتاليـــة $V_1 \times V_2 \xrightarrow{p_2} V_2 \longrightarrow o$ تامة وأخيراً فإن المتتالية $V_1 \xrightarrow{i_1} V_1 \times V_2 \xrightarrow{p_2} V_2$ تامة لأن $\operatorname{Ker} p_2 = \operatorname{Im} i_1$ وبالتالي تكون المتتالية المفروضة تامة .

تسمى المتتالية التامة من الشكل $o \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow o$ متتاليـــة قصيرة short sequence وهي ذات أهمية خاصة في متتاليات زمر التشاكلات .

ملاحظة هامـــة

يلاحظ في المتتاليات التامة أن تركيب تشاكلين متتاليين هو التشاكل الصفري ، وذلك لأنه إذا كانت المتتالية :

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

تامة فان $\ker g = \operatorname{Im} f$ وبالتالي يكون لدينا :

$$\forall x \in M\ ,\ (gof)(x) = g(f(x)) = o$$

لأن $f(x) \in \operatorname{Im} f = \ker g$. وينتج عن ذلك أن $gof = o$ على أنه يجب أن يلاحظ انه إذا كان $gof = o$ فإن ذلك لايؤدي إلى كون المتتالية السابقة تامـــة وانما إلى كون $\operatorname{Im} f \subseteq \ker g$. تسمى المتتالية $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ والتي يكون فيها $gof = o$ ، متتالية نصف تامة semi – exact sequence .

إذا كان $f \in \operatorname{Hom}(M,N)$ فإن الصورة المرافقـــة لـ f (coimagef) والتي يرمز لها بـ coim f معرفة بـ :

$$\operatorname{coim} f = M / \ker f$$

كذلك تعرف النواة المرافقـة لـ f (co kernel f) والتي يرمز لهـــا بـ coker f كما يلي :

$$\operatorname{coker} f = N / \operatorname{Im} f$$

٤ ـ ٢ المبرهنات الأساسية في المتتاليات التامة

سندرس الآن مبرهنة التمهيدات الاربعة ثم مبرهنة التمهيدات الخمسة .

مبرهنه التمهيدات الاربعة (٣ ـ ٤ ـ ٢)

بفرض أن المخطط (٣) من الفضاءات الحلقية على R والتشاكلات :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[d, dash, "\delta"'] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D'
\end{tikzcd}$$

المخطط (٢)

تبادلي وإن سطريه متتاليتان تامتان برهن ان :

آ ـ إذا كان α,γ تغاكلين وكان δ تباكلا فان β تغاكل .

ب ـ إذا كان α تغاكلا وكان δ β تباكلين فان γ تباكل .

البرهـــان :

١ ـ بفرض أن $b' \in B'$ وأن γ تغاكل ، فانه يوجد عنصر $c \in C$ بحيث يكون $\gamma(c) = g'(b')$. ولكن $\delta oh = h' o \gamma$ ينتج عن ذلك :

$$(\delta oh)(c) = (h'o\gamma)(c) = (h'og')(b') = o \quad (1)$$

$h'og' = o$ لأن السطر السفلي متتالية تامة ، وبالتالي ينتج من (1) أن :

$$h(c) \in \ker\delta = \{o\} \Rightarrow h(c) = o \Rightarrow c \in \ker h = \operatorname{Im} g \Rightarrow$$

يوجد $b \in B$ بحيث يكون $c = g(b)$.

$$g'(b') = \gamma(c) = (\gamma og)(b) = (g'o\beta)(b) \Rightarrow$$

$$g'(b' - \beta(b)) = o \Rightarrow b' - \beta(b) \in \ker g' = \operatorname{Im} f'$$

وبالتالي يوجد $a' \in A$ بحيث يكون : $b' - \beta(b) = f'(a')$

وبما أن α غامر فإنه يوجد عنصر $a \in A$ بحيث يكون $a' = \alpha(a)$ ويصبح لدينا :

$$b' - \beta(b) = (f'o\alpha)(a) = (\beta of)(a) \Rightarrow$$

$$b' = \beta[b + f(a)] \in \operatorname{Im}\beta$$

وهذا يبرهن أن β تغاكل .

(ب) إذا كان $c \in \ker\gamma \Leftarrow \gamma(c) = o$ ولدينا :

$$(\delta oh)(c) = (h'o\gamma)(c)$$

اذن يصبح لدينا :

$$\delta(h(c)) = o \Rightarrow h(c) \in \ker \delta = \{o\} \Rightarrow h(c) = o$$

$$\Rightarrow c \in \ker h = \operatorname{Im} g \Rightarrow \exists\, b \in B,\ c = g(b)$$

$$o = \gamma(c) = (\gamma o g)(b) = (g' o \beta)(b)$$

$$\Rightarrow \beta(b) \in \ker g' = \operatorname{Im} g' \Rightarrow$$

$$\exists\, a' \in A',\ \beta(b) = f'(a')$$

وبما أن α تغاكل اذن $a' = \alpha(a)$ من أجل عنصر $a \in A$

$$\beta(b) = (f' o \alpha)(a) = (\beta o f)(a) \Rightarrow$$

$$\beta\,[b - f(a)] = o \Rightarrow b - f(a) \in \operatorname{kre} \beta = \{o\} \Rightarrow$$

$$b - f(a) = o \Rightarrow b = f(a) \Rightarrow$$

$$c = g(b) = (g o f)(a) = o \Rightarrow \ker\gamma = \{o\}$$

وبالتالي فإن γ تباكل .

مبرهنة التمهيدات الخمسة (٣ ــ ٤ ــ ٣)

بفرض ان المخطط التالي من الفضاءات الحلقية على R بالتشاكلات

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"'] & D \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4"'] & E \arrow[d, "\alpha_5"'] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

المخطط (٤)

تبادلي وان سطريه متتاليتان تامتان . برهن انـه إذا كانت $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ تماكلات فإن α_3 تماكل (ايزومورفيزم) .

البرهــان :

بتطبيق المبرهنة (٣ - ٤ - ٢ - آ) على المربعات الثلاثة اليمنى نجـد أن α_3

تغاكل وبتطبيق المبرهنة (٣ ـ ٤ ـ ٢ ـ ب) على المربعات الثلاثة اليسرى نجد أن α_3 تباكل ؛ ينتج إذن أن α_3 تماكل .

نتيجه

بفرض أن المخطط التالي من الفضاءات الحلقية على R والتشاكلات :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

المخطط (٥)

تبادلي وان سطرية متتاليتان تامتان . برهن أنه إذا كان α و γ تماكلين فإن β تماكل كذلك .

على القارىء برهانها كتمرين .

٣ ـ ٤ ـ ٣ زمر التشاكلات

بفرض أن A,B فضاءان متجهيان على الحلقة الواحدية R وان $f\in Hom_R(A,B)$ فإذا كان M فضاء حلقياً ما على R يعرف التطبيق :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\theta"'] \arrow[dr, "f\circ\theta"] & \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

المخطط (٦)

$$\begin{tikzcd}
& M \\
A \arrow[ur, "\theta\circ f"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[u, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

المخطط (٧)

$$Hom\ (M,A) \xrightarrow{f_*} Hom\ (M,B)$$

$$\theta \longrightarrow fo\theta = f_*(\theta)$$

يسمى f_* التشاكل المستخلص من f .

كذلك يعرف التطبيق :

$$Hom(A,M) \longleftarrow Hom(B,M)$$

$$\theta of = f^*(\theta) \longleftarrow \theta$$

ويسمى أيضاً f^* التشاكل المستخلص من f .

مبرهنة (٣ ـ ٤ ـ ٤)

بفرض أن :

(1) $$o \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow o$$

متتالية تامة من الفضاءات الحلقية على R والتشاكلات وبفرض أن M فضاء حلقي ما على R لنبرهن ان المتتاليتين :

(2) $$o \longrightarrow Hom(M,A') \xrightarrow{f_*} Hom(M,A) \xrightarrow{g_*} Hom(M,A'')$$

(3) $$Hom(A',M) \xleftarrow{f^*} Hom(A,M) \xleftarrow{g^*} Hom(A'',M) \longleftarrow o$$

المستخلصتين من المتتالية المفروضة تامتان :

البرهـــان :

لكي نبرهن أن (2) تامة يجب أن نبرهن :

(آ) f_* تباكل ، (ب) $Im f_* \subseteq Ker g_*$. (جـ) $ker g_* \subseteq Im f_*$

ولنبدأ بـ (آ)

$\theta \in ker f_* \Leftarrow f_*(\theta) = o \Leftarrow fo\theta = o_{MA}$ ولكن f متباين إذن f قابل

للاختصار من اليسار وبالتالي $\theta = o$ أي f_* متباين .

(ب) إذا كان $\theta \in Im f_*$ $\Leftarrow$ $\exists\ \theta' \in Hom(M,A')$ بحيث يكون :

$\theta = f_*(\theta') \Leftarrow \theta = fo\theta'$. نحسب $g_*(\theta)$

$$g_*(\theta) = go\theta = go\,(fo\theta') = (gof)o\ \ \theta'$$

ولكن $gof = o_{A'A''} \Leftarrow g_*(f_*(\theta')) = g_*(\theta) = o_{MA''}$

ومنه يكون $\theta \in \ker g_* \Leftarrow Imf_* \subseteq kerg_*$

(ج) $\theta \in ker\, g_* \Leftarrow g_*(\theta) = o \Leftarrow go\,\theta = o$

$$\forall\, m \in M,\ g(\theta(m)) = o \Rightarrow \theta(m) \in kerg = Imf$$

$$\Rightarrow \exists\ x' \in A' \quad , \quad \theta(m) = f(x')$$

وبما أن f متباين إذن x' وحيد .

نعرف التطبيق $\theta' : M \longrightarrow A'$ بحيث يكون $\theta'(m) = x'$. إن θ' تشاكل كذلك فإن :

$$\theta(m) = f(x') = (fo\,\theta')(m) \quad \forall m \in M$$

$$\theta = fo\theta' \Rightarrow \theta = f_*(\theta') \Rightarrow \theta \in Imf_* \Rightarrow$$

$$Ker\, g_* \subseteq Imf_*$$

أما البرهان بان المتتالية (3) تامة فهو ثنوي البرهان السابق ويترك القارىء كتمرين .

مبرهنة (٣ ـ ٤ ـ ٥)

(آ) لتكن المتتالية :

$$A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow o \qquad (4)$$

من الفضاءات الحلقية والتشاكلات . تكون المتتالية (4) تامة إذا وإذا فقط كانت المتتاليـة (5) :

$$o \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(A'',M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}\,(A,M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}\,(A',M)$$

تامة مهما كان الفضاء الحلقي M **على** R .

(ب) لتكن المتتالية :

$$o \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \qquad (6)$$

من الفضاءات الحلقية والتشاكلات ، تكون المتتالية (6) تامة إذا وإذا فقط كانت المتتاليـة (7) :

$$o \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(M,A') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(M,A) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(M,A'') \qquad (7)$$

تامة مهما يكن الفضاء الحلقي M **علـى** R .

البرهـان :

ان لزوم الشرط صحيح في كل من آ ، ب وذلك بتطبيق المبرهنة (٣-٤-٤) . سنبرهن فقط على كفاية الشرط في آ) فقط .

اذا كانت المتتالية (5) تامة $\Leftarrow$ g^* متباين أي :

$$\theta'',\mu'' \in \mathrm{Hom}\,(A'',M)\,,\ g^*\,(\theta'') = g^*\,(\mu'') \Rightarrow \theta'' = \mu''$$

أي :

$$\theta'' o g = \mu'' o g \Rightarrow \theta'' = \mu''$$

وبالتالي g غامر (راجع المسألة (٣ - ٢ - ٤)) .

كذلك فإن $f^* o g^* = o \Leftarrow (f^* o g^*)(\theta'') = \theta'' o (gof) = o$

وذلك مهما كان $\theta'' \in Hom(A'', M)$ ومهما تكن M . نأخـذ $M = A''$ و $\theta'' = id_{A''}$ ينتج لدينا :

$$gof = o \Rightarrow Imf \subseteq kerg$$

إذا أخذنا $M = A/Imf$ ، $\theta : A \longrightarrow M$ تطبيق الغمر القانوني . إن $ker f^* = Img^*$ فإذ كان $\theta \in ker f^*$ ينتج :

$$\exists \theta'' \in Hom(A'', M) ، \theta = g^*(\theta'') \Leftarrow \theta \in Img^*$$

ومنه :

$$\theta = \theta'' og$$

$$\theta(x) = (\theta'' og)(x) = o \Leftarrow g(x) = o \Leftarrow x \in kerg$$

$$x \in ker\theta = Imf \Leftarrow \theta(x) = o \Leftarrow$$

إذن :

$$ker g \subseteq Imf$$

أي أن :

$$kerg = Imf$$

والمتتالية (4) تامة .

أما برهان كفاية الشرط من ب) فهو ثنوي آ .

★ ★ ★

تمــارين (٣ ـ ٤)

٣ ـ ٤ ـ ١ لتكن الفضاءات المتجهية A,B,C,A',B',C' على الحقل K .

آ ـ بفرض أن $f \in Hom(A,B)$, $f' \in Hom(A',B')$ يعرف

$f \times f' \in Hom(A\times A' \quad B\times B')$ بـ :

$$(f\times f')(a,a') = (f(a), f(a'))$$

برهن أنه إذا كانت المتتاليتان :

$$o \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to o$$

$$o \to A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \to o$$

تامتين فان المتتالية :

$$o \to A\times A' \xrightarrow{f\times f'} B\times B' \xrightarrow{g\times g'} C\times C'' \to o$$

تامة .

٣ ـ ٤ ـ ٢ بفرض أن المخطط التالي من الفضاءات الحلقية والتشاكلات تبــادلي

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

المخطط (٨)

كما أن سطريه متتاليتان تامتان برهن أن :

(آ) إذا كانت f', γ, α تباكلات فإن β تباكل أيضاً .

(ب) إذاً كانت α,γ,g تغاكلات فإن β تغاكل أيضاً .

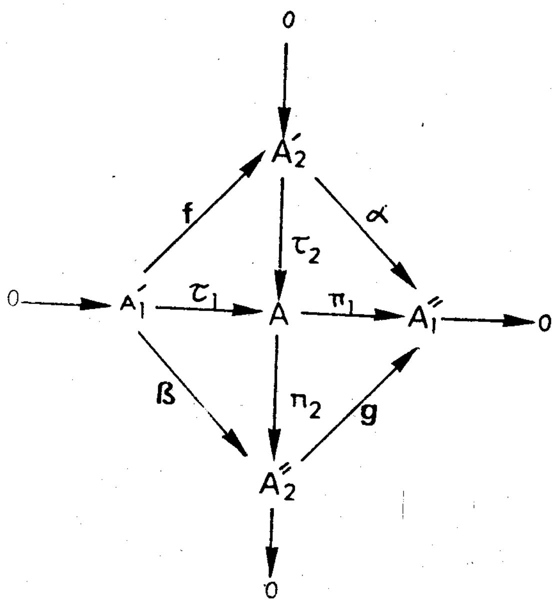
٣ - ٤ - ٣ - بفرض أن المخطط التالي من الفضاءات الحلقية والتشاكلات تبادلي كما أن α,β,γ تماكلات .

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \end{tikzcd}$$

المخطط (٩)

برهن انه يكون السطر العلوي متتالية تامة اذا وإذا فقط كان السطر السفلي متتالية تامة .

٣ - ٤ - ٤ - ليكن المخطط التالي من الفضاءات الحلقية والتشاكلات برهن أنه إذا



المخطط (١٠)

كان المخطط السابق تبادلياً وكان السطر والعمود متتاليتين تامتين برهن على مايلي :

١ - β , α تشاكلان صفريان .

٢ - g , f تماكلان .

٣ - ٤ - ٥ - بفرض أن A,B,C فضاءات حلقية على R وان $f \in Hom_R(A, B)$ ، $g \in Hom_R(B, C)$. برهن أن :

١ - $(gof)_* = g_* o f_*$

٢ - $(gof)^* = f^* o g^*$

كذلك بفرض أن $h \in Hom_R(A, B)$ ، $k \in Hom_R(B, C)$

برهن أن :

٣ - $(f+h)_* = f_* + h_*$

$(g+k)^* = g^* + k^*$

★ ★ ★

الفصل الخامس

الجداء والمجموع المباشر لفضاءات حلقية

PRODUCTS AND DIRECT SUM OF MODULES

٣ ـ ٥ ـ ١ جداء جماعة فضاءات حلقية

لتكن $(M_i)_{i\in I}$ جماعة فضاءات حلقية على الحلقة الواحـــدية R ، وليكن $\prod_{i\in I} M_i$ الجداء الديكارتي لهذه الجماعة أي أن :

$$\prod_{i\in I} M_i = \{ (m_i)_{i\in I} \mid m_i \in M_i \}$$

نزود $\prod_{i\in I} M_i$ بقانون تشكيل داخلي هو الجمع وآخر خارجي بمجموعة مؤثراته R معينين كما يلي :

$$(m_i)_{i\in I} + (n_i)_{i\in I} = (m_i + n_i)_{i\in I}$$

$$\lambda (m_i)_{i\in I} = (\lambda m_i)_{i\in I}$$

ومن السهل برهان أن $\prod_{i\in I} M_i$ فضاء حلقي على R .

نعرف من أجل كل $j \in I$ التطبيق .

$$pr_j : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j$$

المعين بـ .

$$pr_j((m_i)_{i\in I}) = m$$

من السهل أيضاً ملاحظة ان التطبيق pr_j تشاكل ويسمى الاسقاط القانوني j .

مبرهنة (٣ ــ ٥ ــ ١)

يكون الفضاء الحلقي P على R جداء لجماعة الفضاءات الحلقية R اذا واذا فقط أمكن ايجاد جماعة من التشاكلات $(f_i)_{i\in I}$ ، $f_i : P \longrightarrow M_i$ بحيث يكون من اجل كل فضاء حلقي X على R وكل جماعة من التشاكلات $(g_i)_{i\in I}$ ، $g_i : X \rightarrow M_i$ يوجد تشاكل وحيد $h : X \rightarrow P$ بحيث يكون المخطط التالي (٥ ــ ١) :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g_i"] \\ P \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

المخطط (٥ - ١)

تبادلياً ، يسمى $(P, (f_i)_{i\in I})$ جداء الجماعة $(M_i)_{i\in I}$.

البرهـــان :

أولاً) إذا كان $P \approx \prod_{i\in I} M_i$ ، لنأخذ جماعة التشاكلات $(pr_i)_{i\in I}$ وليكن

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g_i"] \\ \prod_{i\in I} M_i \arrow[r, "pr_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

المخطط (٥ - ٢)

X فضاء حلقياً ما على R كما لتكن جماعة التشاكلات $(g_i)_{i\epsilon I}$ ؛ $g_i : X \rightarrow M_i$
ولنعرف التطبيق :

$$h : x \rightarrow \prod_{i\epsilon I} M_i$$

المعين بـ :

$$h(x) = (g_i(x))_{i\epsilon I}$$

إن h تشاكل لأن :

$$h(\lambda x + \mu y) = (g_i(\lambda x + \mu y))_{i\epsilon I} =$$

$$(\lambda g_i(x) + \mu g_i(y))_{i\epsilon I} = \lambda(g_i(x))_{i\epsilon I} + \mu(g_i(y))_{i\epsilon I}$$

$$= \lambda h(x) + \mu h(y)$$

وذلك مهما كان y,x من X ومهما كان λ,μ من R .

لنبرهن أن h يجعل المخطط (٥ - ٢) تبادلياً لأن :

$$(pr_i \, o h)(x) = pr_i(h(x)) = pr_i((g_i(x))_{i\epsilon I})$$

$$= g_i(x) \quad , \quad \forall x \in X, \forall i \in I$$

وينتج بالتالي أن :

$$pr_i \, o \, h = g_i \qquad \forall i \in I$$

كذلك فإن h وحيد لأنه لو وجد تشاكل آخر $k : X \rightarrow \prod_{i\epsilon I} M_i$ يجعل المخطط (٥ - ٣) تبادلياً أي أن :

$$pr_i \, o \, k = g_i$$

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "k"'] \arrow[d, "g_i"] \\
\prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[r, "pr_i"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

المخطط (٥-٣)

يكون لدينا :

$$(pr_i \, o \, k)(x) = pr_i\,(k\,(x)) = g_i\,(x) \Rightarrow$$

$$\forall\, i \in I\ ,\ \forall\ x \in X \qquad (k\,(x)\,)_i = g_i\,(x)\ = (h(x)\,)_i$$

وينتج بالتالي أن $h = k$ وبذلك نكون قد برهنا على لزوم الشرط .

ثانياً) لتكن جماعة التشاكلات $(f_i)_{i\epsilon I}$ ، $f_i : P \to M$ حيث يكون من أجل كل فضاء حلقي X على R وكل جماعة من التشاكلات $(g_i\,)_{i\epsilon\, I}$ ، $g_i : X \to M_i$ يوجد تشاكل وحيد $h : X \to P$ بحيث يكون :

$$f_i \, o \, h = g_i \qquad \forall i \epsilon I$$

ولنبرهن أن $P \approx \prod\limits_{i\epsilon I} M_i$ ،

إذا أخذنا $X = \prod\limits_{i\epsilon I} M_i$ ، $g_i = pr_i$ نحصل على المخطط (٥ - ٤) التبادلي :

$$\begin{tikzcd}
& \prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "pr_i"] \\
P \arrow[r, "f_i"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

المخطط (٥ - ٤)

$$f_i o h = pr_i \qquad (1)$$

من ناحية ثانية وحسب القسم الاول فإن $\prod_{i \in I} M_i$ يحقق الشرط السابق فيوجد تشاكل وحيد $k : \to \prod_{i \in I} M_i$ بحيث يكون :

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "k"'] \arrow[d, "f_i"] \\
\prod_{i \in I} M_i \arrow[r, "pr_i"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

المخطط (٥ - ٥)

$$pr_i \; o \; k = f_i \qquad (2)$$

من (1) , (2) نجد :

$$pr_i \; o \; k \, o h = pr_i \qquad \forall i \in I$$

$$f_i \; oh \; o \, k = f_i \qquad \forall i \in I$$

والتي ينتج منها أن :

$$koh = id_{\prod_{i \in I} M_i} \quad \text{و} \quad hok = id_P$$

بذلك يكون h تماكلاً اي أن $P \approx \prod_{i \in I} M_i$.

ملاحظة (٥ ــ ١)

ان جداء جماعة الفضاءات الحلقية $(M_i)_{i \in I}$ وحيد بتقريب تماكل .

مبرهنة (٣ ـ ٥ ـ ٢)

بفرض ان $(M_i)_{i\in I}$ جماعة فضاءات حلقية على R وان N فضاء حلقي لنبرهن على التشاكل الزمري التالي :

$$\mathrm{Hom}_R\left(N, \prod_{i\in I} M_i\right) \approx \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(N, M_i)$$

البرهــان :

لنأخذ التطبيق :

$$\theta : \mathrm{Hom}_R\left(N, \prod_{i\in I} M_i\right) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(N, M_i)$$

والمعين بـ :

$$\theta(f) = (pr_i \circ f)_{i\in I}$$

حيث يكون pr_i تشاكل الاسقاط القانوني . إن التطبيق السابق تشاكل زمري وذلك لأن :

$$\begin{aligned}\theta(f+g) &= (pr_i \circ (f+g))_{i\in I} = (pr_i \circ f)_{i\in I} + (pr_i \circ g)_{i\in I} \\ &= \theta(f) + \theta(g) \ , \ \forall f,g \in \mathrm{Hom}_R\left(N, \prod_{i\in I} M_i\right)\end{aligned}$$

نبرهن الآن أن θ تقابل . من الواضح أن θ غامر لأنــه مهما كان $(g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(N, M_i)$ يوجد التشاكل الوحيد $f : N \to \prod_{i\in I} M_i$ الذي يجعل المخطط (٥ - ٦) تبادلياً :

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "g_i"] \\ \prod_{i\in I} M_i \arrow[r, "pr_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

المخطط (٥ - ٦)

$$g_i = pr_i \circ f$$

$$\theta(f) = (\, pr_i o\, f\,)_{i\epsilon I} = (\, g_i\,)_{i\epsilon I}$$

نبرهن الآن أن θ متباين ، لأنه لو كان $\alpha \in \ker \theta$ ينتج أن :

$$o = \theta(\alpha) = (\, pr_i o \alpha\,)_{i\epsilon I}$$

أي أن كل مخطط (٥ - ٧) تبادلي حيث يرمز o للتشاكل الصفري ، وحسب المبرهنة (٣ - ٥ - ١) ،

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "0"] \\ \prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[r, "pr_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

المخطط (٥ - ٧)

فإن $(\, \prod\limits_{i\epsilon I} M_i\,,\, pr_i\,)_{i\epsilon I}$ جداء للجماعة $(\, M_i\,)_{i\epsilon I}$

وبما أن التشاكل الصفري يجعل كل مخطط تبديلياً فإن $\alpha = o$ وبالتالي يكون θ متبايناً .

نتيجة (٣ — ٥ — ١)

إذا كانت الحلقة R تبادلية فإن التماكل في المبرهنة (٣ - ٥ - ٢) هو تماكل بين فضاءين حلقيين .

ملاحظة (٣ — ٥ — ٢)

بفرض أن N فضاء حلقي ما ، فإن المجموعة $(\, N, \prod\limits_{i\epsilon I} M_i\,)$ زمرة تبادليـــة

جمعية يمكن اعتبارها فضاء حلقياً على Z .

٣ ــ ٥ ــ ٢ المجموع المباشر الخارجي

لنأخذ المجموعة الجزئية S من الجداء الديكارتي $\prod_{i\varepsilon I} M_i$ المؤلفة من الجماعات $(m_i)_{i\varepsilon I}$ من عناصر $\bigcup_{i\varepsilon I} M_i$ والتي بحيث يكون $m_i = o$ من أجل جميع $i \in I$ دون عدد منته . من الواضح أن المجموعة الجزئية S من $\prod_{i\varepsilon I} M_i$ هي فضاء حلقي جزئي منه ويسمى المجموع المباشر الخارجي للجماعة $(M_i)_{i\varepsilon I}$ ويرمز له بـ $\bigoplus_{i\varepsilon I} M_i$ ، لنأخذ التطبيق .

$$in_j : M_j \to \bigoplus_{i\varepsilon I} M_i$$

المعين بـ :

$$in_j(x) = (x_i)\ i\in I$$

حيث يكون $x_i = o$ من أجل $i \neq j$ ، $x_i = x$ عندما يكون $i = j$ ، ومن الواضح أن in_j تباكل ويسمى التباين القانوني لـ M_j في $\bigoplus_{i\varepsilon I} M_i$.

مبرهنة (٣ ــ ٥ ــ ٢)

يكون الفضاء الحلقي C على R ، المجموع المباشر الخارجي لجماعة الفضاءات الحلقية $(M_i)_{i\varepsilon I}$ إذا وإذا فقط وجدت جماعة التشاكلات $f_i : M_i \to C$, $(f_i)_{i\varepsilon I}$ بحيث يوجد من اجل كل فضاء حلقي X وكل جماعة من التشاكلات $g_i : M_i \to X, (g_i)_{i\varepsilon I}$ ، التشاكل الوحيد $h : C \to X$ الذي يجعل المخطط (٥ ــ ٨) تبادلياً .

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f_i"'] & X \\ C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

المخطط (٥ - ٨)

البرهان :

لنفرض أن $C \approx S = \bigoplus_{i\in I} M_i$ ولنأخذ مجموعة التباينات القانونية $(in_i)_{i\in I}$

والتطبيق :

$$h : S \to X$$

المعين بـ :

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "in_i"'] & X \\ S = \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

المخطط (٥ - ٩)

$$h(s) = h\left((m_i)_{i\in I} \right) = \sum_{i\in I} g_i(m_i)$$

إن التطبيق h تشاكل :

$$h\left(\lambda (m_i)_{i\in I} + \mu (n_i)_{i\in I} \right) = h\left((\lambda m_i + \mu n_i)_{i\in I} \right)$$

$$=\sum_{i\in I} g_i(\lambda m_i + \mu n_i) = \lambda \sum_{i\in I} g_i(m_i) + \mu \sum_{i\in I} g_i(n_i)$$

$$= \lambda h((m_i)_{i\in I}) + \mu h((n_i)_{i\in I})$$

كذلك يجعل h المخطط (٥ - ٩) تبادلياً :

$$(h o\, in_i)(m_i) = h((m_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} g_i(m_i)$$

$$= g_i(m_i) \qquad \forall\, m_i \in M_i$$

$$\rightarrow \qquad hoin_i = g_i \; ; \quad \forall\, i \in I$$

كذلك فان h وحيد ، لأنه لو وجد تشاكل آخر $k : S \rightarrow X$ بحيث يكون :

$$k\, o\, in_i = g_i$$

لنبرهن أن $h = k$.

$$k((m_i)_{i\in I}) = k\left(\sum_{i\in I} in_i(m_i)\right) = \sum_{i\in I}(koin_i)(m_i)$$

$$= \sum_{i\in I} g_i(m_i) = h((m_i)_{i\in I})$$

وينتج بالتالي أن $h = k$.

نقول في هذه الحالة أيضاً أن $(\bigoplus M_i , (in_i)_{i\in I})$ جداء مرافق للجماعـــة $(M_i)_{i\in I}$.

ثانياً) لنفرض أن لدينا المخطط التالي التبادلي (٥ - ١٠) .

$$h\, o\, f_i = in_i \qquad \text{...... (3)}$$

حيث أخذنا $S = X$ ولدينا :

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "in_i"] \arrow[d, "f_i"'] & S = \bigoplus_{i\in I} M_i \\ C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "in_i"'] & C \\ S \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

المخطط (٥-١٠) المخطط (٥-١١)

حسب أولاً وبأخذ $C = X$ ان المخطط (٥ ـ ١١) تبادلي :

$$k \circ in_i = f_i \qquad \text{......} \ (4)$$

نجد من (3) ، (4) أن :

$$k \circ h \circ f_i = f_i \Rightarrow k \circ h = id_C$$

$$h \circ k \circ in_i = in_i \Rightarrow h \circ k = id_S$$

وينتج بالتالي أن h تماكل أي أن $C \approx \bigoplus M_i$. نأت إلى ثنوية المبرهنة (٣ ـ ٥ ـ ٢) وهي كالتالي :

مبرهنة (٣ ـ ٥ ـ ٤)

بفرض ان $(M)_{i\in I}$ جماعة فضاءات حلقية على R وان N فضاء حلقي ما ، لنبرهن أن :

$$Hom_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) \approx \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, N)$$

البرهان :

لنأخذ التطبيق :

$$\theta : Hom_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) \to \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, N)$$

والمعين بـ :

$$\theta\,(f) = (\,f o in_i\,)_{i\in I}$$

إن التطبيق السابق تشاكل زمري كما يمكن للقارىء أن يبرهن على ذاك بطريقة مشابهة للمبرهنة (٣ - ٥ - ٢).

لنبرهن أن θ تقابل . إن θ غامر لأنه :

$$\forall\ (\,g_i\,)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}\,(M_i\,,\,N\,)$$

وحسب المبرهنة (٣ - ٥-٣) يوحد التشاكل الوحيد $h : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ بحيث يكون المخطط (٥ - ١٢) تبادلياً :

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "in_i"'] & N \\
\bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

المخطط (٥ - ١٢)

$$g_i = h o\ in_i$$

ويصبح لدينا :

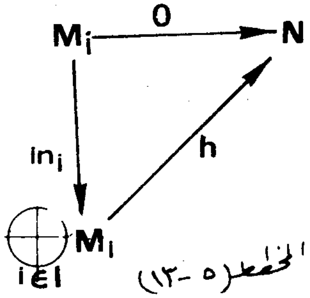
$$\theta\,(h) = (\,h o in_i\,)_{i\in I} = (\,g_i\,)_{i\in I}$$

و θ غامر اذن .

لنبرهن أن θ متباين إذا كان $\alpha \in \ker\theta$ فإن :

$$o=\theta(\alpha) = (\alpha o\ in_i)_{i\varepsilon I}$$

وبذلك يكون كل مخطط (٥ - ١٣) تبادلياً حيث يرمز الصفر للتشاكل الصفري . بتطبيق المبرهنة (٣ - ٥ - ٣) فإن ($\underset{i\varepsilon I}{\oplus} M_i$ و $(in_i)_{i\varepsilon I}$) مجموع مباشر خارجي لـ $(M_i)_{i\varepsilon I}$ ، وبما أن التشاكل الصفري يجعل كل مخطط (٥-١٣) تبادلياً فإننا نستنتج أن $\alpha = 0$. ينتج مما سبق أن θ تماكل .



المخطط (٥ -١٢)

نتيجة (٣-٥-٢)

إذا كانت الحلقة R تبادلية فإن التماكل في المبرهنة (٣ - ٥ - ٤) هو تماكل بين فضاءين حلقيين .

ملاحظة هامة

إذا كانت I منتهيـــة $I = \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$ تصبح المبرهنتان (٣ - ٥ - ٢) (٣ - ٥ - ٤) على التوالي كما يلي :

$$\mathrm{Hom}(N, \underset{i\varepsilon I}{\oplus} M_i) \approx \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathrm{Hom}(N, M_i)$$

$$\mathrm{Hom}(\underset{i\varepsilon I}{\oplus} M_i, N) \approx \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathrm{Hom}(M_i, N)$$

٣ ـ ٥ ـ ٣ المجموع المباشر الداخلي

لنعد ثانية إلى الجماعة $(M_i)_{i\in I}$ حيث يكون كل M_i فضاء متجهياً جزئياً من فضاء حلقي M على R . وبفرض أن $\tau_j : M_j \to M$ تطبيق الاحتواء القانوني ، ليكن $h : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$ التشاكل الوحيد بحيث يكون المخطط (٥ - ١٤) تبادلياً وذلك مهما يكن $j\in I$ حسب مارأيناه في برهان المبرهنة (٣ - ٥ - ٣) يكون لدينا :

$$\begin{tikzcd} M_j \arrow[r, "\tau_j"] \arrow[d, "in_j"'] & M \\ \bigoplus_{j\in I} M_j \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

المخطط (٥-١٤)

$$h\left((m_i)_{i\in I}\right) = \sum_{j\in I} \tau_j\,(m_j) = \sum_{j\in I} m_j$$

وتكون صورة h $(\mathrm{Im}\,h)$ هي الفضاء الجزئي $\sum_{i\in I} M_i$ من M المولد بـ $\bigcup_{i\in I} M_i$
وبذلك نكون لدينا المتتالية التامة التالية :

$$\bigoplus_{i\in I} M_i \xrightarrow{h} M \xrightarrow{\pi} M/\sum_{i\in I} M_i \longrightarrow 0$$

تعريف (٣ـ٥ـ٥)

إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ جماعة فضاءات جزئية من الفضاء الحلقي M على R . نقول ان M هو المجموع المباشر الداخلي للجماعة $(M_i)_{i\in I}$ إذا كان التطبيق $h : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ تماكلا . على أنه يمكن التمييز من سياق الكلام اذا كان

المجموع المباشر داخلياً أو خارجياً ولذلك سنذكر فيما يلي كلمة مجموع مباشر فقط .

مبرهنة (٣ ـ ٥ ـ ٥)

يكون الفضاء الحلقي M علـى R مجموعاً مباشراً داخلياً لجماعة الفضاءات الجزئية $(M_i)_{i\in I}$ من الفضاء الحلقي M إذا وإذا فقط امكن كتابة كل $x\in M$ على الشكل الوحيد $x = \Sigma m_i$ حيث يكون $m_i \in M_i$ كما أن $m_i = o$ من اجل جميع قيم i دون عدد منته .

البرهـــان :

يكون التطبيق السابق h غامراً إذا واذا فقط كان .

$$M = Imh = \sum_{i\in I} M_i$$

وهذا يكافىء قولنا أن كل $x\in M$ يكتب على الشكل $x = \sum_{i\in I} m_i$ حيث يكون $m_i = o$ من أجل جميع قيم i دون عدد منته منها .

كذلك يكون h متبايناً اذا واذا فقط كان $x = \sum_{i\in I} m_i$ وحيداً وذلك لأن :

$$\sum_{i\in I} m_i = h\left((m_i)_{i\in I}\right)$$

مبرهنة (٣ ـ ٥ ـ ٦)

إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ جماعة فضاءات جزئية من الفضاء المتجهي الحلقي M على R؛ فإن القضايا التالية متكافئة :

آ) $\sum_{i\in I} M_i$ **مجموع مباشر للجماعة** $(M_i)_{i\in I}$

ب) **إذا كان** $\sum_{i\in I} m_i = o$ **وحيث يكون** $m_i \in M_i$ **فهذا يقتضي** $\forall i \in I , m_i = o$

ج) $\forall i \in I$ **فـإن** $M_i \cap \sum_{j\neq i} M_j = \{o\}$

البرهـان :

(آ) $\Leftarrow$ (ب) . إن $\sum_{i \in I} m_i = o = \sum o$ وبما أن المجموع مباشر وحسب المبرهنة (٣ ـ ٥ ـ ٥) فإن $\forall i \in I , m_i = o$.

(ب) $\Leftarrow$ (حـ) إذا كان $x \in M_i \cap \sum_{i \neq j} M_j$ فإن :

$$m_i + \sum_{j \neq i} (-m_j) = o \Leftarrow x = m_i = \sum_{j \neq i} m_j$$

وحسب (ب) فان $m_i = o$ ومنه $x = o$.

(حـ) $\Leftarrow$ (آ) . لنفرض أن $\sum_{i \in I} m_i = \sum_{i \in I} n_i$ حيث يكون :

$\forall i \in I , m_i , n_i \in M_i$ ، بذلك يكون لدينا :

$$\forall i \in I \qquad m_i - n_i = \sum_{j \neq i} (n_j - m_j)$$

حيث ينتمي الطرف الايسر إلى M_i بينما ينتمي الطرف الأيمن إلى $\sum_{j \neq i} M_j$ ،

وحسب (حـ) يكون $m_i - n_i = o$ ومنه $m_i = n_i$ والمجموع مباشر .

نتيجة (٣ ـ ٥ ـ ٣)

إذا كان A,B فضاءين جزئيين من الفضـاء الحلقي M على R يكون $M = A \oplus B$ اذا واذا فقط كان $M = A + B$ و $A \cap B = \{o\}$.

★ ★ ★

تمارين (٣ ـ ٥)

٣ ـ ٥ ـ ١ برهن أنه يكون الفضاء الحلقي M على R وجماعة التشاكلات $(i_j)_{j\in I}$ ، $i_j : M_j \to M$ جداء مرافقاً للجماعة $(M_j)_{j\in I}$ من الفضاءات الحلقية ، اذا واذا فقط وجدت جماعة التشاكلات $(\pi_j)_{j\in I}$ ، $\pi_j : M \to M_j$ بحيث يكون :

$$\pi_k \cdot i_j = \begin{cases} id\ M_j & k = j \\ o & k \neq j \end{cases} \qquad \text{ـ ١}$$

٢ ـ $\pi_j (m) = o$ من أجل جميع $j\in I$ دون عدد منته منها وذلك مهما كان $m \in M$ كما أن $\sum\limits_{j\in I} (i_j \circ \pi_j) (m) = m$

٣ ـ ٥ ـ ٢ بفرض أن $\sigma : I \to I$ تقابل برهن أن :

$$\prod_{i\in I} M_i \approx \prod_{i\in I} M_{\sigma(i)}$$

وهي الخاصة التبادلية للجداء .

٣ ـ ٥ ـ ٣ بفرض أن $\{I_k | k\in A\}$ تجزئة لـ I برهن على وجود تماكل وحيد .

$$\prod_{i\in I} M_i \approx \prod_{k\in A} \left(\prod_{i\in I_k} M_i \right)$$

(الخاصة التجميعية للجداء) .

الفصل السادس

الفضاءات النوثرية والارتينية والفضاءات الحرة

NOETHERIAN & ARTINIAN MODULES & FREE MODULES

٣ ـ ٦ ـ ١ الفضاءات النوثرية والارتينية

تعريف (٣ ـ ٦ ـ ١)

يكون الفضاء الحلقي M على R نوثريا (أو أنه يحقق شرط السلسلة المتزايدة للفضاءات الجزئية من M) إذا كان من أجل كل سلسلة متزايدة ... $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq$ من الفضاءات الجزئية من M يوجد عدد طبيعي n بحيث يكون $(\forall k \geqslant n) M_k = M_n$.
نقول كذلك عن M أنه يحقق الشرط الأعظمي اذا كان لكل جماعة غير خالية من الفضاءات الجزئية من M ، عنصراً أعظمياً بالنسبة لعلاقة الاحتواء .

مبرهنة (٣ ـ ٦ ـ ١)

اذا كان M فضاء متجهيا حلقياً على R لنبرهن على تكافؤ القضيتين التاليتين :

آ ـ M نوثري

ب ـ يحقق M الشرط الأعظمي

البرهـان :

(آ) ← (ب)

ليكن $\mathcal{A}$ جماعة غير خالية من الفضاءات الجزئية من M . ولنختار $M_0 \in \mathcal{A}$
إذا لم يكن M_0 أعظمياً فيوجد $M_1 \in \mathcal{A}$ بحيث يكون $M_0 \subset M_1$ ، كذلك إذا لم يكن

M_1 أعظمياً في $\mathcal{C}$ ، يوجد عندها $M_2 \in \mathcal{C}$ بحيث يكون $M_0 \subset M_1 \subset M_2$ وبذلك نحصل على السلسلة المتزايده من الفضاءات الجزئية $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset .....$ من الفضاء الحلقي M . بما أن M نوثري إذن يوجد عدد طبيعي n بحيث يكون $(\forall k \geqslant n)\ M_K = M_n$ وتصبح السلسلة المتزايدة من الفضاءات الجزئية مستقرةعند M_n وبالتالي يكون M_n عنصر أعظمياً في $\mathcal{C}$.

(ب) ← (آ)

إذا لم يكن M نوثرياً أي إذا لم يحقق M شرط السلسلة المتزايده فإنه توجد سلسلة متزايدة غير منتهية $M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset ......$ من الفضاءات الجزئية من M والتي من الواضح ليس لها عنصر أعظمي أي أن الفضاء M لايحقق الشرط الاعظمي .

تعريف (٣ ـ ٦ ـ ٢)

يكون الفضاء الحلقي M على R أرتينيا (أو أنه يحقق شرط السلسلة المتناقصة من الفضاءات الجزئية من M) اذا كان من أجل كل سلسلة متناقصة $M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq ......$ من الفضاءات الجزئية من M يوجد عدد طبيعي n بحيث يكون $(\forall k \geqslant n) M_k = M_n$. نقول كذلك عن M أنه يحقق الشرط الأصغري إذا كان لكل جماعة جزئيـة غير خالية من الفضاءات الجزئية من M ، عنصراً أصغرياً بالنسبة لعلاقة الاحتواء.

مبرهنة (٣ ـ ٦ ـ ٢)

إذا كان M فضاء متجهيا حلقياً على R لنبرهن على تكافؤ القضيتين التاليتين :

آ ـ M ارتيني

ب ـ يحقق M الشرط الاصغري .

البرهان مماثل للمبرهنة (٣ ـ ٦ ـ ١) .

ملاحظة (٣ ـ ٦ ـ ١)

إذا كان الفضاء المتجهي M نوثرياً (أرتينياً) فهذا يعني أن كل سلسلة

متزايدة (متناقصة) من الفضاءات الجزئية من M ذات طول منته .

مبرهنه (٣ ـ ٦ ـ ٣)

إذا كان الفضاء الحلقي M علــى R نوثرياً (أرتينياً) فإن كل فضاء جزئي منه أو فضاء خارج له نوثري (أرتيني) .

البرهــان :

اذا كان M نوثريا (أرتينياً) وبما أن كل فضاء جزئي من أي فضـــاء جزئي هو أيضاً فضاء جزئي من M لذلك فمن البديهي ان كل فضاء جزئي من M يحقق نفس الشرط الذي يحققه الفضاء M . والأمر نفسه من أجـــل فضاء الخارج لـ M وذلك لأن ذلك نتيجة مباشرة للمبرهنة (٣ ـ ٣ ـ ٢) والتي تعين تقابلاً بين مجموعة الفضاءات الجزئية A من M وبين الفضاءات الجزئية من فضاء الخارج M/N بشرط أن يكون $N \subseteq A \subseteq M$.

مبرهنة (٣ ـ ٦ ـ ٤)

إذا كان M فضاء متجهياً على الحلقة الواحدية R ، فإذا كان كل من الفضاء الجزئي N مـــن M وفضاء الخارج M/N نوثرياً (ارتينياً) فإن M نوثري (أرتيني) .

البرهــان :

سنبرهن هذه المبرهنة إذا كان كل من N وM/N نوثريا ويكون البرهان مماثلاً له تماماً إذا كان كل من N و M/N أرتينياً .

لتكن السلسلة المتزايدة من الفضاءات الجزئية من M :

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots\cdots$$

فيكون :

$$M_0 \cap N \subseteq M_1 \cap N \subseteq M_2 \cap N \subseteq \cdots\cdots$$

وهي سلسلة متزايدة من الفضاءات الجزئية من N وبما أن N نوثري ، يوجد عدد طبيعي n بحيث يكون :

$$M_K \cap N = M_n \cap N \ , \ \forall k \geqslant n$$

لنأخذ تطبيق الغمر القانوني $\pi_N : M \longrightarrow M/N$ ، بما أن صورة كل فضاء جزئي من M هي فضاء جزئي من M/N يكون لدينا :

$$\pi_N(M_0) \subseteq \pi_N(M_1) \subseteq \pi_N(M_2) \subseteq \dots$$

وهي سلسلة متزايدة من الفضاءات الجزئية من M/N وبما أن M/N نوثري، فيوجد اذن عدد طبيعي m بحيث يكون :

$$\pi_N(M_k) = \pi_N(M_n) \ , \ (\forall k \geqslant m)$$

بفرض أن $p = \max(m,n)$ يكون لدينا :

$$(\forall k \geqslant p), M_k \subseteq M_p \ , M_k \cap N = M_p \cap N$$

$$\pi_N(M_k) = \pi_N(M_p)$$

فاذا كان t عدداً صحيحاً اكبر أو يساوي p لنبرهن أن $M_t = M_p$ وبالتالي يكون M نوثرياً .

إن $\pi_N(M_t) = \pi_N(M_p)$ ، بفرض أن $y \in M_t$ يوجد $x \in M_p$ بحيث يكون $\frac{x}{N} = \frac{y}{N} \Leftrightarrow y - x \in N$ ؛ ولكن $M_p \subseteq M_t$ ومنه $y - x \in M_t$ وبالتالي يكون :

$$y - x \in M_t \cap N = M_p \cap N \subseteq M_p$$

$$y - x = z \in M_p \Rightarrow y = x + z \in M_p \Rightarrow M_t \subseteq M_p$$

وبما أن $M_t \subseteq M_p$ يكون $M_p = M_t$ والفضاء الحلقي M نوثري .

٣ ـ ٦ ـ ٢ الفضاءات الحلقية الحرة

إذا كان N فضاء متجهياً حلقياً على R ، فإنه يمكن تشكيل فضاءات جديدة وذلك بأخذ المجاميع المباشرة بحيث يكون كل حد من هذا المجموع متماكلا مع N . وبصورة خاصة يمكن استعمال هذا الانشاء باستخدام الحلقة R^n نفسها ، يؤدي ذلك إلى المفهوم العام للفضاء الحر .

تعريف (٣ ـ ٦ ـ ٣)

نقول عن المجموعة الجزئية غير الخالية S من فضاء حلقي M على R انها مستقلة خطياً (حرة) إذا كان من أجل كل عدد منته $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ فإن :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

كما نقول عن S أنها قاعدة لـ M إذا كانت مولدة لـ M ومستقلة خطياً (حرة) .

مبرهنة (٣ ـ ٦ ـ ٥)

تكون المجموعة الجزئية غير الخالية S من الفضاء المتجهي M على الحلقة الواحدية R ، قاعدة له إذا وإذا فقط امكن كتابة كل عنصر من M كتركيب خطي وحيد لـ S .

البرهـان :

إذا كانت S قاعدة لـ M فإن $\forall x \in M ,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ وحيث يكون $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$. ليكن :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$

وحيث يكون $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ عناصر مختلفة من S . لدينا :

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$$

وبما أن S مستقلة خطياً فإن $\lambda_i - \mu_i = 0$ ومهما تكن i وبالتالي يكتب x كتركيب خطي وحيد لـ S .

وبالعكس إذا كان الشرط محققاً فمن الواضح أن S تولد M . كذلك فان

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 = \sum_{i=1}^{n} 0 \, . \, x_i$$

وبما أن الصفر يكتب بشكل وحيد كتركيب خطي لـ S فإن $\lambda_i = 0$ ومهما تكن i وبالتالي S مستقلة خطياً أي أن S قاعدة لـ M .

تعريف (٣-٦-٤)

الفضاء الحلقي الحر هو الفضاء الذي يقبل قاعدة له .

امثلة (٣-٦-١)

آ . بفرض أن R حلقة واحدية فان R^n فضاء حلقي حر على R ويقبل المجموعة المنتهية :

$$S = \{ e_1 = (1,0,0,\ldots 0) \, , \, e_2 = (0, 1, 0,\ldots,0) \, ,\ldots, \, e_n = (0,0,\ldots,0,1) \}$$

قاعدة له .

ب . كل فضاء متجهي على حقل F هو فضاء حلقي حر لأنه يقبل قاعدة له

حـ . لتكن R حلقة واحدية . S مجموعة ما ، ولنأخذ $F = R^S$ مجموعة التطبيقات $\theta : S \to R$ بحيث يكون $\theta(s) = 0$ من أجل جميع $s \in S$ دون عدد منته من العناصر $s \in S$.

إن المجموعة F مزودة بقانوني التشكيل التاليين :

$$(\forall s \in S) \qquad (\theta + \zeta)(s) = \theta(s) + \zeta(s)$$

$$(\lambda\theta)(s) = \lambda\,\theta(s)$$

هي فضاء متجهي حلقي على R

لنعرف التطبيق $f : S \to F$ وذلك بأن نرفق بكل عنصر $s \in S$ التطبيق $f(s) : S \to R$ المعين بـ :

$$[f(s)](t) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } s = t \\ 0 & \text{إذا كان } s \neq t \end{cases}$$

نجد انه مهما يكن $\theta \in F$ يكون :

$$\theta(t) = \theta(t)\,.\,1_R = \sum_{s \in S} \theta(s)\,[f(s)](t) = \Big(\sum_{s \in S} \theta(s)\,f(s)\Big)(t)$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \sum_{s \in S} \theta(s)\,f(s)$$

وهذا يبرهن أن الفضاء F مولد بالجماعة $(f(s))_{s \in S}$ ، كذلك فإن المجموعة $(f(s))_{s \in S}$ مستقلة خطياً وذلك لأن : $\sum_{s \in S} \lambda_s f(s) = 0$ تقتضي انه $\forall t \in S$ فإن $\sum_{s \in S} \lambda_s f(s)(t) = 0 \Rightarrow \forall s \in S\,,\, \lambda_s = 0$ أي أن المجموعة $(f(s))_{s \in S}$ مستقلة خطياً (حرة) . هذا يبرهن أن $(f(s))_{s \in S}$ قاعدة للفضاء المتجهي الحلقي $F = R^{(S)}$. يسمى الفضاء الحلقي F ، فضاء حراً مولداً بـ S ونكتب $(F, f(s))$ فضاء حر على S.

مبرهنة (٣ ــ ٦ ــ ٦)

إذا كان M فضاء حلقياً حراً وبفرض ان S مجموعة ما لنبرهن ان كل تطبيق $g : S \to M$ يمكن ان يفرق بشكل وحيد كتركيب لتطبيقين احدهما ينتمي لـ $R^{(S)}$ ويكون لدينا المخطط التبادلي (٦ ــ ١) التالي :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & M \\ F \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

المخطط (٦-١)

البرهــان :

لنأخذ الفضاء الحر (F, f) علـى S في المثال (٣ ــ ٦ ــ ١ ، ج) السابق ولنعرف التطبيق $h : F \to M$ كما يلي :

$$h(\theta) = \sum_{s \in S} \theta(s)\, g(s)$$

نلاحظ ان التطبيق السابق معرف تماماً وانه تشاكل ، بالاضافة الى ذلك فهو يجعل المخطط (٦ ــ ١) تبادلياً :

$$\forall s \in S \quad h[f(s)] = \sum_{s \in S} [f(s)](t)\, g(t) = g(s)$$

ومنه :

$$hof = g$$

كذلك فان h وحيد لأنه لو كان $h' : F \to M$ تشاكلا آخر بحيث يكون $h' \circ f = g$ نجد ان :

$$h'(\theta) = \sum_{s \in S} \theta(s)\, h'[f(s)] = \sum_{s \in S} \theta(s)\, g(s) = h(\theta)$$

ومنه يكون $h' = h$ والتشاكل h وحيد .

اما الآن فسنبرهن على التماكل بين الفضاء الحر M وبين F.

مبرهنة (٣ ــ ٦ ــ ٧)

إذا كان M فضاء حراً قاعدته S ، لنبرهن ان $M \approx F$.

البرهـان :

في المبرهنة السابقة لنأخذ $g = \tau_s$ فيكون لدينا . $h \circ f = \tau_s$.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\tau_s"] \arrow[d, "f"'] & M \\
F \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

المخطط (٦-٢)

إن Imh فضاء جزئي من M يحوي S وبما أن S تولد M يكون بالتالي $Im\,h = M$ و h غامر .

كذلك فإن h متباين ؛ فإذا كان $\theta \in \ker h$ يكون لدينا :

$$o = h(\theta) = \sum_{s\in S} \theta(s)\,\tau s(s) = \sum_{s\in S} \theta(s)\,.\,s$$

وبما أن $\theta \in F$ وان $\theta(x) = o$ من أجل جميع عناصر S دون عدد منته منها هي $x_1, x_2 \,\ldots\, x_n \in S$:

$$o = \sum_{i=1}^{n} \theta(x_i)\, x_i$$

ولكن بما أن S مستقلة خطياً لكونها قاعدة ينتج أن $\theta(x_i) = o$ ومهما تكن i أي أن $\theta = o$ وبالتالي h متباين أي أن $F \approx M$.

نتيجة (٣-٦-١)

إذا كان M فضاء حلقياً حراً على R لنبرهن أن M تماكل على $\bigoplus_{i\in I} Ra_i$ حيث يكون $\{a_i : i\in I\}$ قاعدة لـ M كذلك فإن $\forall i\in I ,\, R\,a_i \approx R$.

البرهــان :

من الواضح أن $M = \bigoplus_{i \in I} R a_i$. كــــذلك فإن التطبيق $f_i : R \to Ra_i$ المعين بـ $f_i(r) = ra_i$ هو تماكل .

هذا وتقودنا المبرهنة (٣ - ٦ - ٦) إلى صلاحية التعريف التالي :

تعريف (٣ ـ ٦ ـ ٤)

بفرض أن R حلقة واحدية وان S مجموعة غير خالية . ان فضاء حراً على S هو فضاء حلقي F على R وتطبيق $f : S \to F$ بحيث يوجد من أجل كل فضاء حلقي M على R وكل تطبيق $g : S \to M$ تشاكل وحيد $h : F \to M$ بحيث يكون المخطط (٦ - ٢)′ تبادلياً .

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & M \\ F \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

المخطط (٦-٢)′

نرمز للفضاء F الحر على S بالرمز (F, f) ، هذا ويلاحظ القارىء أن المبرهنة (٣ - ٦ - ٦) مع حـ من المثال السابق تثبتان وجود هذا الفضاء الحر .

والصفة الهامة للفضاء الحر أنه وحيد بتقريب تماكل كما تبين ذلـــك المبرهنة التاليـــة :

مبرهنة (٣ ـ ٦ ـ ٨)

إذا كان (F, f) فضاء حراً على مجموعة غير خالية S ، يكون (F', f') فضاء حراً على S إذا وإذا فقط وجد تماكل وحيد $h : F \to F'$ بحيث يكون $hof = f'$.

البرهــان :

أولاً) بما أن (F', f') فضاء حر على S فيوجد اذن التشاكل الوحيــد $k : F \rightarrow F'$ بحيث يكون المخطط (٦ - ٣) تبادلياً (أخذنا $M = F$) .

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & F \\ F' \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

المخطط (٦-٣)

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] & F' \\ F \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

المخطط (٦-٤)

أي : $k \circ f' = f$ كذلك فإن $h \circ f = f'$ واللذان ينتج عنهما :

$$(k \circ h) \circ f = f \quad ; \quad (h \circ k) \circ f' = f'$$

أي أن :

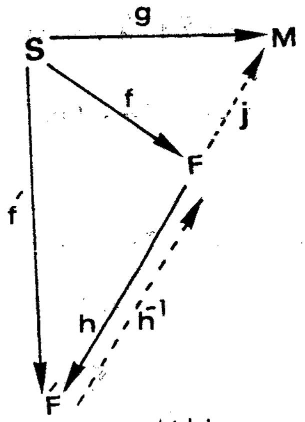
$$k \circ h = id_F \quad ; \quad h \circ k = id_{F'}$$

أي أن كلاً من k, h تماكل وحيد $h : F \rightarrow F'$ بحيث يكون $k \circ f = f'$

ثانياً) إذا كان $h : F \rightarrow F'$ تماكلاً بحيث يكون $h \circ f = f'$ ، ينتج أن : $f = h^{-1} \circ f'$ بما أن (F, f) فضاء حر على S ومن أجل أي فضاء حلقي M يكون لدينا المخطط التبادلي التالي (٦ - ٥) .

$j \circ f = g \Leftrightarrow j \circ (h^{-1} \circ f') = g$. ولكي نبرهن أن (F', f') حر أيضاً على S ، يكفي أن نبرهن أنه إذا كان $t : F' \rightarrow M$ تشاكلاً يحقق $t \circ f' = g$ فإن $t = j \circ h^{-1}$.

$t \circ f' = g \Leftrightarrow t \circ h \circ f = g \Leftrightarrow t \circ h = j$ لأن h وحيد والتي ينتج عنهـا $t = j \circ h^{-1}$.



المخطط (٦ - ٥)

اخيراً لنحدد القاعدة لفضاء متجهي حلقي بانها مجموعة مولدة اصغرية ومجموعة مستقلة خطياً (حرة) أعظمية كما في المبرهنة التالية :

مبرهنة (٣ – ٦ – ٩)

بفرض ان M فضاء متجهي حلقي على R وان B قاعدة لـ M فإن B هي المجموعة الجزئية الاصغرية المولدة لـه وهي المجموعة الجزئية الاعظمية المستقلة خطياً في M .

البرهـان :

لنفرض أن B ليست مجموعة مولدة أصغرية لـ M ، توجد اذن مجموعة مولدة $G \subset B$ ويكون من أجل كل عنصر $x \in B|G$ وباعتبار $B \setminus \{x\}$ مولدة لـ M :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

حيث يكون $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عناصر مختلفة من $B \setminus \{x\}$ وكل $\lambda_i \in R$ ؛ والعلاقة السابقة تكتب :

$$1_R . x + \sum_{i=1}^{n} (-\lambda_i) x_i = o$$

وهذا يعني أن B مرتبطة خطياً وهذا مخالف للفرض اذن تكون B مجموعة مولدة أصغرية .

لنفرض أن $y \in M \setminus B$ وبما أن B قاعدة ، اذن توجد عناصر مختلفة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ من B ، $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R$ بحيث يكون :

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \Rightarrow 1_R . y + \sum_{i=1}^{n} (-\lambda_i) x_i = o$$

وبالتالي ينتج أن $B \cup \{y\}$ مرتبطة خطياً أي أن B هي مجموعة مستقلة خطياً اعظمية .

ملاحظـة :

في حالة الفضاءات المتجهية V على الحقل F تكون القضايا الثلاث التاليـــة متكافئة :

١ – B قاعدة ، ٢ – B مجموعة مولدة أصغرية لـ V

٣ – B مجموعة مستقلة خطياً أعظمية في V .

مبرهنة (٣–٦–١٠)

يكون الفضاء المتجهي M على الحلقة الواحدية التبادلية R منتهي التوليد إذا وإذا فقط كان M متماكلا على فضاء خارج لـ R^n من اجل عدد طبيعي n .

البرهـــان :

أولاً / لنفرض أن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مولدة لـ M ولنعرف التطبيق :

$f . R^n \to M$ المعرف بـ :

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots\ldots + \alpha_n x_n$$

إن f تغاكل لـ R^n على M . بتطبيق المبرهنة (٣ ـ ٣ ـ ٣) يكون :

$$R^n / \ker f \approx \operatorname{Im} f = M$$

ثانياً) إذا كان $R^n/\ker f \approx M$ يكون لدينا التغاكل $f: R^n \rightarrow M$. إن $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ وحيث تكون $e_i = (0,0,\ldots, 1_i, 0,\ldots,0)$ مولده لـ R^n وتكون بالتالي $\{f(e_1), f(e_2), \ldots\ldots, f(e_n)\}$ مولده لـ M .

* * *

تمارين (٣ ـ ٦)

٣ ـ ٦ ـ ١ . برهن أن R^2 حر على المجموعة $\{(0,1), (1,1)\}$.

٣ ـ ٦ ـ ٢ . برهن أن كل زمرة جزئية من Z هي فضاء حلقي حر على Z .

٣ ـ ٦ ـ ٣ . إذا كان M $f : M \to M$ تشاكلا برهن انه إذا كان F تباكلا فإن f ليس بقاسم للصفر من اليسار في الحلقة $End_R(M)$. أما إذا كان M حراً وبفرض أن $f \in End_R(M)$ وهو ليس بقاسم للصفر من اليسار في الحلقة $End_R(M)$ برهن أن f تباكل .

الفصل السابع

الجداءات الموترية

TENSOR PRODUCTS

٣ ـ ٧ ـ ١ الجداء الموتري لفضائين حلقيين :

إذا كانت M, N, P فضاءات حلقية على حلقة واحدية تبادلية R . نقول عن التطبيق $f : M \times N \to P$ إنه خطاني (ثنائي الخطية) اذا كان :

$$(\forall (m,m' \in M), (\forall n \in N)\ f(m+m',n) = f(m,n) + f(m',n)$$
$$(\forall m \in M), (\forall n,n' \in N), f(m,n+n') = f(m,n) + f(m,n')$$
$$(\forall m \in M), (\forall n \in N), (\forall \lambda \in R); f(\lambda m,n) = f(m,\lambda n) = \lambda f(m,n)$$

هذا ومن الواضح أنه إذا كان f,g تطبيقين خطانيين لـ $M \times N$ في P فـإن كلا من $f+g$ ، λf وحيث $\lambda \in R$ تطبيق خطاني لـ $M \times N$ في P ؛ وبـذلـك تشكل مجموعة التطبيقات الخطانية لـ $M \times N$ في P فضاء متجهياً حلقيـاً على R نرمز له بـ $S = L(M,N;P)$.

تعريف (٣ ـ ٧ ـ ١)

الجداء الموتري لفضاءين حلقيين M,N على حلقة تبادلية واحدية R هو الثنائيـة (T,f) المؤلفة من فضاء حلقي T على R وتطبيق خطاني $f : M \times N \to P$ ، بحيث يوجد من أجل كل فضاء حلقي P على R وكل تطبيق خطاني $g : M \times N \to P$ ، التشاكل الوحيد $h : T \to P$ الذي يجعل المخطط (٧ ـ ١) تبادليا .

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & P \\ T \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

المخطط (٧ - ١)

يسمى الفضاء الحلقي T المعرف سابقاً ، الجداء الموتري للفضاءين N,M ، ويرمز له بـ $M \otimes_R N$ أو فقط $M \otimes N$.

مبرهنة (٣ ـ ٧ ـ ١)

إذا كان M N فضاءين حلقيين على حلقة واحدية تبادلية R لنبرهن على وجود فضاء حلقي $T = M \otimes N$ وتطبيق خطاني $f: M\times N \to M \otimes N$ بحيث يكون من اجل كل فضاء حلقي P علــى R وكل تطبيق خطاني $g: M\times N \to P$، يوجد التشاكل الوحيد $h: M \otimes N \to P$ الذي يجعل المخطط (٧ ـ ٢) تبادليا .

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & P \\ M\otimes N \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

المخطط (٧ - ٢)

البرهــان :

لكي نبرهن على وجود T ، نأخذ الفضاء الحلقي الحر A على المجموعــة $M\times N$ ونأخذ الفضاء الجزئي B من A المولد بالعناصر :

$$(m+m',n)-(m,n)-(m',n)$$
$$(m,n+n')-(m,n)-(m,n')$$
$$(\lambda m,n)-\lambda(m,n)\ ,\ (m,\lambda n)-\lambda(m,n)$$

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "i"] & & P \\
A \arrow[urr, dotted, "j"] \arrow[d, "\pi"] & & \\
A/B \arrow[uurr, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

$f=\pi\circ i$

المخطط (٧-٢)

يوجد تطبيق $f: M\times N \to A/B$ نحصل عليـــه بتركيب التطبيقين الأول $i: M\times N \to A$ وهو الاحتواء القانوني ، وتطبيق الغمر القانوني $\pi: A \to A/B$.

التطبيق f هـذا خطاني (ثنائي الخطية) وذلك حسب طريقة تشكيل B .
بما أن A فضاء حلقي حر على $M\times N$ اذن يوجد التشاكل الوحيـد $j: A \to P$ بحيث يكون $j\circ i = g$ وذلك حسب التعريف (٣ - ٦ - ٤) .

بما أن $\pi: A \to A/B$ تغاكل وأن $j: A\to P$ تشاكل فيكفي أن نبرهن أن $\ker\pi = B \subseteq \ker j$ [1] وذلك لوجود تشاكل وحيد $h: A/B \to P$ بحيث يكون $h\circ\pi = j$ وبذلك ينتج لدينا :

$$k\circ\pi\circ i = g \Rightarrow h\circ f = g$$

(1) راجع المسالة (٣-٢-٥)

أي أن h تشاكل يجعل المخطط (٧ ـ ٣) تبادلياً .

لنبرهن إذن أن $B \subseteq \ker j$ ، يكفي لذلك ن نبرهن أن :

$$j[(m+m', n) - (m,n) - (m',n)] = o$$

$$j[(m, n+n') - (m,n) - (m,n')] = o$$

$$j[(\lambda m,n) - \lambda(m,n)] = o$$

$$j[(m,\lambda n) - \lambda(m,n)] = o$$

وهي جميعها محققة ولنتحقق من صحة إحداها فقط :

$$j[(m+m',n) - (m,n) - (m',n)] =$$

$$j(m+m',n) - j(m,n) - j(m',n) = o$$

كذلك فإن h وحيد لأنه معين بصور العناصر $(m,n)\in M\times N$ وفق f ، أي لو وجد تشاكل آخر $h':A/B \to P$ بحيث يكون :

$$h'of = g \quad , \quad hof = g$$

لأصبح لدينا :

$$h(f(m,n)) = g(m,n) = h'(f(m,n))$$

ومنه $h = h'$.

يرمز لصورة (m,n) وفق f بـ $m \otimes n$ كما يرمز للتطبيق f بـ $\otimes$ ويكون بذلك $M \otimes N$ فضاء متجها حلقياً مولداً بالعناصر $m \otimes n$ ومحققاً للعلاقات الآتية :

$$\begin{array}{l} (\forall\, m,m'\in M) \\ (\forall\, n,n'\in N) \\ \forall\, \lambda\in R \end{array} \left\{ \begin{array}{lr} (m+m')\otimes n = m\otimes n + m'\otimes n & (1) \\ m\otimes(n+n') = m\otimes n + m\otimes n' & (2) \\ (\lambda m)\otimes n = m\otimes(\lambda n) = \lambda(m\otimes n) & (3) \\ m\otimes o = o\otimes n = o & (4) \end{array} \right.$$

ملاحظة (٣ ـ ٧ ـ ١)

آ . نقول في المبرهنة السابقة انه يمكن تفريق كل تطبيق خطاني $g : M \times N \rightarrow P$ عبر الجداء الموتري $M \otimes N$.

ب. إذا كانت $(a_i)_{i \in I}$ ، $(b_j)_{j \in J}$ مولدات للفضاءين الحلقيين M وN على الترتيب فإن العناصر $a_i \otimes b_j$ مولدة لـ $M \otimes N$.

مبرهنة (٣ ـ ٧ ـ ٢)

بفرض أن M, N فضاءان حلقيان على الحلقة الواحدية التبادلية R ؛ يكون (T, f) , (T', f') جداءين موترين لـ $N M$ إذا وإذا فقط وجد تماكل وحيد $h : T \rightarrow T'$ بحيث يكون $hof = f'$.

البرهان :

أولاً) بما أن (T, f) جداء موتري لـ N, M وحسب التعريف (٣-٧-١) وبأخذ $P = T'$ ، $g = f'$ يوجد التشاكل الوحيد $h : T \rightarrow T'$ بحيث يكون المخطط (٧ - ٤) تبادلياً أي :

$$h \circ f = f' \qquad (5)$$

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] & T' \\ T \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

المخطط (٧-٤)

كذلك وبما أن (T', f') جداء موتري لـ N, M .

وحسب التعريف (٣ - ٧ - ١) وبأخذ $P = T$ يوجد التشاكل الوحيد $k : T' \to T$ الذي يجعل المخطط (٧ - ٥) تبادلياً أي :

$$k \circ f' = f \qquad (6)$$

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & T \\
T' \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

المخطط (٧ - ٥)

من (5) و (6) ينتج أن :

$$h \circ k \circ f' = f' \Rightarrow h \circ k = id_{T'}$$

$$k \circ h \circ f = f \Rightarrow k \circ h = id_T$$

وهذا يبرهن بدوره أن $h : T \to T'$ تماكل وحيد يحقق العلاقة $h \circ f = h'$.

ثانياً) لنفرض أن $h : T \to T'$ تماكل وحيد يحقق $h \circ f = f'$

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "f'"'] & & P \\
& T \arrow[ur, "j"] \arrow[dl, shift left, "h"'] & \\
T' \arrow[ur, shift left, "h^{-1}"'] & &
\end{tikzcd}$$

المخطط (٧ - ٦)

بما أن (T ,f) جداء موتري لـ N,M إذن فمن أجل كل فضاء حلقي P وكل تطبيق خطاني $g : M \times N \to P$ يوجد تشاكل وحيد $j : T \to P$ بحيث يكون $j \circ f = g$ وبما أن $f = h^{-1} \circ f'$ يمكن انشاء المخطط (٧ - ٦) وذلك من

أجل أي فضاء حلقي P والذي يحقق :

$$j o h^{-1} o f' = j o f = g$$

يكون (T', f') جداء موترياً إذا استطعنا البرهان بأنه إذا كان $t : T' \to P$ تشاكلا بحيث يكون $t o f' = g$ فيكون عندها $t = j o h^{-1}$ ،

$$t o f' = g \Rightarrow t o h o f = g$$

وبما أن $j , T \to P$ تشاكل وحيد بحيث يكون $j o f = g$ ينتج أن :

$$t = j o h^{-1} \Leftarrow j = t o h$$

يمكن تعميم المبرهنتين السابقتين (٣ - ٧ - ١) (٣ - ٧ - ٢) كما يلي :

مبرهنة (٣ ـ ٧ ـ ٣)

بفرض ان $M_1, M_2, \dots, M_K$ فضاءات متجهية على حلقة واحدية تبادلية R . يوجد الزوج (T , f) المؤلف من الفضاء المتجهي الحلقي T علـى R وتطبيق ، $f : M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k \to T$ متعدد الخطية محقق للخواص التالية :

آ ـ من أجل اي فضاء حلقي P علـى R وأي تطبيق متعدد الخطية $g : M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k \to P$ يوجد تشاكل وحيد $h : T \to P$ بحيث يكون $g = h o f$

ب ـ بفرض ان $(T , f) , (T' , f')$ زوجان محققان للخاصة السابقة ، يوجد تماكل وحيـد $j : T \to T'$ بحيث يكون : $j o f = f'$.

نتيجة (٣ ـ ٧ ـ ١)

ان الجداء الموتري (T , f) وحيد بتقريب تماكل .

٣ ــ ٧ ــ ٢ خواص الجداء الموتري

مبرهنة (٣ ــ ٧ ــ ٣)

إذا كانت M, N, P ثلاث فضاءات متجهية على حلقة واحدية تبادلية R فــإن :

$$M \otimes (N \otimes P) \approx (M \otimes N) \otimes P \qquad (1)$$

$$(M \otimes N) \approx (N \otimes M) \qquad (2)$$

البرهــان :

أولاً) ننشىء التشاكلين :

$$(M \otimes N) \otimes P \xrightarrow{f} M \otimes N \otimes P \xrightarrow{g} (M \otimes N) \otimes P$$

بحيث يكون :

$$f((x \otimes y) \quad z) = x \otimes y \otimes z$$

$$g(x \otimes y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$$

وذلك من أجل جميــع $x \in M, y \in N, z \in P$.

ولانشاء f ، نثبت العنصر $z \in P$. إن التطبيق $(x, y) \to x \otimes y \otimes z$ خطاني في x وy وبالتالي وحسب المبرهنة السابقة يوجد التشاكل الوحيد :

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes N \otimes P \\
M \otimes N \arrow[ur, "f_z"'] &
\end{tikzcd}$$

المخطط (٧-٧)

$$M \otimes N \xrightarrow{f_z} M \otimes N \otimes P$$

$$f_z(x \otimes y) = x \otimes y \otimes z$$

ثم نأخذ التطبيق :

$$(t, z) \to f_z(t)$$

$$(M \otimes N) \times P \to M \otimes N \otimes P$$

والذي هو خطاني في t و z وبالتالي يوجد التشاكل الوحيد :

$$f : (M \otimes N) \otimes P \to M \otimes N \otimes P$$

بحيث يكون :

$$f((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes y \otimes z$$

ولانشاء g نأخذ التطبيق z $(x, y, z) \to (x \otimes y) \otimes z$ وهو تطبيق لـ $M \times N \times P$ في $(M \otimes N) \otimes P$ وهو خطي في كل من x و y و z وبالتالي يوجد التشاكل الوحيد :

$$g : M \otimes N \otimes P \to (M \otimes N) \otimes P$$

بحيث يكون :

$$g(x \otimes y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$$

من الواضح أن :

$$gof = id_{(M \otimes N) \otimes P} \quad , \quad fog = id_{M \otimes N \otimes P}$$

أي أن :

$$(M \otimes N) \otimes P \approx M \otimes N \otimes P$$

وبنفس الطريقة نبرهن أن :

$$M \otimes (N \otimes P) \approx M \otimes N \otimes P$$

وبالتالي ينتج (1) .

ثانياً) :

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \otimes M \\ M \otimes N \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

المخطط (٧-٨)

$$\begin{tikzcd} N \times M \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & M \otimes N \\ N \otimes M \arrow[ur, "h'"'] & \end{tikzcd}$$

المخطط (٧-٩)

ان التطبيق $g : M \times N \to N \otimes M$ المعين بـ :

$$g(x, y) = y \otimes x$$

خطاني في y, x وبالتالي وحسب المبرهنة (٣ - ٧ - ١) يوجد التشاكل الوحيد

$$h : M \otimes N \to N \otimes M$$

بحيث يكون :

$$h(x \otimes y) = (y \otimes x)$$

كذلك فإن التطبيق : $g' : N \times M \to M \otimes N$ المعين بـ :

$$g'(y, x) = x \otimes y$$

خطاني في y, x وبالتالي يوجد التشاكل الوحيد $h' : N \otimes M \to M \otimes N$

بحيث يكون :

$$h'(y \otimes x) = x \quad y$$

من الواضح أن :

$$hoh' = id_{N \otimes M} \quad , \quad h'oh = id_{M \otimes N}$$

وينتج عندئذ ان كلا من h', h تماكل .

مبرهنة (٣ ــ ٧ ــ ٤)

إذا كانت M, N, P ثلاث فضاءات متجهية على حلقة واحدية تبادلية R فــإن :

$$(M \oplus N) \otimes P \approx (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$$

البرهــان :

تبرهن بطريقة مشابهة المبرهنة (٣ - ٧ - ٣) .

مبرهنة (٣ ــ ٧ ــ ٥)

بفرض ان M فضاء متجهي على حلقة واحدية تبادلية R لنبرهن :

$$R \otimes M \approx M$$

$$R^n \otimes M \approx M^n$$

البرهــان :

ان التطبيق $R \times M \to M$ g المعين بـ :

$$\begin{tikzcd}
R \times M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & M \\
R \otimes M \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

المخطط (٧ - ١٠)

$$g(\alpha x) = \alpha x$$

خطاني ويوجد بالتالي التشاكل الوحيد :

$$h : R \otimes M \to M$$

$$\alpha \otimes x \to \alpha . x$$

كذلك فإن التطبيق : $h' : M \to R \otimes M$ المعين بـ :

$$h'(x) = 1_R \otimes x$$

خطي ، ولكن :

$$(h' o h)(\alpha \otimes x) = h'(\alpha x) = 1_R \otimes \alpha x) = \alpha \otimes x$$

أى أن $h'oh = id_{R \otimes M}$ وبطريقة مشابهة نجد أن $h o h' = id_M$

وينتج عن ذلك ان h تماكل .

كذلك فإن التطبيق $g_n : R^n \times M \to M^n$

بحيث يكون :

$$g((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), x) = (\alpha_1 x, \alpha_2 x, \cdots, \alpha_n x)$$

هو خطاني وبالتالي يوجد التشاكل الوحيد :

$$h : R^n \otimes M \to M^n$$

$$h[(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \otimes x] = (\alpha_1 x, \alpha_2 x, \cdots, \alpha_n x)$$

ثم نبرهن أن h تماكل .

نتيجة (٣ـ٧ـ٢)

بفرض أن M, N فضاءان حران على حلقة واحدية تبادلية R بحيث يكون $M \approx R^n$ و $N \approx R^m$ ، عندئذ يكون $M \otimes N \approx R^{mn}$ وبصورة خاصة: إذا كان

M,N فضاءين متجهين على حقل F ومنتهيي البعد فإن :

$$\dim(M \otimes N) = \mathrm{din}\, M \,.\, \dim N$$

إذا كانت $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ قاعدة لـ M ؛ $\{b_1, \ldots, b_m\}$ قـــاعدة لـ N فإن العناصر $a_i \otimes b_j$ $(j = 1, 2 \ldots m,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ قاعدة لـ $M \otimes N$.

٣ ـ ٧ ـ ٣ الجداء الموتري لتشاكلين

لندرس الآن تأثير الجداء الموتري لفضاءات حلقية على التشاكلات بين هذه الفضاءات. ليكن التشاكلان الحلقيان :

$$\varphi : M \to M' \quad , \quad \psi : N \to N'$$

نرى بسهولة وجود تشاكل وحيد :

$$\varphi \otimes \psi : M \otimes N \to M' \otimes N'$$

بحيث يكون المخطط التالي تبادلياً :

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\varphi \times \psi"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, dashed] & M' \times N' \arrow[d, "f'"] \\
M \otimes N \arrow[r, "\varphi \otimes \psi"'] & M' \otimes N
\end{tikzcd}$$

المخطط (٧ ـ ١١)

وذلك لأن التطبيق :

$$M \times N \to M' \otimes N'$$

$$(m,n) \to \varphi(m) \otimes \psi(n)$$

خطاني ، وبذلك ينتج وجود ووحدانية $\varphi \otimes \psi$ من تعريف الجداء الموتري لـ $M \otimes N$.

ويكون لدينا إذن :

$$(\varphi \otimes \psi)(m \otimes n) = \varphi(m) \otimes \psi(n) \qquad (7)$$

مبرهنة (٣ ـ ٧ ـ ٧)

لتكن الفضاءات الحلقية M , M' , N, N' **على الحلقة الواحدية التبادلية** R **والتشاكلات** $\varphi , \varphi_1 , \varphi_2 \in Hom(M,M')$ ؛ $\psi , \psi_1 , \psi_2 \in Hom(N,N')$

ان المتطابقات التالية تكون صحيحة :

(1) $$id_M \otimes id_N = id_{M \otimes N} \qquad (8)$$

(ii) $$\varphi \otimes (\psi_1 + \psi_2) = (\varphi \otimes \psi_1) + (\varphi \otimes \psi_2) \qquad (9)$$

(iii) $$(\varphi_1 + \varphi_2) \otimes \psi = (\varphi_1 \otimes \psi) + (\varphi_2 \otimes \varphi) \qquad (10)$$

(N) $$\varphi \otimes 0 = 0 \otimes \psi = 0 \qquad (11)$$

$$(\alpha \varphi) \otimes \psi = \varphi \otimes \alpha \psi = \alpha(\varphi \otimes \psi)$$

والتي يمكن برهانها كتمرين .

كذلك إذا كان $\varphi' \in Hom(M', M'')$ ، $\psi' \in Hom(N',N'')$ **زوجا آخر من التشاكلات بين الفضاءات ، فاننا نحصل بطريقة مشابهة على المخطط التبادلي التالي :**

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\varphi \times \psi"] \arrow[d, "f"] & M' \times N' \arrow[r, "\varphi' \times \psi'"] \arrow[d, "f'"] & M'' \times N'' \arrow[d, "f''"] \\
M \otimes N \arrow[r, "\varphi \otimes \psi"'] & M' \otimes N' \arrow[r, "\varphi' \otimes \psi'"'] & M'' \otimes N''
\end{tikzcd}$$

المخطط (٧ ـ ١٢)

بما ان :

$$(\varphi'\times\psi')(\varphi\times\psi)(m,n)=(\varphi'\varphi(m),\psi'\psi(n))$$

$.\ \forall m\in M,\ \forall n\in N$

نجـد ان :

$$(\varphi'\times\psi')(\varphi\times\psi)=\varphi'\varphi\times\psi'\psi \qquad (12)$$

وينتج بالتالي من المخطط (٧ ــ ١٢) أن :

$$\varphi'\varphi\otimes\psi'\psi=(\varphi'\otimes\psi')(\varphi\otimes\psi) \qquad (13)$$

إذا اخذنا الحالة الخاصة : $M''=M'=M$ ، $N''=N'=N$ وإن

$\psi'=\psi=id_N$ ، فإن (13) تصبح :

$$\varphi'\varphi\otimes id_N=(\varphi'\otimes id_N)(\varphi\otimes id_N) \qquad (14)$$

٣ ــ ٧ ــ ٤ خواص التمام للجداء الموتري

بفرض أن $g: M\times N\to P$ تطبيق خطاني . إن التطبيق $y\to g(x,y)$ لـ N في P خطي من أجـــل كل $x\in M$ وبالتـــالي يؤدي g إلى تطبيق خطي $M\to Hom(N,P)$ وذلك لأن g خطي بالنسبة للمتغير x . وبالعكس فإن كل تشاكل :

$$\varphi: M\to Hom(N,P)$$

يعرف تطبيقاً خطانياً :

$$(x,y)\to\varphi(x)(y)$$

بذلك يوجد تقابل بين المجموعة S للتطبيقات الخطانية $M\times N\to P$ وبـين $Hom(M,Hom(N,P))$ ؛ كذلك يوجد تقابل بين S وبين $Hom(M\otimes N,P)$ وذلك من الخواص المعرفة للجداء الموتري بذلك يكون لدينا التماكل القانوني التـــالي :

$$(15) \qquad \mathrm{Hom}(M \quad N, P) \approx \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N,P))$$

مبرهنة (٣ ــ ٧ ــ ٨)

بفرض ان

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to o$$

متتالية تامة من الفضاءات الحلقية على الحلقة الواحدية والتبادلية R والتشاكلات

وبفرض ان N فضاء حلقي ما على R لنبرهن ان المتتالية :

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \to o$$

(وحيث يرمز 1 للتطبيق المطابق على N) تامة .

البرهــان :

بما أن المتتالية :

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to o$$

تامة وبتطبيق المبرهنة (٣ ـ ٤ ـ ٥) فإن المتتالية :

$$\mathrm{Hom}(M', \mathrm{Hom}(N,P)) \to \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N,P)) \to$$
$$\mathrm{Hom}(M', \mathrm{Hom}(N,P)) \to o$$

تامة وذلك بفرض أن P فضاء حلقي ما .

بالاستفادة من التآكل (15) ينتج أن المتتالية :

$$\mathrm{Hom}(M' \otimes N, P) \to \mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \to$$
$$\mathrm{Hom}(M' \otimes N, P) \to o$$

تامة (راجع التمرين (٣ ـ ٤ ـ ٣)) .

وبتطبيق المبرهنة (٣ ـ ٤ ـ ٥) ثانية نجد أن المبرهنة :

$$M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to o$$

تامـــة .

المراجـع

1. BLYTH — Module theory — Oxford
2. BOURBAKI — Algèbre — HerMann chap . I
3. COHN — Algebre vol . II , Wiby .
4. MACLANE 8 BIRKOFF — Algepra — Macmillan , 2 d edition
5. YUTZE CHOW — Modern Abstract Algebra vol . II , Gordon and Breach

* * *

الباب الرابع

الفصل الأول

الجبــور

ALGEBRAS

٤ـ١ـ١ تعريف

بفرض أن R حلقة واحدية تبادلية ؛ ان الجبر A على R هو فضـاء حلقي على R مزود بقانون تشكيل داخلي :

$$A \times A \longrightarrow A$$

$$(x, y) \longrightarrow x.y$$

ويسمي الضرب في A وهو توزيعي بالنسبة إلى الجمع بحيث يكون :

$$(\forall \lambda \in R), (\forall x, y \in A) : \lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

وبفرض شروط اضافية على الضرب ، نحصل على أنواع مختلفة من الجبور :

١ ـ يكون الجبر A تجميعياً إذا كان الضرب في A تجميعيـاً ويلاحظ في هذه الحالة أن A حلقة بالنسبة لقانوني التشكيل الداخليين وهما الجمـع والضرب .

٢ ـ يكون الجبر A تبادلياً إذا كان الضرب في A تبادلياً .

٣ ـ يكون الجبر A واحدياً إذا وجد عنصر محايد بالنسبة للضرب .

٤ ـ يكون الجبر A ، جبر قسمة إذا كان الجبر تجميعياً وواحدياً وكان كل عنصر مختلف عن الصفر في A قلوباً . نسمي جبر القسمة أيضاً جبراً متخالفاً .

مثال (٤ ـ ١ ـ ١)

١ . إن مجموعة الاعداد العقدية C جبر قسمة على R .

٢ . بفرض أن V فضاء متجهي على الحقل F ، ان المجموعة End (V) جبر تجميعي واحدي وغير تبادلي على F حيث يكون الضرب هو تركيب التطبيقات .

٣ . كل حلقة واحدية هي جبر على Z .

٤ . كل حلقة S جبر على كل حلقة جزئية R من مركز S .

يلاحظ القارىء هنا إننا رمزنا بـ + لكل من العمليتين في R وفي A . يرمز بـ O_A للعنصر المحايد في الفضاء الحلقي A كما يرمز 1_A للعنصر المحايد بالنسبة للضرب ان وجد ومن السهل برهان مايلي

$$1 . x = x , O_R . x = O_A , r . O_A = O_A$$

$$x . O_A = O_A = O_A . x$$

وذلك مهما كان x من الجبر A على R .

٤ ـ ١ ـ ٢ الجبر الجزئي والمثاليات

تعريف (١ ـ ١)

تكون المجموعة الجزئية غير الخالية B من الجبر A على الحلقة الواحدية التبادلية R جبراً جزئياً اذا واذا فقط كانت B جبراً على R .

يمكن للقارىء أن يرى بسهولة أنه تكون المجموعة الجزئية B من A جبراً جزئياً إذا واذا فقط كان :

١ — $(\forall \lambda, \mu \in R), (\forall x, y \in B), \lambda x + \mu y \in B$

٢ — $(\forall x, y \in B), \quad xy \in B$

بفرض أن S مجموعة جزئية من الجبر A على R ، فإن الفضاء الجزئي المولد بـ S جبر جزئي من A ويسمى الجبر الجزئي المولد بـ S .

مثال :

اذا كان A جبراً على الحلقة الواحدية التبادلية R ، فإن :

$$A^2 = \{x.y \mid x,y \in A\}$$

جبر جزئي من A لأنه فضاء جزئي حلقي من A كما أنه مغلق بالنسبة للضرب

تعريف (٤ — ١ — ٢)

إذا كان A جبراً على الحلقة الواحدية التبادلية R ، تكون المجموعة الجزئية B من A مثالياً من اليسار لهذا الجبر :

١ — إذا كانت B فضاء جزئياً حلقياً من A .

٢ — إذا كان $A.B \subseteq B$ أي أن $x.y \in B$ وذلك مهما كان $x \in A$ ومهما كان $y \in B$.

بطريقة مشابهة تكون المجموعة الجزئية B من A مثالياً له من اليمين :

١ — إذا كانت B فضاء جزئياً حلقياً من A .

٢ - إذا كان $B.A \subseteq B$ أي أن $y.x \in B$ وذلـــك مهما كان $x \in A$ ومهما كان $y \in B$.

تكون B مثالياً للجبر A إذا كانت B مثاليـــاً لـ A من اليسار واليمين بآن واحد أي :

١ - B فضاء جزئي من A .

٢ - $B.A \subseteq B$ وكذلك $A.B \subseteq A$.

نلاحظ ان المثالي B لجبر A هو جبر جزئي من A .

بصورة خاصة يولد عنصر واحد $a \in A$ مثالياً I_a للجبر A ويسمى المثـــالي الرئيسي المولد بـ a .

٤ ـ ١ ـ ٣ جبر الخارج

ليكن A_R جبراً على الحلقة الواحدية والتبادلية R ، وليكن A مثالياً لهـــذا الجبر . نعرف على A العلاقة الثنائية التالية E :

$$x E y \Leftrightarrow x - y \in B$$

ونكتب عنـدها $x \equiv y \pmod B$ ونقرأ x تطابق y مقـاس B . ومن السهل البرهان أن العلاقة E هي علاقة تكافؤ على A . نرمز اصف التكافؤ لـ $x \in A$ بالرمز $\frac{x}{B}$ وهي المجموعة المرافقة $x+B$ كما نرمز لمجموعة صفوف التكافؤ هـــذه بالرمز A/B .

تمهيـد (٤ ـ ١ ـ ١)

اذا كان B مثاليا للجبر A على الحلقة الواحدية التبادلية R لنبرهن ان علاقة التكافؤ E على A والمعينة بـ :

$$x E y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{B} \Leftrightarrow x - y \in B$$

متوائمة مع قوانين التشكيل الداخلية والخارجية التالية على A/B :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{B} + \frac{y}{B} = \frac{x+y}{B} \\ \lambda\left(\frac{x}{B}\right) = \frac{\lambda x}{B} \\ \frac{x}{B} \cdot \frac{y}{B} = \frac{x \cdot y}{B} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \forall \frac{x}{B}, \frac{y}{B} \in A/B \\ \forall \lambda \in R \end{array}$$

ان المثالي B فضاء جزئي من الفضاء الحلقي A على R . برهنا في الفصل الثالث من الباب الثالث ان علاقة التكافؤ E متوائمة مع قانون التشكيل الداخلي وهو الجمع وقانون التشكيل الخارجي وهو المضاعف السلمي .

بقي ان نبرهن ان :

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv x' \pmod{B} \\ y \equiv y' \pmod{B} \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot y \equiv x' \cdot y' \pmod{B}$$

ان :

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv x' \pmod{B} \Leftrightarrow x - x' \in B \\ y \equiv y' \pmod{B} \Leftrightarrow y - y' \in B \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} (x-x')\, y \in B \\ x'(y-y') \in B \end{array}\right\} \Rightarrow xy - x'y' \in B \Rightarrow$$

$$x \cdot y \equiv x' y' \pmod{B}$$

مبرهنة (٤ ــ ١ ــ ١)

إذا كان B مثالياً للجبر A على الحلقة الواحدية والتبادلية R لنبرهن ان A/B جبر على R بالنسبة لقوانين التشكيل المعرفة في التمهيد السابق (٤ ــ ١ ــ ١) .

البرهـان :

من الواضح أن A/B فضاء خارج حلقي على R وذلك حسب المبرهنة (٣-٣-١) من الباب الثالث .

كذلك فإن :

$$\frac{x}{B} \quad \frac{y}{B} = \frac{x.y}{B} \in A/B$$

يبقى أن نبرهن على مايلي :

١ - $\frac{x}{B}\left(\frac{y}{B}+\frac{z}{B}\right)=\frac{x}{B}\cdot\frac{y}{B}+\frac{x}{B}\cdot\frac{z}{B}$

$$\forall\ \frac{x}{B},\ \frac{y}{B},\ \frac{z}{B}\in A/B$$

$$\frac{x}{B}\left(\frac{y}{B}+\frac{z}{B}\right)=\frac{x}{B}\cdot\frac{y+z}{B}=\frac{x(y+z)}{B}=$$

$$\frac{x.y+x.z}{B}=\frac{x.y}{B}+\frac{x.z}{B}=\frac{x}{B}\cdot\frac{y}{B}+\frac{x}{B}\cdot\frac{z}{B}$$

٢ - بطريقة مشابهة نجد أن :

$$\left(\frac{y}{B}+\frac{z}{B}\right)\cdot\frac{x}{B}=\frac{y.x}{B}+\frac{z.x}{B}$$

$$\forall\ \frac{x}{B},\ \frac{y}{B},\ \frac{z}{B}\in A/B,$$

٣ - $\forall\lambda\in R,\quad \forall\ \frac{x}{B},\ \frac{y}{B}\in A/B$

$$\lambda \left(\frac{x}{B} \ \frac{y}{B} \right) = \left(\lambda \frac{x}{B} \cdot \frac{y}{B} \right) = \frac{x}{B} \quad \left(\lambda \frac{y}{B} \right)$$

لنأخذ التطبيق :

$$\pi \quad A \longrightarrow A/B$$
$$x \longrightarrow x/B$$

يتصف هذا التطبيق بما يلي :

هو تطبيق الغمر القانوني لفضاء الخارج الحلقي A/B .

٢ — $\pi(x.y) = \frac{x.y}{B} = \frac{x}{B} \ \frac{y}{B} = \pi(x) \cdot \pi(y)$

يسمى π تطبيق الغمر القانوني للجبر A على جبر الخارج A/B .

مبرهنة (٤ ـ ١ ـ ٢)

إذا كان B مثالياً للجبر A على الحلقة الواحدية التبادلية R ، لنبرهن على وجود تقابل يحافظ على الاحتواء بين مجموعة الجبور الجزئية من جبر الخارج A/B وبين مجموعة المثاليات N لـ A بحيث يكون $B \subseteq N \subseteq A$ ،

البرهـــان :

ليكن N مثالياً للجبر A بيث يكون $B \subseteq N \subseteq A$. ان المجموعة :

$$N/B = \left\{ \frac{n}{B} \ \middle| \ n \in N \right\}$$

جبر جزئي من جبر الخارج A/B وذلك لأن :

١ — A/B فضاء خارج حلقي جزئي من A/B .

٢ — $\forall\, n/B\,,\, n'/B \in N[B$ فإن .

$$\frac{n}{B}\cdot\frac{n'}{B}=\frac{n.n'}{B}\in\frac{N}{B}$$

لنأخذ التطبيق f الذي يطبق المثاليات N لـ A في جبر الخــارج الجزئي N/B والمعين $f(N) = N/B$.

نبرهن أن f متباين بنفس الطريقة التي اتبعناها في المبرهنة (٣-٣-٢) من الباب الثالث .

ان f غامر . اي إذا كان P جبراً جزئياً من A/B :

$$P=\{\frac{x}{B}\mid x\in X\}$$

لنبرهن ان X مثالي للجبر A ويحوي B .

١ — ان X فضاء جزئي حلقي من A ويحوي B .

٢ — $(\forall\, a\in A)\,,\,(\forall\, x\in X)$ يكون :

$$\frac{a}{B}\cdot\frac{x}{B}=\frac{a.x}{B}\in P \Rightarrow a.x\in X$$

أي أن X مثالي للجبر A .

بذلك ينتج أن $f(X) = P$ والتطبيق f غامر . نـــلاحظ أن f هو المقصور لتطبيق الغمر القانوني π على مجموعة المثاليات لـ A بحيث يكون $B\subseteq N\subseteq A$.

نتيجة (٤ ـ ١ ـ ١)

كل جبر جزئي من جبر الخارج A/B هو من الشكل N/B بحيث يكون $B\subseteq N\subseteq A$.

إذا الجبر A واحدياً وكان 1 عنصره المحايد فإن جبر الخارج A/B واحـدي ايضاً وعنصره المحايد هو $\pi(1)$.

(٤ ـ ١ ـ ٤) تشاكل الجبـور Homomorphism of Algebras

بفرض أن A, A_1 جبران على الحلقـة الواحدية التبـادلية R ، يكون التطبيق $f: A \to A_1$ تشاكلا لـ A في A_1 إذا كان :

$$\left.\begin{array}{l} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \\ f(x.y) = f(x) . f(y) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \forall x,y \in A \\ \forall \lambda \in A \end{array}$$

يسمى f تباكلا إذا كان f متبايناً ويسمى تغاكلا إذا كان f غامراً ، كما يسمى تماكلا اذا كان تقابلاً .

إذا كان $A = A_1$ سمي التشاكل $f: A \to A$ تداكلا كما نسميه تذاكلا إذا كان التداكل f تقابلاً .

ان نواة التشاكل $f: A \to A_1$ مثالي للجبر A وذلك لأن :

$$\forall x \in A , \forall y \in \ker f , f(xy) = f(x) f(y) = o$$

$$f(yx) = f(y) f(x) = o$$

وينتج بالتالي أن $yx , xy \in \ker f$.

من ناحية ثانية فان $\mathrm{Im}\, f$ فضاء حلقي جزئي من A_1 كما أن :

$$f(x) . f(y) = f(x.y) \in \mathrm{Im} f$$

ويكون بذلك $\mathrm{Im}\, f$ جبراً جزئياً من A_1 .

مبرهنة (٤ ـ ١ ـ ٣)

بفرض ان A_1, A جبران على الحلقة الواحدية التبادلية R ، لنبرهن ان

$$A/\ker f \approx \operatorname{Im} f$$

البرهـــان :

ليكن B مثالياً للجبر A بحيث يكون $B \subseteq \ker f$ ولنأخذ التطبيق :

$$\zeta \;:\; A/B \longrightarrow \operatorname{Im} f$$

$$\frac{x}{B} \longrightarrow f(x) \quad , \; x \in A$$

ان ζ تشاكل جبور :

$$(\forall x, y \in A)(\forall \lambda, \mu \in R) ; \; \zeta\left(\lambda \frac{x}{B} + \mu \frac{y}{B}\right) =$$

$$\zeta\left(\frac{\lambda x}{B} + \frac{\mu y}{B}\right) = f(\lambda x + \mu y) =$$

$$\lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda \zeta\left(\frac{x}{B}\right) + \mu \zeta\left(\frac{y}{B}\right)$$

كذلك فإن :

$$\zeta\left(\frac{x}{B} \cdot \frac{y}{B}\right) = \zeta\left(\frac{x \cdot y}{B}\right) = f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

$$= \zeta\left(\frac{x}{B}\right) \cdot \zeta\left(\frac{y}{B}\right)$$

أي أن التطبيق ζ تشاكل بين الجبرين A_1, A ونواته هي $\frac{\ker f}{B}$ ، كذلـــك من الواضح أن ζ غامر وينتج بالتالي أن ζ تغاكل .

إذا أخذنا $B = \ker f$ يصبح عندها ح متبايناً وبالتالي يصبح تماكلا أي أن $M \ker f \approx Imf$.

اخيراً بفرض أن A,B,C جبور على R وان $f:A \longrightarrow B$ تشاكل و $g:B \longrightarrow C$ تشاكل آخر فإن $gof : A \longrightarrow C$ تشاكل أيضاً ولذلك يكفي أن نبرهن أن gof يحافظ على الضرب .

$$(gof)(xy) = g(f(xy)) = g(f(x) \cdot f(y)) =$$

$$g(f(x)) \cdot g(f(x)) = (gof)(x) \cdot (gof)(y) .$$

(٤ ـ ١ ـ ٥) تطبيقات الاشتقاق Derivation mappings

بفرض أن A جبر على R وأن $d: A \longrightarrow A$ تداكل على الفضاء الحلقي A يكون d اشتقاقاً بالتعريف إذا كان :

$$d(x.y) = dx \cdot y + x \cdot dy , \forall x,y \in A$$

سنرمز بـ $Der(A)$ لمجموعة تطبيقات الاشتقاق على الجبر A ، وبما أن الاشتقاق تداكل (اندومورفيزم) على A يكون :

$$(d+d')(x) = dx + d'x \quad , \quad d,d' \in Der(A)$$

مبرهنة (٤ ـ ١ ـ ٤)

بفرض ان A جبر على R ، فـإن $Der(A)$ فضاء حلقي على R حيث يكون :

$$\lambda(dx) = (\lambda d)(x)$$

البرهـــان :

بفرض أن $d_1 , d_2 \in Der(A)$ فإن d_1+d_2 تداكل على الفضاء الحلقي A لنبرهن أن $d_1 + d_2 \in Der(A)$:

$$(d_1+d_2)(x.y)=d_1(x.y)+d_2(x.y)$$
$$=d_1x.y+x.d_1y+d_2x.y+x.d_2y$$
$$=(d_1x+d_2x).y+x(d_1y+d_2y)$$
$$=(d_1+d_2)x.y+x.(d_1+d_2)y \Rightarrow$$
$$d_1+d_2 \in Der(A)$$
$$(\lambda d_1)(x,y)=\lambda(d_1xy)=\lambda(d_1x.y+x.d_1y)$$
$$=(\lambda d_1)(x).y+x(\lambda d_1)(y) \Rightarrow \lambda d_1 \in Der(A)$$

إن $Der(A)$ فضاء حلقي على R كما يمكن التحقق من بقية الشروط

ملاحظـة :

من الخطأ التوقع بأن $Der(A)$ جبر تجميعي وذلك بتعريف عمليـــة ضرب اشتقاقين هو تركيبهما :

$$Der(A).Der(A) \longrightarrow Der(A)$$
$$(d_1, d_2) \longrightarrow d_1 o d_2$$

وذلك لأن $d_1od_2 \notin Der(A)$.

$$(d_1od_2)(xy)=d_1(d_2(xy))=d_1(d_2x.y+x.d_2y)$$
$$=d_1(d_2x.y)+d_1(x.d_2y)$$
$$=d_1od_2(x).y+d_2x.d_1y+d_1x.d_2y+x.(d_1od_2)(y)$$
$$\neq (d_1od_2)(x).y+x.(d_1od_2)(y) \qquad (1)$$

إذا كان الجبر واحدياً نستنتج بفرض أن e عنصره المحايد :

$$d(e)=d(e.e)=de.e+e.de$$
$$=de+de. \Rightarrow de=o$$

يعين تطبيق الاشتقاق إذا علم تأثيره على مجموعة من مولدات A كما هي الحال

في التطبيقات الخطية .

إذا كان $d : A \longrightarrow A$ تطبيقاً خطياً على A وبفرض (e_i) قاعدة للفضاء الحلقي الحر A بحيث يكون :

$$d(e_i . e_j) = de_i . e_j + e_i de_j$$

لنبرهن ان A اشتقاق على A .

$$\forall x, y \in A \quad , \quad x = \sum \alpha_i . e_i \quad , y = \sum \beta_j e_j$$

$$d(x . y) = d(\sum \alpha_i e_i . \sum \beta_j e_j)$$

$$= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j d(e_i e_j)$$

$$= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (de_i . e_j + e_i . de_j)$$

$$= \sum_{i,j} (\alpha_i de_i) \beta_j e_j + \sum_{i,j} (\alpha_i e_i) \beta_j de_j$$

$$= dx . y + x . dy$$

هذا يبرهن أن d اشتقاق .

مبرهنة (قاعدة لايبنز) (٤ــ١ــ٥)

$\forall d \in Der(A)$ فـإن

$$d^n(x . y) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} d^r x . d^{n-r} y \quad , \quad \forall x, y \in A \qquad (2)$$

البرهــان :

عندما $n = 1$ يصبح (2) .

$$d(xy) = dx . y + x . dy$$

وهو تعريف الاشتقاق .

لنفرض أن (2) صحيحة من أجل $k = n$ ولنبرهن على صحتها من أجل $k = n + 1$ ؛

$$d^{n+1}(xy) = d(d^n(xy))$$

$$= d\left(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} d^r x \cdot d^{n-r} y\right)$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} d^{r+1} x \cdot d^{n-r} y + \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} d^r x \cdot d^{n-r+1} y$$

$$= d^{n+1}x \cdot y + \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} d^{r+1}x \cdot d^{n-r} y +$$

$$\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} d^r x \cdot d^{n-r+1} y + x \cdot d^{n+1} y$$

$$= d^{n+1}x \cdot y + \sum_{r=1}^{n} \left[\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}\right] d^r x \, d^{n-r+1} y +$$

$$x \cdot d^{n+1} y$$

$$= d^{n+1} x \cdot y + \sum_{r=1}^{n} \binom{n+1}{r} d^r x \cdot d^{n-r+1} y +$$

$$x \cdot d^{n+1} y = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} d^r x \cdot d^{n-r+1} y$$

أي أن (2) صحيح من أجل $k = n + 1$ وبالتالي فهي صحيحة مهما تكن n.

ان صورة أي اشتقاق d على A هي فضاء حلقي جزئي من A ولكنها ليست في الحالة العامة جبراً جزئياً من A ، كذلك فإن نواة الاشتقاق d جبر جزئي من A لانها فضاء جزئي حلقي بالاضافة الى ذلك اذا كان $x, y \in \ker d$ فإن :

$$d(xy) = dx \cdot y + x \cdot dy = 0 \Rightarrow xy \in \ker d$$

إن التركيب الخطي للاشتقاقات $d_i : A \to A$ هو أيضاً اشتقاق على A ولكن جداء اشتقاقين ليس في الحالة العامة اشتقاقاً ولكن يمكن ان نبرهن أن المبادل :

$$[d_1, d_2] = d_1 o d_2 - d_2 o d_1$$

اشتقاق على A .

$$\begin{aligned}
[d_1,d_2](x.y) &= (d_1od_2 - d_2od_1)(x.y)\\
&= (d_1od_2)(x.y) - (d_2od_1)(x.y)\\
&= d_1(d_2x.y + xd_2y) - d_2(d_1x.y + x.d_1y)\\
&= d_1od_2(x).y + d_2x.d_1y + d_1x.d_2y + x.d_1od_2(y)\\
&\quad - d_2od_1(x).y - d_1x.d_2y - d_2x.d_1y - xd_2od_1(y)\\
&= (d_1od_2 - d_2od_1)(x).y + x.(d_1od_2 - d_2od_1)(y)
\end{aligned}$$

ومنه ينتج أن $d_1od_2 - d_2od_1 \in \mathrm{Der}A$.

مثال (٤ ـ ١ ـ ٢)

آ ـ بفرض أن A جبر الدوال $f : R \to R,\ C^\infty$ لنعرف التطبيق الخطي $d : f \to f'$ وحيث ترمز f' لمشتق الدالة f . من الواضح أن d اشتقاق .

ب ـ لتكن A حلقة الحدوديات بمجهول واحد x على الحلقة الواحدية التبادلية R . ليكن :

$$D : R[x] \to R[x]$$

تشاكلا معرفاً بـ : $\forall n \in N,\ D(x^n) = n\,x^{n-1}$. من السهل التحقق أن D اشتقاق على الجبر A .

حـ ـ بفرض أن A جبر تجميعي وواحدي على حلقة واحدية تبادلية R .

نعرف التطبيق :

$$I_x : A \to A$$

$$I_x(a) = xa - ax \qquad \forall a \in A$$

يمكن التحقق : إن I_x اشتقاق على A ويسمى الاشتقاق الداخلي المستخلص من العنصر x من A .

٤ ـ ١ ـ ٦ الاشتقاقات φ

بفرض أن A,B جبرين على الحلقة الواحدية والتبادلية R وأن $\varphi : A \to B$ تشاكل ثابت . يسمى التطبيق الخطي $\theta : A \to B$ الاشتقاق φ إذا كان :

$$\forall x,y \in A \qquad \theta(xy) = \theta(x)\,.\,\varphi(y) + \varphi(x)\,.\,\theta(y)$$

إن جميع الاشتقاقات في A هي الاشتقاقات I حيث $I : A \to A$ هـو التطبيق المطابق على A .

كمثال على الاشتقـاق ـ φ ليكن A جبر الدوال C^∞ ، $f : R \to R$ وليكن $B = R$ ، نعرف التشاكل φ :

$$\varphi : f \to f(o)$$

والتطبيق θ المعين بـ :

$$\theta : f \to f'(o)$$

نجد أن :

$$\theta(fg) = (fg)'(o) = f'(o)\,g(o) + f(o)\,g'(o)$$

$$= \theta(f).\,\varphi(g) + \varphi(f)\,.\,\theta(g)$$

هذا يبرهن أن θ هو الاشتقاق φ

وبشكل عام بفرض أن θ_A اشتقاق على A فإن $\theta = \varphi o \theta_A$ هو الاشتقاق φ لأن :

$$\theta(xy) = \varphi\,\theta_A(xy) = \varphi(\theta_A x . y + x . \theta_A y)$$
$$= \varphi\,\theta_A x . \varphi(y) + \varphi(x) . \varphi\theta_A y$$
$$= \theta x . \varphi(y) + \varphi(x) . \theta y$$

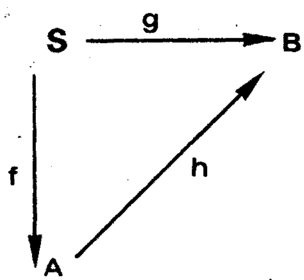
بطريقة مشابهة إذا كان θ_B اشتقاقاً على B فإن $\theta_B o \varphi$ هو الاشتقــاق φ على B .

٤ ـ ١ ـ ٧ الجبور الحـرة

إن مفهوم الجبور الحرة مماثل لنفس المفهوم المتعلق ببقية البنى الجبرية المختلفة كالزمر والفضاءات الحلقية ... يعرف الجبر الحر A على مجموعة غير خالية S كما يلي :

تعريف (٤ ـ ١ ـ ٣)

بفرض أن S مجموعة غير خالية ، A جبر على R ، وأن f تطبيق لـ S في A . يكون (A, f) جبراً حراً على S إذا كان من أجل كل جبر B على R وكل تطبيق $g : S \to B$ يوجد التشاكل الوحيد $h: A \to B$ والذي يجعل المخطط



المخطط (٤ ـ ١ ـ ١)

(٤-١-١) تبادلياً ، ونقول عادة أن A جبر حر على S بدلاً من الزوج (A,f)
نقول كذلك عن الجبر الجزئي A' من A أنه مولد بالمجموعة الجزئية S من A
إذا كان A' هو التقاطع لجميع الجبور الجزئية من A والتي تحوي S . كذلك
نقول أن المجموعة S من الجبر A مولدة له إذا كان كل عنصر $x\in A$ يكتب
على الشكل :

$$x = \sum_{i} \alpha^{i_1 i_2 \cdots i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$$

حيث يكون $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_r} \in S$.

مبرهنة (٤ – ١ – ٦)

إذا كان (A,f) جبرا حرا على مجموعة غير خالية S فـإن f متباين كما ان Imf تولد A .

البرهـان :

ليكن $x,y\in S$ حيث يكون $x\neq y$ ولنبرهن أن $f(x)\neq f(y)$. بما أن A حر على S ، بفرض أن C جـبر ما على C , R تطبيق $g : S \longrightarrow C$ محقق $g(x)\neq g(y)$ فيكون لدينا :

$$h(f(x)) = g(x) \neq g(y) = h(f(y))$$

وبالتالي ينتج أن $f(x)\neq f(y)$ والتطبيق f متباين .

ليكن B الجبر الجزئي من A المولد بـ Imf ولنأخذ المخطط التالي حيث يكون τ تطبيق التباين القانوني لـ Imf في B كما أن τ_A تطبيق التباين القانوني لـ B في A و $f^+ : S \longrightarrow \operatorname{Im} f$ معين بـ $\forall x\in S, f^+(x) = f(x)$ بما أن A حر على S يوجد تشاكل وحيد $h : A \longrightarrow B$ بحيث يكون :

$$hof = \tau of^{+}$$

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f^{+}"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Imf} \arrow[r, "\tau"] & B \arrow[r, "\tau_A"] & A \\
A \arrow[urr, "h"] \arrow[urrr, "\tau_A o h"'] & & &
\end{tikzcd}$$

المخطط (٤-١-٢)

ان التطبيق $k : A \longrightarrow A$ بحيث يكون $k = \tau_A oh$ هو تشاكل ويحقق لـ :

$$kof = \tau_A ohof = \tau_A o \tau of^{+}$$

بما أن A جبر حر على S اذن يوجد تشاكل وحيد $\theta : A \longrightarrow A$ يحقق :

$$\theta of = \tau_A o \tau of^{+}$$

نستنتج مما سبق أن $\theta = id_A$ وينتج بالتالي أن :

$$\tau_A oh = k = id_A$$

والتي ينتج منها أن τ_A غامر (B=A) أي أن Imf تولد A .

مبرهنة الوحدانية (٤ ـ ١ ـ ٧)

بفرض ان (A,f) جبر حر على المجموعة غير الخالية S. يكـون (A′,f′) جبرا حرا على S إذا وإذا فقط وجد تماكل وحيد $h : A \longrightarrow A'$ بحيث يكون $hof = f'$.

البرهان مماثل للمبرهنة (٣ ـ ٦ ـ ٨) من حالة الفضاءات الحلقية .

بما ان الجبر الحر على S يعين بتقريب تماكل فاننا نبرهن وجود احد الجبور الحرة هذه .

مبرهنة (٤ – ١ – ٨)

من اجل كل مجموعة غير خالية S وكل حلقة واحدية تبادلية R يوجد جبر حر على S .

البرهـــان :

لنأخذ المجموعة S منتهية ولنفرض أن $S = \{ x_1 , x_2 \cdots x_n \}$ وهذا لايؤثر على عمومية البرهان . كما لتكن S^* مجموعة جميع المتتاليات المنتهية من S بما في ذلك المتتالية الخالية ϕ والتي سنرمز لها بـ 1 . سنكتب هذه المتتاليات بدون اقواس مثال ذلك :

$$x_2 x_1 x_1 \; x_1 x_2$$

تصبح عندها S^* مونوئيداً بالنسبة لترتيب العناصر بجانب بعضها كعملية ضرب والذي عنصره المحايد 1 . إن S^* مونوئيد حر على S لأنه بفرض أن B مونوئيد ما و

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[d] & B \\ S^* & \end{tikzcd}$$

المخطط (٤-١-٣)

$$g : S \longrightarrow B$$

$$x_i \longrightarrow b_i$$

فإن التطبيق :

$$x_{i_1} \; x_{i_2} \, .. \, x_{i_r} \longrightarrow b_{i_1} \, .. \, b_{i_2} \, ... \, b_{i_r}$$

هو تشاكل لـ S^* في B وهو وحيد من طريقة تشكيله .

نعرف الآن $R<S>$ كفضاء حلقي حر على S^* باعتبارها قاعدة له . فإذا كتبنا $x_I = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$ من اجل كل مجموعة من الادلة $I = \{ i_1 i_2 \cdots i_r \}$ فإن كل عنصر من $R<S>$ يكتب على الشكل الوحيد التالي :

$$f = \sum \alpha_I x_I \qquad (1)$$

حيث يؤخذ الجمع على جميع المتتاليات المختلفة $I = \{ i_1 , i_2, \cdots i_r \}$ ؛ $\alpha_I \in R$ مهما تكن I كما أن جميع α_I تساوي الصفر على الأكثر . نعرف على $R<S>$ عملية ضرب خطانية ، وذلك باستخدام الضرب في S^* ، فإذا كان :

$$g = \sum \beta_J x_J$$

عنصراً آخر من $R<S>$ فإن fg يعطى بـ :

$$fg = \sum \alpha_I \beta_J x_I x_J$$

يمكن غمس S في $R<S>$ وذلك بطابقة العنصر x_i مع العنصر في (1) وذلك بأخذ $\alpha_I = 1$ إذا كان $I = i$ ويساوي الصفر فيما عدا ذلك ؛ يصبح $R<S>$ جبراً حراً على S ؛ لأنه إذا كان g تطبيقاً ما لـ S في جبر B على R فإن هذا التطبيق يمدد إلى تشاكل مونونيدي وحيد لـ S^* في B وهذا بدوره يمدد إلى تشاكل جبور وحيد لـ $R<S>$ في B وذلك لأن $R<S>$ فضاء حلقي حر على S^* وهذا التشاكل $R<S> \to B$ معين بـ :

$$\sum \alpha_I x_I \to \sum \alpha_I b_I$$

حيث يكون $b_I = b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_r}$ إذا كان $I = \{ i_1 , i_2 \cdots i_r \}$.

إذا كانت S وحيدة العنصر $S=\{x\}$ فإن الجبر الحر على S هو حلقة الحدوديات $R[x]$ والتي هي تبادلية أما إذا كانت S مؤلفة من عنصرين فإن $R<S>$ غير تبادلي لأن $x_1 x_2 \neq x_2 x_1$.

٤ ـ ١ ـ ٨ الجداء الموتري للجبور Tensor of abgebras

بفرض أن A,B جبرين على الحلقة الواحدية التبادلية R ، فقد رأينا أنه يمكن انشاء الجداء الموتري $B \otimes A$ للفضاءين الحلقيين A,B على R وسندرس الآن كيف يمكن جعل $B \otimes A$ جبراً على R .

مبرهنة (٤ ـ ١ ـ ٩)

بفرض ان A , B جبرين على الحلقة الواحدية التبادلية R لنبرهن على وجود عملية ضرب على $B \otimes A$ محققة لـ :

$$(x_1 \otimes y_1)\,,(x_2 \otimes y_2) = (x_1 x_2) \otimes (y_1 y_2) \qquad (2)$$

البرهـان :

بفرض $x_1 \in A$, $y_1 \in B$ لنعرف التداكلين (الاندمورفيزمين) .

$$\lambda_x : A \longrightarrow A \quad , \quad \lambda_y : B \longrightarrow B$$

$$a \longrightarrow x.a \qquad\qquad b \longrightarrow y.b$$

إن $\lambda_{x_1} \otimes \lambda_{y_1} \in End_R (A \otimes B)$ ويحقق :

$$(\lambda_{x_1} \otimes \lambda_{y_1})(x_2 \otimes y_2) = \lambda_{x_1}(x_2) \otimes \lambda_{y_1}(y_2)$$
$$= x_1 x_2 \otimes y_1 y_2$$

وذلك بتطبيق مارأيناه في الجداء الموتري لتداكلين .

كذلك فإن التطبيق :

$$A \times B \longrightarrow \mathrm{End}_R(A \otimes B)$$

$$(x_1, y_1) \longrightarrow \lambda_{x_1} \otimes \lambda_{y_1}$$

خطاني وبذلك يوجد تشاكل فضاءات حلقية وحيد :

$$\Phi : A \otimes B \longrightarrow \mathrm{End}_R(A \otimes B)$$

معين بـ :

$$\Phi(x_1 \otimes y_1) = \lambda x_1 \otimes \lambda y_1$$

نعرف على $A \otimes B$ عملية الضرب التالية :

$$(A \otimes B) \times (A \otimes B) \longrightarrow (A \otimes B)$$

$$(Z, w) \longrightarrow Zw = \Phi(z)(w)$$

بما أن Φ تشاكل فضاءات حلقية يكون $\Phi(z) \in \mathrm{End}_R(A \otimes B)$ والتطبيق السابق خطاني أي هو عملية ضرب على $A \otimes B$.

$$(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) = \Phi(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes \gamma_2)$$

$$= (\lambda_{x_1} \otimes \lambda_{y_1})(x_2 \otimes y_2)$$

$$= x_1 x_2 \otimes y_1 \gamma_2$$

أي أن (2) محقق .

مبرهنة (٤ ـ ١ ـ ١٠)

بفرض ان A,B,C جبور على الحلقة الواحدية التبادلية R يكون :

(i) $(A \oplus B) \otimes C \approx (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$

(ii) $(A \otimes B) \otimes C \approx A \otimes (B \otimes C)$

(iii) $(A \otimes B) \approx (B \otimes A)$

(ix) $A \otimes R \approx R \otimes A \approx A$

البرهـان :

لقد برهنا على هذه الخواص في حالة الفضاءات الحلقية ويبقى إذن أن نبرهن أن التاكلات السابقة تحقق عملية الضرب في (2) . سنبرهن فقط على (ii) ؛ لنرمز بـ φ للتاكل التالي للفضاءات الحلقية:

$$\varphi : (A \otimes B) \otimes C \longrightarrow A \otimes (B \otimes C)$$

نجد أن :

$$\varphi\left[((x_1 \otimes y_1) \otimes z_1) \cdot ((x_2 \otimes y_2) \otimes z_2) \right] =$$

$$\varphi \left\{ \left[(x_1 \otimes y_1) \cdot (x_2 \otimes y_2) \right] \otimes (z_1 . z_2) \right\}$$

$$\varphi\left[(x_1 x_2 \otimes y_1 y_2) \otimes (z_1 z_2) \right] = (x_1 x_2) \otimes (y_1 y_2 \otimes z_1 z_2)$$

$$= (x_1 x_2) \otimes \left[(y_1 \otimes z_1) . (y_2 \otimes z_2) \right] =$$

$$= \left[x_1 \otimes (y_1 \otimes z_1) \right] \cdot \left[x_2 \otimes (y_2 \otimes z_2) \right]$$

أي ان تطبيق التاكل φ يحافظ على عملية الضرب (2) .

مبرهنة (٤ ـ ١ ـ ١١)

ان التطبيقين $\theta_A : A \longrightarrow A \otimes B$ ، $\theta_B : B \longrightarrow A \otimes B$ **المعرفين بـ :**

$$\theta_A(x) = x \otimes 1_B \ , \ \theta_B(y) = 1_A \otimes y$$

هما تشاكل جبور بحيث يكون :

١ ـ $\theta_A(A) \cup \theta_B(R)$ **تولـد** $A \otimes B$ **كجبر على** R .

٢ ـ $\forall x \in A , \forall y \in B , \ \theta_A(x)\theta_B(y) = \theta_B(y)\,\theta_A(x)$

البرهان

ان خطانية $\otimes$ مضاف اليها :

$$(x_1 \otimes y_1) \cdot (x_2 \otimes y_2) = x_1 x_2 \otimes y_1 y_2$$

يجعل كلا من θ_A , θ_R تشاكل جبور .

كذلك فان :

$$\theta_A(x) \cdot \theta_B(y) = (x \otimes 1_B) \cdot (1_A \otimes y)$$

$$= (x \cdot 1_A) \otimes (1_B \cdot y)$$

$$= x \otimes y$$

$$\theta_B(y) \cdot \theta_A(x) = (1_A \otimes y) \cdot (x \otimes 1_B) =$$

$$= (1_A \cdot x) \otimes (y \cdot 1_B) = x \otimes y$$

ننتقل الآن إلى دراسة الجبور على حقل F فندرس أسسها والجبور البسيطة ونصف البسيطة .

٤ ـ ١ ـ ٩ شبكة المثاليات

بفرض أن A جبر على حقل F ، لنرمز بـ I لمجموعة مثاليات هذا الجبر .

نرتب I بعلاقة الاحتواء أي بفرض أن $I_1 , I_2 \in I$ فإن $I_1 \leqslant I_2$ اذا واذا فقط كان $I_1 \subseteq I_2$ والعلاقة $\leqslant$ هي علاقة ترتيب جزئية على مجموعة المثاليات I في A. كذلك إذا كان $I_1 , I_2 \in I$ فإن كلا من I_1+I_2 ، $I_1 \cap I_2$ مثـــالي لـ A وهما الحدان الأعلى الأصغري والادنى الأعظمي لـ $\{ I_1 , I_2 \}$ نستنتج من ذلك أن العلاقة $\leqslant$ تستخلص على I بنية شبكية .

٤ ــ ١ ــ ١٠ المثاليات معدومة القوة Nilpotent ideals

بفرض أن A جبر تجميعي على F ، نقول عن العنصر $a \in A$ أنـــه معدوم القوة إذا كان $a^k = o$ من أجل عدد k ، ويسمى أصغر عدد k يجعل $a^k = o$ درجة انعدام القوة لـ a . يكون المثالي I_1 لـ A معدوم القوة اذا كان $I_1{}^k = o$ من أجل عدد k ؛ كما يسمى أصغر k يجعل $I_1{}^k = o$ بدرجة انعـدام القوة للمثالي I_1 ويرمز له بـ $\deg I_1$.

٤ ــ ١ ــ ١١ الاسس Radicals

بفرض أن A جبر تجميعي وتبادلي على الحقل F ، لنبرهن أن العنـــاصر المعدومة القوة في هذا الجبر تشكل مثالياً له .

فإذا كان $x,y \in A$ عنصرين معدومي القوة من الدرجـــة p,q على الترتيب يكون لدينا :

$$(\lambda x+\mu y)^{p+q} = \sum_{i=0}^{p+q} \binom{p+q}{i} \lambda^i \mu^{p+q-i} x^i y^{p+q-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{p+q} \alpha_i x^i y^{p+q-i} =$$

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i x^i y^{p+q-i} + \sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i x^i y^{p+q-i} = o$$

هذا يبرهن ان العناصر المعدومة القوة تشكل فضاء متجهياً جزئياً من الفضاء المتجهي A على F ، كذلك فإن :

$$(xy)^p = x^p y^p = o$$

ويسمي المثالي المؤلف من العناصر معدومة القوة في A بأساس A ويرمز له rad A . من الواضح أن :

$$\text{rad}\,(\text{rad}A) = \text{rad}\,A$$

ان جبر الخارج A/rad A لايحوي عناصر معدومه القوة لأنـــه لو كان $\frac{x}{\text{rad}\,A} \in A/\text{rad}A$ بحيث أن $\left(\frac{x}{\text{rad}\,A}\right)^k = o \Leftarrow x^k \in \text{rad}\,A$ وبالتالي ومن تعريف أساس جبر نجد :

$$(x^k)^l = x^{kl} = o \Rightarrow x \in \text{rad}\,A$$

أي أن $\frac{x}{\text{rad}A} = o$ ونعبر عن هذه النتيجة السابقة بقولنا :

$$\text{rad}\,(A/\text{rad}A) = o$$

لنفرض الآن ان بعد الجبر A منته ويساوي n ، ولنبرهن أن rad A مثالي معدوم القوة وأن :

$$\deg\,(\text{rad}\,A) \leqslant \dim(\text{rad}\,A) + 1 \leqslant n + 1$$

لتكن $e_1, e_2 \cdots e_r$ قاعدة لـ rad A ينتج عن ذلك أن كل متجه من هذه القاعدة e_i معدوم القوة فإذا فرضنا $k = \max(\deg e_i)$ ، لنأخـــذ المثالي $(\text{rad}A)^{rk}$ ، ان كل عنصر من هذا المثالي هو المجموع لعناصر من الشكل :

$$e_1^{k_1} e_2^{k_2} \cdots\cdots e_r^{k_r}$$

حيث يكون :

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r = kr$$

وبشكل خاص يكون $k_i \geqslant k$ من أجل بعض i وبالتالي يكون :

$e_1^{k_1} e_2^{k_2} \ldots e_r^{k_r} = 0$ وهذا يبرهن أن :

$$(\mathrm{rad}A)^{kr} = 0$$

أي أن $\mathrm{rad}A$ معدوم القوة

ليكن s درجة انعدام قوى $\mathrm{rad}\,A$ ولنفرض أنه من أجل بعض $m < s$ يكون :

$$(\mathrm{rad}A)^m = (\mathrm{rad}A)^{m+1} \qquad (3)$$

فيكون لدينا :

$$(\mathrm{rad}A)^m = (\mathrm{rad}A)^{m+1} = (\mathrm{rad}A)^{m+2} = \ldots\ldots =$$
$$(\mathrm{rad}A)^s = 0$$

وهذا خاطىء اذن فالفرض (3) خاطىء ويكون لدينا :

$$\dim (\mathrm{rad}A)^m > \mathrm{din} (\mathrm{r{\scriptstyle e}dA})^{m+1} ,\ m < s$$

وينتج بالتالي أن $s-1$ لايمكن أن يكون اكبر من $\dim(\mathrm{rad}A)$ أي أن:

$$\deg (\mathrm{rad}A) \leqslant (\dim \mathrm{rad}A) + 1 \leqslant n + 1$$

ينتج مما سبق ان درجة انعدام قوة أي عنصر $x \in A$ هي اصغر أو تساوي $n+1$ أي :

$$\deg x \leqslant n + 1$$

٤ ـ ١ ـ ١٢ الجبور البسيطة

يكون الجبر A بسيطاً اذا كان لايحوي مثالياً $\{0\} \neq I \subset A$ وكان $A^2 \neq 0$
كمثال على ذلك لنأخذ الحقل F كجبر على حقل جزئي منته منه F_1 ، فإذا كان $I \neq 0$ مثالياً في F وبفرض أن $0 \neq x \in I$ يكون لدينا :

$$1 = x^{-1} x \in I$$

وينتج من ذلك أن :

$$F = F . 1 \subset I$$

ومنه $F = I$ وبما أن $F^2 \neq o$ اذن F بسيط .

مبرهنة (٤ ـ ١ ـ ١٢)

إذا كان A جبرا بسيطا تجميعيا وتبادليا فان A جبر قسمة .

البرهـان :

لنبرهن أولا أن لـ A عنصر محايد . بما أن $A^2 \neq o$ فيوجـد عنصر $a \in A$ بحيث يكون $I_a \neq o$ ، وبما أن A بسيط إذن $I_a = A$ ، فيوجـد إذن عنصر $e \in A$ بحيث يكون :

$$a . e = a \qquad (4)$$

نبرهن الآن $e^2 = e$. من (4) نجد :

$$a (e^2 - e) = (ae) e - ae = ae - ae = o$$

أي أن $e^2 - e$ محتوى في العادم لـ a أي $e^2 - e \in Na$.

بما أن Na مثالي وأن $Na \neq A$ فينتج أن $Na = o$ ومنه $e^2 = e$.

ليكن $x \in A$ عنصراً ما من A . بما أن $a = a e \in I_e$ يكون $I_e \neq o$ ومنـه $I_e = A$ وبذلك يمكننا أن نكتب :

$$x = ey \qquad \text{من أجل بعض العناصر } y \in A$$

ينتج من ذلك أن : $ex = e^2 y = ey = x$ ويصبـح بذلك e عنصراً محايداً لـ A .

هكذا يحقق كل عنصر $x\in A$ العلاقة $x = x . e$ أي أن $x\in I_x$. وبصورة خاصة $I_x\neq o$ إذا كان $x\neq o$ نستنتج أن $I_x=A$ إذا كان $x\neq o$ وبالتالي يوجد عنصر $x^{-1}\in A$ بحيث يكون $x\, x^{-1} = x^{-1}\, x = e$ أي أن A جبر قسمة .

٤ ـ ١ ـ ١٣ الجبور الخذولة كليا Totally reducible algebras

نقول عن الجبر A أنه خذول كلياً اذا وجد لكل مثالي I في A مثالياً مكملا له I' بحيث يكون :

$$A = I \oplus I'$$

لنبرهن الآن أن كل مثالي I في الجبر A الخذول كلياً ، هو نفسه خذول كلياً ، بفرض أن I' مثالي مكمل لـ I يكون :

$$I . I' = \{ x.y \mid x\in I , y \in I' \}$$

ان $x.y\in I$ وكذلك $x.y\in I'$ وينتج بالتالي أن :

$$x.y \in I \cap I' = \{o\} \quad \text{ومنه} \quad I.I' \subset I \cap I' = \{o\}$$

إذا كان J مثالياً في I ينتج لدينا :

$$J . I \subset J \quad , \quad J . I' \subset I . I' = o$$

وينتج بالتالي أن $J . A\subset J$ أي أن J مثالي في A . لنفرض أن J' مثالي مكمل لـ J في A :

$$A = J \oplus J'$$

نقاطع مع I مع ملاحظة أن $J \subset I$ نجد أن :

$$I = J \oplus (I \cap J')$$

أي أن J خذول كلياً أيضاً .

نقول عن الجبر A انه غير خذول اذا لم نستطع كتابته كمجموع مباشر لمثاليين غير تافهين .

٤ ـ ١ ـ ١٤ الجبور نصف البسيطة Semi simble algebras

نقول عن الجبر التجميعي والتبادلي A أنه نصف بسيط اذا كان خذولا كلياً وكان $I^2 \neq o$ من أجل كل مثالي $I \neq o$.

مبرهنة (٤ ـ ١ ـ ١٣)

(*) إذا كان الجبر A خذولا كليا فان A هو المجموع المباشر لأساسه ولمثالي نصف بسيط . كذلك فان مربع اساسه يساوي الصفر .

البرهـان :

ليكن B المثالي المكمل لـ rad A :

$$A = \text{rad}\, A \quad B$$

بما أن $B \approx A/\text{rad}\, A$ فإنه ينتج أن B لاتحوي عناصر معدومة القوة ومختلفة عن الصفر وبالتالي يكون $B^2 \neq o$. ينتج من البند (٤-١-١٣) أن B خذول كلياً وبالتالي B نصف بسيط .

نبرهن الآن أن $o = (\text{rad}A)^2$. بفرض أن k درجة انعدام قوة radA فإن $(\text{rad}\, A)^k = o$ وينتج بالتالي أنه $(\text{rad}A)^{k-1}$ مثالي لـ rad A وبالتالي يوجد مثالي مكمل J بحيث يكون :

$$(\text{rad}A)^{k-1} \oplus J = \text{rad}\, A$$

ويكون لدينا العلاقة :

$$(\mathrm{rad}A^{k-1})^2 = \mathrm{rad}\,A^k = 0$$

$$J \cdot (\mathrm{rad}A)^{k-1} = 0$$

$$J^{k-1} \subset (\mathrm{rad}A)^{k-1} \cap J = 0$$

وهذه العلاقات تؤدي إلى :

$$(\mathrm{rad}A)^{\max(2,k-1)} = 0$$

ولكن $(\mathrm{rad}\,A)^{k-1} \neq 0$ ومنه :

$$(\mathrm{rad}A)^2 = 0$$

نتيجة :

يكون A نصف بسيط اذا واذا فقط كان خنولا كلياً وكان $\mathrm{rad}\,A = 0$.

★ ★ ★

تماريـــن ٤ ـ ١

٤-١-١ بفرض أن A جبر على R ليكن C (A) مجموعة العناصر $a \in A$ التبادليـة مع كل عنصر من A . برهن أن C (A) فضاء جزئي من A وإذا كان A تجميعيـــاً برهن أن C (A) جبر جزئي من A . نسمي C (A) مركز A .

٤-١-٢ بفرض ان A جبر و θ اشتقاق على A برهن أن C (A) مركز A وA^2 المسمى الجبر الاشتقاقي مستقران بالنسبة لـ θ .

٤-١-٣ بفرض أن θ اشتقاق على الجبر التجميعي والتبـادلي A وبفرض أن e عنصره المحايد وان لـ $x \in A$ مقلوب هو x^{-1} :

$$x x^{-1} = x^{-1} x = e$$

برهن أن $x^p (p \geqslant 1)$ قلوب وان :

$$(x^p)^{-1} = (x^{-1})^p$$

وإذا رمزنا لمقلوب x^p بـ x^{-p} برهن أن

$$\theta(x^{-p}) = -p x^{-p-1}\, \theta(x) \quad , \quad \forall\, \theta \in \mathrm{Der}(A)$$

٤-١-٤ بفرض أن x ,y مجموعتان جزئيتان من الجبر التجميعي A وبفرض أن B جبر جزئي من الجبر A برهن أن :

١ ـ $C_A(x)$ جبر جزئي من A وان $Z(A) \subseteq C_A(x)$ حيث يكون :

$$C_A(X) = \{\ y \in A \mid xy = yx \quad , \ \forall x \in X\ \}$$

$$Z(A) = \{\ y \in A \mid xy \in yx \quad \forall\ x \in A\}$$

٢ – إذا كان $X \subseteq Y$ برهن أن $C_A(Y) \subseteq C_A(X)$.

٣ – $X \subseteq C_A(Y) \Leftrightarrow Y \subseteq C_A(X)$ وبصورة خاصة $X \subseteq C_A(C_A(X))$.

٤ – $B \cap C_A(B) = Z(B)$.

٥ – $X \subseteq Z(A) \Leftrightarrow C_A(X) = A$

٤-١-٥ لتكن A,B,C جبور تجميعيـــة على R وبفرض أن $\varphi : B \longrightarrow A$ ، $\psi : C \longrightarrow A$ تشاكلان بحيث يكون $\psi(C) \subseteq C_A(\varphi(B))$ برهن على وجود تشاكل جبور وحيد $\theta : B \otimes C \longrightarrow A$ يحقق :

$$\theta(x \otimes y) = \varphi(x)\, \psi(y)$$

$x \in B$ ، $y \in C$.

* * *

الفصل الثاني

جبر لي

LIE ALGEBRA

٤ ـ٢ ـ ١ جبرلي Lie Algebra

ان جبرلي مثال هام للجبور غير التجميعية . نقول عن الجبر L على الحقل F انه جبرلي اذا حقق الضرب والذي سنرمز له بـ * الشروط التالية :

١ ـ $x * x = o$ (1)

٢ ـ متطابقة جاكوبي :

$$x * (y * z) + y * (z * x) + z * (x * y) = o \tag{2}$$

ويرمز غالباً لعملية الضرب هذه بـ [,] بدلا من * .

ملاحظة

١ ـ لايمكن وجود عنصر محايد لجبرلي ، لانه إذا كان e عنصراً محايداً يكون $e * e = o$ وهذا يقتضي $e = o$ ، وهذا مستحيل إذا كان $L \neq \{o\}$ وذلك لأن $x = x * e = x * o = o \quad , \quad \forall x \in L$.

٢ ـ تقتضي (1) التناظر المتخالف :

$$x * y = - y * x \quad , \forall x, y \in L \tag{3}$$

وذلك لأن :

$$(x+y)*(x+y) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x*x + x*y + y*x + y*y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x*y + y*x = 0$$

وذلك بعد تطبيق (1) .

٣ - إذا كان مميز الحقل F مختلفاً عن 2 فإن (3) تقتضي (1) .

مثال (٤ - ٢ - ١)

آ - إن مجموعة المصفوفات المربعة $M_{(n,n)}(C)$ وعلى حقل الأعداد العقدية C هي جبرلي على C وذلك لأن :

١ - $M_{(n,n)}(C)$ فضاء متجهي على الحقل C بالنسبة لعملية جمع مصفوفتين والمضاعف السلمي لمصفوفة .

٢ - تعرف عملية * على المصفوفات كما يلي :

$$M_1 * M_2 = M_1 . M_2 - M_2 . M_1$$

حيث ترمز . لعملية الضرب العادية على المصفوفات . ويمكن للقارىء التحقق من أن عملية الضرب * تحقق جميع الشروط الواردة في تعريف جبرلي .

ب - إن المجموعة $U(n,C)$ للمصفوفات المربعة من المرتبة n وعلى حقل الأعداد العقدية C والتي محدداتها تساوي 1 ، تشكل جبرلي وذلك بتعريف الضرب بشكل مماثل للمثال السابق آ .

هـ – بفرض أن B جبر تجميعي على الحقل F ، نعرف على B عمليــة الضرب التالية :

$$\forall x,y \in B \quad , \quad [x,y] = x.y - y.x$$

وحيث ترمز . لعملية الضرب في الجبر B .

عندها يصبح B جبرلي وذلك لأن :

١ – $\forall x \in B \quad , \quad [x,x] = 0$

٢ – $\forall x,y,z \in B$ يكون :

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$$

لنبرهن على متطابقة جاكوبي :

$$[x,[y,z]] = x(yz - zy) - (yz - zy)x$$

$$= xyz - xzy - yzx + zyx$$

$$[y,[z,x]] = [y,(zx - xz)] = y(zx - xz) - (zx - xz)y$$

$$= yzx - yxz - zxy + xzy$$

$$[z,[x,y]] = z.(xy - yx) - (xy - yx)z$$

$$= zxy - zyx - xyz + yxz$$

وبالجمع تتحقق متطابقة جاكوبي .

كذلك فإن الضرب توزيعي بالنسبة للجمع :

$$[x,[y+z]] = [x,y] + [x,z]$$

$$[x,(y+z)] = x.(y+z) - (y+z).x$$

$$= x.y + x.z - yx - z.x$$

$$= (xy - yx) + (xz - zx)$$

$$= [x, y] + [x,z]$$

بطريقة مشابهة نبرهن أن :

$$[(y+z), x] = [y, x] + [z,x]$$

د – إذا كان V فضاء متجهياً على الحقل F فان المجموعة End(V) هي جبر على F . ويمكن جعلها جبرلي وذلك بتعريف عملية الضرب التالية :

$$[f, g] = fog - gof$$

ويرمز له عادة بـ $gL(V)$ ويسمى الجبر الخطي العام .

نقول عن المجموعة الجزئية S من جبرلي L انها مستقرة بالنسبة لعملية الضرب * إذا كان :

$$S * S \subseteq S$$

أي $x_1 * x_2 \in S$ ومهما كان $x_1, x_2 \in S$ حيث :

$$S * S = \{x \mid x = x_1 * x_2, x_1, x_2 \in S\}$$

تكون المجموعة الجزئية S من جبرلي ، جبراً جزئياً إذا كانت S تشكل جبرلي بالنسبة للقوانين المستخلصة على S . نسمي جبرلي الخطي كل جبر جزئي من الجبر الخطي العام $gL(V)$.

٤ – ٢ – ٢ جبور لي التبادلية :

يكون العنصران x,y من جبرلي L تبادلين إذا كان $x * y = o$ ويكون جبرلي L تبادلياً إذا كان كل عنصرين فيه تبادلين أو بتعبير آخر إذا كان :

$$L * L = \{o\}$$

مثال (٤ ـ ٢ ـ ٢)

آ ـ يكون جبرلي التجميعي L في المثال (٤-٢-١) ـ حـ تبادلياً .

اذا واذا فقط كان في L :

$$x . y = y . x$$

٢ ـ بفرض أن V فضاء متجهي على F . نعرف على V عمليـــة الضرب التالية $*$:

$$V_1 * V_2 = o \quad , \quad \forall V_1 , V_2 \in V$$

يرى القارىء بسهولة أن V يصبح عندها جبرلي التبادلي .

٤ ـ ٢ ـ ٣ مثاليات جبرلي Ideals of a Lie Algebra

يعرف المثالي لجبرلي بطريقة مشابهة التي عرفنا بها مثالي الجبر بشكل عام ، تكون المجموعة الجزئية B من L مثاليا لهذا الجبر إذا كان :

١ ـ B فضاء جزئياً من L .

٢ ـ $B * L \subseteq B$ أي أن :

$$b * x \in B \quad , \forall\, b \in B , \forall\, x \in L$$

ويلاحظ هنا ان المثالي لجبرلي هو مثالي ثنائي الجانب وذلك لأن :

$$\forall\, x, y \in L \;, (x + y) * (x + y) = o$$

والتي نجد منها :

$$x * y = - y * x$$

وبالتالي

$$B * L = L * B$$

هناك مثاليان لـ L وهما $L, \{ o \}$ ذاته .

بما أن كل مثالي لجبرلي L هو مثالي ثنائي الجانب فيمكن أن نعرف جبرلي الخارج كما يلي :

إذا كان B مثالياً لجبرلي فإن جبرلي الخارج ويرمز له بـ L/B هو المجموعة :

$$L/B = \{ \frac{x}{B} \mid x \in L \}$$

حيث تعرف عملية الضرب كما يلي :

$$\frac{x}{B} * \frac{y}{B} = \frac{x * y}{B}$$

هذا وإن عملية الضرب هذه متوائمة مع صفوف التكافؤ لأن :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{B} = \frac{x'}{B} \\ \\ \frac{y}{B} = \frac{y'}{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x * y}{B} = \frac{x' * y'}{B}$$

إذا كان I , J مثاليين لجبرلي L فإن كلاً من $I + J$, $I \cap J$ مثالي لـ L حيث يكون :

$$I + J = \{ x + y \mid x \in I , y \in J \}$$

كذلك فإن :

$$I * J = \{ \sum x_i * y_i \mid x_i \in I , y_i \in J \}$$

هو ايضاً مثالي لجبرلي L .

٤ ــ ٢ ــ ٤ الاشتقاق في جبرلي

عرفنا سابقاً تطبيق الاشتقاق على جبر A وهو نفسه بالطبع بالنسبة لجبرلي أي أن الاشتقاق d على L هو تداكل : $d : L \longrightarrow L$ بحيث يحقق :

$$d(x_* y) = dx_* y + x_* dy$$

سنرى من خلال المبرهنات التالية أن $\mathrm{Der}(L)$ وهي مجموعة الاشتقاقات على جبرلي انها هي أيضاً جبرلي .

مبرهنة (٤ ـ ٢ ـ ١)

$$[\mathrm{Der}\, L\ ,\ \mathrm{Der} L\ ] \subseteq \mathrm{Der}\, L \tag{4}$$

البرهـان :

$$\forall\, x, y \in L\ ,\ [d_1, d_2]\,(x_* y) = (d_1 d_2 - d_2 d_1)\,(x_* y)$$

$$= d_1 d_2 (x_* y) - d_2 d_1 (x_* y)$$

$$= d_1(d_2 x_* y + x_* d_2 y) - d_2\,(d_1 x_* y + x_* d_1 y)$$

$$= d_1 d_2\, x_* y + d_2\, x_* d_1 y + d_1\, x_* d_2 y + x_* d_1 d_2 y$$

$$- d_2 d_1\, x_* y - d_1\, x_* d_2 y - d_2\, x_* d_1 y - x_* d_2 d_1\, y$$

$$= d_1 d_2\, x_* y - d_2 d_1\, x_* y + x_* d_1 d_2 y \quad x_* d_2 d_1 y$$

$$= (d_1 d_2 - d_2 d_1)\, x_* y + x_* (dd_2 - d_2 d_1) y$$

$$= ([\,d_1, d_2\,] x)_* y + x_* ([d_1\ \ d_2] y)$$

$$\Rightarrow [\,d_1, d_1\,) \in \mathrm{Der}(L)$$

مبرهنة (٤ ـ ٢ ـ ٢)

ان المجموعة $\mathrm{Der}(L)$ هي جبرلي بالنسبة لعملية الضرب [،] المعرفة ب :

$$[\,d_1, d_2\,] = d_1 d_2 - d_2 d_1$$

البرهـان

إن $\mathrm{Der} L$ فضاء حلقي كما أن $[d_1, d_2\,] \in \mathrm{Der} L$ حسب المبرهنة السابقة ويكفي ان نبرهن :

$$(5)\qquad [(d_1 + d_2), d_3] = [d_1, d_2] + [d_2, d_3]$$

$$(6)\qquad [d_3, (d_1 + d_2)] = [d_3, d_1] + [d_3, d_2]$$

$$(7)\qquad \alpha[d_1, d_2] = [\alpha d_1, d_2] = [d_1, \alpha d_2]$$

كما أن :

$$(8)\qquad [d, d] = o$$

$$(9)\qquad [d_1, [d_2, d_3]] + [d_2, [d_3, d_1]] + [d_3, [d_1, d_2]] = o$$

البرهـــان :

لنبرهن على (5) ، (9) فقط ويمكن للقارىء أن يبرهن على البقية كتمرين :

$$[d_1 + d_2, d_3] = (d_1 + d_2) o\, d_3 - d_3\, o\, (d_1 + d_2)$$

$$= d_1\, o\, d_3 + d_2\, o\, d_3 - d_3\, o\, d_1 - d_3\, o\, d_2$$

$$= (d_1 d_3 - d_3 d_1) + (d_2 d_3 - d_3 d_2)$$

$$= [d_1, d_3] + [d_2, d_3]$$

$$[d_1, [d_2, d_3]] = d_1 d_2 d_3 - d_1 d_3 d_2 - d_2 d_3 d_1 + d_3 d_2 d_1$$

$$[d_2, [d_3, d_1]] = d_2 d_3 d_1 - d_2 d_1 d_3 - d_3 d_1 d_2 + d_1 d_3 d_2$$

$$[d_3, [d_1, d_2]] = d_3 d_1 d_2 - d_3 d_2 d_1 - d_1 d_2 d_3 + d_2 d_1 d_3$$

بالجمع تنتج (٥) .

سندرس الآن الحالة الخاصة والعامـــة من تطبيقات الاشتقاق وهي المسماة تطبيقات الاشتقاق الداخلي Inner derivation mappings وسنبدأ بتعريف التطبيق القرين في L :

تعريف

بفرض $x \in L$ ان التداكل :

$$adx : L \longrightarrow L$$
$$y \longrightarrow x_* y$$

والذي يرمز له بـ adx هو التطبيق القرين في L من أجل العنصر x .

مبرهنة (٤ ـ ٢ ـ ٣)

ان adx اشتقاق مهما كان $x \in L$.

البرهـــان :

ان adx تطبيق خطي :

$$adx(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = x_*(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$
$$= \lambda_1 (x_* x_1) + \lambda_2 (x_* x_2) = \lambda_1 a\,dx(x_1) + \lambda_2 a\,dx(x_2)$$

كذلك فإن :

$$adx(x_{1*} x_2) = x_*(x_{1*} x_2) = -x_{1*}(x_{2*} x)$$
$$- x_{2*}(x_* x_1)$$
$$= (x_* x_1)_* x_2 + x_{1*}(x_* x_2)$$
$$= a\,dx(x_1)_* x_2 + x_{1*}(adx)(x_2)$$
$$\Rightarrow adx \in \mathrm{Der}\, L \quad , \quad \forall x \in L$$

نرمز بـ InnL لمجموعة الاشتقاقات الداخلية على L .

مبرهنة (٤ ـ ٢ ـ ٤)

ان Inn L مثالي لـ DerL

البرهـــان :

آ ـ ان InnL فضاء جزئي من DerL :

$$\forall\, adx\,,\, ady \in Inn\,L\,,\quad (adx+ady)(z)=(adx)(z)+(ady)(z)$$
$$= x_* z + y_* z = (x+y)_* z = (ad(x+y))(z)$$
$$(\lambda adx)(z) = \lambda\,(adx)(z) = \lambda\,(x_* z)$$
$$= (\lambda x)_* z = (ad\lambda x)(z)$$

ب – يكفي أن نبرهن أن $[d, adx] \in Inn\,L$:

$$[d,adx](y) = (d\circ adx - adx\circ d)(y)$$
$$= d(x_* y) - x_* dy = dx_* y + x_* dy - x_* dy$$
$$= dx_* y = (ad\,dx)(y)$$

بما أن $Inn\,L$ مثالي لـ $Der\,L$ فيمكن أن نشكل جبرلي الخارج $Der\,L/Inn\,L$ ويرمز له بـ $out\,L$ ويسمى الاشتقاق الخارجي على L .

٤ – ٢ – ٥ المناظم والمركز Normalizer and centralizer

ليكن S جبراً جزئياً من جبرلي L ، يعرف المناظم للجبر الجزئي S من L ويرمز له بـ $N_L(S)$ كما يلي :

$$N_L(S) = \{\, x\in L \mid x_* S \subset S \,\}$$

ان $N_L(S)$ جبر جزئي من L :

$$\forall\, x,y \in N_L(S)\ ;\ (\lambda x+\mu y)_* s = \lambda(x_* s)+\mu(y_* s)\in S$$
$$(x_* y)_* s = -((y_* s)_* x) - ((s_* x)_* y)$$
$$= (x_*(y_* s)) - (y_*(x_* s)) \in S$$

كذلك فإن $N_L(S)$ هو اكبر جبر جزئي من L يحوي S كمثالي له

إذا كان $S = N_L(S)$ فإننا نسمي S المناظم الذاتي .

ننتقل الآن إلى المركز لمجموعة جزئية S من L والذي سنرمز له بـ $C_L(S)$ المعرف كما يلي :

$$C_L(S) = \{ x \in L \mid x * S = o \}$$

ويمكن أن نجد بطريقة مشابهة من حـالة المناظم أن $C_L(S)$ جبر جزئي من L .

كذلك فإن مركز L ونرمز لـ بـ $Z(L)$ هو كما يلي :

$$Z(L) = \{ z \in L \mid x * z = o , \forall x \in L \}$$

ونلاحظ هنا أيضاً ان $Z(L)$ مثالي لـ L ويكون L تبادلياً اذا واذا فقط كان $Z(L) = L$.

نلاحظ أيضاً بسهولة أن $C_L(L) = Z(L)$.

ملاحظة

ان $N_L(S)$ هو مجموعة العناصر $x \in L$ بحيث يكون $adx(S) \subset S$

كذلك فإن $C_L(S)$ هو مجموعة العناصر $x \in S$ بحيث يكون $adx(S) = \{o\}$

٤ ـ ٢ ـ ٦ التشاكلات

بفرض أن L , L' جبرا لي ، يكون التطبيق الخطي $\varphi : L \rightarrow L'$ تشاكلا إذا كان :

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) * \varphi(y) , \forall x , y \in L$$

يكون φ تباكلا إذا كان $Ker\varphi = \{o\}$ ويكون تغاكلا إذا كان $Im\varphi = L'$ كما يكون تماكلا اذا كان تباكلا وتغاكلا بآن واحد .

ان $Ker\varphi$ مثالي لـ L لأنـــه إذا كان $\varphi(x) = o$ وبفرض أن $y \in L$ يكون :

$$\varphi (x*y) = \varphi(x) * \varphi (y) = o$$

إن $Im\varphi$ جبر جزئي من L' . هذا ويمكن أن نقرن كل تشاكل φ بنواته $Ker\varphi$ اي أن نقرن التشاكلات φ بالمثاليات $ker\,\varphi$ كذلك يمكن أن نقرن كل مثالي I بالتطبيق القانوني $x \longrightarrow x/I$ للجبر L على الجبر الخارج L/I .

مبرهنة (٤ ــ ٢ ــ ٥)

آ ــ بفرض ان $\varphi : L \longrightarrow L'$ تشاكل لجبري لي L, L' فإن $L / ker\varphi \approx Im\,\varphi$. إذا كان I مثاليا لـ L محتوى في $ker\varphi$ فانه يوجد تشاكل وحيد $\psi : L/I \longrightarrow L'$ يجعل المخطط التالي تبادلي .

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & L' \\ & L/I \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

ب ــ إذا كان I , J مثاليين لـ L بحيث يكون $I \subset J$ فــإن J / I مثالي لي L / I كما ان $(L/I) / (J/I)$ متماكل مع L/J .

حـ ــ بفرض ان I, J مثاليان لـ L فــإن :

$$(I + J)/I \approx I / (I \cap J)$$

على القارىء برهانها كتمرين .

إذا كان V فضاء متجهياً على الحقل F ، رأينا أننا نرمز بـ $gL (V)$ بدلا عن $End (V)$ لمجموعة المؤثرات الخطية على V والتي هي جبرلي بالنسبة لعمليـة

الضرب التالية :

$$[f,g] = fog - gof$$

ويسمى جبرلي $gL(V)$ الجبر الخطي العام كما يسمي كل جبر جزئي منه جبرلي الخطي .

ان التمثيل لجبرلي L هو التشاكل $\varphi : L \longrightarrow gL(V)$. والمثال الهام الوحيد على التمثيل هو التمثيل القرين :

$$ad : L \longrightarrow gL(L)$$

$$x \longrightarrow adx$$

حيث يكون $adx\,(y) = x_* y$. إن صورة ad هي في $DerL \subset gL(L)$ كذلك فإن ad يحقق كذلك :

$$[adx\ ,ady\,](z) = adx\,ady\,(z) - ady\,adx\,(z)$$

$$= adx\,(y_* z) - ady\,(x_* z)$$

$$= x * (y * z)) - (y * (x * z))$$

$$= (x * (y_* z)) + ((x * z)_* y)$$

$$= ((x_* y)_* z)$$

$$= ad\,(x * y)\,(z)$$

نفتش عن نواة ad ، والتي هي مؤلفة من جميع العناصر $x \in L$ بحيث يكون $adx = o$ أي جميـع العناصر $x \in L$ بحيث يكون $x * y = o\ ,\ (\forall y \in L)$ وينتـج بالتالي أن :

$$\ker ad = Z(L)$$

نستنتج مما سبق النتيجة الهامة التالية : إذا كان L بسيطاً (أي أن جبورلي الجزئية منه هي { o } و L) فان $Z(L) = \{o\}$ ويكون بالتالي $ad : L \to gL(L)$ تباكلا وهذا يعني أن كل جبرلي البسيط متماكل مع جبرلي الخطي .

★ ★ ★

تمارين (٤ ـ ٢)

٤-٢-١ بفرض أن L الفضاء المتجهي الحقيقي R^3 . نعرف عملية الضرب التالية :

$$[x,y] = x \times y \qquad \forall x, y \in L$$

(حيث يكون $x \times y$ هو الجداء الخارجي للمتجهين y,x) . برهن أن L جبرلي .

٤-٢-٢ بفرض أن L جبرلي على حقل مغلق جبريا وأن $x \in L$. برهن أن الفضاء الجزئي من L المولد بالمتجهات الذاتية لـ adx هو جبر جزئي .

٤-٢-٣ بفرض أن L جبرلي وأن I مثالي في A . برهن أن L/I هو أيضاً جبرلي .

٤-٢-٤ بفرض أن A جبر تجميعي وان L جبرلي المقابل له برهن أن التطبيق الخطي $\theta : A \longrightarrow A$ هو اشتقاق في A إذا كان θ فقط اشتقاقاً في L

٤-٢-٥ بفرض أن A جبر وأن D (A) فضاء الاشتقاقات في A . نعرف عملية الضرب التالية في D(A) كما يلي :

$$[\theta_1, \theta_2] = \theta_1 \theta_2 - \theta_2 \theta_1$$

١ ـ برهن أن D (A) جبرلي ،

٢ ـ بفرض أن A جبرلي وليكن التطبيق $\varphi : A \longrightarrow D(A)$ المعطى بـ $\varphi : x \longrightarrow adx$ برهن أن φ تشاكل لجبرلي ، عين نواة φ .

الفصل الثالث

الحدوديات في n مجهولا

Polynomials in n indeterminates

٤ – ٣ – ١ تعريف :

نعلم أن الحدودية بمجهول واحد وبمعاملات في حلقة واحدية تبادلية R هي المتتالية $(a_0, a_1, .., a_n, ...)$ من عناصر A بحيث يكون $a_\alpha = 0$ من أجل جميع $\alpha \in N$ دون عدد منته منها ، وبفرض أن الحدوديات :

$$1 = (1,0,0,..) , x = (0,1,0,...) , x^2 = (0,0,1,0,..) .....$$

تكتب الحدودية $(a_0, a_1 ..., a_n, ...)$ على الشكل :

$$\Sigma a_i x^i$$

أما الحدودية في n مجهولا فهي على الشكل :

$$\Sigma a_{\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$$

وسنحاول تعريفها بطريقة مشابهة لتعريف الحدودية في مجهول واحد . بفرض أن $n \geqslant 1$ عدد طبيعي ، لنأخذ المجموعة N^n من المتتاليات المنتهية $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n)$ من الاعداد الطبيعية ولنفرض أن :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_n$$

نعرف على المجموعة N^n عملية الجمع التالية :

$$\alpha, \beta \in N^n, \ \alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n) \in N^n$$

تعريف (٤ — ٣ — ١)

إن الحدودية في n مجهولاً وبمعاملات في حلقة واحدية تبادلية R هي الجماعة $(a_\alpha)_{\alpha \in N^n}$ والتي هي جميع حدودها أصفار دون عدد منته منها .

نرمز لمجموعة هذه الحدوديات بالرمز $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. ونزودها بعمليتي الجمع والضرب التاليتين :

آ ـ الجمع :

$$(a_\alpha) + (b_\alpha) = (a_\alpha + b_\alpha), \ \alpha \in N^n$$

والتي تجعل من $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد :

$(a_\alpha)_{\alpha \in N^n} = o$ بحيث يكون $a_\alpha = o$ ومهما تكن α وتسمى الحدودية الصفرية ، كما أن النظير الجمعي للحدودية $P = (a_\alpha)$ هو الحدودية $-P = (-a_\alpha)$

ب - الضرب .

بفرض أن $P = (a_\alpha)$, $Q = (b_\beta)$ حدوديتان ، ان المتتالية $C = (C_\gamma)_{\gamma \in N^n}$ بحيث يكون :

$$c_\gamma = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\beta$$

هي حدودية ، تسمى جداء الحدوديتين P و Q .

بما أن كلا من (a_α),(b_β) حدودية ، فيوجد عددان طبيعيان n_1, n_2 بحيث يكون :

$a_\alpha = o$ مهما يكن $|\alpha| > n_0$

$b_\beta = o$ مهما يكن $|\beta| > n_1$

ويكون بذلك $c_\gamma = o$ مهما يكن $|\gamma| > n_0 + n_1$ ، لأنه من الواضح أن $|\beta| + |\alpha| = |\gamma|$ وان $a_\alpha b_\beta = o$ لأن أحد المضروبين على الأقل معدوم ويكون بالتالي $c_\gamma = o$.

ونكتب عندها $R = P . Q$ ، ويكون الضرب تجميعياً وتبادلياً وتوزيعياً بالنسبة للجمع وهي خواص مستنتجة من الخواص المماثلة لها في R ؛ كذلك فان الحدودية بحيث يكون $a_\alpha = 1$ عندما $\alpha = (o,o,\ldots o)$ $a_\alpha = o$ فيما عدا ذلك ، هي عنصر محايد للضرب ، ونرمز له بـ 1 . نلاحظ بسهولة مما سبق أن $R[x_1, x_2 .. x_n]$ حلقة تبادلية واحدية . يمكننا بذلك أن نذكر المبرهنة التالية :

مبرهنة (٤ – ٣ – ١)

تشكل مجموعة الحدوديات $R[x_1, x_2, \ldots x_n]$ على الحلقة الواحدية التبادلية R حلقة واحدية تبادلية بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب المعرفتين سابقاً .

٤ – ٣ – ٢ غمس R في $R[x_1, x_2 .., x_n]$

لنأخذ التطبيق :

$$f : R \longrightarrow R[x_1, x_2 .., x_n]$$

بحيث يكون :

$f(\lambda) = (a_\alpha)$: $a_\alpha = \lambda$ إذا كان $\alpha = (o,o,\ldots, o)$

$a_\alpha = o$ إذا كان $\alpha \neq (o,o,\ldots, o)$

من الواضح أن التطبيق السابق f تشاكل متباين فهو اذن تباكل الحلقة R

في حلقة الحدوديات $R[x_1,x_2,\dots,x_n]$ وبذلك يطابق f عناصر الحلقة R على الحلقة الجزئية S المؤلفة من جميع الحدوديات (a_α) بحيث يكون :

$a_\alpha = \lambda \in R$ إذا كان $\alpha = (0,0,\dots,0)$

$a_\alpha = 0$ فيما عدا ذلك .

نزود $R[x_1,x_2\dots x_n]$ بقانون تشكيل خارجي مجموعة مؤثراته R :

$$R \times R[x_1,x_2\dots x_n] \longrightarrow R[x_1,x_2,\dots,x_n]$$

$$(\lambda, P) \longrightarrow \lambda P = (\lambda.1).P$$

وتصبح الحلقة $R[x_1,x_2\dots x_n]$ عند ذلك جبراً على R .

لتكن الحدودية x_i ، $(i = 1,2,\dots,n)$ المعرفة بالمتتالية $(a_\alpha)_{\alpha\in N^n}$ كما يلي :

$a_\alpha = 1$ إذا كانت $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2,\dots \alpha_n)$ بحيث يكون $\alpha_i = 1$, و $\alpha_j = 0$ عندما $j \neq i$.

$a_j = 0$ في الحالات الاخرى وتكتب الحدودية P تبعاً لهذه الرموز على الشكل :

$$P = \sum_{\alpha\in N^n} a_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n} \quad \dots\dots (2.1)$$

وهذا المجموع منته ووحيد وذلك لأن المعاملات في الحدودية P هي $(a_\alpha)_{\alpha\in N^n}$ تسمي الحدوديات $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ مولدات الجبر $R[x_1,x_2,\dots x_n]$ على R ، كما تسمى الحدودية من الشكل $a_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ وحيد الحد وتكون الحدودية P هي المجموع لعدد منته من وحيدات الحد .

٤ ــ ٣ ــ ٣ درجة حدودية :

إن درجة الحدودية $a_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ هي مجموع الأسس $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ أي $|\alpha|$ ، كما أن درجة الحدودية P ونرمز لها بـ $\deg P$ وهي اكبر درجات وحيدات الحد التي تشكل P وغير المعدومة أي أن $\deg P = \sup\limits_{a_\alpha \neq 0} |\alpha|$ إذا كانت $P=0$ فإن $\deg P = -\infty$،

تكون الحدودية P متجانسة اذا كانت درجات جميع وحيدات الحـــد في P متساوية .

مبرهنة (٤ ــ ٣ ــ ٢)

إذا كانت الحلقة R منطقة تكاملية فإن حلقة الحدوديات $R[x_1, x_2 ,.., x_n]$ منطقة تكاملية أيضا .

البرهـــان :

نرتب الحدودية P حسب القوى المتزايدة لـ x_n :

$$P = \sum_{i \in J} A_i\, x_n^{\,i}$$

حيث يكون J جزءاً منتهياً من N ، A_i حدودية من $R[x_1, .., x_{n-1}]$.

نأخذ التطبيق :

$$\varphi : R[x_1, x_2 \ldots x_n] \rightarrow R[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n]$$

إن φ تطبيق لحلقة الحدوديات $R[x_1, \ldots, x_n]$ على R في حلقة الحدوديات بمجهول واحد وبعاملات من $R[x_1, \ldots x_{n-1}]$. من الواضح إن φ تشاكل حلقي غامر ومتباين فهو تماكل .

ونعلم أنه إذا كانت R منطقة تـكاملية فإن حلقة الحدوديات $R[x]$ منطقـة

تـكاملية واستناداً إلى ذلك إذا كانت الحلقة $R[x_1,\dots,x_{n-1}]$ منطقة تكاملية فإن الحلقة $R[x_1,\dots,x_{n-1}][x_n]$ منطقة تـكاملية وهذا يبرهن أنَ الحلقة $R[x_1,\dots,x_n]$ منطقة تـكاملية ومهما تكن n ،

مبرهنة (٤ – ٣ – ٣)

بفرض ان $P, Q \in R[x_1,\dots,x_n]$ لنبرهن ان :

$$\deg(P+Q) \leqslant \sup(\deg P, \deg Q) \qquad (2)$$

$$\text{peg } PQ \leqslant \deg P + \deg Q \qquad (3)$$

وإذا كانت R منطقة تكاملية فإن :

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

البرهـــان

لتكن :

$$P = \sum_{\alpha\in N^n} a_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad , \quad Q = \sum_{\alpha\in N^n} b_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

حيث يكون :

$$p = \deg P \quad , \quad q = \deg Q$$

من التعريف يكون لدينا $a_\alpha = o$ عندما $|\alpha| > p$ كما يكون $b_\alpha = o$ عندما يكون $|\alpha| > q$ وينتج بالتالي أن $a_\alpha + b_\alpha = o$ عندما تكون $|\alpha| > \sup(p,q)$ هذا يبرهن على (2) .

لنرمز بـ P_i للحدودية المؤلفة من وحيدات الحد التي لها نفس الدرجة ، عند ذلك تكتب كل من Q, P على الشكل :

$$P = P_0 + P_1 + \dots + P_p \ , \ Q = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_q$$

$$P_p \neq o \ , Q_q \neq o$$

حيث يكون كل من P_i , Q_j حدودية متجانسة من الدرجـــة i , j على الترتيب من أجل $i = 0, 1, ..., p$ ، $j = , 1, 2, ...q$.

$$P\,Q = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} P_i Q_j$$

ان الجداء $P_i\,Q_j$ صفر أو حدودية متجانسة من الدرجة $i + j$ ويكون لدينا إذن : .

$$\deg (P_i + Q_j) \leqslant i + j \leqslant p + q$$

وبتطبيق (2) على المجموع $\sum_{i,j} P_i\,Q_j$ تنتج (3) .

اذا كانت الحلقة P منطقة تكاملية فإن الحلقة $R[x_1, ... x_n]$ منطقة تكاملية أيضاً ويكون $P_p\,Q_q \neq o$ وبالتالي يكون $\deg P_pQ_q = p+q$ ويمثـــل P_pQ_q مجموع وحيدات الحد من الدرجة $p+q$ في الجداء PQ ويكون في هذه الحالة :

$$\deg (PQ) = p + q = \deg P + \deg Q$$

٤ ـ ٣ ـ ٤ المشتقات الجزئية

بفرض أن $P \in R[x_1, x_2, ..., x_n]$ ، فإن المشتق الجزئي $\frac{\partial P}{\partial x_i}$ أو P'_{x_i} هو مشتق P بالنسبة لـ x_i وذلك باعتبار P كحدودية في x_i وبمعاملات في :

$$R[\, x_1 \dots ,\ x_{i-1} ,\ x_{i+1} , \dots ,\ x_n \,]$$

إن التطبيق :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : R[\, x_1 , \dots , x_n \,] \longrightarrow R[\, x_1 , \dots , x_n \,]$$

خطي ويحقق :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(PQ)=\frac{\partial P}{\partial x_i}Q+p\frac{\partial Q}{\partial x_i}$$

كذلك يكون لدينا :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\circ\frac{\partial}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\circ\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (4)$$

وبذلك يمكن حساب المشتقات من أي مرتبة كانت .

نستنتج من (4) ، انه يمكن تركيب ضمن أي ترتيب كان عدداً من الاشتقاقات.
بالتعريف إن التطبيق :

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}:R[x_1,x_2,\dots,x_n]\longrightarrow R[x_1,x_2,\dots x_n]$$

$$\alpha=(\alpha_1,x_2,\dots\alpha_n)$$

هو تركيب $\frac{\partial}{\partial x_1}$ بذاته α_1 مرة و $\frac{\partial}{\partial x_2}$ بذاته α_2 مرة وهكذا . فإذا كان:

$$P=\sum_{\alpha\in N^n}a_\alpha\, x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$$

يكون لدينا :

$$\frac{\partial^\alpha P}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha^n}}=(o)=\alpha_1!\,\alpha_2!\dots\alpha_n!\,a_\alpha \qquad (5)$$

٤ ـ ٣ ـ ٥ الحدوديات المتجانسة

نقول عن الحدودية $P=\sum_{\alpha\in N^n}a_\alpha x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ انها متجانسة من الدرجه k إذا كانت العلاقة $a_\alpha\neq o$ تقتضي $|\alpha|=k$ أو بتعبير آخر تكون الدرجـة

الكلية لجميع وحيدات الحد في P مساوية لـ k وهذا يكافىء القول أيضاً أن :

$$P(\lambda x_1, \lambda x_2, .., \lambda x_n) = \lambda^K P(x_1, ..., x_n) \tag{6}$$

تشكل المجموعة المؤلفة من الصفر والحدوديات المتجانسة من الدرجة k فضاء حلقياً جزئياً من الفضاء الحلقي $R[x_1, x_2, ..., x_n]$. نستنتج مما سبق الخواص التالية :

١ — بفرض أن P حدودية متجانسة من الدرجة Q, k حدودية متجانسة من الدرجة L فإن الجداء PQ هو أيضا حدودية متجانسة من الدرجة $k+L$ أو صفر .

٢ — بفرض أن P حدودية متجانسة من الدرجة k ، يمكن التحقق بسهولة من الدستور التالي :

$$x_1 P'_{x_1} + x_2 P'_{x_2} + ... + x_n P'_{x_n} = kP \tag{7}$$

(دستور أولر) .

٤ — ٣ — ٦ الدالة الحدودية

لتكن الحدودية $P = \sum\limits_{\alpha \in N^n} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ بمعاملات في R . نرفق بهذه الحدودية الدالة الحدودية التالية .

$$\widetilde{P} : R^n \longrightarrow R$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n) \longrightarrow \widetilde{P}(\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n) \in R$$

حيث يكون $\widetilde{P}(\alpha_1, ... \alpha_n)$ العنصر من R الذي نحصل عليه بأن نبدل x_i في الحدودية P بـ α_i .

إن التطبيق :

$$\Phi : R[x_1, x_2 \dots x_n) \longrightarrow \mathcal{F}(R^n, R)$$
$$P \longrightarrow \tilde{P}$$

وحيث ترمز $\mathcal{F}(R^n, R)$ لجبر جميع التطبيقات لـ R^n في R ، هو تشاكل جبور كما توضح ذلك المبرهنة التالية :

مبرهنة (٤ ـ ٣ ـ ٤)

بفرض ان R حقل غير منته لنبرهن ان التشاكل السابق Φ متباين

البرهــان :

المبرهنة صحيحة عندما $n = 1$ لأنه إذا كانت $0 \neq P \in R[x]$ حـدوية في مجهول واحد على الحقل R فإنه يوجد $\alpha \in R$ بحيث يكون $P(\alpha) \neq 0$. لنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل $n - 1$ وليكن :

$$P \in R[x_1, x_2, \dots\dots, x_n] = R[x_1, \dots\dots x_{n-1}][x_n]$$

لنرتب P حسب القوى المتزايدة لـ x_n نحصل على :

$$P = \sum_{k=0}^{m} A_k x_n{}^k, \; A_k \in R[x_1, \dots\dots, x_{n-1}]$$

بفرض أن $P \neq 0$ يوجد k_0 بحيث يكون $A_{k_0} \neq 0$ بما أن المبرهنة صحيحة من أجل $n - 1$ فيوجد اذن $(\alpha_1, \dots\dots, \alpha_{n-1}) \in R^{n-1}$ بحيث يكون :

$$\widehat{A}_{k_0}(\alpha_1, \dots\dots \alpha_{n-1}) \neq 0 \,.$$

إن الحدودية التالية بمجهول واحد :

$$Q(x_n) = \sum_{k=0}^{m} \widetilde{A}_k (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})\, x_n^k$$

غير صفرية . فيوجد بالتالي $\alpha_n \in R$ بحيث يكون $\widetilde{Q}(\alpha_n) \neq 0$ أي أن $\widetilde{P}(\alpha_1, \ldots \alpha_n) \neq 0$ وهكذا يكون لدينا :

$$P \neq 0 \Rightarrow \widetilde{P} \neq 0$$

★ ★ ★

الفصل الرابع

مدخل الى متسلسلات القوى الصورية

٤ ــ ٤ ــ ١ متسلسلات القوى الصورية Formal Power series

بفرض أن A حلقة تبادلية عنصرها المحايد 1 وأن $R=A[x_1, \cdots x_n]$ حلقة الحدوديات في n مجهولاً على A . نسمي متسلسلة القوى الصورية في n مجهولاً على A ، المتتالية غير المنتهية $f = (f_0, f_2, \cdots, f_q \cdots)$ من الحدوديات المتجانسة f_q من R وحيث تكون كل حدودية f_q صفراً أو من الدرجة q . نعرف مجموع وجداء متسلسلتي قوى :

$$f=(f_0, f_1, \cdots, f_q, \cdots), g = (g_0, g_1, \cdots, g_q, \cdots)$$

كما يلي :

$$(1) \qquad f+g=(f_0+g_0, f_1+g_1, \cdots, f_p+g_q, \cdots)$$

$$(2) \qquad f.g=(h_0, h_1, \cdots; h_q, \cdots)$$

$$h_q = \sum_{i+j=q} f_i g_j$$

نلاحظ بسهولة من تعريفي الجمع والضرب السابقين ان المجموعة S لجميع متسلسلات القوى الصورية في n مجهولاً على A قد أصبحت حلقة تبادلية . نسمي

حلقـــة متسلسلات القوى الصورية في n مجهولاً ، الحلقة S ونرمز لهـــا بـ $A[[x_1, x_2, \cdots x_n]]$. إن صفر الحلقة S هو المتتالية $(\cdots\cdots, o, o)$ كما أن عنصرها المحايد الضربي هو $(1, o, o, \ldots)$.

يمكن مطابقة الحدوديات في $x_1, x_2, \ldots, x_n$ وبمعاملات من A بمتسلسلات القوى الصورية S وذلك كما يلي :

نطابق الحدودية f مع متسلسلة القوى الصورية $(f_0, f_1, \ldots f_m, \ldots)$ وذلـــك بفرض أن $f \in A[x_1, \ldots x_n]$ وان $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_m$ وان درجـة كل f_i هي الصفر أو i ؛ تصبح عندها حلقة الحدوديات $R = A[x_1, \ldots, x_n]$ حلقة جزئية من حلقة متسلسلات القوى الصورية $S = A[[x_1, \ldots x_n]]$.

ملاحظة :

تكون متسلسلات القوى f المتقاربة في جوار مناسب للمبدأ $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = o$ جديرة بالدراسة وذلك عندما تكون A هي حقل الاعـداد الحقيقية أو العقدية ، ويمكن عندها أن نبرهن أن S' وهي متسلسلات القوى المتقاربة هي حلقة جزئية من S (تحوي بداهة جميـع الحدوديات) . تبقى معظم النتائج المبرهنة في هذا البند صحيحة من أجل S' .

بفرض أن $f = (f_0, f_1, \cdots\cdots, fo_1, \cdots\cdots)$ متسلسلة مختلفة عن الصفر ، نسمى مرتبة f ، أصغر دليل q بحيث يكون f_q مختلفاً عن الصفر ونرمز له بـ $o(f)$.

كما نسمي f_i الشكل الابتدائي لـ f وذلـــك بفرض أن $i = o(f)$ واتفق أن يكون $+\infty$ مرتبة العنصر o من S .

مبرهنة (٤ ـ ٤ ـ ١)

بفرض ان f,g متسلسلتي قوى من $A[[x_1, \cdots, x_n]]$ فـإن :

$$o(f+g) \geqslant \min\{o(f), o(g)\} \qquad (3)$$

$$o(fg) \geqslant o(f) + o(g) \qquad (4)$$

بالاضافة الى ذلك تكون S منطقة تكاملية اذا كانت A كذلك ؛ ويكون عندها :

$$o(fg) = o(f) + o(g) \qquad (4')$$

البرهــان :

إن برهان (3) , (4) مباشر ومشابه لبرهان المبرهنة (٤-٣-٣) أما لبرهان (4′) فإننا نلاحظ انه إذا كان $g \neq o$, $f \neq o$ فإن الجداء $f_i\, g_i$ للشكلين الابتدائيين لـ f , g يختلف عن الصفر . (وذلك لأن حلقة الحدوديات $A[x_1, \cdots x_n]$ هي منطقة تكاملية اذا كانت A منطقة تكاملية) وهو الشكل الابتدائي لـ fg .

تشكل متسلسلة القوى ذات المرتبة الموجبة مثالياً في S ؛ وهذا المثالي مولد بـ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ وسنرمز له بـ χ ويتألف المثالي χ^q من متسلسلات القوى ذات المرتبة $q \geqslant 1$ ينتج عن ذلك أن $\bigcap_{q=1}^{\infty} \chi^q = (o)$.

مبرهنة (٤ ـ ٤ ـ ٢)

بفرض أن $f = (f_0, f_1, \cdots, f_q, \cdots)$ متسلسلة قوى ، تكون f وحدة إذا وإذا فقط كان العنصر f_0 من A وحدة في A .

البرهان :

إذا كان $fg = 1$, $g = (g_0, g_1, \cdots, g_q, \cdots)$ فإن $f_0\, g_0 = 1$ وبالتالي تكون f_0 وحدة في A . وبالعكس اذا كانت f_0 وحدة في A ، فيمكن أن نجد على التوالي الاشكال $g_0, g_1, \cdots, g_q, \cdots$ بحيث يكون :

$$g_0 f_0 = 1 , \; g_1 f_0 + g_0 f_1 = o , \cdots\cdots , \cdots \text{ و}$$

$g_q f_0 + g_{q-1} f_1 + \cdots + g_0 f_q = o$,..... وذلك بفرض أن g_q صفر أو من الدرجة

q . لدينا في الواقع $g_0 = f_0^{-1}$ وبفرض أن $g_0, g_1, \ldots, g_{q-1}$ قد تم تعيينها وأن كل g_i هي صفر ، أو شكل من الدرجة i $(0 \leqslant i \leqslant q-1)$ ؛ نضع $g_q = -f_0^{-1}(g_{q-1}f_1 + \cdots + g_0 f_q)$ ، ومن الواضح أن g_q صفر أو شكل من الدرجة q ، فإذا وضعنا الآن $g = (g_0, \ldots, g_q, \ldots)$ فإننا نجد من (2) أن $f\,g = 1$ وبذلك ينتهي البرهان .

★ ★ ★

المراجـع

1. BOURBAKI — Groupe et algèbre de Lie — Hermann
2. GREUB — Linear Algebra — Springcr verlag , 2 d edition
3. HUMPHREYS — Introduction to Lie Algebra and repesentation lheory — Springer verlag
4. LELONG FERRAND — Algèbre — Dunod
5. MACDUFFEE — An introduction to Abstract algebra — Wiley
6. MACLANE & BIRKOFF — Algebra 2 d edition — Macmillan
7. PIERCE — Associative Algebra — Springcr Verlag .
8. YUTZE CHOW — Modern Abstract Algebra vol . I ; Gordon and Breach
9. ZARISKI & SAMUEL — Commutative Algebra — Springcr verlag

المصطلحات

ـ آ ـ	
احتواء قانوني ٣٤٩	Canonical iuclusion
احتواء يحافظ على التقابل ٤٢١	Inclusion preserving bijection
أرتيني	Artinian
أساس ٤٤٠	Radical
أصغر فضاء حلقي جزئي ٣٢٢	Leest submodule
الاشتقاق φ ٤٣٠	φ — Derivation
الاشتقاق الداخلي ٤٥٦	Inner Derivation
الاشتقاق الخارجي ٤٥٨	Outer Derivatiou
الاشتقاق في جبر لي ٤٥٤	Derivation in Lie Algepra
التطبيق القرين ٤٥٦	Adjoint mapping
الشرط الاعظمي	Maximal condition
الشرط الاصغري	Minimum condition
ـ ب ـ	
بسيط ٣٢٥	Simple
ـ ت ـ	
تباكل (مونومورفيزم) ٣٢٦ ، ٣٢٩ ، ٣٣٠ ، ٣٤٩ ، ٤٢٣	monomorphism

- ح -

Centralizer	ممركز ٤٥٨
Normalizer	مناظم ٤٥٨
Integral domain	منطقة تكاملية ٤٦٨

- ن -

kernel	نواة ٣٣١ ، ٣٣٢
Cokernel	نواة موافقة ٣٥٢
Notherian	نوثري ٣٨٠ ، ٣٨٢

★ ★ ★

فهـــرس

البـــاب الأول

نظريـــة نصف الزمرة

الفصل الأول

مفاهيم ومبادىء اولية في نظرية نصف الزمرة

الفصل الثاني

مثاليات نصف الزمرة

الفصل الثالث

بنية انصاف الزمر

الباب الثاني

نظرية الحقل

الفصل الأول

الحقول

الفصل الثاني

تمديد الحقول

الفصل الثالث

الحقول المنتهية

الباب الثالث

الفصل الأول

الفضاءات المتجهية الحلقية

الفصل الثاني

التشاكلات

الفصل الثالث

فضاء الخارج الحلقي ومبرهنات التماكل

الفصل الرابع

المتتاليات التامة

الفصل الخامس

الجداء والمجموع المباشر لفضاءات حلقية

الفصل السادس

الفضاءات النوثرية والأرتينية والفضاءات الحره

الفصل السابع

الجداءات الموترية

الباب الرابع

الفصل الأول

الجبـور

الفصل الثاني

جبر لي

الفصل الثالث

الحدوديات في n مجهولاً

الفصل الرابع

مدخل إلى متسلسلات القوى الصورية

* * *