* الاسم:

الجبر الخطي (2)

جامعة تشرين

كلية العلوم – قسم الرياضيات

الجبر الخطي (2)

لطلاب السنة الأولى رياضيات

الأستاذ الدكتور

اسكندر علي

منشورات جامعة تشرين

العام الدراسي 1424 هـ

2003-2004 م

الفهرس

مقدمة

يلعب الجبر الخطي دوراً هاماً في أغلب فروع الرياضيات والهندسة وذلك لتعدد التطبيقات الواسعة له . فكثيرٌ من المسائل الرياضية والفيزيائية والهندسية تحلُ باستخدام مفهوم المصفوفات .

إن مواضيع هذا الكتاب تغطي مفردات الجبر الخطي (2) لطلاب السنة الأولى رياضيات وفقاً للخطة الجديدة المقررة من قبل مجلس الجامعة للعام / 2003/ ويشمل هذا الكتاب المواضيع التالية :

1- التحويلات الخطية .

2- القيم الذاتية والمتجهات الذاتية .

3- الصور (الأشكال) ثنا- خطية .

4- الجداء الداخلي للفضاءات المتجهة .

5- المساقط والمجموع المباشر .

6- تطبيقات رياضية وفيزيائية .

نأمل أن يكون هذا الكتاب عوناً لطلابنا في دراسة مقرر الجبر الخطي والله من وراء القصد .

الفصل الأول

التحويلات الخطية

-تعريف- 1-1.

إذا كان U و V فضائين خطيين معرفين على الحقل F ندعو كل تطبيق $T: U \rightarrow V$ يحقق الشرط التالي بتحويل خطي:

$$T(au+bw)=aT(u)+bT(w) \qquad \forall\, u,w \in U \text{ و } a,b \in F$$

أمثلة:

1- إذا كان U و V فضائين خطيين معرفين على الحقل F فإن التطبيق الصفري $Z: U \rightarrow V$ المعرف بالمساواة $Z(u)=O$ من أجل كل $u \ni U$ هو تحويل خطي.

2- التطبيق $T: R^2 \rightarrow R^2$ المعرف بالعلاقة:

$$T(x,y)=(4x+5y, 6x-y) \qquad \forall (x,y) \in R^2$$

تحويل خطي. بالحقيقة من أجل أي متجهين $u=(u_1,u_2)$, $w=(w_1,w_2)$ من R^2 وأي عنصرين a و b من F نجد أن:

$$\begin{aligned} T(au+bw) &= T(au_1+bw_1, au_2+bw_2) \\ &= \big(4(au_1+bw_1)+5(au_2+bw_2), 6(au_1+bw_1)-(au_2+bw_2)\big) \\ &= (4au_1+5au_2, 6au_1-au_2)+(4bw_1+5bw_2, 6bw_1-bw_2) \\ &= aT(u)+bT(w) \end{aligned}$$

التحويل الخطي من فضاء متجه V إلى نفس الفضاء يدعى بمؤثر خطي على V فالتطبيق T في المثال (2) مؤثر خطي على R^2.

(3) ليكن P_n الفضاء المتجه المؤلف من جميع كثيرات الحدود بالمتحول x والتي لا تزيد درجتها عن n وأمثالها من R ثم لنأخذ التطبيق $T: P_1 \rightarrow P_2$ المعرف بالعلاقة

$$T\big(P(x)\big)=(1+x)P(x) \qquad \forall P(x) \in P_1$$

فإذا كان $P(x)$ و $q(x)$ كثيرتي حدود كيفيتين من P_1 و a,b عنصرين كيفيين من F فإن $T(P(x))$ و $T(q(x))$ من P_2 و نجد أن :

$$T(ap(x)+bq(x))=(1+x)(ap(x)+bq(x))=a(1+x)P(x)+b(1+x)q(x)$$
$$=aT(p(x))+bT(q(x))$$

إذن T تحويل خطي من P_1 إلى P_2.

تعريف – 1-2 :

إذا كان T و S تحويلين خطيين من U إلى V فنعرف المجموع $S+T$ بالعلاقة:

$$(S+T)(u)=S(u)+T(u) \qquad \text{من أجل كل } u \text{ من } U$$

وكذلك من أجل كل تحويل خطي T من U إلى V وكل عدد a من F نعرف جداء العدد a بالتحويل T بأنه التطبيق aT من U إلى V الذي يحقق

$$(aT)(u)=a(T(u)) \qquad \text{من أجل كل } u \text{ من } U$$

من السهل التحقق أن كلاً من المجموع $S+T$ والجداء aT تحويل خطي.

نظرية – 1-3 :

ليكن U و V فضائين متجهين معرفين على نفس الحقل F . عندئذ تكون مجموعة جميع التحويلات من U إلى V فضاءً خطياً على F.

نترك البرهان كتمرين.

نظرية – 1-4 :

ليكن T تحويلاً خطياً من U إلى V. فإذا كان U_1 فضاءً جزئياً في U فإن $T(U_1)$ فضاء جزئي في V.

البرهان: ليكن U_1 فضاءً جزئياً في U عندئذ يكون $0 \in U_1$ و $T(0)=0$ وبالتالي فإن $T(U_1)$ غير خالي.

نفترض $v_1,v_2 \in T(U_1)$ و $a_1,a_2 \in F$ عندئذ يوجد متجهان u_1 و u_2 في U_1 بحيث أن $T(u_1)=v_1$ و $T(u_2)=v_2$.

بما أن U_1 فضاء جزئي في U، إذن $a_1u_1+a_2u_2$ من U_1 وبالتالي فإن :

$$T(a_1u_1+a_2u_2)=a_1T(u_1)+a_2T(u_2)=a_1v_1+a_2v_2 \in T(U_1)$$

هذا يعني أن $T(U_1)$ فضاء جزئي في V.

تعريف – 1-5:

ندعو عدد أبعاد $T(U)$ برتبة T $(rank(T))$. سنفرض فيما يلي أن عدد أبعاد كل من U و V منته.

نظرية – 1-6:

ليكن T تحويلاً خطياً من U إلى V. فإذا كان W فضاءً جزئياً في V، فإن الصورة العكسية $T^{-1}(W)$ تكون فضاءً جزئياً في U.

البرهان: نفرض أن W فضاء جزئي في V، عندئذٍ $0 \ni W$ وبالتالي فإن $0 \ni T^{-1}(W)$ لأن $T(0)=0$ وهذا يعني أن $T^{-1}(W)\neq\phi$.

نفرض الآن u_1 و u_2 من $T^{-1}(W)$ و a_2 و a_1 من F. عندئذٍ $v_1=T(u_1)$ و $v_2=T(u_2)$ من W وبالتالي فإن:

$$a_1v_1+a_2v_2=a_1T(u_1)+a_2T(u_2)=T(a_1u_1+a_2u_2)\in W$$

وينتج من ذلك أن :

$$a_1u_1+a_2u_2 \in T^{-1}(W)$$

وبالتالي فإن $T^{-1}(W)$ فضاء جزئي في U.

نظرية – 1-7:

ليكن T تحويلاً خطياً من U إلى V و $A=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ قاعدة في U، عندئذٍ $T(A)$ تولد $T(U)$.

البرهان: نفرض $A=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ قاعدة في U ولنأخذ المجموعة $T(A)=\{T(u_1),T(u_2),\dots,T(u_n)\}$، فمن أجل أي متجه v من $T(U)$، يوجد متجه u من U بحيث أن $v=T(u)$. ولكن المتجه u يمكن كتابته كعبارة خطية من الشكل $\sum_{i=1}^{n} a_iu_i$ لأن A قاعدة لـ U.

ينتج من ذلك أن:

$$v=T(\sum_{i=1}^{n}a_iu_i)=\sum_{i=1}^{n}a_iT(u_i)$$

وهذا يعني أن $T(A)$، تولد $T(U)$.

مثال:

ليكن التطبيق $T:R_{2\times3}\to R^5$ المعرف بالمساواة:

$$T\left(\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}\right)=(a_{11}+a_{12},2a_{11}+a_{21}-a_{12},a_{22}+a_{13},0,a_{23})$$

1- تحقق أن T تحويل خطي من $R_{2\times3}$ في R^5.

2- أوجد قاعدة لـ $T(R_{2\times3})$.

3- أوجد قاعدة لـ $ker\ T$ (نواة T).

الحل:

1- من السهل التحقق أن T خطي.

2- نلاحظ أن مجموعة المصفوفات $A=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6\}$ التالية تشكل قاعدة في $R_{2\times3}$:

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},A_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A_4=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},A_5=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},A_6=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

نجد من تعريف T أن $T(A)$ تعطى بالعلاقة:

$$T(A)=\{(1,2,0,0,0),(0,-1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(1,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,0,1)\}$$

نعلم أن $T(A)$ تحوي قاعدة لـ $T(R_{2\times3})$

نلاحظ أن المتجهات الثلاث الأولى في $T(A)$ مستقلة خطياً.

أما بالنسبة للمتجه الرابع فيكتب بالشكل:

$$(1,1,0,0,0)=(1,2,0,0,0)+(0,-1,0,0,0)$$

وبالتالي فإن المتجه الرابع لا يدخل في مجموعة التوليد لـــ $T(A)$ وأما المتجه الخامس فهو نفس المتجه الثالث وبالنسبة للمتجه الأخير لا يمكن كتابته كعبارة خطية بدلالة المتجهات السابقة له وبالتالي فإن المتجه الأخير يدخل في مجموعة التوليد لـــ $T(A)$.

إذن:

$$T(A)\langle\{\ (1,2,0,0,0),(0,-1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,0,1)\ \}$$

3- لإيجاد قاعدة في $T^{-1}(0)$، نكتب $T(v)=0$ فنحصل على جملة المعادلات:

$$\begin{aligned}
&a_{11}+a_{21}=0\\
&2a_{11}+a_{21}-a_{12}=0\\
&a_{22}+a_{13}=0\\
&0=0\\
&a_{23}=0
\end{aligned}$$

بحل هذه الجملة نجد أن:

$$\begin{aligned}
&a_{11}=a_{12}\\
&a_{21}=-a_{12}\\
&a_{22}=-a_{13}\\
&a_{23}=0
\end{aligned}$$

إذن كل عنصر من $ker\ T$ يكتب بالشكل الآتي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13}\\ -a_{21} & -a_{13} & 0\end{bmatrix}=a_{12}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}+a_{13}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن مجموعة المتجهات:

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\right\}$$

تشكل قاعدة لـــ $kerT=T^{-1}(0)$.

إذن:

$$rankT=dimT(R_{2\times3})=4 \quad \text{و} \quad dim\left(T^{-1}(0)=2\right)$$

نظرية -8-1 :

ليكن T تحويلاً خطياً من U في V. فإذا كان عدد أبعاد U منته عندئذ يكون:

$$rank\ (T)+dim\ \left(\ T^{-1}(0)\ \right)=dim\,U$$

البرهان:

نفترض أن عدد أبعاد U يساوي n وليكن $r = dim\ (T^{-1}(0))$

ولنختار $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ قاعدة لـ $T^{-1}(0)$. يمكننا توسيع هذه المجموعة من المتجهات المستقلة خطياً إلى قاعدة لـ U ولتكن هذه القاعدة هي:

$$A = \{ u_1, u_2, ..., u_k, u_{k+1}, ..., u_n \}$$

وبموجب النظرية 1-7 نجد أن المجموعة $T(A)$ تولد $T(U)$. غير أن :

$$T(u_1) = T(u_2) = --- = T(u_k) = 0$$

وهذا يعني أن مجموعة المتجهات $\{ T(u_{k+1}), ---, T(u_n) \}$ والتي عددها $n-k$ تولد $T(U)$. وللبرهان أن مجموعة المتجهات الأخيرة مستقلة خطياً نكتب:

$$c_{k+1}T(u_{k+1}) + ---- + c_nT(u_n) = 0$$

وبالتالي فإن:

$$T(c_{k+1}u_{k+1} + ---- + c_nu_n) = 0$$

وهذا يعني أن :

$$T^{-1}(0) \ni c_{k+1}u_{k+1} + ---- + c_nu_n$$

وبما أن $\{ u_1, u_2, ..., u_k \}$ قاعدة في $T^{-1}(0)$ إذن يوجد $d_1, d_2, ..., d_k$ في F.

بحيث إن :

$$c_{k+1}u_{k+1} + .. + c_nu_n = d_1u_1 + -- + d_ku_k$$

وبما أن A قاعدة لـ U، إذن جميع المعاملات c_i, d_i مساوية للصفر.

وبالتالي فإن المجموعة $\{ T(u_{k+1}), T(u_{k+2}), ..., T(u_n) \}$ قاعدة لـ $T(U)$.

وبما أن:

$$k = dim(\ T^{-1}(0)\ ) \text{ و } n-k = dimT(U) \text{ و } dimT(U) = rank(T)$$

إذن:

$$rank(T) + dim(\ T^{-1}(0)\ ) = dim(U)$$

1-2- التحويلات الخطية والمصفوفات:

نفرض أن U و V فضاءان متجهان معرفان على نفس الحقل F وعدد أبعادهما n و m على الترتيب و T تحويل خطي من U في V و $A=\{u_1,u_2,..,u_n\}$ قاعدة في U. عندئذ يكتب كل متجه u من U بشكل وحيد كعبارة خطية بمتجهات A أي أن $u=\sum_{j=1}^{n}x_j u_j$ و بالتالي $T(u)=\sum_{j=1}^{n}x_j T(u_j)$ وهذا يعني أن قيمة T عند كل متجه u من U تعرف بدلالة قيم T عند متجهات القاعدة $u_1,u_2,..,u_k$.

لتكن $B=\{v_1,v_2,..,v_m\}$ قاعدة في V وبما أن $T(u_j)$ من V إذاً يكتب بشكل وحيد كما يلي:

$$T(u_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}v_i \quad : \quad j=1,2,..,m$$

وهكذا من أجل اختيار للقاعدتين A و B يتحدد T بشكل وحيد بواسطة المعاملات a_{ij} من F علماً أن عدد هذه المعاملات يساوي $n.m$ وهذا يعني أن المعاملات a_{ij} تشكل مصفوفة للتحويل الخطي T بالنسبة لـ B,A.

تعريف 1-10:

نفرض $A=\{u_1,u_2,..,u_n\}$ و $B=\{v_1,v_2,..,v_m\}$ قاعدتان لـ U و V على الترتيب. ثم نفرض أن T تحويل خطي من U إلى V سنعرف مصفوفة T بالنسبة للقاعدتين A و B بأنها المصفوفة :

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=[T]_{B,A}$$

حيث أن a_{ij} تتعين من المساواة:

$$T(u_j)=a_{1j}v_1+a_{2j}v_2+--+a_{mj}v_m \qquad : \qquad j=1,2,..,n$$

هذا ونقول أن T يمثل بالمصفوفة A ونلاحظ بأن العمود j في A هو المصفوفة الإحداثية للمتجه $T(u_j)$ في القاعدة B، إذن:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{bmatrix} = [T(u_j)]_B \qquad : \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

وبالتالي:

$$A = [\ T\ ]_{B,A} = [\ [\ T(u_1)\ ]_B, [\ T(u_2)\ ]_B, \ldots, [\ T(u_n)_B\ ]\ ]$$

مثال 1:

ليكن $F = R$ و $T : P_2 \to P_3$ تحويل خطي معرف بالمساواة:

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (2a_0 + 2a_2) + (a_0 + a_1 + 3a_2)x + (a_1 + 2a_2)x^2 + (a_0 + a_2)x^3$$

والمطلوب إيجاد مصفوفة T بالنسبة للقاعدتين.

$A = \{ 1,\ 1 - x, x^2 \}$ في P_2 و $B = \{ 1, x, 1 - x^2, 1 + x^3 \}$ في P_3

الحل:

لإيجاد العمود الأول في A نحسب $T(1)$ ونكتبه كعبارة خطية بالقاعدة B.

$$T(1) = 2 + x + x^3 =$$
$$(1)(1) + (1)(x) + (0)(1 - x^2) + (1)(1 + x^3)$$

إذن العمود الأول في A هو:

$$[T(1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبنفس الطريقة نحسب العمود الثاني في A بأن نجد $T(1-x)$ ونكتبه كعبارة خطية في B :

$$T(1 - x) = 2 - x^2 + x^3 =$$
$$(0)(1) + (0)(x) + (1)(1 - x^2) + (1)(1 + x^3)$$

وأخيراً نحسب العمود الثالث :

$$T(x^2) = 2 + 3x + 2x^2 + x^3 =$$
$$(3)(1) + (3)(x) + (-2)(1 - x^2) + (1)(1 + x^3)$$

إذن مصفوفة T بالنسبة للقاعدتين A و B هي:

$$A=[T]_{B,A}=\left[\left[T(1) \right]_{B'}, \left[T(1-x) \right]_{B'}, \left[T(x^2) \right]_{B} \right]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال 2:

ليكن T تحويلاً من R^4 إلى R^3 معرف بالمساواة:

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_3+x_4, 2x_1+x_2+3x_4, x_1+2x_2+3x_3+3x_4)$$

نفرض A هي القاعدة القانونية $\varepsilon_4=\{ (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1) \}$ في R^4 و B هـــي القاعـــدة القانونيـــة $\varepsilon_3=\{ (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \}$ في R^3 وبالحساب نجد أن:

$$T(1,0,0,0)=(1,2,1) \quad , \quad T(0,1,0,0)=(0,1,2)$$

$$T(0,0,1,0)=(-1,0,3) \quad , \quad T(0,0,0,1)=(1,3,3)$$

إذن مصفوفة T بالنسبة للقاعديتين القانونيتين ε_4 و ε_3 هي:

$$[T]_{\varepsilon_3,\varepsilon_4}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

و بالتالي من أجل مصفوفة معطاة $A=[\ a_{ij}\ ]_{m\times n}$ ومن أجـــل قاعـــدتين ثـــابتتين A و B في U و V على الترتيب يوجد تحويل خطي وحيد تكـــون A مصـــفوفته بالنسبة للقاعدتين المفروضتين A و B .

للبرهان على ذلك نفترض وجود تحويل خطي آخر S بحيث أن A مصفوفة لـــ S بالنسبة للقاعدتين المذكورتين A و B.

عندئذ يكون لدينا:

$$S(u_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}v_i=T(u_j) \qquad : \qquad j=1,2,..,n$$

ومن أجل أي متجه $u=\sum_{j=1}^{n}x_ju_j$ في U يكون لدينا:

$$S(u)=S(\sum_{j=1}^{n}x_ju_j)=\sum_{j=1}^{n}x_jS(u_j)=\sum_{j=1}^{n}x_jT(u_j)=T(\sum_{j=1}^{n}x_ju_j)=T(u)$$

ولكن المساواة $S(u)=T(u)$ من أجل كل متجه u من U تعني أن $S=T$.

إذن من أجل قاعدتين مفروضتين **A** و B فإن التحويل الخطي T والمصفوفة $A=[T]_{A,B}$ كل منهما يعرف الآخر بشكل وحيد بالمساواة التالية:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{bmatrix}=\left[\ T(u_j)\ \right]_B \qquad \text{أو} \qquad T(u_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}u_i$$

إذن بشكل عام تكون مصفوفة T بالنسبة للقاعدتين **A** و B من الشكل:

$$A=[T]_{B,A}=\left[[T(u_1)]_B,[T(u_2)]_B,...,[T(u_n)]_B\right]$$

مثال 3 :

ليكن $T:R^4\to R^3$ تحويلاً خطياً معرفاً بالعلاقة :

$$T(\ x_1,x_2,x_3,x_4\ )=(\ x_1-x_3+x_4,2x_1+x_2+3x_4,x_1+2x_2+3x_3+3x_4\ )$$

باستخدام القاعدتين القانونيتين ε_4 و ε_3 نجد أن:

$$T(1,0,0,0)=(1,2,1) \quad , \quad T(0,1,0,0)=(0,1,2)$$

$$T(0,0,1,0)=(-1,0,3) \quad , \quad T(0,0,0,1)=(1,3,3)$$

وبالتالي فإن مصفوفة T بالنسبة للقاعدتين ε_4 و ε_3 هي:

$$\left[\ T\ \right]_{\varepsilon_3,\varepsilon_4}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

لنأخذ التطبيق $f:R^n\to R_{n\times 1}$ المعرف بالعلاقة:

$$f(\ x_1,x_2,...,x_n\ )=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

فنجد أنه ايزومورفيزم طبيعي. وهـــو بالحقيقـــة طبيعـــي لأنـــه لـــن نفـــرق بـــين

$(x_1, x_2, ..., x_n)$ و $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$.

وهكذا وجدنا أنه إذا أعطينا قاعدتين A و B فإن المصفوفة $[T]_{B,A}$ تعـــرف بشـــكل وحيد بواسطة التحويل الخطي T ومن جهة أخرى فمن أجل أي مصفوفة مفروضـــة $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ومن أجل أي قاعدتين مفروضتين A و B يوجد تحويل خطي وحيـــد يقبل A كمصفوفة له بالنسبة للقاعدتين A و B.

إن التغير في أي من القاعدتين A و B أو في كليهما يؤدي إلى تغير مصفوفة التحويل الخطي.

لذلك نقول عن مصفوفة التحويل الخطي T أنها تمثله بالنسبة للقاعدتين المذكورتين.

نلاحظ أن مصفوفة الانتقال من قاعدة إلى أخرى في فضاء متجه U تشكل مصفوفة تحويل خطي.

ليكن $A = \{ u_1, u_2, ...u_n \}$ و $A' = \{ u'_1, u'_2, ..., u'_n \}$ قاعـــدتين في U، عندئـــذٍ يكتب كل متجه u'_j كعبـــارة خطيـــة بمتجهـــات A. إذن $u'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} u_i$ حيـــث

$j = 1,2,..,n$

ندعو المصفوفة $\tau = [\ t_{ij}\ ]_{n \times n}$ بمصفوفة الانتقال من A إلى A'.

إذن فهي مصفوفة مؤثر خطي T بالنسبة للقاعدة A حيث أن T معرف بالعلاقة:

$T(u_j) = u'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} u_i$ حيث $j = 1,2,..;n$

واضح أن المصفوفة $\tau = [t_{ij}]$ قابلة للقلب لأن أعمدتها احداثيات المتجهات المســـتقلة u'_j في القاعدة A .

تعريف 1-11:

بفرض $A=[\ a_{ij}\ ]_{m\times n}$ مصفوفة معرفة على R فنقول عن A أنها مختزلة الشكل بالأعمدة إذا حققت ما يلي:

1- أول عنصر مختلف عن الصفر في العمود j يساوي 1 و يقع على السطر k_j سندعو هذا الواحد بالواحد الرئيس حيث $j=1,2,..,r$

2- $k_1<k_2<..<k_r\leq m$ (وهذا يعني أن كل تغير بالأعمدة من اليسار إلى اليمين يؤدي إلى وقوع الواحد الرئيسي في سطر أدنى)

3- من أجل $j=1,2,..,r$ يكون الواحد الرئيسي في العمود j هو العنصر الوحيد المختلف عن الصفر في السطر k_j.

4- كل عناصر الأعمدة الأخيرة أصفار (عدد الأعمدة هذه $n-r$)

مثال 4 :

نجد في المصفوفات التالية :

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\5&4&3\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\3&4&0\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\0&1&0\\3&4&1\end{bmatrix}$$

إن A ليست مختزلة الشكل بالأعمدة لأن العمودان الثاني والثالث لا يحققان (1) أما B فهي مصفوفة مختزلة الشكل بالأعمدة لأنها تحقق (1) و(2) و(3) و(4) والمصفوفة C ليست مختزلة الشكل بأعمدتها لأن الشرط (3) غير محقق فالواحد الرئيسي في العمود الثالث ليس العنصر الوحيد المختلف عن الصفر في السطر الرابع.

فإذا كانت $A=[\ a_{ij}\ ]_{m\times n}$ مصفوفة معرفة على R ولنعتبر مجموعة المتجهات $\mathsf{A}=\{\ v_1,v_2,..,v_n\ \}$ من R^m حيث $v_j=(a_{1j},a_{2j},..,a_{mj})$

فتمثل A مصفوفة الانتقال من ε_m إلى A وبإجراء سلسلة من العمليات الأولية المناسبة $Q_1,Q_2,..,Q_t$ على أعمدة A حيث Q_i واحدة مما يلي:

1- ضرب أحد أعمدة A بعدد مختلف عن الصفر.

2- مبادلة أحد الأعمدة v_s بالمجموع $v_s+\alpha v_t$ حيث $s \neq t$ و $R \ni \alpha$

3- المبادلة بين عمودين في A

نحصل على مصفوفة مختزلة الشكل بالأعمدة A' حيث إن:

$$AQ_1Q_2...Q_t = A'$$

نظرية 1-12 ،

لتكن A مصفوفة ممثلة لتحويل خطي T من U إلى V عندئذ يكون $rank(A)=rank(T)$ أي أن $rank([T]_{B,A})=rank(T)$

البرهان: نفرض $A=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ و $B=\{v_1,v_2,...,v_m\}$ قاعدتان للفضائين المتجهين U و V على الترتيب ثم نفرض $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ مصفوفة ممثلة لـ T بالنسبة للقاعدتين A و B.

عندئذ يكون $T(u_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i$ وبالتالي فإن A هي مصفوفة الانتقال من B إلى $T(A)$.

من النظرية 1-7 نجد أن $T(A)$ تولد $T(U)$. وهذا يعني أن أعمدة المصفوفة A هي إحداثيات مجموعة التوليد لـ $T(U)$ في القاعدة B. ونرى بسهولة أن أعمدة المصفوفة المختزلة الشكل بالأعمدة A' الناتجة عن A هي أيضاً إحداثيات مجموعة التوليد لـ $T(U)$. إذن عدد الأعمدة غير الصفرية في A' يساوي عدد أبعاد $T(U)$ وبالتالي فإن $rank(A)=rank(T)$.

مثال:

التحويل الخطي $T:P_2\to P_3$ المعرف بالعلاقة:

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2)=(2a_0+2a_2)+(a_0+a_1+3a_2)x+(a_1+2a_2)x^2+(a_0+a_2)x^3$$

تمثله المصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدتين $A=\{1,\ 1-x, x^2\}$ و $B=\{1, x, 1-x^2, 1+x^3\}$.

وبإجراء العمليات الأولية المناسبة على أعمدة A نحصل على المصفوفة المختزلة الشكل بالأعمدة كما يلي:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

إذن :

$$rank(T)=rank(A)=2$$

وبالحساب المباشر نجد أن:

$$(1)(1)+(1)(x)+(0)(1-x^2)+(1)(1+x^3)=2+x+x^3$$

$$(0)(1)+(0)(x)+(1)(1-x^2)+(1)(1+x^3)=2-x^2+x^3$$

وهذا يوضح أن $\{2+x+x^3, 2-x^2+x^3\}$ قاعدة لـــ $T(P_2)$.

تعريف 1-13 :

نقول عن المصفوفة $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ بأنها مختزلة الشكل بالأسطر إذا وفقط إذا حققت الشروط الآتية:

1- أول عنصر مختلف عن الصفر في السطر i يساوي 1 وليكن في العمود k_i حيث $i=1,2,..,r$ (يدعى هذا الواحد بالواحد الرئيس)

2- $k_1<k_2<..<k_r\le n$

3- من أجل $i=1,2,..,r$ يكون الواحد الرئيسي في السطر i هو العنصر الوحيد المختلف عن الصفر في العمود k_i .

4- كل عناصر الأسطر الأخيرة والتي عددها $m-r$ أصفار

تعريف- 1-14:

لتكن B و A مصفوفتين معرفتين على R فنقول أن B تكافئ A إذا وفقط إذا وجدت مصفوفتان قابلتان للقلب Q و P بحيث أن $B=PAQ$

بفرض A مصفوفة من القياس $m\times n$ معرفة على R وبإجراء سلسلة من العمليات الأولية المناسبة على أسطر A نحصل على مصفوفة مختزلة الشكل بالأسطر B وهــذا يعني أن $B=E_1E_2..E_sA=PA$ لأن كل عملية أولية على سطر في A تكافئ ضرب المصفوفة A من اليسار بمصفوفة أولية E_i ومعلوم أن P قابلة للقلب.

نظرية 1- 15:

لتكن $A=\{\ u_1,u_2,..,u_n\ \}$ و $B=\{\ v_1,v_2,...,v_m\ \}$ قاعدتين لــــ U و V علـــى الترتيب. ولتكن $A=[\ a_{ij}\ ]_{m\times n}=[T]_{B,A}$ مصفوفة التحويـــل الخطـــي T بالنســـبة للقاعدتين A و B .

فإذا كان u متجهاً ما من U عندئذٍ يكون :

$$[T(u)]_B=[T]_{B,A}[u]_A$$

البرهان:

نفرض أن :

$$[u]_A=X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\x_n\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [T(u)]_B=Y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\.\\.\\y_m\end{bmatrix}$$

عندئـــذٍ يكـــون $u=\sum_{j=1}^{n}x_ju_j$ و $T(u)=\sum_{i=1}^{m}y_iv_i$ ، وبمـــا أن $A=[\ a_{ij}\ ]_{m\times n}$ مصفوفة T بالنسبة للقاعدتين A و B .

إذن :

$$\sum_{i=1}^{m}y_iv_i=T(u)=T\left(\sum_{j=1}^{n}x_ju_j\right)=\sum_{j=1}^{n}x_jT(u_j)=\sum_{j=1}^{n}x_j\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}v_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)v_i$$

ولكن إحداثيات $T(u)$ بالنسبة للقاعدة B معرفة بشكل وحيد.

فهذا يعني أن $y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$ و بالتالي فإن :

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+---+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+---+a_{2n}x_n \\ ---------------- \\ ---------------- \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+---+a_{mn}x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & --- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & --- & a_{2n} \\ --- & --- & --- & --- \\ --- & --- & --- & --- \\ a_{m1} & a_{m2} & --- & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}=AX$$

إذن :

$$[T(u)]_B=[T]_{B,A}[u]_A$$

مثال 1 :

نفرض R الحقل المعرف عليه P_4 و $T:P_4\to R^4$ تحويل خطي معرف بالعلاقة

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3a_4x^4)=(a_0+a_1+a_2+2a_4,a_1+2a_2+a_3-a_4,a_3-a_4,a_0+a_1+a_2+2a_4)$$

لنختار القاعدة العادية $A=\left\{1,x,x^2,x^3,x^4\right\}$ في الفضـــاء المتجـــه P_4 والقاعـــدة القانونية $\varepsilon_4=\left\{e_1,e_2,e_3,e_4\right\}$ في R^4

ونجد بالحساب المباشر أن:

$$T(1)=(1,0,0,1) \quad , \quad T(x)=(1,1,0,1)$$

$$T(x^2)=(1,2,0,1) \quad , \quad T(x^3)=(0,1,1,0)$$

$$T(x^4)=(2,-1,-1,2)$$

وبالتالي فإن مصفوفة T بالنسبة للقاعدتين A و B هي :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال 2:

ليكن T تحويلاً خطياً من R^4 إلى R^3 ثم لتكن مصفوفته

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدتين $A=\{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$ في R^4
و $B=\{(0,1,1),(1,0,0),(0,0,1)\}$ في R^3 . والمطلوب استخدام A لإيجاد القيمة $T(3,4,-1,-4)$.

لإيجاد إحداثيات $u=(3,4,-1,-4)$ بالنسبة للقاعدة A نكتب u كعبارة خطية بمتجهات A:

$$(3,4,-1,-4)=(-4)(1,1,1,1)+(3)(1,1,1,0)+(5)(1,1,0,0)+(-1)(1,0,0,0)$$

إذن:

$$[u]_A=\begin{bmatrix}-4\\3\\5\\-1\end{bmatrix}.$$

وبالتالي فإن :

$$[T(u)]_B=\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\2&1&0&3\\1&2&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\3\\5\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10\\-8\\14\end{bmatrix}$$

باستخدام هذه الإحداثيات في متجهات B نجد أن :

$$T(3,4,-1,-4)=(-10)(0,1,1)+(-8)(1,0,0)+14(0,0,1)=(-8,-10,4)$$

نظرية 1- 16 :

لتكن $A=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ و $B=\{v_1,v_2,...,v_m\}$ قاعدتين في U و V على الترتيب.
فإذا كانت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ مصفوفة بحيث إن المعادلة $[T(u)]_B=A[u]_A$
محققة من أجل جميع المتجهات u من U فإن A مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للقاعدتين A و B.

البرهان:

من أجل $u = u_j$ نجد أن :

$$[u_j] = \begin{bmatrix} \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_{nj} \end{bmatrix}_A$$

و أيضاً :

$$[T(u_j)]_B = A[u_j]_A = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\ \delta_{kj} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\ \delta_{kj} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\ \delta_{kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

إذن : $T(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i$ وبالتالي فإن A مصفوفة T بالنسبة للقاعدتين A و B .

3-1 – تغير القاعدة :

نظرية 1- 17:

نفرض $D = \{w_1, w_2, .., w_K\}$ و $D' = \{w'_1, w'_2, .., w'_k\}$ قاعدتان للفضاء المتجه W المعرف على F ثم ليكن w متجه ما من W ولتكن مصفوفتيه الإحداثيتين :

$$[w]_D = C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_k \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad [w]_{D'} = C' = \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c'_k \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدتين D' و D على الترتيب.

فـإذا كانـت P مصـفوفة الانتقـال مـن D إلى D'،فـإن $C = PC'$ أي أن

$$[w]_D = P[w]_{D'}$$

البرهان:

نجد من الفرض أن:

$$w = \sum_{i=1}^{k} c_i w_i = \sum_{j=1}^{k} c'_j w'_j$$

فإذا كانت :

$$P = \left[\ P_{ij}\ \right]_{k\times k}$$

فإن :

$$. w'_j = \sum_{i=1}^{k} P_{ij} w_i$$

بالتعويض عن w'_j بما يساويه نجد أن :

$$w = \sum_{j=1}^{k} c'_j \left(\sum_{i=1}^{k} P_{ij} w_i \right) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k} P_{ij} c'_j \right) w_i$$

وبالتالي فإن :

$$c_i = \sum_{j=1}^{k} P_{ij} c'_j$$

أو :

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}c'_1 + P_{12}c'_2 + - - - + P_{1k}c'_k \\ P_{21}c'_1 + P_{22}c'_2 + - - - + P_{2k}c'_k \\ . \\ . \\ P_{k1}c'_1 + P_{k2}c'_2 + - - - + P_{kk}c'_k \end{bmatrix} = PC'$$

مثال:

نفرض $D = \{x,\ 2+x\}$ و $D' = \{4+x,\ 4-x\}$ قاعدتان للفضاء المتجه $W = P_1$ المعرف على الحقل R.

بما أن :

$$4+x = (-1)x + (2)(2+x)$$

$$4-x=(-3)x+(2)(2+x)$$

إذن مصفوفة الانتقال من D إلى D' هي :

$$P=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

يمكننا أن نكتب المتجه $w=4+3x$ بالشكل الآتي :

$$4+3x=2(4+x)+(-1)(4-x)$$

وبالتالي فإن :

$$[w]_{D'}=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$$

يمكننا إيجاد المصفوفة الإحداثية $[w]_D$ من المساواة :

$$[w]_D=P[w]_{D'}=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

كان بالإمكان الحصول على هذه النتيجة بأن نكتب w كعبارة خطية بمتجهات القاعدة D فنجد أن :

$$(1)(x)+2(2+x)=4+3x=w$$

نظرية 1- 18:

نفرض $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ مصفوفة T بالنسبة للقاعدتين A في U و B في V. فإذا كانت Q مصفوفة الانتقال من القاعدة A إلى القاعدة A' في U و P مصفوفة الانتقال من القاعدة B إلى القاعدة B' في V، عندئذ مصفوفة T بالنسبة للقاعدتين A' و B' هي $P^{-1}AQ$.

البرهان:

نفرض u متجه ما من U ونفرض X و X' المصفوفتان الإحداثيتان لـ u بالنسبة للقاعدتين A و A' على الترتيب ثم نفرض Y و Y' المصفوفتان الإحداثيتان لـ $T(u)$ بالنسبة للقاعدتين B و B' على الترتيب.

باستخدام النظريتين 1-15 و 1-17 نجد أن :

$$Y=AX$$

حيث إن :

$$X = QX' \text{ و } Y = PY'$$

وبالتعويض عن X و Y نجد أن :

$$PY' = AQX'$$

وبالتالي فإن :

$$Y' = (P^{-1}AQ)X'$$

وباستخدام النظرية 1-16، نجد أن $P^{-1}AQ$ هي مصفوفة T بالنسبة للقاعدتين A' و B'.

نظرية 1-19:

إذا كانت A و B مصفوفتين من القياس $m \times n$ فإنهما تمثلان نفس التحويل الخطي T من U إلى V إذا وفقط إذا كانت A و B متكافئتين.

البرهان:

نفرض A و β مصفوفتان تمثلان T بالنسبة لمجموعتي القواعد $\{A, B\}$ ثم $\{A', B'\}$ على الترتيب عندئذ تكون $\beta = P^{-1}AQ$ حيث إن Q مصفوفة الانتقال من A إلى A' و P مصفوفة الانتقال من B إلى B' وهذا يعني أن A و β متكافئتان.

وبالعكس إذا كانت β تكافئ A فتوجد مصفوفتان P و Q قابلتان للقلب بحيث أن $\beta = P^{-1}AQ$.

فإذا كانت A تمثل T بالنسبة للقاعدتين A و B فإن β تمثل T بالنسبة للقاعدتين A' و B' حيث إن Q مصفوفة الانتقال من A إلى A' و P مصفوفة الانتقال من B إلى B'.

نظرية 1-20:

ليكن T تحويلاً خطياً من U إلى V ثم نفرض r رتبة T عندئذٍ توجد قاعدتان A' في U و β' في V بحيث إن مصفوفة T بالنسبة للقاعدتين A' و β' تكون من الشكل :

$$D_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ - + & - \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad I_r = \begin{bmatrix} 10--0 \\ 01--0 \\ 0---1 \end{bmatrix}$$

البرهان:

نفرض A و β قاعدتان لـــ U و V على الترتيب و لتكن A مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للقاعدتين A و β نجري العمليات الأولية المناسبة على أعمدة $\begin{bmatrix} A \\ I_n \end{bmatrix}$ لنحصل على المصفوفة $\begin{bmatrix} A' \\ Q \end{bmatrix}$ حيث A' هي المصفوفة المختزلة الشكل بالأعمدة الناتجة من A أي أن $A' = AQ$ وبإجراء العمليات الأولية المناسبة على أسطر المصفوفة $[A', I_m]$ لنحصل على المصفوفة $[D_r, P^{-1}]$ حيث $D_r = P^{-1}A' = P^{-1}AQ$

نفرض الآن A' و β' قاعدتان لـــ U و V على الترتيب بحيث أن Q مصفوفة الانتقال من A إلى A' و P مصفوفة الانتقال من β إلى β' عندئذٍ تكون $P^{-1}AQ$ مصفوفة T بالنسبة للقاعدتين A' و β' وبذلك يكون تم البرهان.

مثال:

ليكن $T : R^4 \to P_2$ تحويلاً خطياً معرفاً بالعلاقة :

$$T(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1 - a_2 + 2a_4) + (a_1 - a_2 + a_3 + a_4)x + (2a_1 - 2a_2 + a_3 + 3a_4)x^2$$

نجد القاعدة A' في R^4 والقاعدة β' في P_2 بحيث تكون مصفوفة T بالنسبة للقاعدتين A' و β' من الشكل:

$$D_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ - + & - \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

من أجل ذلك نجد أولاً مصـــفوفة T بالنســـبة للقاعـــدتين ε_4 و $\beta = \{ 1,x,x^2 \}$

بما أن :

$$T(1,0,0,0) = 1 + x + 2x^2$$

$$T(0,1,0,0) = (-1)(1) + (-1)(x) + (-2)(x^2)$$

$$T(0,0,1,0) = (0)(1) + (1)(x) + (1)(x^2)$$

$$T(0,0,0,1) = (2)(1) + (1)(x) + (3)(x^2)$$

إذن مصفوفة T بالنسبة لـــ ε_4 و β هي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

نجري العمليات الأولية المناسبة على أعمـــدة $\begin{bmatrix} A \\ I_4 \end{bmatrix}$ لنحصـــل علـــى $\begin{bmatrix} A' \\ Q \end{bmatrix}$ حيـــث

$A' = AQ$ مصفوفة مختزلة الشكل بالأعمدة للمصفوفة A .

إذن :

$$\begin{bmatrix} A \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ - & - & - & - \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AQ \\ Q \end{bmatrix}$$

ثم نجري العمليات الأولية المناسبة على أسطر $[A', I_3]$ لنحصل علـــى $[D_r, P^{-1}]$

حيث $D_r = P^{-1}A' = P^{-1}AQ$:

$$[A', I_3] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] = [D_r, P^{-1}]$$

إذن :

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفتان قابلتان للقلب بحيث إن:

$$P^{-1}AQ=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_2 & \vdots & 0 \\ - & \vdots & + \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}=D_2$$

بالرجوع إلى برهان النظرية 1- 21 يمكننا أن نجـــد A' و B' باعتبـــار أن Q هـــي مصفوفة الانتقال من A إلى A' و P مصفوفة الانتقال من B إلى B' و باستخدام Q لإيجاد A' نجد أن :

$$A'=\{(1,0,-1,0),(0,0,1,0),(1,1,0,0),(-2,0,1,1)\}$$

ولإيجاد B' يجب أن نجد P من P^{-1} ثم نعتبر P مصفوفة الانتقال من B إلى B'

إذن :

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

و أيضاً :

$$B^{1}=\{1+x^2, x+x^2, x^2\}$$

1-4- العمليات على التحويلات الخطية :

نظرية 1-21:

ليكن U و V فضائين متجهين معرفين على الحقل F بعـــداهما n و m علـــى الترتيب و S و T تحويلين خطين من U إلى V.

فإذا كانت A مصفوفة S و B مصفوفة T بالنسبة لقاعدتين مفروضـــتين في U و V، فإن $A+B$ هي مصفوفة $S+T$ بالنسبة لهاتين القاعدتين. ومن أجـــل كـــل a من F تكون aB مصفوفة aT بالنسبة للقاعدتين المفروضتين.

البرهان:

لتكن $A=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ و $\beta=\{v_1,v_2,...,v_m\}$ قاعدتين في U و V على الترتيب. فإذا كانت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ مصفوفة S و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ مصفوفة T بالنسبة للقاعدتين A و β، فإن:

$$S(u_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}v_i \quad \text{و} \quad T(u_j)=\sum_{i=1}^{m}b_{ij}v_i$$

وبالتالي :

$$(S+T)(u_j)=\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}+b_{ij})v_i$$

إذن: $A+B$ مصفوفة $S+T$ بالنسبة لـ A و β

وكذلك : $aT(u_j)=\sum_{i=1}^{m}(ab_{ij})v_i$

وهذا يعني أن aB مصفوفة aT بالنسبة لـ A و β.

تعريف 1-22:

ليكن U,V,W ثلاثة فضاءات متجهة معرفة على F ونفرض S تحويل خطي من U إلى V و T تحويل خطي من V إلى W. عندئذٍ نعرف الجداء TS بأنه تطبيق من U إلى W بحيث إن :

$$\forall\ u\in U \qquad TS(u)=(ToS)(u)=T(S(u))$$

نظرية 1-23:

جداء تحويلين خطين هو أيضاً تحويل خطي .

البرهان:

واضح من التعريف 1-22 أن TS تطبيق من U إلى V، و للبرهان على أن TS تحويل خطي نأخذ عنصرين كيفيين u_1 و u_2 من U و a,b من F.

عندئذٍ يكون:

$$TS(au_1+bu_2)=T(S(au_1+bu\ \ ))=T(aS(u_1)+bS(u_2))=aTS(u_1)+bTS(u_2)$$

ملاحظة:

لنعتبر $U = V = W$ في التعريف 1-22 فيمكننا أن نعرف T مرفوعاً إلى أي قوة صحيحة موجبة بالتدريج بحيث أن $T^{k+1} = T^k o T$ ، فإذا كانت A مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للقاعدة A، فإن مصفوفة التحويل الخطي التالي :

$$a_r T^r + a_{r-1} T^{r-1} + - - + a_1 T + a_0$$

هي :

$$a_r A^r + a_{r-1} A^{r-1} + - - + a_1 A + a_0 I$$

وذلك بحسب النظريتين 1-21 و 1-23 ولهذه الملاحظة تطبيقات عملية في إيجاد T^{-1} وفي التعبير عن قوى مرتفعة لـ T بدلالة قوى أدنى.

مثال:

ليكن T مؤثراً خطياً على R^3 معطى بالعلاقة :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, 2x_2, 2x_1 + 3x_2 + x_3)$$

فتكون مصفوفة T بالنسبة للقاعدة العادية ε_3 هي :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

و بالحساب المباشر نجد أن : $A^3 - 5A^2 + 8A = 4I$

وبالتالي فإن : $A\left(\frac{1}{4}A^2 - \frac{5}{4}A + 2I\right) = I$

والمصفوفة A التي تحقق $AB = I$ تكون قابلة للقلب و $A^{-1} = B$.

إذن: $A^{-1} = \frac{1}{4}A^2 - \frac{5}{4}A + 2I$

وينتج من الملاحظة السابقة أن : $T^{-1} = \frac{1}{4}T^2 - \frac{5}{4}T + 2$

كما أن للمعادلة $A^3 - 5A^2 + 8A = 4I$ تطبيقات أخرى وذلك بأن نحسب قوة مرتفعة لـ A بدلالة قوى لـ A أدنى.

فنلاحظ أن : $A^3 = 5A^2 - 8A + 4I$

وبالتالي فإن :

$$A^4 = 5A^3 - 8A^2 + 4A = 5(5A^2 - 8A + 4I) - 8A^2 + 4A = 17A^2 - 36A + 20I$$

الفصل الثاني

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

1-2 - القيم الذاتية والمتجهات الذاتية:

نفرض V فضاء متجه عدد أبعاده منتهٍ و T مؤثر خطي على V عندئذٍ نقول عن كل متجه v مختلف عن الصفر ويحقق المساواة $T(v) = \lambda v$ حيث λ قيمة عددية ما بأنه متجه ذاتي لـ T وتدعى أحياناً القيمة الذاتية λ بالقيمة المميزة أو الجذر المميز أو القيمة الخاصة وبشكل مماثل يدعى المتجه الذاتي بالمتجه المميز أو المتجه الخاص لـ T.

تعريف 2-2:

لتكن A مصفوفة من القياس $n\times n$ على F وليكن λ متحولاً عددياً، عندئذٍ تدعى المصفوفة $A-\lambda I$ بالمصفوفة المميزة لـ A، حيث I هي مصفوفة الوحدة.

إذا كانت $A = [\ a_{ij}\ ]_{n\times n}$، فإن المصفوفة المميزة لـ A هي $A-\lambda I$ ويكون معين المصفوفة المميزة من الشكل:

$$det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ------ & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & ------ & a_{2n} \\ ----- & ------ & ------ & ------ \\ a_{n1} & a_{n2} & ------ & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

و يتضح أثناء نشر المعين هذا أن أعلى قوة لـ λ تنتج عن جداء عناصر القطر الرئيسي:

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)---(a_{nn}-\lambda)$$

وهذا يعني أن $det(A-\lambda I)$ كثير حدود بـ λ من الدرجة n حيث أن المثل الرئيسي فيه $(-1)^n$. إذن منشور المعين يأخذ الشكل:

$$det(A-\lambda I) = (-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + --- + c_1\lambda + c_0$$

فإذا عوضنا فيه $\lambda = 0$ نجد أن $c_0 = det\, A$.

تعريف 2-3:

من أجل كل مصفوفة مربعة A على F يدعى كثير الحدود $\det(A-\lambda I)$ بكثير الحــدود المميز لــ A . وتدعى المعادلة $\det(A-\lambda I)=0$ بالمعادلة المميزة لــ A وتدعى مجموعة كل الجذور المميزة لــ A بطيف A .

مثال (1):

لتكن المصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -10 & -5 & -8 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

والمعادلة المميزة لــ A هي:

$$det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 8-\lambda & 5 & 6 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 & 0 \\ -10 & -5 & -8-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$=\lambda^4-8\lambda^2+16=0$$

وبحل هذه المعادلة نجد:

$$\lambda^4-8\lambda^2+16=(\lambda+2)^2(\lambda-2)^2$$

إذن القيم الذاتية لــ A هي $\lambda_1=\lambda_2=-2$ و $\lambda_3=\lambda_4=2$

وطيف A هو $\{-2,2\}$.

نظرية 2-4:

لتكن A مصفوفة ممثلة للمؤثر الخطي T بالنسبة لقاعدة $\mathbf{A}$ عندئذ يكون طيف A هو نفس طيف T.

البرهان:

نفرض $\mathcal{A}$ مصفوفة المؤثر الخطي T بالنسبة للقاعدة $\mathcal{A}$ في V. ونفرض λ قيمة ذاتية لـ T ولنفرض $X = \left[\ x_1, x_2, ..., x_n\ \right]^T$ المصفوفة الإحداثية للمتجه الذاتي v الموافق للقيمة الذاتية λ، بالنسبة للقاعدة $\mathcal{A}$ عندئذ يكون $T(v) = \lambda v$ وبالتالي $AX = \lambda X$ لأن A تمثل T. وينتج من ذلك أن :

$$(A - \lambda I)X = 0$$

وبما أن X مصفوفة غير صفرية إذن لجملة المعادلات المتجانسة $(A - \lambda I)X = 0$ حل غير صفري وهو إحداثيات X. معلوم أن لجملة المعادلات المتجانسة حل غير صفري إذا وفقط إذا كان معين الأمثال مساوياً للصفر وينتج من ذلك أن $det(A - \lambda I) = 0$ وبالتالي λ قيمة ذاتية لـ A.

وبالعكس إذا كانت λ قيمة ذاتية لـ A، فإن $det(A - \lambda I) = 0$ وبالتالي يوجد حل غير صفري للجملة $(A - \lambda I)X = 0$. وهذا الحل يمثل المصفوفة الإحداثية لمتجه v يختلف عن الصفر بالنسبة للقاعدة $\mathcal{A}$. وبما أن $AX = \lambda X$ إذن $T(v) = \lambda v$ وهذا يعني أن λ قيمة ذاتية لـ T.

نستنتج من تكافؤ المعادلتين $AX = \lambda X$ و $T(v) = \lambda v$ في برهان النظرية السابقة أن الشرط اللازم الكافي لتكون λ قيمة ذاتية لـ A هو أن توجد مصفوفة X غير صفرية من القياس $n \times 1$ بحيث إن $AX = \lambda X$ وهذا يقودنا إلى تعريف المتجه الذاتي لمصفوفة:

تعريف 2-5:

نفرض λ قيمة ذاتية لمصفوفة A من القياس $n \times n$. عندئذ نعرف المتجه الذاتي لـ A الموافق لـ λ بأنه المصفوفة X غير الصفرية من القياس $n \times 1$ بحيث إن $AX = \lambda X$.

وبالتالي إذا كانت A مصفوفة من القياس $n \times n$ ممثلة للمؤثر الخطي T بالنسبة للقاعدة $\mathcal{A}$ في V عندئذ يكون X متجه ذاتي لـ A موافق للقيمة الذاتية λ إذا وفقط إذا كانت X هي المصفوفة الإحداثية بالنسبة لـ $\mathcal{A}$ لمتجه ذاتي لـ T موافق لنفس القيمة الذاتية λ.

نفرض $\mathbf{A}$ قاعدة مختارة لـــ V و لتكن A هي مصفوفة المؤثر الخطي T بالنسبة للقاعدة $\mathbf{A}$. عندئذ نجد القيم الذاتية لـــ T وذلك بحل المعادلـــة المميـــزة $det(A-\lambda I)=0$ و تكـــون المتجهات الذاتية لـــ T الموافقة للقيمة الذاتية λ مؤلفة من جميع المتجهات غير الصفرية من V والتي تحقق مصفوفتها الإحداثية X بالنسبة لـــ $\mathbf{A}$ المعادلة $(A-\lambda I)X=0$.

مثال (2):

ليكن T مؤثراً خطياً على R^4 معطى بالعلاقة:

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(8x_1+5x_2+6x_3,-2x_2,-10x_1-5x_2-8x_3,2x_1+x_2+x_3+2x_4)$$

نلاحظ أن مصفوفة T بالنسبة للقاعدة العادية ε_4 هي:

$$A=\begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -10 & -5 & -8 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ويكون كثير الحدود المميز لـــ A كما في المثال (1):

$$det(A-\lambda I)=\lambda^4-8\lambda^2+16=(\lambda+2)^2(\lambda-2)^2$$

والقيم الذاتية لـــ T هي $\lambda_1=\lambda_2=-2$ و $\lambda_3=\lambda_4=2$، ولتعيين المتجهـــات الذاتيـــة الموافقة لـــ $\lambda_1=-2$ نحل جملة المعادلات الآتية:

$$(A+2I)X=0$$

أو:

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & -5 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ولحل هذه الجملة نجري العمليات الأولية التالية على الأسطر في المصفوفة الموسعة للجملة:

$$[A+2I,0]=\begin{bmatrix}10&5&6&0&0\\0&0&0&0&0\\-10&-5&-6&0&0\\2&1&1&4&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&1&1&4&0\\0&0&1&-20&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1/2&0&12&0\\0&0&1&-20&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

وحلول هذه الجملة تعطى بالمعادلات:

$$x_1=-\frac{1}{2}x_2-12x_4$$
$$x_2=x_2$$
$$x_3=\quad 20x_4$$
$$x_4=\quad x_4$$

حيث إن x_2 و x_4 كيفيان من $\mathbb{R}$، إذن المتجهات الذاتية لـ T الموافقة للقيمة الذاتية -2 تكون من الشكل:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-\frac{1}{2}x_2-12x_4,x_2,20x_4,x_4)=x_2(-\frac{1}{2},1,0,0)+x_4(-12,0,20,1)$$

ومن أجل القيمة الذاتية $\lambda=2$ نحل جملة المعادلات المتجانسة $(A-2I)X=0$ أو:

$$\begin{bmatrix}6&5&6&0\\0&-4&0&0\\-10&-5&-10&0\\2&1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة المختزلة الشكل بالأسطر الناتجة عن المصفوفة الموسعة $[A-2I,0]$ هي:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن حل الجملة السابقة يعطى بالعلاقة $x_1=x_2=x_3=0$ و x_4 كيفي من R والمتجهات الذاتية لـ T الموافقة للقيمة الذاتية 2 تكون من الشكل:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,0,x_4)=x_4(0,0,0,1)$$

مثال 3:

نفرض أن T هو دوران جميع متجهات المستوي xoy حول مبدأ الإحداثيات بزاوية ثابتة φ بالاتجاه المخالف لعقارب الساعة.

1- اثبت أن T مؤثر خطي ثم أوجد مصفوفة T بالنسبة للقاعـــدة الديكاريـــة المتعامـــدة القياسية.

2- أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لـــ T.

الحل :

1- لتكن $\{e_1, e_2\}$ قاعدة متعامدة قياسية في المستوي xoy فإذا كان u متجهاً ما من xoy سنرمز للمتجه الناتج عن دوران u حول مبدأ الإحداثيات بزاوية ثابتة φ بالرمز $T(u)$.

للبرهان على أن T مؤثر خطي يكفي أن نتحقق من الشرطين:

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

$$T(au) = aT(u)$$

من أجل أي متجهين u و v من xoy وأي عدد a من R.

الشرط الأول محقق لأن دوران $u+v$ حول o بزاوية φ لا يختلف عما إذا دار كـــل مـــن u و v بزاوية φ ثم جمعنا الناتج $T(u)+T(v)$.

والشرط الثاني محقق لأن دوران المتجه au بزاوية φ حول المبدأ o لا يختلف عن جـــداء a بناتج دوران u حول المبدأ o بزاوية φ ولإيجاد مصفوفة T بالنســـبة للقاعـــدة $\{e_1, e_2\}$ نلاحظ أن:

$$T(e_1) = \cos\varphi . e_1 + \sin\varphi . e_2$$

$$T(e_2) = \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) . e_1 + \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) . e_2 = -\sin\varphi . e_1 + \cos\varphi . e_2$$

وبالتالي فإن مصفوفة T بالنسبة لـــ $\{e_1, e_2\}$ هي:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

2- نكتب المعادلة المميزة للمؤثر الخطي T :

$$det(A-\lambda I)=0$$

أو :

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi-\lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi-\lambda \end{bmatrix}=0$$

أو:

$$\lambda^2-2\cos\varphi.\lambda+1=0$$

ويكون لهذه المعادلة حلين عقديين :

$$\lambda_2=\cos\varphi-i\sin\varphi \text{ و } \lambda_1=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

وهذا يعني أن المؤثر الخطي T لا يملك قيماً ذاتية في المستوي الحقيقي إلا عندما تكون φ من مضاعفات π .

إذا كانت $\varphi=(2k+1)\pi$ فإن كل متجه في xoy هو متجه ذاتي للمؤثر الخطي T ويوافق القيمة الذاتية $\lambda=-1$.

وإذا كانت $\varphi=2k\pi$ فإن كل متجه في xoy هو متجه ذاتي للمؤثر الخطي T ويوافق القيمة الذاتية $\lambda=1$.

وأما في المستوي العقدي سنجد المتجهات الذاتية الموافقة لـ λ_1 أولاً بأن نكتب جملة المعادلات المتجانسة $(A-\lambda_1)X=0$.

أو:

$$\begin{bmatrix} -i\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & -i\sin\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهذه الجملة تؤول إلى المعادلة:

$$ix_1+x_2=0$$

والمتجهات الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية λ_1 تكون من الشكل:

$$(x_1,x_2)=(x_1,-ix_1)=x_1(1,-i)$$

وبشكل مماثل نجد المتجهات الذاتية الموافقة لـــ λ_2 بأن نكتب جملة المعادلات :

$$(A-\lambda_2 I)X\begin{bmatrix} i\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & i\sin\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهذه الجملة تؤول إلى المعادلة:

$$ix_1 - x_2 = 0$$

والمتجهات الذاتية لـــ T الموافقة للقيمة الذاتية λ_2 تكون من الشكل:

$$(x_1,x_2)=(x_1,ix_1)=(1,i)$$

إذن يوجد متجهان ذاتيان مستقلان خطياً لـــ T وهما $(1,-i)$ و $(1,i)$

2-2- الفضاءات المميزة والتشابه:

إذا كــــان v متجهــــاً ذاتيــــاً موافقــــاً للقيمـــة الذاتيـــة λ للمـــؤثر الخطـــي T، فـــإن $T(cv)=cT(v)=c\lambda v$ من أجل أي قيمة عددية c من F .

إذن سيوجد عدد كبير من المتجهات الذاتية v توافق نفس القيمة الذاتية λ .

نظرية 2-6:

إذا كانت λ قيمة ذاتية لـــ T من F و V_λ مجموعة جميع المتجهات الذاتية لـــ T الموافقة للقيمة λ إضافة للمتجه الصفري في V عندئذٍ يكون V_λ فضاء جزئي في V.

البرهان:

بما أن $V_\lambda \ni 0$ إذن $V_\lambda \neq \phi$. نفرض أن v_1 و v_2 متجهان كيفيان من V و a,b عنصران كيفيان من F . عندئذٍ يكون:

$$T(av_1+bv_2)=aT(v_1)+bT(v_2)=a\lambda v_1+b\lambda v_2=\lambda(av_1+bv_2)$$

وهذا يعني أن av_1+bv_2 من V_λ وبالتالي V_λ فضاء جزئي في V.

تعريف 2-7:

ندعو الفضاء الجزئي V_λ الوارد في النظرية (2-6) بفضاء ذاتي (مميز) لـــ T موافق للقيمـــة الذاتية λ . وندعو عدد أبعاد V_λ بالجداء الهندسي لـــ λ .

بما أن العلاقة $T(v)=\lambda v$ تكافئ $(T-\lambda)v=0$ وهذا يكافئ أن $v \in ker(T-\lambda)$.

إذن $V_\lambda = ker(T-\lambda)$ والجداء الهندسي لـــ λ يساوي عدد أبعاد $ker(T-\lambda)$.

نظرية 2-8:

نفرض $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r\}$ مجموعة القيم الذاتية المختلفة فيما بينهما مثنى مثنى للمؤثر الخطي T ونفرض أن v_i هو المتجه الذاتي لـــ T الموافق للقيمة λ_i من أجل كل $1 \le i \le r$، عندئـــذ تكون مجموعة المتجهات $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ مستقلة خطياً.

البرهان:

نجري البرهان بالتدريج بالنسبة لـــ r. فالنظرية محققة من أجل $r = 1$ لأن كل متجـــه ذاتي لـــ T يكون مختلفاً عن الصفر.

نفرض أن النظرية محققة من أجل أي مجموعة مكونة من k قيمة ذاتية حيث $k < r$ ثم نفرض أن $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{k+1}\}$ مجموعة مؤلفة من $k+1$ من القيم الذاتية لـــ T ونفرض أن v_i هو المتجه الذاتي الموافق لـــ λ_i من أجل $i = 1,2,..,k+1$.

نكتب عبارة الارتباط الخطي التالية:

$$c_1 v_1 + -----+ c_k v_k + c_{k+1} v_{k+1} = 0 \qquad (1)$$

ثم نطبق T على طرفي المساواة (1) فإذا لاحظنا أن $T(v_i) = \lambda_i v_i$ نجد:

$$c_1 \lambda_1 v_1 + -----+ c_k \lambda_k v_k + c_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0 \qquad (2)$$

وبضرب طرفي (1) بـــ λ_{k+1} نحصل على المساواة التالية:

$$c_1 \lambda_{k+1} v_1 + -----+ c_k \lambda_{k+1} v_k + c_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0 \qquad (3)$$

نطرح (3) من (2) فنجد:

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})v_1 + ... + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})v_k = 0$$

وبحسب الفرض التدريجي لدينا $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ مجموعة مســـتقلة خطيـــاً وبالتـــالي فـــإن $c_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0$ من أجل كل $i = 1,2,..,k$

وبما أن القيم الذاتية مختلفة مثنى مثنى إذن $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$ وهذا يؤدي إلى أن:

$$c_1 = c_2 = ... = c_k = 0$$

وبالتعويض في المساواة (1) نجد أن :

$$c_{k+1}v_{k+1}=0$$

وينتج من ذلك أن $c_{k+1}=0$ وهذا ما يبرهن على أن مجموعة المتجهات الذاتية $\{ v_1, v_2, ..., v_{k+1} \}$ مستقلة خطياً ، إذن النظرية صحيحة من أجل r .

استنتاج 2- 9:

إذا كانت $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, ..., V_{\lambda_r}$ فضاءات مميزة للمؤثر الخطي T مختلفة مثنى مثنى وكانت $\{ v_1, ..., v_r \}$ مجموعة متجهات ذاتية لـ T بحيث إن v_i من $V_{\lambda i}$ من أجل كل $i=1,2,...,r$ ، عندئذٍ تكون $\{ v_1, v_2, ..., v_r \}$ مجموعة مستقلة خطياً.

البرهان :

إن القيم الذاتية $\lambda_1, ..., \lambda_r$ مختلفة مثنى مثنى نظراً لاختلاف الفضاءات المميزة $V_{\lambda_1}, ..., V_{\lambda_r}$ فيما بينها مثنى مثنى.

فإذا كان v_i هو المتجه الذاتي لـ T الموافق للقيمة الذاتية λ_i حيث $i=1,...,r$ فإن $\{ v_1, v_2, ..., v_r \}$ مجموعة مستقلة خطياً بحسب النظرية (2- 8).

نذكر بأنه إذا كانت W_i فضاءات جزئية في V فيدعى المجموع $W_1+W_2+......+W_r$ بمجموع مباشر إذا تحقق الشرط:

$$W_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} W_j = \{ 0 \} \qquad \text{من أجل كل } i=1,2,..,r$$

استنتاج 2-10:

إذا كانت $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, ..., V_{\lambda_r}$ فضاءات مميزة لـ T مختلفة مثنى مثنى، فإن المجموع $V_{\lambda_1}+V_{\lambda_2}+......+V_{\lambda_r}$ مباشر.

البرهان:

نفرض أن المجموع السابق غير مباشر وليكن v_k متجه مختلف عن الصفر من V_{λ_k} ومن $\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{r} V_{\lambda_j}$ أيضاً، عندئذٍ توجد متجهات v_j من V_{λ_j} وأعداد a_j من F بحيث إن $v_k = \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{r} a_j v_j$. وبالتالي فإن v_k يرتبط خطياً بالمجموعة:

$$A = \{ v_1,..,v_{k-1}, v_{k+1},..,v_r \}$$

وبما أن $v_k \neq 0$ إذن يوجد متجه مختلف عن الصفر في A.

ولنرمز بـ $A' = \{ v'_1, v'_2,.., v'_t \}$ لمجموعة المتجهات المختلفة عن الصفر في A فتكون A' غير خالية.

عندئذ يكون v_k مرتبط خطياً بمتجهات A' وبالتالي فإن المجموعة $\{ v'_1, v'_2,.., v'_t, v_k \}$ مرتبطة خطياً.

غير أن المجموعة $\{ v'_1, v'_2,.., v'_t, v_k \}$ مؤلفة من متجهات ذاتية تحقق شروط الاستنتاج 2- 9 وبالتالي فهي مستقلة خطياً وبذلك حصلنا على تناقض وهذا يبرهن على أن المجموع $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + ... + V_{\lambda_r}$ مباشر.

ملاحظة:

نفرض أن A مصفوفة المؤثر الخطي T بالنسبة للقاعدة A في V ولتكن B مصفوفته بالنسبة للقاعدة A' في V. فإذا كانت P مصفوفة الانتقال من A إلى A' (P قابلة للقلب)، فإن $B = P^{-1}AP$ (بحسب النظرية 1- 17) وهذا يقودنا إلى التعريف التالي.

تعريف 2- 11:

بفرض B و A مصفوفتان من القياس $n \times n$ عناصرهما من F فنقول أن B تشابه A على F إذا وجدت مصفوفة قابلة للقلب P عناصرها من F بحيث أن $B = P^{-1}AP$.

وبموجب الملاحظة السابقة للتعريف (2-11) تتشابه مصفوفتان من القيـــاس $n\times n$ علـــى F إذا وفقط إذا كانتا تمثلان نفس المؤثر الخطي المعرف على فضاء متجه V عدد أبعاده n على F.

نظرية 2-12:

يكون للمصفوفات المتشابهة نفس كثير الحدود المميز.

البرهان:

إذا كانت A و B مصفوفتين متشابهتين على F، عندئذٍ توجد مصفوفة قابلة للقلـــب P بحيث أن $B=P^{-1}AP$.

إذن:

$$\begin{aligned}det(B-\lambda I) &= det(P^{-1}AP-\lambda I)\\ &= det(P^{-1}AP-\lambda P^{-1}P)\\ &= det\left(P^{-1}(A-\lambda I)P\right)\\ &= det\, P^{-1}.det(A-\lambda I).det\, P\\ &= det(P^{-1}P)\,det(A-\lambda I)\\ &= det(A-\lambda I)\end{aligned}$$

وهذا يعني أن لـــ A و B كثير حدود مميز واحد.

استنتاج 2-13:

يكون للمصفوفات المتشابهة نفس الطيف.

تعريف 2-14:

لتكن λ قيمة ذاتية للمؤثر الخطي T ولتكن A مصفوفة ما ممثلة لـــ T نسمي عدد المرات التي يتكرر فيها الجذر $x=\lambda$ في المعادلة $det(A-xI)=0$ بالجداء الجبري لـــ λ.

واضح أن الجداء الجبري مستقل عن اختيار المصفوفة A الممثلة لـــ T.

مثال 1:

أوجد الجداء الجبري للقيمتين الذاتيتين $\lambda_1 = -2$ و $\lambda_3 = 2$ في المثال (2) من النظرية (4-2).

الحل:

وجدنا أن كثير الحدود المميز للمصفوفة A في المثال المذكور هو:

$$det(A - xI) = (x+2)^2(x-2)^2$$

وبالتالي فإن الجداء الجبري لكل من القيمتين الذاتيتين λ_3 و λ_1 يساوي 2 وبموازنة الجداء الجبري والهندسي لكل منهما نجد أنهما متساويان من أجل $\lambda_1 = 2$ وأما من أجل $\lambda_3 = 2$ فالجداء الجبري لها يزيد عن جداءها الهندسي بمقدار واحد.

نظرية 2-15:

لا يمكن للجداء الهندسي لقيمة ذاتية ما أن يزيد عن جداءها الجبري.

البرهان:

نفرض أن r هو الجداء الهندسي للقيمة الذاتية λ للمؤثر الخطي T على V ولتكن $\{ v_1, v_2, \dots, v_r \}$ قاعدة للفضاء المميز V_λ. عندئذٍ يمكن توسيع هذه القاعدة إلى قاعدة $A = \{ v_1, v_2, \dots, v_r, \dots, v_n \}$ للفضاء المتجه V وتكون مصفوفة T بالنسبة للقاعدة A من الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots\cdots & 0 & a_{1,r+1} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda & \cdots\cdots & & a_{2,r+1} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda & a_{r,r+1} & & a_{r,n} \\ \vdots & \vdots & & & . & & \\ 0 & 0 & & 0 & a_{n,r+1} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ويكون كثير الحدود المميز لـ A:

$$det(A-xI)=(\lambda-x)^r\begin{bmatrix} a_{r+1,r+1}-x & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn}-x \end{bmatrix}$$

واضح أن تكرار الجذر $x=\lambda$ في المعادلة $det(A-xI)=0$ يساوي على الأقل r وهـــذا يعني أن الجداء الهندسي لـــ λ لا يمكن أن يزيد عن جداءها الجبري.

مثال 2:

ليكن T مؤثراً خطياً على فضاء كثيرات الحدود P_2 التي لا تزيد درجتها عن 2 والمعرفة على R بحيث أن:

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2)=(-4a_0-a_1-a_2)+(4a_0+2a_2)x+(2a_0+a_1-a_2)x^2$$

أوجد الجداء الهندسي والجبري لكل قيمة ذاتية لـــ T.

الحل:

سنأخذ القاعدة :

$$\mathbf{A}=\{\ 1,1+x,1+x+x^2\ \}$$

في P_2، ثم نوجد مصفوفة T بالنسبة لـــ $\mathbf{A}$ كما يلي:

$$T(1)=-4+4x+2x^2=(-8)(1)+2(1+x)+2(1+x+x^2)$$

$$T(1+x)=-5+4x+3x^2=(-9)(1)+1(1+x)+3(1+x+x^2)$$

$$T(1+x+x^2)=-6+6x+2x^2=(-12)(1)+4(1+x)+2(1+x+x^2)$$

إذن مصفوفة T بالنسبة لـــ A هي:

$$A=\begin{bmatrix} -8 & -9 & -12 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن كثير الحدود المميز لـ A هو:

$$det(A-xI)=\begin{bmatrix}-8-x & -9 & -12\\ 2 & 1-x & 4\\ 2 & 3 & 2-x\end{bmatrix}=-(x+1)(x+2)^2$$

إذن القيم الذاتية لـ T و A هي $\lambda_1=-1$ و $\lambda_2=-2$.

والجداء الجبري لـ λ_2 يساوي 2 و الجداء الجبري لـ λ_1 يساوي الواحد.

أما بالنسبة للجداء الهندسي للقيمة الذاتية $\lambda_2=2$ فنأخذ جملة المعادلات المتجانسة $(A+2I)X=0$ والتي تكتب بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix}-6 & -9 & -12\\ 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

وبإجراء العمليات الأولية على أسطر المصفوفة الموسعة في هذه الجملة نحصل على المصفوفة المختزلة الشكل بالأسطر التالية:

$$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

إذن حل الجملة السابقة يكون من الشكل $x_1=-\frac{3}{2}x_2-2x_3$ حيث x_2 و x_3 متحولان كيفيان من R .

وبالتالي إحداثيات أي متجه في الفضاء المميز V_{-2} يعطى بالمساواة:

$$X=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}x_2-2x_3\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

وهذا يعني أن عدد أبعاد الفضاء المميز الجزئي V_{-2} يساوي 2 .

ولنأخذ $x_2=-2$ و $x_3=0$ فنحصل على المصفوفة الإحداثية الآتية:

$$X_1=\begin{bmatrix}3\\-2\\0\end{bmatrix}$$

ولنأخذ $x_2=0$ و $x_3=-1$ فنحصل على المصفوفة الإحداثية الآتية:

$$X_2=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}$$

ويكون المتجهان الموافقان للمصفوفتين الإحداثيتين X_2 و X_1 في القاعدة A هما:

$$3(1)+(-2)(1+x)=1-2x$$

$$2(1)+(-1)(1+x+x^2)=1-x-x^2$$

إذن المتجهان $\{1-2x, 1-x-x^2\}$ يشكلان قاعدة لـــ V_{-2}.

ومن أجل القيمة الذاتية $\lambda=-1$ تأخذ جملة المعادلات المتجانسة $(A+I)X=0$ الشـــكل التالي:

$$\begin{bmatrix}-7&-9&-12\\2&2&4\\2&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة المختزلة الشكل بالأسطر الناتجة عن المصفوفة الموسعة $[A+I,0]$ لهذه الجملة هي:

$$\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

وينتج من ذلك أن أي متجه من الفضاء المحيز الجزئي V_{-1} يعطى بالمساواة:

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}-3\\1\\1\end{bmatrix}$$

وباختيار $x_3 = -1$ نجد أن:

$$X = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

والمتجه الموافق لهذه المصفوفة الإحداثية في A هو:

$$3(1)+(-1)(1+x)-(1+x+x^2)=1-2x-x^2$$

إذن المتجه $\{1-2x-x^2\}$ يشكل قاعدة لـــ V_{-1}.

وهكذا وجدنا أنه من أجل القيمة الذاتية $\lambda = -2$ يكون جداءها الجبري مساوياً جـداءها الهندسي ويساوي 2 و $\{1-2x, 1-x-x^2\}$ قاعدة للفضاء المميز V_{-2}.

وأما من أجل القيمة الذاتيـة $\lambda = -1$ فـإن كـل مـن جـداءها الجـبري والهندسـي يساوي 1 و $\{1-2x-x^2\}$ قاعدة لـــ V_{-1}.

2-3- التمثيل بالمصفوفات القطرية:

إن أبسط تمثيل لمؤثر خطي بمصفوفة هو عندما تكون هذه المصفوفة قطرية. فإذا كانـت cI_n المصفوفة الممثلة للمؤثر الخطي T بالنسبة للقاعدة $A=\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ في الفضاء المتجـه V، عندئذ يكون $T(v_i)=cv_i$ من أجل كل $i=1,2,..,n$.

ويتحقـق هـذا أيضـاً مـن أجـل كـل متجـه $v=\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ مـن V لأن $T(v)=\sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i c v_i = cv$ وهذا يعني أن c قيمة ذاتية لـــ T وكل متجه غـير صفري في V هو متجه ذاتي موافق لـــ c.

نظرية 2-16:

إذا كان T مؤثراً خطياً على V، فإن الشرط اللازم الكافي لكي يمثل T بمصفوفة قطرية هو أن توجد قاعدة لـــ V مؤلفة كلياً من المتجهات الذاتية.

البرهان:

نفرض $A=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ قاعدة في V بحيث أن كل v_i متجه ذاتي لـ T موافق لقيمة ذاتية λ_i لـ T. عندئذٍ يكون $T(v_i)=\lambda_i v_i$ وبالتالي فإن مصفوفة T بالنسبة لـ A هي:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots\dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

وهذا يعني أنه تم تمثيل T بمصفوفة قطرية بالنسبة للقاعدة A وبالعكس إذا كانت مصفوفة T بالنسبة للقاعدة $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ في V قطرية من الشكل:

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots\dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & d_n \end{bmatrix}$$

عندئذٍ يكون $T(v_i)=d_i v_i$ وبالتالي يكون كل d_i قيمة ذاتية لـ T موافقة لمتجه ذاتي v_i لـ T.

استنتاج 2-17 :

إذا كان T ممثلاً بمصفوفة قطرية فكل العناصر القطرية قيم ذاتية لـ T كما هو واضح من الجزء الأخير من برهان النظرية السابقة.

استنتاج 2-18:

إذا كان T يملك n قيمة ذاتية مختلفة من F فإنه يمكن تمثيل T بمصفوفة قطرية.

البرهان:

نفرض أنه يوجد n قيمة ذاتية مختلفة مثنى مثنى لـ T مثل $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ من F.

ولنفرض $A=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ مجموعة مؤلفة من n متجه من V بحيث إن A تحوي متجه ذاتي واحد فقط من المتجهات الموافقة لكل قيمة λ_i حيث $i=1,2,\dots,n$ فتكون متجهات A

مستقلة خطياً بحسب النظرية (2-8) وبالتالي فإن A تشكل قاعدة الفضاء المتجه V الـــذي عدد أبعاده n .

استنتاج 2-19:

إذا كانت A مصفوفة من القياس $n \times n$ على F وكانت A تملك n قيمة ذاتية مـــن F مختلفة مثنى مثنى، عندئذٍ تتشابه A مع مصفوفة قطرية على F .

البرهان: نفرض A مصفوفة من القياس $n \times n$ على F وليكن لها n قيمة ذاتيـــة مـــن F مختلفة مثنى مثنى، عندئذٍ لكل مؤثر خطي T تمثله A قيماً ذاتية مختلفة مثنى مثنى، عددها n قيمة ذاتية (نظرية 2-4) وبالتالي يمكن تمثيل هذا المؤثر الخطي بمصفوفة قطرية وتكون مصفوفته القطرية مشابهة لـــ A (بحسب التعريف 2- 11 والنظرية 1- 17).

نظرية 2-20:

نفرض أن جميع القيم الذاتية للمؤثر الخطي من F . عندئذٍ يمكن تمثيل كل مؤثر خطـــي T بمصفوفة قطرية إذا وفقط إذا تساوى الجداء الجبري و الجداء الهندسي لكل قيمة ذاتية لـــ T .

البرهان:

ليكن T مؤثراً خطياً على الفضاء المتجه V حيث $dim V = n$ ؛ بـــالرجوع إلى النظريـــة (2- 16) يكفي أن نبرهن على أنه توجد قاعدة لـــ V مؤلفة من المتجهات الذاتية لـــــ T إذا وفقط إذا كان الجداء الجبري و الجداء الهندسي لكل قيمة ذاتية لـــ T متساويين.

بحسب الفرض فإن جميع القيم الذاتية لـــ T من F . نفرض أن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ هي القـــيم الذاتية لـــ T المختلفة مثنى مثنى وليكن $n_i = dim(V_{\lambda i})$ (الجداء الهندسي لـــ λ_i) وليكن m_i الجداء الجبري لـــ λ_i .

بما أن m_i هو الجداء الجبري للقيمة الذاتية λ_i ، إذن λ_i جذر مكرر m_i مرة لكثير الحـــدود المميز $det(A-xI)$ الذي درجته n وبالتالي $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$.

وبالرجوع إلى النظرية (2-15) نجد أن $0 < n_i \le m_i$ من أجل كل i وبالتالي تتحقق المساواة $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ إذا وفقط إذا كان $n_i = m_i$ من أجل كل i حيث $i = 1,2,...,r$.

لنفرض الآن $B_i = \{ u_{i1}, u_{i2}, ..., uin_i \}$ قاعدة لـ V_{λ_i} من أجل كل $i = 1,...,r$ ولنأخذ الاجتماع $B = \{ u_{11},...,u_{1n_1}, u_{21},...,u_{2n_2},...,u_{r1},...,u_{rn_r} \}$ فيكون عدد المتجهات في المجموعة B مساوياً $\sum_{i=1}^{r} n_i$ وفق ذلك فإن المجموعة B تولد المجموع $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + ... + V_{\lambda_r}$.

ولكن $\sum_{i=1}^{r} V_{\lambda i}$ مجموع مباشر (بحسب الاستنتاج 2-10) وبالتالي :

$$dim(\sum_{i=1}^{r} V_{\lambda i}) = \sum_{i=1}^{r} dim(V_{\lambda i}) = \sum_{i=1}^{r} n_i$$

إذن B قاعدة لـ $\sum_{i=1}^{r} V_{\lambda i}$.

نفرض الآن أنه توجد قاعدة $\{ v_1, v_2, ..., v_n \}$ في V مؤلفة من المتجهات الذاتية لـ T عندئذ يكون كل v_i في فضاء مميز ما $V_{\lambda i}$ وبالتالي v_i مرتبط بمتجهات B. وهذا يعني أن B تولد الفضاء المتجه V وبالتالي فإن B تحوي n عنصراً لأن عناصر B مستقلة خطياً.

إذن $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ وبالتالي فإن $n_i = m_i$ من أجل $i = 1,2,...,r$.

وبالعكس نفرض $n_i = m_i$ من أجل $i = 1,2,...,r$ عندئذٍ $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ وبالتالي فإن عدد عناصر B يساوي $\sum_{i=1}^{r} n_i$ أي أن عدد عناصر B يساوي n ومعلوم أن عناصر B مستقلة خطياً إذن تشكل B قاعدة لـ V وبما أن B مؤلفة من متجهات ذاتية لـ T فيكون تم المطلوب.

تعريف 2-21:

سنرمز للمصفوفة القطرية $D = [d_{ij}]_{n \times n}$ حيث $d_{ij} = 0$ من أجل جميع $i \ne j$ و $d_{ii} = \lambda_i$ بالشكل $D = diag\{ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \}$

لقد درسنا في الفصل الأول مسألة إيجاد مصفوفة قابلة للقلب P بحيث تكون $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية ونعود الآن إلى نفس المسألة بأن نجد أعمدة P بشكل مباشر.

لقد وجدنا أن P هي مصفوفة الانتقال من القاعدة A إلى القاعدة A' المؤلفة من المتجهات الذاتية لـ T. إذن المسألة هي إيجاد P القابلة للقلب بحيث أن:

$$P^{-1}AP = D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$$

أو:

$$AP = PD$$

فإذا كانت $A = [\,a_{ij}\,]_{n\times n}$ و $P = [\,p_{ij}\,]_{n\times n}$ فإن العنصر الواقع على السطر i والعمود j في المصفوفة AP هو $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}p_{kj}$ والعنصر المناظر له في PD هو $\lambda_j p_{ij}$. فإذا ثبتنا j نجد أن:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}p_{kj} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}p_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}p_{kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1j}\lambda_1 \\ p_{2j}\lambda_1 \\ \vdots \\ p_{nj}\lambda_1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix}$$

ولكن الطرف الأيسر من هذه المعادلة هو الجداء التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix} = AP_j$$

حيث إن P_j هو العمود ذو الرقم j من المصفوفة P وبذلك نحصل على جملة المعادلات التالية:

$$AP_j = \lambda_j P_j \qquad \text{و} \qquad j = 1,2,...,n$$

وهذه الجملة من المعادلات تكافئ المعادلة التالية:

$$P^{-1}AP = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$$

مثال:

المطلوب إيجاد مصفوفة حقيقية قابلة للقلب P بحيث إن المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية علماً أن:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -8 & -4 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

من السهل إيجاد المعادلة المميزة لـــ A وذلك بفك المعين في الطرف الأيسر كما يلي:

$$|A - xI| = 0 \Rightarrow (x-3)^2(x-1)(x+1) = 0$$

لنأخذ الجذر المميز المكرر لـــ A وهو $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ ونبحث عن الجداء الهندسي لهذه القيمة الذاتية فإذا كان أقل من 2 فلا توجد المصفوفة P التي نبحث عنها ولإيجاد الجداء الهندسي المتعلق بـــ $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ نكتب المعادلة المصفوفية التالية:

$$(A - 3I)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ -8 & -4 & -8 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالحساب المباشر نجد حل جملة المعادلات السابقة وهو :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وهذا يعني أن القيمة الذاتية $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ تملك جداء هندسي مساوي لـ 2 وبالتالي فإن:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad و \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ومن السهل التحقق أن العمودين P_1, P_2 مستقلان خطياً وبحل جملة المعادلة المتجانسة $(A - \lambda I)X = 0$ من أجل القيمتين الذاتيتين $\lambda_3 = 1$ و $\lambda_4 = -1$ بنفس الطريقة السابقة نجد من أجل القيمة الذاتية $\lambda_3 = 1$ العمود:

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ونجد من أجل القيمة الذاتية $\lambda_4 = -1$ العمود:

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

إذن المصفوفة المطلوبة هي:

$$P=[P_1,P_2,P_3,P_4]=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -6 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وتحقــق P المعادلــة $P^{-1}AP=diag\{3,3,1,-1\}$ ومــن الممكــن التحقــق مــن أن $AP=Pdiag\{3,3,1,-1\}$.

هذا ويمكن إيجاد المصفوفة:

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ -3 & -2 & -\frac{5}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

و التحقق من صحة المساواة :

$$P^{-1}AP=diag\left\{\ 3,3,3,-1\ \right\}$$

الفصل الثالث

التوابع بمتحولات متجهة

3-1- الصور (الأشكال) ثنا – خطية:

تعريف 3-1:

ليكن U و V فضائين خطيين معرفين على الحقل F. يدعى التطبيق:

$$f : U \times V \to F$$
$$(u,v) \mapsto f(u,v)$$

الذي يحقق الشرطين:

$$\text{(i)} \quad f(a_1u_1 + a_2u_2, v) = a_1 f(u_1 v) + a_2 f(u_2, v)$$
$$\text{(ii)} \quad f(u, b_1v_1 + b_2v_2) = b_1 f(u, v_1) + b_2 f(u, v_2)$$

صورة ثنا – خطية على U و V.

ويقال عن التابع f الذي يحقق الشرطين (i) و (ii) بأنه خطي في كل من متحوليه.

وهذا ويمكن دمج الشرطين (i) و (ii) بالشرط التالي:

$$\text{(iii)} \quad f(a_1u_1 + a_2u_2, b_1v_1 + b_2v_2) = a_1b_1 f(u_1, v_1) + a_1b_2 f(u_1 v_2) + a_2b_1 f(u_2, v_1) + a_2b_2 f(u_2, v_2)$$

ويمكن تعميم شرط الخطية (iii) إلى أي عددين صحيحين موجبين m,n ويصبح شرط الخطية المعمم كما يلي:

$$\text{(iv)} \quad f\left(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i, \sum_{j=1}^{n} b_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j f(u_i, v_j)$$

إذن الشرط اللازم الكافي ليكون التابع:

$$f : U \times V \to F$$
$$(u,v) \mapsto f(u,v)$$

صورة ثنا – خطية على V,U هو أن يحقق الشرط (iv) من أجل جميع الثنائيات (u_i, v_j) من $U \times V$ وجميع العناصر a_i, b_j من F.

تعريف 3-2:

إذا كانت $\mathsf{A} = \{ u_1, u_2, ..., u_m \}$ $\mathsf{B} = \{ v_1, v_2, ..., v_n \}$ قاعدتين للفضائين الخطيين V,U على الترتيب وكانت f صورة ثنا – خطية على V,U فندعو المصفوفة $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ حيث $a_{ij} = f(u_i, v_j)$ من أجل $i = 1,2,...,m$ و $j = 1,2,...,n$ بمصفوفة f بالنسبة للقاعدتين A, B.

أو نقول عن المصفوفة A بأنها تمثل f بالنسبة للقاعدتين A, B.

نظرية 3-3:

إذا كان u متجهاً ما من U سنرمز لمصفوفته الإحداثية بالنسبة للقاعدة A بالرمز $X = [x_1, x_2, ..., x_m]^T$ وإذا كان v من V سنرمز لمصفوفته الإحداثية بالنسبة للقاعدة B بالرمز $Y = [y_1, y_2, ..., y_n]^T$. عندئذ يكون الشرط اللازم الكافي لتكون $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ مصفوفة للصورة ثنا – خطية f بالنسبة للقاعدتين B, A هو أن تتحقق المساواة التالية:

$f(u,v) = X^T A Y$ من أجل جميع الثنائيات (u,v) من $U \times V$.

البرهان:

نفرض أولاً أن $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ مصفوفة للصورة ثنا – خطية f بالنسبة للقاعدتين A, B فينتج مباشرة من التعريف أن $a_{ij} = f(u_i, v_j)$ من أجل كل $i = 1,2,...,m$ وكل $j = 1,2,...,n$.

وبما أن Y, X هما المصفوفتان الإحداثيتان للمتجهين v, u في القاعدتين A, B على الترتيب إذن:

$$U = \sum_{i=1}^{m} x_i u_i \qquad v = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$$

وبتطبيق الشرط (iv) نجد أن:

$$f(u,v)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j f(u_i,v_j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j a_{ij}=\sum_{i=1}^{m}x_i(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j)$$

واضح أن العنصر $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_i$ يقع على السطر i في المصفوفة AY التي قياسها $m\times 1$ وبالتالي يمكن أن نكتب المساواة الأخيرة كما يلي:

$$f(u,v)=\sum_{i=1}^{m}x_i(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j)=X^T AY$$

نفرض ثانياً أن $f(u,v)=X^T AY$ من أجل جميع الثنائيات (u,v) من $U\times V$ ولنبرهن أن A مصفوفة f بالنسبة للقاعدتين A,B . ومن أجل ذلك يكفي أن نأخذ الحالة الخاصة $u=u_i$ و $v=v_j$. عندئذ تكون المصفوفتان الإحداثيتان للمتجهين v,u على الترتيب هما:

$$X=[\delta_{1i},\delta_{2i},...,\delta_{mi}]^T \qquad \text{و} \qquad \delta_{ij}=\begin{Bmatrix}1 \ if \ \ i=j\\ 0 \ if \ \ i\neq j\end{Bmatrix}$$

$$Y=[\delta_{1j},\delta_{2j},...,\delta_{nj}]^T$$

وبتعويض $u=u_i$ و $v=v_j$ نجد من الفرض أن:

$$f(u_i,v_j)=X^T AY=[\delta_{1i},\delta_{2i},...,\delta_{mi}]\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{n}a_k\delta_{kj}\\ .\\ .\\ \sum_{k=1}^{n}a_{mk}\delta_{kj}\end{bmatrix}=[\delta_{1i},\delta_{2i},...,\delta_{mi}]\begin{bmatrix}a_{1j}\\ .\\ .\\ .\\ a_{mj}\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{m}\delta_{ki}a_{ij}$$

إذن $A=\left[\ a_{ij}\ \right]_{m\times n}$ مصفوفة f بالنسبة للقاعدتين A,B.

تكون الصورتان ثنا – خطيتان f و g متكافئتين (بحسب التعريف 3- 2 والنظرية 3-3) عندما يكون لهما نفس المصفوفة بالنسبة لقاعدتين مفروضتين A,B في V,U على الترتيب.

وتوضح النظرية التالية أثر تغير القاعدتين A,B في V,U على الترتيب على عبارة الصورة ثنا – خطية f المعرفة على V,U.

نظرية 3-4:

إذا كانت A مصفوفة الصورة ثنا – خطية f بالنسبة للقاعدتين A,B في الفضائين المتجهين V,U على الترتيب وإذا كانت P مصفوفة الانتقال من القاعدة A إلى القاعدة A' في U وكانت Q مصفوفة الانتقال من القاعدة B إلى القاعدة B' في V، فإن مصفوفة f بالنسبة للقاعدتين الجديدتين B',A' في V,U على الترتيب هي: $P^T AQ$.

البرهان:

إذا كان u متجهاً ما من الفضاء المتجه U سنرمز بـــ X و X' لمصفوفتيه الإحداثيتين في القاعدتين A و A' على الترتيب وإذا كان v متجهاً ما من V سنرمز بـــ Y و Y' لمصفوفتيه الإحداثيتين في القاعدتين B و B' على الترتيب فنجد من النظرية (1-16) إنّ $X = PX'$ و $Y = QY'$.

ونجد من الشرط اللازم في النظرية (3 .3) أن:

$$f(u,v) = X^T AY = (PX')^T A(QY') = (X')^T (P^T AQ)Y'$$

وهذا يعني بحسب الشرط الكافي في النظرية (3 .3) أن $P^T AQ$ مصفوفة للصورة f بالنسبة للقاعدتين B',A'.

استنتاج 3-5 :

الشرط اللازم الكافي لكي تمثل المصفوفتان B, A نفس الصورة ثنا – خطية f المعرفة على U و V هو أن تكون المصفوفتان B, A متكافئتين.

ندعو رتبة المصفوفة A التي تمثل الصورة ثنا – خطية f برتبة هذه الصورة.

استنتاج 3-6 :

إذا كانت f صورة ثنا – خطية معرفة على الفضائين المتجهين U و V فـــيمكن تمثيل f بمصفوفة قطرية D_r (حيث أن العناصر الـــ r الأولى على قطرها الـــرئيس تساوي الواحد وبقية العناصر الأخرى تساوي الصفر) وذلـــك باختيـــار قاعـــدتين مناسبتين لـــ U و V.

مثال 1 :

لتكن f صورة ثنا – خطية معرفة على الفضـــائين الخطـــين $U=R^3$ و $V=R^2$ كما يلي:

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2))=-7x_1y_1-10x_1y_2-2x_2y_1-3x_2y_2+12x_3y_1+17x_3y_2$$

1– أوجـــد المصـــفوفة $A=\left[\,a_{ij}\,\right]_{3\times2}$ للصـــورة f بالنســـبة للقاعـــدتين $A=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ في U و $B=\{(1,-1),(2,-1)\}$ في V.

2– احسب القيمة $f((2,3,1),(0,-1))$ مستعيناً بالمصفوفة A.

3– أوجد قاعدة A' في U وقاعدة B' في V بحيث تكون المصفوفة D_r المعرفة بالاستنتاج (3-6) هي مصفوفة الصورة f.

لإيجاد المصفوفة $A=\left[\,a_{ij}\,\right]$ نحسب جميع القيم $a_{ij}=f(u_i,v_j)$ حيث $i=1,2,3$ و $j=1,2$.

$$a_{11}=f((1,0,0),(1,-1))=-7(1)(1)-10(1)(-1)-2(0)(1)-3(0)(-1)+12(0)(1)+17(0)(-1)=3$$

وبالطريقة نفسها نجد بقية القيم:

$$\begin{aligned}
a_{21}&=f((1,1,0),(1,-1))=4\\
a_{31}&=f((1,1,1),(1,-1))=-1\\
a_{12}&=f((1,0,0),(2,-1))=-4\\
a_{22}&=f((1,1,0),(2,-1))=-5\\
a_{32}&=f((1,1,1),(2,-1))=2
\end{aligned}$$

إذن:

$$A=\begin{bmatrix}3&-4\\4&-5\\-1&2\end{bmatrix}$$

2) نحسب $f((2,3,1),(0,-1))$ بالاستعانة بالمصفوفة A بأن نكتب $(2,3,1)$ كعبارة خطية في A و $(0,-1)$ كعبارة خطية في B على الشكل التالي:

$$(2,3,1)=(-1)(1,0,0)+(2)(1,1,0)+(1)(1,1,1)$$

$$(0,-1)=2(1,-1)+(-1)(2,-1)$$

إذن:

$X^T=[-1,2,1]$ و $Y^T=[2,-1]$ وبالتعويض في المساواة $f(u,v)=X^T AY$

نجد أن:

$$f((2,3,1),(0,-1))=[-1 \quad 2 \quad 1]\begin{bmatrix}3 & -4\\ 4 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}=12$$

3) من أجل المصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 4 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

نبحث عن مصفوفتين قابلتين للقلب P,Q بحيث إنّ $D_r=P^T AQ$ لذلك نقوم بالعمليات الأولية المناسبة على أعمدة المصفوفة $\begin{bmatrix}A\\ I_2\end{bmatrix}$ لنحصل على المصفوفة $\begin{bmatrix}A'\\ Q\end{bmatrix}$ حيث $A'=AQ$ هي المصفوفة المختزلة الشكل بالأعمدة للمصفوفة A كما يلي:

$$\begin{bmatrix}A\\ I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 4 & -5\\ -1 & 2\\ - & -\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & -4\\ -1 & -5\\ 1 & 2\\ - & -\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\\ -1 & -2\\ - & -\\ -1 & -4\\ -1 & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -3 & 2\\ - & -\\ -5 & 4\\ -4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A'\\ Q\end{bmatrix}$$

وبإجراء العمليات الأولية المناسبة على أسطر المصفوفة $[A',I_3]$ نحصل على $[D_r,P^T]$ حيث إنّ $D_r=P^T A'=P^T AQ$

$$[A',I_3]=\begin{bmatrix}1 & 0 & . & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & . & 0 & 1 & 0\\ -3 & 2 & . & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & . & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & . & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & . & 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & . & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & . & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & . & 3 & -2 & 1\end{bmatrix}=[D_r,P^T]$$

وبذلك حصلنا على المصفوفتين:

$$P^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad Q = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

نعتبر P مصفوفة انتقال من القاعدة A إلى القاعدة A' في U ونعتبر Q مصفوفة الانتقال من القاعدة B إلى القاعدة B' في V فنجد من المساواة $u'_i = \sum_{i=1}^{3} P_{ij} u_j$ حيث $j = 1,2,3$ أن:

$$u'_1 = (1,0,0) \text{ و } u'_2 = (1,1,0) \text{ و } u'_3 = (2,-1,1)$$

وبالمثل نجد من المساواة $v'_j = \sum_{i=1}^{2} q_{ij} v_i$ حيث $j = 1,2$ ، أن :

$v'_1 = (-13,9)$ و $v'_2 = (10,-7)$.

إذن:

$$A' = \{ (1,0,0),(1,1,0),(2,-1,1) \}$$

و :

$$B' = \{ (-13,9),(10,-7) \}$$

2-3- الصور ثنا – خطية المتناظرة :

لتكن f صورة ثنا – خطية على الفضائين الخطيين U و V ولنأخذ الحالة الخاصة $V = U$ عندئذ نقول إن f صورة ثنا – خطية على V. ولإيجاد مصفوفة f في هذه الحالة نعتبر القاعدة A في U هي نفس القاعدة B في V وتكون $a_{ij} = f(u_i, u_j)$ عناصر المصفوفة الممثلة لـ f بالنسبة للقاعدة A.

سنفرض في الفقرة التالية أن $U = V$ و أن عدد أبعاد V على الحقل F يساوي n.

نظرية 3-7 :

لتكن A و B مصفوفتين مربعتين من القياس $n \times n$ على الحقل F.

عندئذ المصفوفة B مشابهة للمصفوفة A على F إذا و فقط إذا كانت A و B تمثلان نفس الصورة ثنا–خطية f على V.

البرهان:

لتكن A و B مصفوفتين مربعتين من القياس $n\times n$ على F ثم لتكن A مصـــفوفة الصورة ثنا – خطية f على V بالنسبة للقاعدة $\mathcal{A}$.

فإذا كانت B تشابه A على F عندئذ توجد مصفوفة P قابلة للقلب عناصرها من F بحيث إنّ:

$$B = P^T AP$$

وبما أن P مصفوفة قابلة للقلب و عناصرها من F إذن يمكن اعتبار P مصـــفوفة انتقال من القاعدة $\mathcal{A}$ إلى قاعدة أخرى $\mathcal{A}'$ في V. وبتطبيق النظرية (3-4) باعتبار أن $U=V$ و $\mathcal{A}=\mathcal{B}$ و $Q=P$ و $\mathcal{A}'=\mathcal{B}'$ نجد أن $B=P^T AP$ هي مصـــفوفة f بالنسبة للقاعدة $\mathcal{A}'$.

وبالعكس نفرض أن B مصفوفة الصورة ثنا – خطية f على V بالنسبة لقاعدة ما $\mathcal{A}'$، فإذا كانت P مصفوفة الانتقال من القاعدة $\mathcal{A}$ إلى القاعدة $\mathcal{A}'$، فإن $P^T AP$ هي مصفوفة f بالنسبة للقاعدة $\mathcal{A}'$ (بحسب النظرية 3-4).

ولكن مصفوفة الصورة ثنا –خطية f بالنسبة لقاعدة مفروضة تكون معرفة بشـــكل وحيد وبالتالي فإنه يجب أن تتحقق المساواة:

$$B = P^T AP$$

وبما أن P قابلة للقلب وعناصرها من F لأنها مصفوفة انتقال من القاعـــدة $\mathcal{A}$ إلى قاعدة أخرى $\mathcal{A}'$ في V، إذن B تشابه A على F.

تعريف 3-8 :

نقول عن الصورة ثنا – خطية f على V متناظرة إذا كان $f(u,v)=f(v,u)$ من أجل أي متجهين u و v من V.

نظرية 3-9 :

الشرط اللازم الكافي لتكون الصورة ثنا – خطية f على V متناظرة هـــو أن كـــل مصفوفة ممثله لـــ f متناظرة.

البرهان:

نفرض f متناظرة ولتكن $A=\left[\, a_{ij} \,\right]$ مصفوفة ممثلة لـــــ f بالنســبة للقاعـــدة $\mathbb{A}=\left\{\, u_1,\dots,u_n \,\right\}$ عندئذٍ يكون $a_{ij}=f(u_i,u_j)=f(u_j,u_i)=a_{ji}$ وهذا يعني أن A مصفوفة متناظرة.

وبالعكس إذا كانت f ممثلة بمصـــفوفة متنـــاظرة $A=\left[\, a_{ij} \,\right]$ بالنســـبة لقاعـــدة $\mathbb{A}$ في V.

وإذا كان u,v متجهين كيفيين في V بحيث إن X و Y مصفوفاتهما الإحـــداثيتين بالنسبة للقاعدة $\mathbb{A}$ على الترتيب، فإن:

$$f(v,u)=Y^T AX \qquad \text{و} \qquad f(u,v)=X^T AY \qquad \text{(بحسب النظرية 3-3)}$$

وبما أن المصفوفة $Y^T AX$ تحوي عنصر واحد، إذن:

$Y^T AX=(Y^T AX)^T$ وبالتعويض في عبارة $f(v,u)$ السابقة نجد:

$$f(v,u)=(Y^T AX)^T=X^T A^T Y=X^T AY=f(u,v)$$

لأن $A^T=A$ (حيث إن A متناظرة) وهذا يبرهن أن f متناظرة.

نظرية 3-10 :

ليكن F حقلاً بحيث أن $1+1\neq 0$ في F عندئذٍ كل مصفوفة متنـــاظرة A مـــن القياس $n\times n$ تكون متشابهة مع مصفوفة قطرية على F .

البرهان:

نجري البرهان بالاستقراء بالنسبة لـــ n .

واضح أن النظرية صحيحة من أجل $n=1$.

نفرض الآن أن النظرية صحيحة من أجل جميع المصفوفات المتناظرة من القياس $k\times k$ على F حيث $n>k$ ولتكن A مصفوفة من القياس $(k+1)\times(k+1)$ علـــى F ثم لتكن $\mathbb{A}=\left\{\, u_1,u_2,\dots,u_{k+1} \,\right\}$ قاعدة للفضاء المتجه F^{k+1} .

ولنفرض f صورة ثنا – خطية متناظرة على F^{k+1} بحيث إن A مصفوفتها بالنسبة للقاعدة $\mathbb{A}$. فإذا كانت $A=0$ فلا شيء يحتاج إلى برهان أما إذا كانت $A\neq 0$ فإن

أحد عناصرها مختلف عن الصفر وليكن مثلاً $a_{rs} \neq 0$. إذن $a_{rs} = f(u_r, u_s) \neq 0$

سنبرهن أنه يوجد المتجه v_1 من F^{k+1} بحيث أن $d_1 = f(v_1, v_1) \neq 0$. فإذا كان $f(u_r, u_r) \neq 0$ نختار $v_1 = u_r$ فيتحقق المطلوب. أما إذا كان $f(u_r, u_r) = 0$ و $f(u_s, u_s) \neq 0$ فنختار $v_1 = u_s$.

وأما إذا كان $f(u_r, u_r) = f(u_s, u_s) = 0$ فنجد أن:

$$f(u_r + u_s, u_r + u_s) = 2f(u_r, u_s) = 2a_{rs} \neq 0$$

وبالتالي يمكننا أن نختار $v_1 = u_r + u_s$ فيحقق المطلوب.

وبما أن $v_1 \neq 0$ فيمكننا توسيع هذه المجموعة $\{ v_1 \}$ إلى قاعدة $B = \{ v_1, v_2, \ldots, v_{k+1} \}$ في الفضاء المتجه F^{k+1} ولنشكل من هذه القاعدة مجموعة العناصر $A' = \{ u'_1, u'_2, \ldots, u'_{k+1} \}$ كما يلي:

$$u'_1 = v_1$$

$$u'_2 = v_2 - \frac{f(u'_1, v_2)}{d_1} u'_1$$

.

.

$$u'_{k+1} = v_{k+1} - \frac{f(u'_1, v_{k+1})}{d_1} u'_1$$

واضح أنه تم الحصول على A' من B بموجب متتالية من العمليات الأولية على المتجهات لهذا فإن A' قاعدة في الفضاء المتجه F^{k+1} .

نرمز بـ A_1 لمصفوفة f بالنسبة للقاعدة A' وبما أن f متناظرة إذن A_1 متناظرة.

ونلاحظ أنه من أجل $j = 1$ يكون $f(u'_1, u'_1) = f(v_1, v_1) = d_1$.

ومن أجل $j > 1$ يكون :

$$f(u'_1, u'_j) = f\left(u'_1, v_j - \frac{f(u'_1, v_j)}{d_1} u'_1 \right) = f(u'_1, v_j) - \frac{f(u'_1, v_j)}{d_1} f(u'_1, u'_1) = 0$$

وهذا يعني أن للمصفوفة A_1 الشكل التالي:

$$A_1 = \begin{bmatrix} d_1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots + \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & A_2 \end{bmatrix}$$

حيث إن A_2 مصفوفة متناظرة من القياس $k \times k$.

فإذا كانت Q_1 مصفوفة الانتقال من القاعدة A إلى القاعدة B وإذا كانت Q_2 مصفوفة الانتقال من القاعدة B إلى القاعدة A'، فإن $P_1 = Q_1 Q_2$ مصفوفة الانتقال من A إلى A' وهي مصفوفة قابلة للقلب وتحقق المساواة $P_1^T A P_1 = A_1$ (بحسب النظرية 3-4).

وبموجب البرهان التدريجي توجد مصفوفة Q قابلة للقلب من الدرجة k بحيث أن $Q^T A_2 Q = diag\{d_2,...,d_k\}$ وبالتالي فإن المصفوفة التالية قابلة للقلب:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots + \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & Q \end{bmatrix}$$

ويكون لدينا:

$$(P_1P_2)^T A (P_1P_2) = P_2^T (P_1^T A P_1) P_2 = P_2^T A_1 P_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ \cdots & + & \cdots \\ 0 & \vdots & Q^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & \vdots & 0 \\ \cdots & + & \cdots \\ 0 & \vdots & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ \cdots & + & \cdots \\ 0 & \vdots & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & \vdots & 0 \\ \cdots & + & \cdots \\ 0 & \vdots & Q^T A_2 Q \end{bmatrix} = diag\{ d_1, d_2, ..., d_{k+1} \}$$

وهكذا وجدنا مصفوفة $P = P_1 P_2$ قابلة للقلب بحيث أن $P^T A P$ قطرية.

استنتاج (3-11):

ليكن F حقلاً ما بحيث أن $1+1 \neq 0$ في F عندئذ يمكن تمثيل كل صورة ثنا – خطية متناظرة على V بمصفوفة قطرية.

استنتاج (3-12) :

تتشابه كل مصفوفة متناظرة على حقل الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ مع مصفوفة قطرية D_r على $\mathbb{C}$ حيث إن العناصر الـ r الأولى في D_r تساوي الواحد والعناصر الأخرى مساوية للصفر.

الطريقة العملية لإيجاد المصفوفة P في النظرية (10-4) :

نرمز للعمود ذي الرقم i في P بالرمز P_i. ونأخذ المتجه u'_1 الذي يحقق $d_1 = f(u'_1,u'_1) \neq 0$ ونعتبر العمود الأول P_1 مساوياً للمصفوفة الإحداثية لـــ u'_1 بالنسبة للقاعدة A.

ثم نبحث عن متجه ثاني u'_2 يحقق الشرطين:

$$\{ u'_1,u'_2 \} \text{ مجموعة مستقلة خطياً و } f(u'_1,u'_2)=0$$

ثم نعتبر العمود الثاني P_2 مساوياً للمصفوفة الإحداثية لـــ u'_2 بالنسبة للقاعدة A.

وبحسب النظرية (3-4) نجد أن المساواة:

$$f(u'_1,u'_2)=0 \text{ تكافئ المساواة } P_1^T A P_2 = 0$$

إذن عملية البحث عن العمود الثاني P_2 في P تكافئ البحث عن :

$$P_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{n2} \end{bmatrix}$$

بحيث إن $\{P_1, P_2\}$ مجموعة مستقلة خطياً و $P_1^T A P_2 = 0$

إن إيجاد المجاهيل $x_1 = p_{12},\ x_2 = p_{22}, \dots,\ x_n = p_{n2}$ في المساواة الأخيرة يكافئ حل جملة المعادلات المتجانسة:

$$P_1^T A X = 0$$

وبنفس الطريقة نبحث عن العمود P_3 في P بحيث يحقق المعادلتين:

$$(P_1^T A)P_3 = 0 \text{ و } (P_2^T A)P_3 = 0.$$

وبحيث تكون $\{ P_1, P_2, P_3 \}$ مستقلة خطياً.

ونستمر بهذه الطريقة حتى نجد جميع أعمدة P.

مثال:

نفرض أن:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

والمطلوب إيجاد المصفوفة P التي تحقق أن $P^T AP$ قطرية.

نفرض أن f صورة ثنا – خطية على R^3 بحيث إن A مصفوفتها بالنسبة للقاعدة القانونية $\{ e_1,e_2,e_3 \}=\varepsilon_3$ في $\mathbb{R}^3$.

بما أن $a_{ii}=f(e_i,e_i)=0$ من أجل كل $i=1,2,3$ و $a_{12}=f(e_1,e_2)\neq 0$

إذن نختار $u_1'=e_1+e_2$ لأن $f(u_1',u_1')=2f(e_1,e_2)\neq 0$

نلاحظ أن المصفوفة الإحداثية لـــ u_1' في ε_3 هي $[1,1,0]^T$ لذلك نختار العمود الأول في P بالشكل $P_1=[1,1,0]^T$ فيكون :

$$P_1^T A=[1 \quad 1 \quad 2]$$

ثم نختار العمود P_2 في P بحيث يحقق المساواة $P_1^T AP_2=0$ وبحيث تكون المجموعـــة $\{ P_1,P_2 \}$ مستقلة خطياً. ومن أجل ذلك يكفي أن نأخذ العمود الثاني في P علـــى الشكل التالي:

$$P_2=[1,1,-1]^T$$

فنلاحظ أنه يحقق الشرطين المذكورين. وبالحساب المباشر نجد أن :

$$P_2^T A=[-1, \quad 1, \quad 2]$$

ونبحث عن العمود الثالث P_3 في P بحيث تكون $\{ P_1,P_2,P_3 \}$ مســـتقلة خطيـــاً وبحيث يحقق المعادلتين :

$$(P_1^T A)P_3=0 \text{ و } (P_2^T A)P_3=0$$

أو المعادلتين:

$$[1 \quad 1 \quad 2]P_3=0 \text{ و } [-1 \quad 1 \quad 2]P_3=0$$

إذن يمكن أن نختار العمود الثالث بالشكل $P_3=[0,-2,1]^T$ فنلاحظ أن P_3 يحقق المعادلتين السابقتين كما أن $\{P_1,P_2,P_3\}$ مستقلة خطياً.

إذن المصفوفة $P=[P_1,P_2,P_3]$ تعطى بالصيغة الآتية :

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

وتحقق المساواة: $P^T AP = diag\{2,-2,0\}$.

تعريف 3- 13 :

ليكن V فضاءً متجهاً على الحقل F. ندعو التطبيق q من V إلى F بصورة تربيعية على V إذا وفقط إذا وجدت صورة ثنا – خطية متناظرة f على V بحيث تحقق المساواة:

$$q(u)=f(u,u) \qquad \forall u\in V$$

نظرية 3-14 :

نفرض أن V فضاءً متجه على F بحيث أن $1+1\neq 0$ في F. فإذا كانت الصورة التربيعية q على V معرفة بالصورة ثنا – خطية المتناظرة f على V، فإن: $f(u,v)=\frac{1}{2}[\ q(u+v)-q(u)-q(v)\ ]$ من أجل جميع المتجهات v,u من V.

البرهان:

لدينا:

$$\frac{1}{2}[q(u+v)-q(u)-q(v)]=\frac{1}{2}[f(u+v,u+v)-f(u,u)-f(v,v)]$$

$$=\frac{1}{2}[f(u,u)+f(u,v)+f(v,u)+f(v,v)-f(u,u)-f(v,v)]$$

$$=\frac{1}{2}[2f(u,v)]=f(u,v)$$

تعريف 3-15:

إذا كان V فضاءً متجهاً منتهي الأبعاد على الحقل F بحيث إن $1+1\neq 0$ في الحقل F . نقول عن مصفوفة الصورة ثنا – خطية المتناظرة f المعرّفة للصورة التربيعية q بأنها مصفوفة الصورة التربيعية q بالنسبة للقاعدة $\mathcal{A}$ في V.

وينتج من ذلك أن مصفوفة الصورة التربيعية متناظرة دائماً.

وفيما يلي نصيغ النظريات المتعلقة بالصورة التربيعية q استناداً إلى مثيلاتها في الصورة ثنا – خطية المتناظرة f المعرفة لـــ q .

1– إذا كانت A مصفوفة الصورة التربيعية q بالنسبة للقاعدة $\mathcal{A}$ في V وكانت X المصفوفة الإحداثية للمتجه u من V بالنسبة للقاعدة $\mathcal{A}$، فإنه بحسب نظرية 3-3 يكون :

$$q(u) = X^T AX$$

2– إذا كانت A مصفوفة الصورة التربيعية q بالنسبة للقاعدة $\mathcal{A}$ في V وكانت P مصفوفة الانتقال من القاعدة $\mathcal{A}$ إلى القاعدة $\mathcal{A}'$، فإن $P^T AP$ هي مصفوفة q بالنسبة للقاعدة $\mathcal{A}'$ (نظرية (3-4)).

3– يمكن تمثيل كل صورة تربيعية على V بمصفوفة قطرية (استنتاج 3-11).

4– يمكن تمثيل كل صورة تربيعية على فضاء خطي عقدي بمصفوفة قطرية D_r حيث إن الـــ r عنصر الأولى مساوية للواحد وأما العناصر الأخرى فتساوي الصفر.

مبرهنة 3-16:

إذا كانت $A=\left[\ a_{ij}\ \right]$ مصفوفة حقيقية متناظرة من القياس $n\times n$ وكان $X^T AX = 0$ من أجل أي مصفوفة اختيارية $X=\left[\ x_1,x_2,\dots,x_n\ \right]^T$ عندئذ تكون A مصفوفة صفرية.

البرهان:

نفرض أن A مصفوفة تحقق الشرط $X^T AX = 0$.

وليكن $x_r = 1$ و $x_i = 0$ من أجل $i\neq r$ فنجد أن:

$$0=X^T AX=a_{rr}$$

نفرض الآن أن $r \neq s$ ثم نأخذ $x_r=1$, $x_s=1$ و $x_i=0$ من أجل i كل مختلف عن s,r فنجد أن:

$$0=X^T AX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j=a_{rs}x_r x_s+a_{sr}x_s x_r=a_{rs}+a_{sr}$$

ولكن $a_{rs}+a_{sr}=2a_{rs}$ لأن A مصفوفة متناظرة.

وينتج من ذلك أن $a_{rs}=0$.

وبما أن s,r كيفيان، إذن A مصفوفة صفرية.

تعريف 3-17 :

طالما أن الصورة التربيعية على $\mathbb{R}^n$ تكتب بالشكل:

$$q(x_1,\dots,x_n)=X^T AX$$

حيث :

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A=[a_{ij}]_{n\times n}$$ مصفوفة متناظرة.

إذن يمكننا القول بأن A تمثل الصورة التربيعية q أو نقول إن A مصفوفة q بالنسبة لـ $x_1,x_2,\dots,x_n$.

مبرهنة 3-18 :

إن مصفوفة الصورة التربيعية الحقيقية q بالنسبة لـ $x_1,x_2,\dots,x_n$ تكتب بشكل وحيد.

البرهان: نفرض A و B مصفوفتان ممثلتان للصورة التربيعية الحقيقية q بالنسبة لـ $x_1,x_2,\dots,x_n$. عندئذٍ يكون لدينا:

$$X^T AX=q(x_1,x_2,\dots,x_n)=X^T BX$$

وينتج مما سبق أن:

$X^T(A-B)X=0$ من أجل كل $X=[x_1,x_2,\dots,x_n]^T$.

ولكن المصفوفة $A-B$ متناظرة لأن كل من A و B مصفوفة متناظرة إذن بموجب المبرهنة السابقة (3-18) ينتج أن $A-B=0$ وبالتالي $A=B$ وهو المطلوب.

نعلم أن كل متجه v من $\mathbb{R}^n$ يكتب بشكل وحيد باستخدام إحداثياته بالنسبة لقاعدة ما في $\mathbb{R}^n$ وكذلك الأمر بالنسبة للصورة التربيعية الحقيقية $q(v)$ المعرفة علــى $\mathbb{R}^n$ فهي معرّفة بشكل وحيد بالنسبة لإحداثيات v.

مبرهنة 3-19:

نفرض أن $q(v)=X^T AX$ من أجل كل $v=(x_1,x_2,....,x_n)$ من $\mathbb{R}^n$ حيث إن A مصفوفة q بالنسبة لـــ $x_1,x_2,....,x_n$ ثم لتكن P مصفوفة الانتقال من القاعدة القانونية ε_n إلى القاعدة $\mathbf{A}$ ولتكن $y=[y_1,y_2,...,y_n]^T$ المصفوفة الإحداثية للمتجه v بالنسبة للقاعدة $\mathbf{A}$. عندئذٍ يكون لدينا:

$$q(v)=Y^T BY \quad \text{حيث إن} \quad B=P^T AP$$

البرهان:

بما أن $X=[\ x_1,x_2,...,x_n\ ]^T$ المصفوفة الإحداثيـــة للمتجــــه $v=(x_1,x_2,....,x_n)$ بالنسبة لـــ ε_n.

وبما أن $X=PY$ (نظرية 1-17) إذن:

$$q(v)=X^T AX=(PY)^T A(PY)=Y^T(P^T AP)Y$$

مثال:

لتكن q صورة تربيعية معرفة بالعلاقة:

$$q(x_1,x_2,x_3)=13x_1^2+5x_2^2+26x_3^2-16x_1x_2-40x_1x_3+24x_2x_3$$

ثم لتكن $Y=[y_1,y_2,y_3]^T$ المصفوفة الإحداثية للمتجــه $v=(x_1,x_2,x_3)$ بالنســبة للقاعدة التالية:

$$A=\{\ (1,2,0),(0,-2,1),(2,5,-1)\ \}$$

لدينا:

$$q(x_1,x_2,x_3)=X^T AX=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}13 & -8 & -20\\ -8 & 5 & 12\\ -20 & 12 & 26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

وتكون مصفوفة الانتقال من القاعدة ε_3 إلى القاعدة **A** هي:

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 5\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

وباستخدام المبرهنة (19-3) نجد أن $q(v)=Y^T BY$ حيث إن:

$$B=P^T AP=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 2 & 5 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13 & -8 & -20\\ -8 & 5 & 12\\ -20 & 12 & 26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 5\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

إذن $\breve{q}(v)$ بالنسبة للمتحولات y_1,y_2,y_3 تعطى بالعلاقة التالية:

$$q(v)=y_1^2-2y_2^2+3y_3^2$$

مبرهنة 3-20 :

إذا كانت A مصفوفة حقيقية متناظرة، فإن جميع القيم الذاتية لـــ A أعداد حقيقية.

البرهان:

نفرض A مصفوفة حقيقية متناظرة و λ قيمة ذاتية للمصفوفة A من الحقـــل $\mathbb{C}$ ثم ليكن X متجهاً ذاتياً موافق للقيمة λ. عندئذ $AX=\lambda X$ ويتنج من ذلك أن:

$$X^*AX=\lambda X^*X \qquad (1)$$

بما أن A حقيقية متناظرة أي أن $\overline{A}=A$ و $A^T=A$ فهذا يــؤدي إلى أن $A^*=A$ و بالتالي :

$$(X^*AX)^*=X^*A^*(X^*)^*=X^*AX$$

وينتج من المساواة (1) أن X^*AX عدد حقيقي.

ومن جهة ثانية لدينا:

$$X^* X = \sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k x_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$$

أي أن X^*X عدد حقيقي موجب تماماً لأن $X \neq 0$.

وهذا يعني أن القيمة الذاتية الآتية عدداً حقيقياً:

$$\lambda = \frac{X^* AX}{X^* X}$$

مثال:

لتكن المصفوفة الحقيقية المتناظرة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نوجد كثيرة حدودها المميزة:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3 (\lambda + 3)$$

ونلاحظ أن قيمها الذاتية $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ و $\lambda_4 = -3$ أعداداً حقيقية.

3-3- الصور الهيرمتية :

سنفرض في هذه الفقرة أن الحقل F إما حقيقي $\mathbb{R}$ أو عقدي $\mathbb{C}$.

تعريف 3-21 :

ليكن U و V فضائين خطيين معرفين على الحقل F . يسمى التطبيق :

$$f : U \times V \to F$$

$$(u, v) \mapsto f(u, v)$$

صورة ثنا – خطية عقدية على U و V إذا حقق الشرطين:

$$f(a_1 u_1 + a_2 u_2, v) = \overline{a}_1 f(u_1, v) + \overline{a}_2 f(u_2, v) \qquad \text{(i)}$$

$$(\text{ii}) \qquad f(u, b_1 v_1 + b_2 v_2) = b_1 f(u, v_1) + b_2 f(u, v_2)$$

حيث إن $\overline{a}_i$ هو المرافق العقدي لـــ a_i

الشرط (i) يعني أن f العقدي خطي بمتحوله الأول والشـرط (ii) يعـني أن f العقدي خطي بمتحوله الثاني.

نرى بسهولة أن الشرط اللازم الكـافي ليكـون التـابع $f : U \times V \to F$ صـورة ثنا – خطية عقدية هو أن تتحقق المساواة:

$$f\left(\sum_{i=1}^{r} a_i u_i , \sum_{j=1}^{s} b_j v_j \right) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \overline{a}_i b_j f(u_i, v_j)$$

من أجل جميع الأعداد الصحيحة الموجبة s, r.

فإذا كان الحقل F حقيقياً فإن الصورة ثنـا – خطيـة العقديـة تصـبح صـورة ثنا – خطية. وبهذا المعنى فإن الصورة ثنا – خطية العقدية تعميم للصورة ثنا – خطية.

سنفرض فيما يلي أن U و V فضائين خطيين على F عدد أبعاده m و n علـى الترتيب وسنفرض أن f صورة ثنا – خطية عقدية على U و V.

تعريف 3-22 :

لتكن $A = \{ u_1, u_2, \ldots, u_m \}$ و $B = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ قاعدتين لـــ U و V علـى الترتيب، تسـمى المصـفوفة $A = [\, a_{ij} \,]$ حيـث $a_{ij} = f(u_i, v_j)$ مـن أجـل $i = 1,2,\ldots,m$ و $j = 1,2,\ldots,n$ بمصفوفة الصورة ثنا – خطية العقديـة f بالنسـبة للقاعدتين A و B.

نرمز لمنقول المصفوفة المرافقة لـــ A بالرمز A^* أي أن $A^* = [\, \overline{A} \,]^T$

نظرية 3-23:

لتكن القاعدتين A و B في الفضائين الخطيين U و V على الترتيـب، ثم لـتكن $X = [\, x_1, x_2, \ldots, x_m \,]^T$ و $Y = [\, y_1, y_2, \ldots, y_n \,]^T$ المصـــفوفتين الإحـــداثيتين للمتجهين u من U و v من V بالنسبة للقاعدتين A و B على الترتيب، عندئـذ الشرط اللازم الكافي لتكون $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ مصفوفة للصورة ثنا – خطية العقدية على U و V هو أن تتحقق المعادلة:

$$\forall\ u\in U\quad ,\forall v\in V\ :\ f(u,v)=X^*AY$$

نترك البرهان كتمرين.

مثال (1) :

نفرض f تطبق من $\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^3$ في $\mathbb{C}$ معطى بالعلاقة التالية:

$$f(u,v)=3i\overline{u}_1v_2+(-1-3i)\overline{u}_1v_3+i\overline{u}_2v_1+(4-i)\overline{u}_2v_2+(-4+3i)\overline{u}_2v_3$$

حيث إن :

$$v=(v_1,v_2,v_3)\ \text{و}\ u=(u_1,u_2)$$

بما أن $a_{ij}=f(e_i,e_j)$ إذن يمكننا كتابة القيمة $f(u,v)$ بالشكل:

$$f(u,v)=f((u_1,u_2),(v_1,v_2,v_3))=[\overline{u}_1,\overline{u}_2]\begin{bmatrix}0 & 3i & -1-3i\\ \\ i & 4-i & -4+3i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}$$

إذن f صورة ثنا — خطية عقدية على $\mathbb{C}^2$ و $\mathbb{C}^3$ ومصفوفة f بالنسبة للقاعدتين العاديتين ε_2 في $\mathbb{C}^2$ و ε_3 في $\mathbb{C}^3$ هي المصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix}0 & 3i & -1-3i\\ \\ i & 4-i & -4-3i\end{bmatrix}$$

ينتج مباشرة من التعريف (3-22) والنظرية (3-23) أن الشرط اللازم الكافي لتساوي صورتين ثنا — خطيتين عقديتين f و g على الفضائين الخطيين U و V هو أن يكون لـ f و g نفس المصفوفة بالنسبة للقاعدتين A و في U و B في V.

نظرية 3-24:

لتكن A مصفوفة f بالنسبة للقاعدتين A في U و B في V. فإذا كانت P مصفوفة الانتقال من القاعدة A إلى القاعدة 'A في U وكانت Q مصفوفة الانتقال من القاعدة B إلى القاعدة 'B في V، فإن P^*AQ هي مصفوفة f بالنسبة للقاعدتين 'A و 'B.

نترك البرهان كتمرين.

مثال (2) :

لتكن f صورة ثنا – خطية عقدية معرفة كما في المثال (1) ولتكن $A' = \{ (1,i),(i,0) \}$ ، $B' = \{ (1,1,1),(1,1,0),(1,0,0) \}$ قاعدتين للفضائين الخطيين $\mathbb{C}^2$ و $\mathbb{C}^3$ على الترتيب.

عندئذ تكون مصفوفة الانتقال من القاعدة $A = \varepsilon_2$ إلى القاعدة $A' = \{ (1,i),(i,0) \}$ هي:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

ومصفوفة الانتقال من القاعدة $B = \varepsilon_3$ إلى B' هي:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبموجب النظرية (3-24) تكون مصفوفة f بالنسبة للقاعدتين A' و B' هي المصفوفة P^*AQ وبالتالي فإن:

$$P^*AQ = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3i & -1-3i \\ i & 4-i & -4-3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -i & 1 \\ i & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

سنأخذ فيما يلي الحالة الخاصة $U = V$ و $dim V = n$ على الحقل F.

تعريف 3-25 :

لتكن A و B مصفوفتين على الحقل F.

نقول عن المصفوفة B أنها متشابهة هيرميتياً مع المصفوفة A على الحقل F، إذا وجدت مصفوفة قابلة للقلب P على F بحيث أن $B = P^*AP$.

النظرية (3-24) والتعريف (3-25) يؤديان إلى النظرية الآتية:

نظرية 3-26 :

لتكن A و B مصفوفتين من القياس $n\times n$ على F فإن الشرط اللازم الكافي لتكون المصفوفتان A و B متشابهتين هيرميتياً على F هو أن تمثل A و B نفس الصورة الثنا – خطية العقدية على V.

إذن يطبق المفهوم الهرميتي على الصور ثنا – خطية العقدية بنفس الطريقة التي يطبق فيها مفهوم التناظر على الصور ثنا – خطية.

تعريف 3-27 :

نقول عن الصورة ثنا – خطية العقدية f على V أنها هيرميتية إذا وفقط إذا كان:

$$f(u,v)=\overline{f(v,u)}$$

من أجل جميع المتجهات v,u من V.

تعريف 3-28:

نقول عن المصفوفة H المعرفة على الحقل F أنها هيرميتية إذا وفقط إذا كانت $H^*=H$.

إذن تكون المصفوفة الحقيقية A هيرميتية إذا وفقط إذا كانت متناظرة.

نظرية 3-29 :

الشرط اللازم الكافي لتكون f صورة ثنا – خطية عقدية هيرميتية على V هو أن تكون كل مصفوفة ممثلة لـ f هيرميتية.

نترك البرهان كتمرين.

نظرية 3-30 :

تشابه كل مصفوفة هيرميتية من القياس $n\times n$ على C مع مصفوفة قطرية.

البرهان:

نجري البرهان بالتدريج بالنسبة لـ n فنلاحظ أن النظرية صحيحة من أجل $n=1$.
نفرض أن النظرية صحيحة من أجل جميع المصفوفات الهيرميتية التي درجتها k حيث $k<n$ ثم لتكن H مصفوفة هيرميتية من القياس $(k+1)\times(k+1)$.

نفرض $A = \{ u_1, u_2, \ldots, u_{k+1} \}$ قاعدة للفضاء الخطي $\mathbb{C}^{k+1}$ ونفرض h صورة ثنا ـ خطية عقدية هيرميتية على $\mathbb{C}^{k+1}$ ولتكن H مصفوفة h بالنسبة للقاعدة A. فإذا كانت $H = 0$ فتكون H قطرية حكماً، لذلك نفرض أن $H \neq 0$ وبالتالي يوجد عنصر h_{rs} من H مختلف عن الصفر وبالتالي:

$$h_{rs} = h(u_r, u_s) = a + ib \neq 0$$

سنبرهن أنه يوجد دائماً متجه v_1 من $\mathbb{C}^{k+1}$ بحيث أن $h(v_1, v_1) \neq 0$.

فإذا كان $h(u_r, u_r) \neq 0$ أو $h(u_s, u_s) \neq 0$ نأخذ $v_1 = u_r$ أو $v_1 = u_s$

أما إذا كان $h(u_s, u_s) = h(u_r, u_r) = 0$ فنأخذ $v_1 = u_r + iu_s$ عندما $b \neq 0$ أو نأخذ $v_1 = u_r + u_s$ عندما $a \neq 0$ لأن:

$$\begin{aligned} h(u_r + iu_s, u_r + iu_s) &= h(u_r, u_r) + ih(u_r, u_s) - ih(u_s, u_r) + h(u_s, u_s) \\ &= i\left[h(u_r, u_s) - h(u_s, u_r) \right] = i\left[h(u_r, u_s) - \overline{h(u_r, u_s)} \right] = -2b \end{aligned}$$

وبحساب مماثل نجد:

$$h(u_r + u_s, u_r + u_s) = h(u_r, u_s) + \overline{h(u_r, u_s)} = 2a$$

وبما أن $a + ib \neq 0$ إذن أحد العددين a, b على الأقل مختلف عن الصفر، وهذا يعني أنه يوجد دائماً v_1 من $\mathbb{C}^{k+1}$ بحيث أن $d_1 = h(v_1, v_1) \neq 0$

ويمكن توسيع $\{ v_1 \}$ إلى قاعدة $B = \{ v_1, v_2, \ldots, v_{k+1} \}$ للفضاء $\mathbb{C}^{k+1}$ وانطلاقاً من القاعدة B يمكن الحصول على $A' = \{ u'_1, u'_2, \ldots, u'_{k+1} \}$ كقاعدة جديدة وذلك بإجراء التغيير الآتي:

$$u'_1 = v_1$$

$$\vdots$$

$$u'_j = v_j - \frac{h(u'_1, v_j)}{d_1} u'_1$$

من أجل $j = 2, \ldots\ldots, k+1$.

وبما أن h صورة هيرميتية إذن مصفوفتها H_1 بالنسبة للقاعدة A' هيرميتية.

نلاحظ أن $h=(u_1',u_1')=d_1$ و $h=(u_1',u_j')=0$ من أجل $j=2,......,k+1$

إذن تكون H_1 من الشكل الآتي:

$$H_1=\begin{bmatrix} d_1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots+\cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & H_2 \end{bmatrix}$$

حيث H_2 مصفوفة هيرميتية من القياس $k\times k$.

معلوم لدينا أن مصفوفة الانتقال P_1 من القاعدة A إلى A' قابلة للقلب على $\mathbb{C}$

و $H_1=P_1{}^*HP_1$ (بحسب النظرية 3-24)

و بموجب الفرض التدريجي توجد مصفوفة Q قابلة للقلب من القياس $k\times k$ على $\mathbb{C}$

بحيث إن:

$$Q^*H_2Q=diag\{d_2,...,d_{k+1}\}$$

نضع الآن:

$$P_2=\begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots+\cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & Q \end{bmatrix}$$

فهي مصفوفة قابلة للقلب على $\mathbb{C}$ وتحقق المعادلة:

$$(P_1P_2)^*H(P_1P_2)=P_2{}^*P_1{}^*HP_1P_2=P_2{}^*H_1P_2=\left[\begin{array}{c|c} d_1 & 0 \\ \hline 0 & Q^*H_2Q \end{array}\right]$$

$$=diag\{d_1,d_2,...,d_{k+1}\}$$

وهكذا وجدنا مصفوفة قابلة للقلب على $\mathbb{C}$ وهي $P=P_1P_2$ بحيث أن P^*HP مصفوفة قطرية وهو المطلوب.

تعريف 3-31 :

ندعو الصورة ثنا – خطية العقدية الهرميتية على الفضاء الخطي V بصورة هيرميتية على V.

ينتج مباشرة من المساواة $H = H^*$ أن جميع عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة الهيرميتية أعداد حقيقية. وبالتالي فإن العناصر القطرية في أي تمثيل قطري للصورة الهيرميتية h أعداد حقيقية.

نظرية 3-32 :

في أي تمثيلين قطريين للصورة الهيرميتية يكون عدد الحدود الموجبة متساوي في كلا التمثيلين و عدد الحدود السالبة متساوي أيضاً.

نترك البرهان كتمرين.

استنتاج 3-33 :

تتشابه كل مصفوفة هيرميتية H على $\mathbb{C}$ مع مصفوفة وحيدة من الشكل:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} I_p & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots + \cdots & \cdots\cdots & \cdots + \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & -I_{r-p} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots + \cdots & \cdots + \cdots & \cdots + \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

حيث إن :

$$r = rankH$$

الشرط اللازم الكافي لتشابه مصفوفتين هيرميتين من القياس $n \times n$ على $\mathbb{C}$ هو أن يكون لهما نفس الرتبة ونفس الدليل.

نترك البرهان كتمرين.

استنتاج 3-34:

باختيار قاعدة مناسبة للفضاء V يمكن تمثيل أي صورة هيرميتية على V بمصفوفة C من الشكل المذكور في الاستنتاج (3-33).

نترك البرهان كتمرين.

استنتاج 3-35 :

الشرط اللازم الكافي لتكون الصورة الهيرميتية موجبة محدودة على V هو أن تتحقق المتراجحة الآتية:

$$h(v,v) > 0 \qquad \forall v \in V$$

مثال (3) :

لتكن المصفوفة الهيرميتية:

$$H = \begin{bmatrix} 5 & 4i & -4 \\ -4i & 3 & 5i \\ -4 & -5i & 3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب إيجاد مصفوفة قابلة للقلب P تحقق المعادلة التالية:

$$P^* HP = C$$

نبحث أولاً عن مصفوفة قابلة للقلب P_1 بحيث تصبح المصفوفة $P_1 * HP_1$ قطرية.

بما أن $h_{11} = 5$ مختلف عن الصفر في $H = \left[\, h_{ij} \,\right]$. إذن يجب أن نختار المتجه الآتي:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

كعمود أول في المصفوفة P_1 .

أما العمود الثاني C_2 في P_1 فيجب أن يحقق المعادلة $(C_1 * H)C_2 = 0$ وأن يكون مستقلاً خطياً مع C_1.

ينتج من المعادلة $(C_1 * H)C_2 = 0$ أن:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4i & -4 \end{bmatrix} C_2 = 0$$

ويكفي أن نأخذ $C_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ ليحقق C_2 المعادلة الأخيرة ولتصبح المجموعة $\left\{ C_1, C_2 \right\}$ مستقلة خطياً.

وأما العمـــود الثالـــث C_3 في P_1 فيجـــب أن يحقـــق المعادلـــة $(C_1 * H)C_3 = 0$

و $(C_2 * H)C_3 = 0$ ويجب أن تكون المجموعة $\{C_1, C_2, C_3\}$ مستقلة خطياً في $\mathbb{C}^3$.

إذن يجب أن يحقق C_3 المعادلتين الآتيتين:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4i & -4 \end{bmatrix} C_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -9i & -1 \end{bmatrix} C_3 = 0$$

وأن تكون المجموعة $\{ C_1, C_2, C_3 \}$ مستقلة خطياً في $\mathbb{C}^3$

لذلك يكفي أن نأخذ:

$$C_3 = \begin{bmatrix} -8i \\ 1 \\ -9i \end{bmatrix}$$

فنجد أن C_3 يحقق الشروط الثلاثة المطلوبة.

تتشكل المصفوفة P_1 من الأعمدة C_1, C_2, C_3 أي أن :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -9i \end{bmatrix}$$

وبالحساب المباشر نجد أن:

$$P_1 * HP_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

وبتبديل العمود الثاني بالثالث في P_1 نحصل على المصفوفة :

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -8i & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9i & 5 \end{bmatrix}$$

ويكون لدينا:

$$P_2 * HP_2 = diag\{5, 16, -5\}$$

نعتبر الآن المصفوفة $P_3 = diag\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$ ثم نفرض $P = P_2 P_3$ فنجد أن:

$$\begin{aligned}
P^* HP &= (P_2 P_3)^* HP_2 P_3 \\
&= P_3^* (P_2^* HP_2) P_3
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وللحصول على المصفوفة المطلوبة P نحسب $P_2 P_3$ كما يلي:

$$P = P_2 P_3 = \begin{bmatrix} 1 & -8i & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9i & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -2i & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{-9i}{4} & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

الفصل الرابع

الجداء الداخلي للفضاءات المتجهة

1-4 – الجداء الداخلي :

نفرض أن F حقل حقيقي R أو عقدي C كما نفرض أن V فضاء متجه عدد أبعاده منته على الحقل F . نرمز لمرافق z العقدي بالرمز $\bar{z}$.

تعريف 1-4 :

نسمي التطبيق :

$$f : V \times V \to \mathrm{F}$$

$$(u,v) \mapsto f(u,v)$$

الذي يحقق الشروط الثلاثة التالية بأنه جداء داخلي على V :

$$(i) \quad f(a_1u_1 + a_2u_2, v) = \overline{a_1}.f(u_1,v) + \overline{a_2}.f(u_2,v)$$

$$(ii) \quad f(u,v) = \overline{f(v,u)}$$

$$(iii) \quad f(v.v) > 0 \quad \text{if} \quad v \neq 0 \quad , f(0,0) = 0$$

حيث إن :

v, u, u_1, u_2 من V و a_1, a_2 من F .

إذا كان $F = R$ في التعريف $(1\text{-}4)$ ، فندعو V بفضاء جداء داخلي حقيقي أو بفضاء إقليدي . أما إذا كان $F = C$ فندعو V بفضاء جداء داخلي عقدي أو بفضاء واحدي *(Unitary)* .

نظرية 2-4 :

الشرط اللازم و الكافي ليكون التطبيق : $f : V \times V \to F$ جداءً داخلياً على V هو أن يكون f صورة هيرميتية موجبة تماماً .

البرهان :

نفرض أولاً f صورة هيرميتية موجبة محدودة عندئذ تكون f صورة ثنا – خطية عقدية و من التعريف *(3-21)* نجد أن f يحقق الشرط (i) في التعريف *(4-1)* و من التعريف *(3-27)* نجد أن f يحقق (ii) في التعريف *(4-1)* .

و أخيراً نجد أن f يحقق (iii) من التعريف *(4-1)* بموجب الاستنتاج *(3-35)* و بالتالي فإن f هو جداء داخلي على V . نفرض ثانياً أن f جداء داخلي V و حتى تكون f صورة هيرميتية موجبة محدودة يجب أن تحقق (i) في تعريف *(3-21)* و $f(u,v)=\overline{f(v,u)}$ في تعريف *(3-35)* و $f(v,v)>0$ من أجل جميع المتجهات $v\neq 0$ من V ، و جميع هذه الشروط محققة في تعريف الجداء الداخلي باستثناء الشرط (ii) من تعريف *(3-21)* و لنتحقق من صحته ، نكتب :

$$f(u,b_1v_1+b_2v_2)=\overline{f(b_1v_1+b_2v_2,u)}=$$

$$:\overline{\overline{b_1}f(v_1,u)+\overline{b_2}f(v_2,u)}=b_1.\overline{f(v_1,u)}+b_2\overline{f(v_2,u)}=b_1f(u,v_1)+b_2f(u,v_2)$$

إذن f تحقق جميع شروط الصورة الهيرميتية الموجبة المحدودة .

مثال *(1)* :

ليكن $u=(u_1,u_2,....,u_n)$, $v=(v_1,v_2,....,v_n)$ متجهين كيفين من $\mathbb{R}^n$ و لتكن القيمة $f(u,v)$ معرفة كما يلي :

$$f(u,v)=u_1v_1+u_2v_2+....+u_nv_n=\sum_{k=1}^{n}u_k.v_k \qquad (1)$$

فنجد مباشرة أنّ جميع شروط التعريف *(4-1)* محققة بالنسبة لـ f و بالتالي فإن *(1)* هو جداء داخلي على $\mathbb{R}^n$ و بشكل مشابه يمكن أن نعرف جداء داخلياً على C^n كما يلي :

$$g(u,v)=\overline{u_1}v_1+\overline{u_2}v_2+....+\overline{u_n}v_n=\sum_{k=1}^{n}\overline{u_k}.v_k$$

حيث إن :

$u=(u_1,u_2,....,u_n)$, $v=(v_1,v_2,....,v_n)$ من C^n .

واضح أن التطبيق g يحقق جميع شروط التعريف (1-4) .

يدعى الجداء الداخلي في المثال (1) بجداء داخلي نظـامي علـى $\mathbb{R}^n$ و C^n علـى الترتيب.

مثال (2) :

من أجل أي متجهين :

$u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1,v_2)$ من $\mathbb{R}^2$ نعرّف f كما يلي :

$$f(u,v)=2u_1v_1+u_1v_2+u_2v_1+u_2v_2$$

فيمكن كتابة القيمة $f(u,v)$ كجداء مصفوفات :

$$f\big((u_1,u_2),(v_1,v_2)\big)=[u_1,u_2]\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$$

و بما أن $\mathbb{R}^2$ فضاء متجه إذن f صورة هيرميتية و لكن الشرط اللازم و الكافي لتكون f جداءً داخلياً هو أن تكون f موجبة محدودة ، أي أن يكون :

$$f(0,0)=0 \text{ و } f(v,v)>0 \qquad \forall\ v\neq 0$$

و بما أن :

$$f(v,v)=2v_1^2+2v_1v_2+v_2^2=v_1^2+(v_1+v_2)^2$$

إذن :

$$f(v,v)\geq 0 \quad \forall\ v\neq 0$$

و من جهة ثانية لدينا :

$$v_1=v_2=0 \Leftrightarrow v_1+v_2=0 \quad \text{و} \quad v_1=0 \Leftrightarrow f(v_1,v_2)=0$$

و هذا يعني أن f جداء داخلي على $\mathbb{R}^2$.

و للسهولة سنكتب الجداء الداخلي $f(u,v)$ بالشـكل (u,v) اعتبـاراً مـن الآن فصاعداً .

و من السهل البرهان على أن الشرط اللازم الكافي لتكون H مصفوفة لصورة هيرميتية موجبة تماماً هو أن توجد مصفوفة P قابلة للقلب بحيث إن $H = P^*P$ تسمح لنا هذه النتيجة بتعريف جداء داخلي على الفضاء المتجه C^n و نوضح ذلك كما يلي :

من أجل أي متجهين $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$, $v=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ في C^n يمكننا أن نكتب :

$$u=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad ,v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

و باختيار مصفوفة قابلة للقلب P من القياس $n\times n$ بحيث إن $H = P^*P$ ، عندئذ تعرف المساواة الآتية جداءً داخلياً على C^n بالشكل الآتي :

$$(u,v) = u^* H\ v \quad ; \quad H = P^*P$$

و نقول عن المصفوفة P أنها تولد الجداء الداخلي (u,v) المعرف آنفاً .

مثال (3) :

لتكن المصفوفة القابلة للقلب :

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -i & 1 & i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix}$$

من أجل أي متجهين $u=(u_1,u_2,u_3)$ و $v=(v_1,v_2,v_3)$ من C^3 فيمكن تعريف الجداء الداخلي (u,v) بالمساواة :

$$(u,v)=\begin{bmatrix}\overline{u_1},\overline{u_2},\overline{u_3}\end{bmatrix} P^*P \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overline{u_1},\overline{u_2},\overline{u_3}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$= 2\overline{u_1}v_1 + i\overline{u_1}v_2 - \overline{u_1}v_3 - i\overline{u_2}v_1 + 2\overline{u_2}v_2 - \overline{u_3}v_1 + 2\overline{u_3}v_3$$

4-2- النظيم و المسافة :

تعريف (4-3) :

من أجل أي جداء داخلي (u,v) معرف على فضاء V سنعرف طول (نظيم) أي متجه v من V بأنه العدد الحقيقي :

$$\| v \| = \sqrt{(v,v)}$$

مثال (1) :

ليكن المتجه $v=(2i,6,-i)$ من C^3 و لنحسب $\| v \|$ باستخدام الجداء الداخلي النظامي أولاً ثم باستخدام الجداء الداخلي المعرف في المثال *(3)* في الفقرة *(4-2)* فمن أجل الجداء الداخلي النظامي على C^3 يكون :

$$(v,v) = (-2i)(2i) + (6)(6) + (i)(-i) = 41$$

أو :

$$\| v \| = \sqrt{41}$$

و عندما يكون الجداء الداخلي على C^3 كما في المثال *(3)* من الفقرة *(4-2)* نجد أن :

$$(v,v) = \begin{bmatrix} -2i & 6 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2i \\ 6 \\ -i \end{bmatrix} = 110$$

أو :

$$\| v \| = \sqrt{110} \ .$$

هذا يوضح أن طول المتجه v في V يتعلق بالجداء الداخلي المعطى في V .

نظرية 4-4 : (متراجحة كوشي – شوارتز) .

من أجل أي متجهين u,v من V فإن :

$$|(u,v)| \le \| u \| . \| v \|$$

البرهان :

إذا كان $v=0$ فإن طرفي المتراجحة يساوي الصفر . و بالتالي المتراجحة صحيحة من أجل $v=0$.

أما إذا كان $v\neq 0$ ، فإن الجداء الداخلي صورة هيرميتية موجبة محدودة و بالتالي من أجل أي عدد عقدي z يكون لدينا :

$$\begin{aligned} 0\le (u-zv,u-zv) &= (u,v)-z(u,v)-\bar{z}(v,u)+z\bar{z}(v,v) \\ &= (u,u)-z(u,v)-\overline{z(u,v)}+z\bar{z}(v,v) \end{aligned}$$

و بما أن $v\neq 0$ فيمكننا أن نأخذ z مساوياً للقيمة $\dfrac{\overline{(u,v)}}{(v,v)}$ ، بالتعويض في المتراجحة الأخيرة عن z بما يساويه نجد أن :

$$0\le (u,u)-\frac{\overline{(u,v)}(u,v)}{(v,v)}-\frac{(u,v)\overline{(u,v)}}{(v,v)}+\frac{(u,v)\overline{(u,v)}}{(v,v)^2}(v,v)=(u,u)-\frac{(u,v)\overline{(u,v)}}{(v,v)}$$

و بضرب طرفي هذه المتراجحة بالعدد الموجب (v,v) و الإصلاح نجد :

$$(u,v)\ \overline{(u,v)}\le (u,u)\ (v,v)$$

أو :

$$|\ (u,v)\ |^2\le \|\ u\ \|^2\|\ v\ \|^2$$

و بأخذ الجذر الموجب للطرفين نجد أن :

$$|\ (u,v)\ |\le \|\ u\ \|\|\ v\ \|$$

مثال (2) :

تحقق من صحة متراجحة (كوشي – شوارتز) على الفضاء الخطي C^3 من أجل المتجهين :

$$v=(2i,6,-i)\quad ,\quad u=(1+i,-3i,-2)$$

وجدنا باستخدام الجداء الداخلي المعطى في المثال *(3)* من الفقرة *(2-4)* من المثال *(1)* أن :

$$\|\ v\ \|=\sqrt{110}$$

و بالحساب المباشر نجد أن :

$$(u,v)=\begin{bmatrix} 1-i,3i,-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2i \\ 6 \\ -i \end{bmatrix}=11+61i$$

$$\left| (u,v) \right| = \sqrt{121+3721}=\sqrt{3842}$$

و بنفس الطريقة نحسب القيمة (u,u) :

$$(u,u)=\begin{bmatrix} 1-i,3i,-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i \\ -3i \\ -2 \end{bmatrix}=40$$

إذن :

$$\| (u) \| = \sqrt{40}$$

بالتعويض في متراجحة (كوشي – شوارتز) نجد أن :

$$\sqrt{3842} \le \sqrt{40}\sqrt{110}=\sqrt{4400}$$

و المتراجحة محققة من أجل المتجهين v,u المفروضين .

نظرية 4-5 :

يحقق نظيم أي متجه v من الفضاء V المعرف على F مايلي :

(i) $\| v \| > 0$ عندما $v \neq 0$, $\| O \| = 0$.

(ii) $\| av \| = | a | . \| v \|$ من أجل أي $v \ni V$ و أي a من F .

(iii) $\| u+v \| \le \| u \| + \| v \|$ مهما يكن v,u من V .

البرهان :

(i) بما أن الجداء الداخلي (v,v) صورة هيرميتية موجبة محدودة و $\| v \| = \sqrt{(v,v)}$

إذن $\| v \| > 0$ إذا كان $v \neq 0$ و $\| O \| = 0$.

(ii) من أجل أي عنصر a من F و أي متجه v من V لدينا :

$$\| av \| = \sqrt{(av,av)}=\sqrt{\bar{a}a(v,v)}=| a |\sqrt{(v,v)}=| a | \| v \|$$

(iii) من أجل أي عدد عقدي $z = a + ib$ حيث a,b ∋ R فإن :

$$z+\bar{z}=2a\leq 2|z|$$

و بالتالي فإن :

$$\| u+v \|^2=(u+v,u+v)=(u,u)+(u,v)+\overline{(u,v)}+(v,v)$$
$$\leq \| u \|^2+2|(u,v)|+\| v \|^2$$

و بما أن $|(u,v)|\leq \| u \|^2 . \| v \|^2$ بحسب متراجحة (كوشي – شوارتز) ،

إذن :

$$\| u+v \|^2=\| u \|^2+2\| u \| \| v \|+\| v \|^2=\left(\| u \|+\| v \| \right)^2$$

أو :

$$\| u+v \|\leq \| u \|+\| v \|$$

تعريف 6-4 :

من أجل أي جداء داخلي (u,v) على V نعرف المساواة :

$$d(u,v)=\| u-v \|$$

نظرية 7-4 :

إن تابع المسافة d يحقق مايلي :

(i) $d(u,v)>0$ إذا كان $u\neq v$ و $d(v,v)=0$.

(ii) $d(u,v)=d(v,u)$.

(iii) $d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w)$

نترك البرهان كتمرين .

يدعى الفضاء الخطي المعرف عليه تابع المسافة d الذي يحقق (i) و (ii) و (iii) من النظرية (7-4) بفضاء متري .

3-4 – القواعد المتعامدة :

تعريف 8-4 : تتعامد مجموعة المتجهات $\{ v_i / i\in I \}$ في الفضاء V إذا كان $(v_i,v_j)=0$ من أجل جميع $i\neq j$.

و تدعى $\{ v_i / i \in I \}$ بمجموعة متعامدة قياسية إذا كانت متعامدة و كان نظيم كل v_i يساوي الواحد . من السهل البرهان على أن أي مجموعة متعامدة من المتجهات المختلفة عن الصفر تكون مستقلة خطياً .

و يبقى تعريف المصفوفة المتعامدة على الحقل R قائماً أي أنه تكون المصفوفة P متعامدة عندما و عندما فقط $P^T = P^{-1}$.

نظرية 4-9 :

لتكن P مصفوفة من القياس $r \times r$ و V فضاء جداء داخلي حقيقي ، عندئذ الشرط اللازم و الكافي لتكون P متعامدة هو أن تكون P مصفوفة الانتقال من مجموعة متعامدة قياسية ما مؤلفة من r متجه في V إلى مجموعة متعامدة قياسية أخرى مؤلفة من r متجه في V.

نترك البرهان كتمرين .

تعريف 4-10:

نقول عن المصفوفة U على الحقل C إنها واحدية إذا كان $U^* = U^{-1}$.

نظرية 4-11 :

لتكن U مصفوفة من القياس $r \times r$ على الحقل C و ليكن V فضاء جداء داخلي عقدي. عندئذ الشرط اللازم الكافي لتكون U مصفوفة واحدية هو أن تكون U مصفوفة الانتقال من مجموعة متعامدة قياسية ما مؤلفة من r متجه في V إلى مجموعة متعامدة قياسية أخرى مؤلفة من r متجه في V .

نترك البرهان كتمرين .

نظرية (غرام شميدت) 4-12 :

ليكن V فضاء جداء داخلي و لتكن $A = \{ u_1, u_2, \ldots, u_r \}$ قاعدة للفضاء الجزئي W عندئذ توجد قاعدة متعامدة قياسية $B = \{ v_1, v_2, \ldots, v_r \}$ في الفضاء الجزئي W بحيث إن كل متجه v_i من B عبارة عن تركيب خطي بالمتجهات $\{ u_1, u_2, \ldots, u_r \}$.

البرهان :

نفرض $v_1 = u_1$. أي أن أول متجه من A يدخل كما هو في المجموعة المتعامدة B ، ثم نفرض :

$$v_2 = \alpha_1 v_1 + u_2$$

بما أن $v_1 = u_1$ و المتجهين u_1, u_2 غير مرتبطين خطياً ، إذاً المتجه v_2 لا يساوي الصفر مهما كان العدد α_1 .

و نختار α_1 بحيث يحقق الشرط القائل بأن v_2 يجب أن يكون عمودياً على v_1 :

$$0 = (v_1, v_2) = (v_1, \alpha_1 v_1 + u_2 = \alpha_1 (v_1, v_1) + (v_1, u_2)$$

و ينتج من هذا أن :

$$\alpha_1 = -\frac{(v_1, u_2)}{(v_1, v_1)}$$

و نفرض أنه قد تم بناء المجموعة المتعامدة المكونة من المتجهات غير الصفرية $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_\ell$ و بالإضافة لذلك نفرض أن لكل i حيث $1 \leq i \leq \ell$ يكون المتجه v_i تركيباً خطياً من المتجهات $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_\ell$ ، عندئذ سيتحقق هذا الفرض للمتجه $v_{\ell+1}$ إذا اخترناه على الشكل التالي :

$$v_{\ell+1} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ldots + \alpha_\ell v_\ell + u_{\ell+1}$$

و المتجه $v_{\ell+1}$ مختلف عن الصفر لأن المجموعة A مستقلة خطياً. و نختار المعاملات α_i (حيث $i = 1, 2, \ldots, \ell$) بحيث يتحقق الشرط القائل بأن المتجه $v_{\ell+1}$ يجب أن يكون عمودياً على كل المتجهات v_i حيث $i = 1, 2, \ldots, \ell$:

$$\begin{aligned} 0 = (v_i, v_{\ell+1}) &= (v_i, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ldots + \alpha_\ell v_\ell + u_{\ell+1}) \\ &= \alpha_1 (v_i, v_1) + \alpha_2 (v_i, v_2) + \ldots\ldots + \alpha_\ell (v_i, v_\ell) + (v_i, u_{\ell+1}) \end{aligned}$$

من أجل كل $i = 1, 2, \ldots, \ell$.

و ينتج من هنا ، نظراً لأن المتجهات $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_\ell$ متعامدة مثنى مثنى أن :

$$\alpha_i (v_i, v_i) + (v_i, u_{\ell+1}) = 0$$

أي أن :

$$\alpha_i = -\frac{(v_i, u_{\ell+1})}{(v_i, v_i)} \quad , \quad i = 1,2,\ldots,\ell$$

و بالاستمرار بهذه الطريق نحصل على جميع عناصر المجموعة B المتعامدة فيما بينها مثنى مثنى .

مثال :

لتكن مجموعة المتجهات المستقلة خطياً في R^4 :

$$A = \{ u_1 = (2,0,2,1), u_2 = (0,0,4,1), u_3 = (8,0,3,5) \}$$

و المطلوب استخدام طريقة غرام – شميدت للحصول على قاعدة متعامدة قياسية من A يرمز لها بـ $B = \{ v_1, v_2, v_3 \}$.

الحل :

نكتب :

$$v_1 = \frac{u_1}{\| u_1 \|} = \frac{1}{3}(2,0,2,1) = (\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

نفرض الآن :

$$w_2 = u_2 + \alpha v_1 \qquad (1)$$

ثم نكتب الشرط :

$$(w_2, v_1) = 0$$

أو :

$$(u_2 + \alpha v_1, v_1) = 0 \Rightarrow$$

$$(u_2, v_1) + \alpha(v_1, v_1) = 0 \Rightarrow \alpha \| v_1 \|^2 = -(u_2, v_1)$$

إذن :

$$\alpha = -(u_2, v_1)$$

بالتعويض في (1) نجد أن :

$$w_2 = u_2 - (u_2, v_1)v_1 \Rightarrow$$
$$w_2 = (0,0,4,1) - 3\,(\frac{2}{3},0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}) = (-2,0,2,0)$$

و يكون :

$$v_2 = \frac{w_2}{\| w_2 \|} = \frac{(-2,0,2,0)}{2\sqrt{2}} = (-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2},0)$$

لإيجاد المتجه الثالث في القاعدة المتعامدة المستخرجة من A نكتب :

$$w_3 = u_3 + \alpha\, v_1 + \beta\, v_2$$

ثم نكتب شرطي التعامد :

$$(w_3, v_1) = 0 \quad , \quad (w_3, v_2) = 0$$

فنحصل على المساواة :

$$\begin{aligned}
w_3 &= u_3 - (v_1, u_3)v_1 - (v_2, u_3)v_2 \\
&= (8,0,3,5) - 9(\frac{2}{3},0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}) - (\frac{-5\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2},0) \\
&= (8,0,3,5) - (6,0,6,3) + (-\frac{5}{2},0,\frac{5}{2},0) \\
&= (-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},2) \Rightarrow v_3 = \frac{w_3}{\| w_3 \|} = \frac{\sqrt{2}}{6}(-1,0,-1,4)
\end{aligned}$$

استنتاج 13-4 :

يمكن توسيع أي مجموعة متعامدة قياسية $\{ v_1, v_2, ..., v_r \}$ في V إلى قاعدة متعامدة قياسية $\{ v_1, v_2, ..., v_r, v_{r+1}, ...v_n \}$ في V .

نترك البرهان كتمرين .

نلاحظ أن الشرط اللازم الكافي لتكون القاعدة المتعامدة $A = \{ v_1, v_2, ..., v_n \}$ متعامدة قياسية في V هو أن يكون :

$$(v_i, v_j) = \delta_{ij} \quad ; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & if \;\; i = j \\ 0 & if \;\; i \neq j \end{cases}$$

علماً أن X,Y هما المصفوفتان الإحداثيتان لـ v_i,v_j على الترتيب بالنسبة للقاعدة $\mathcal{A}$.

مثال (1) :

ليكن الفضاء الخطي C^3 و ليكن الجداء الداخلي في C^3 معطى بالمصفوفة :

$$H=\begin{bmatrix} \frac{11}{9} & \frac{-2i}{3} & \frac{-1}{9} \\ \frac{2i}{3} & 2 & \frac{-i}{3} \\ \frac{-1}{9} & \frac{i}{3} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدة القانونية ε_3 .

فإذا كان $u=(u_1,u_2,u_3)$, $v=(v_1,v_2,v_3)$ متجهان من C^3 فإن الجداء الداخلي لهما يعطى بالمساواة :

$$(u,v)=\left[\overline{u_1},\overline{u_2},\overline{u_3}\right]H\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

و إذا أخذنا :

$$v_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,2) \quad , \quad v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,i,1) \quad , \quad v_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,i,-1)$$

فيمكن التأكد مباشرة من أن $\mathcal{A}=\{v_1,v_2,v_3\}$ قاعدة متعامدة قياسية للفضاء C^3 بالنسبة للجداء الداخلي المعطى و أن مصفوفة الانتقال من ε_3 إلى $\mathcal{A}$ تعطى بالمساواة :

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$P^* H\ P = I_3$$

نلاحظ أن P ليست مصفوفة واحدية ، أي أن $P^* \neq P^{-1}$ و السبب في ذلك هو أن القاعدة ε_3 ليست متعامدة بالنسبة للجداء الداخلي المعرف في V .

مثال (2) :

بفرض T تحويل متعامد على $V = R^2$ فإذا كانت $A = \left[a_{ij} \right]$ مصفوفة T بالنسبة للقاعدة القانونية ε_2 عين المعاملات a_{ij} .

الحل :

بما أن $\varepsilon_2 = \left\{ e_1 = (1,0), e_2 = (0,1) \right\}$ قاعدة قانونية في $\mathbf{R}^2$ و بما أن T تحويل متعامد على $\mathbf{R}^2$ ، إذن :

$T(\varepsilon_2)$قاعدة قانونية على $\mathbf{R}^2$ ، و ينتج من ذلك أن :

$$\begin{aligned}
&(T(e_1),T(e_1)) = (e_1,e_1) = 1 \\
&(T(e_2),T(e_2)) = (e_2,e_2) = 1 \qquad\qquad (1) \\
&(T(e_1),T(e_2)) = (e_1,e_2) = 0
\end{aligned}$$

فإذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

فإن المعادلات (1) تكافئ المعادلات التالية :

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \quad , \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \quad , \quad a_{11}a_{21} + a_{12}.a_{22} = 0$$

بموجب المعادلتين الأولى و الثانية في المجموعة الأخيرة توجد ψ,φ بحيث إنّ :

$$a_{12} = sin\psi \quad , \quad a_{22} = cos\psi \quad \text{و} \quad a_{21} = sin\varphi \quad , \quad a_{11} = cos\varphi$$

و بالتعويض في المعادلة الثالثة من المجموعة الأخيرة نجد أن :

$$cos\,\varphi.sin\,\varphi + cos\,\psi.sin\,\psi = sin(\,\varphi + \psi\,) = 0 \Rightarrow$$

$$\varphi + \psi = \pi \qquad \text{أو} \qquad \varphi + \psi = 0$$

$$a_{22} = cos\varphi \quad , \quad a_{12} = -sin\varphi$$

و يكون لدينا :

$$A = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{bmatrix}$$

و أما في الحالة الثانية فيكون :

$$a_{12} = sin\varphi \quad , \quad a_{22} = -cos\varphi$$

و يكون لدينا :

$$A = \begin{bmatrix} cos\varphi & sin\varphi \\ sin\varphi & -cos\varphi \end{bmatrix}$$

إذن المتحول T في الحالة الأولى هو دوران حول مبدأ الإحداثيات بزاوية ثابتة قدرها φ و التحويل T في الحالة الثانية هو تحويل مرافق لنفسه .

4-4 – المتممات العمودية :

تعريف 14-4 :

ليكن V فضاء جداء داخلي و A مجموعة غير خالية من V نعرف المجموعة $A^{\perp}$ بالشكل الآتي :

$$A^{\perp} = \{ v \in V / (u,v) = 0 \ \forall \ u \in A \}$$

إذن $A^{\perp}$ تتكون من جميع متجهات V التي تعامد كل متجه من A .

مثال :

نفرض $V = \mathbb{R}^3$ و نعرف جداءً داخلياً على V ، فإذا كانت $A = \{(0,0,0)\}$ فإن $A^{\perp} = \mathbb{R}^3$.

وإذا كانت A مؤلفة من متجه وحيد تختلف عن الصفر (a_1,a_2,a_3)، فإن $A^{\perp}$ تتألف من جميع المتجهات (x_1,x_2,x_3) الواقعة في المستوي $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ وإذا كانت $A = \{(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)\}$ مؤلفة من متجهين مستقلين خطياً، عندئذ تكون $A^{\perp}$ هي الفصل المشترك للمستويين :

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0,\ \ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$$

أما إذا كانت A قاعدة في R^3 فإن $A^{\perp}=\{(0,0,0)\}$.

نلاحظ في جميع الأمثلة السابقة أن $A^{\perp}$ فضاءً جزئياً في R^3 .

نظرية 4-15 :

إذا كان V فضاءً خطياً و A مجموعة غير خالية من V فإنّ $A^{\perp}$ فضاء جزئي من V .

البرهان :

من الفرض A مجموعة غير خالية. بقي أن نتحقق من الشرط الآتي :

$$\forall a,b\in F \quad و \ \forall u,v\in A^{\perp} : au+bv\in A^{\perp}$$

بما أن v,u من $A^{\perp}$ ، إذن من أجل أي متجه w من A فإن :

$$(u,w)=(v,w)=0$$

وبالتالي فإن :

$$(au+bv,w)=\overline{a}(u,w)+\overline{b}(v,w)=0$$

وينتج من ذلك أن :

$$A^{\perp}\ni au+bv$$

عندما نكتب المتجه v من V بالشكل $v=v_1+v_2$ حيث v_1 من W و v_2 من $W^{\perp}$ ، ندعو v_1 بالمسقط العمودي لـــ v على W ، سنرمز لـــ $(W^{\perp})^{\perp}$ بالرمز $W^{\perp\perp}$ و سنبرهن على صحة النظرية الآتية :

نظرية 4-16 :

إذا كان V فضاءً خطياً و W فضاءً جزئياً من V ، فإن $W^{\perp\perp}=W$.

البرهان :

بما أن $V=W\oplus W^{\perp}$، إذن كل متجه v من V يكتب بشكل وحيد $v=v_1+v_2$ حيث v_1 من W و v_2 من $W^{\perp}$.

للبرهان على أن $W^{\perp\perp}=W$ يكفي أن نبرهن صحة العلاقة التالية :

$$v_2=0 \Leftrightarrow W^{\perp\perp}\ni v$$

$$(v,u)=(v_1+v_2,u)=(v_1,u)+(v_2,u)=0 \quad \forall \ u\in W^{\perp} \Leftrightarrow W^{\perp\perp}\ni v$$

و بما أن :

$$v_1 \text{ من } W \text{ و } u \text{ من } W^{\perp}$$

إذن :

$$(v_1,u)=0$$

و بالتالي فإن :

$$v\in W^{\perp\perp} \Leftrightarrow (v_2,u)=0 \ \ \forall \ \ u\in W^{\perp} \Leftrightarrow v_2\in W^{\perp\perp}$$

و لكن :

$$(v_2,v_2)=0 \Leftrightarrow W^{\perp} \ni v_2$$

و بالتالي :

$$v_2=0 \Leftrightarrow W^{TT} \ni v$$

نظرية 4-17 :

إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من V فإن $A^{\perp}=<A>^{\perp}$.

البرهان :

إذا كان v متجهاً ما من V بحيث إن $(u,v)=0$ من أجل جميع المتجهات u من $<A>$ عندئذ $(u,v)=0$ من أجل جميع المتجهات u من A لأن $A \subseteq <A>$

و بالتالي فإن :

$$<A>^{\perp}\subseteq A^{\perp}$$

و بالعكس إذا فرضنا $v \ni A^{\perp}$ و إذا أخذنا بالاعتبار أن كل متجه u من $<A>$ يكتب كعبارة خطية بمتجهات من A أي أن :

$$u=\sum_{k=1}^{r}a_k.u_k \ \ ; \ \ u_k\in A$$

$$(u,v)=\left(\sum_{k=1} a_k.u_k, v\right)=\sum_{k=1} a_k.(u_k,v)$$

و لكن:

$$A \ni u_k \text{ و } A^{\perp} \ni v$$

إذن:

$$(u_k,v)=0 \;\; \forall \;\; k=1,2,....,r$$

و بالتالي فإن :

$$(u,v)=0$$

ولكن $<A>^{\perp} \ni v$ أي أن :

$$A^{\perp} \subseteq <A>^{\perp}$$

و مما تقدم ينتج أن :

$$A^{\perp} = <A>^{\perp}$$

إذا كان W فضاءً جزئياً في V فيدعى الفضاء الجزئي $W^{\perp}$ بالفضاء العمودي لـ W.

نظرية 4-18 :

إذا كان V فضاءً خطياً و W فضاءً جزئياً في V ، فإن المجموع $W+W^{\perp}$ مباشر أي أن $V=W\oplus W^{\perp}$.

البرهان :

إذا كان :

$$W \cap W^{\perp} \ni v$$

فإن $(v,v)=0$ و بالتالي فإن $v=0$

إذن :

$$W \cap W^{\perp} = \{ 0 \}$$

و المجموع $W+W^{\perp}$ مباشر .

قياسية للفضاء الخطي V بحسب الاستنتاج 13-4 و لتكن هذه القاعدة هي :

$$A=\{ v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots v_n \}$$

سنبرهن أن $B=\{ v_{r+1}, \ldots, v_n \}$ قاعدة للفضاء الجزئي $W^{\perp}$.

بما أن B مجموعة جزئية من القاعدة A لذلك فإن B مجموعة مستقلة خطياً . بقي أن نبرهن أنّ B تولد $W^{\perp}$ ، لذلك نفرض أن $v=\sum_{k=1}^{n} a_k . v_k$ متجه ما من $W^{\perp}$ ، و بما أنّ A قاعدة متعامدة قياسية في V إذن $(v_i, v_k)=\delta_{ik}$ ، و يكون لدينا من أجل $i=1,2,\ldots,r$ مايلي :

$$0=(v_i, v)=(v_i, \sum_{k=1}^{n} a_k v_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{ik}=a_i$$

و هذا يعني أن :

$$v=\sum_{k=r+1}^{n} a_k . v_k$$

و بالتالي فإن B تولد $W^{\perp}$.

استنتاج 14-4 :

إذا كان عدد أبعاد الفضاء الجزئي W يساوي r فإن عدد أبعاد $W^{\perp}$ يساوي n-r .

البرهان :

فيما تقدم وجدنا أنّ:

$v_1, v_2, \ldots, v_r$ قاعدة للفضاء الجزئي W .

$v_{r+1}, \ldots, v_n$ قاعدة للفضاء الجزئي $W^{\perp}$.

5-4 الايزومتري :

سنشير بـــ (u,v) لجداء داخلي مختار و لكن ثابت على الفضاء الخطي V . و سندرس المؤثر الخطي على V الذي يحافظ على طول المتجهة .

ندعو المؤثر الخطي T على الفضاء الخطي V ايزومتري إذا كان $\| v \| = \| T(v) \|$ من أجل جميع المتجهات v من V . و ندعو الايزومتري المعرف على فضاء خطي إقليدي بمؤثر متعامد ، كما ندعو الإيزومتري المعرف على فضاء خطي واحدي بمؤثر واحدي.

بما أن $\| v \| = \sqrt{(v,v)}$ ، إذن يحافظ المؤثر الخطي على النظيم عندما و فقط عندما يحافظ على الجداء الداخلي .

نظرية 21-4 :

الشرط اللازم الكافي ليكون المؤثر الخطي على الفضاء الخطي V ايزومتري هو :

$$(u,v) = \big(T(u),T(v)\big) \quad \forall u,v \in V$$

البرهان :

إذا كان $(u,v) = \big(T(u),T(v)\big)$ من أجل جميع المتجهات v,u من V فإن :

$$\| T(v) \| = \sqrt{\big(T(v),T(v)\big)} = \sqrt{(v,v)} = \|v\|$$

و بالتالي فإن T إيزومتري .

و بالعكس نفرض T إيزومتري على V .

فنلاحظ أولاً :

$$\forall\ u,v \in V : \| u+v \|^2 = \| u \|^2 + (u,v) + (v,u) + \| v \|^2 \qquad (1)$$

و نميز هنا حالتين :

إذا كان V فضاءً إقليدياً فإن :

$$(u,v) = (v,u)$$

و بالتالي فإن :

$$(u,v) = \tfrac{1}{2}\left\{ \| u+v \|^2 - \| u \|^2 - \| v \|^2 \right\}$$

و أيضاً :

$$\big(T(u),T(v)\big) = \tfrac{1}{2}\left\{ \| T(u)+T(v) \|^2 - \| T(u) \|^2 - \| T(v) \|^2 \right\}$$

$$\left(T(u),T(v)\right)=\tfrac{1}{2}\left\{\|T(u)+T(v)\|^2-\|T(u)\|^2-\|T(v)\|^2\right\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\left\{\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right\}=(u,v)$$

أما إذا كان V فضاءً واحدياً فنجد من المساواة (1) أن :

$$(u,v)+\overline{(u,v)}=\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2 \qquad (2)$$

و بالحساب المباشر نجد أن :

$$\|u+iv\|^2=\|u\|^2+i(u,v)-i\overline{(u,v)}+\|v\|^2$$

و بالتالي فإن :

$$(u,v)-\overline{(u,v)}=-i\left\{\|u+iv\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right\} \qquad (3)$$

من المعادلتين (2 و 3) نجد أن :

$$(u,v)=\tfrac{1}{2}\left\{\|u+v\|^2-i\|u+iv\|^2+(i-1)\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\right\} \qquad (4)$$

من المعادلتين (3) و (4) و من الفرض T إيزومتري على V ينتج أن :

$$\left(T(u),T(v)\right)+\overline{\left(T(u),T(v)\right)}=\|T(u+v)\|^2-\|T(u)\|^2-\|T(v)\|^2$$
$$=\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2 \qquad (5)$$
$$\left(T(u),T(v)\right)-\overline{\left(T(u),T(v)\right)}=-i\left\{\|T(u+iv)\|^2-\|T(u)\|^2-\|T(v)\|^2\right\}$$
$$=-i\left\{\|u+iv\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right\} \qquad (6)$$

و من المعادلتين (5) و (6) ينتج أن :

$$\left(T(u),T(v)\right)=\tfrac{1}{2}\left\{\|u+v\|^2-i\|u+iv\|^2+(i-1)\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\right\}$$

و باستخدام المعادلة (4) نجد أن :

$$\left(T(u),T(v)\right)=(u,v)$$

نظرية 22-4 :

الشرط اللازم الكافي ليكون المؤثر الخطي T على V ايزومتري هو أن ينقل T قاعدة متعامدة قياسية ما في V إلى قاعدة متعامدة قياسية في V .

المبرهنات .

لتكن $A=\{v_1,v_2,\dots\dots,v_n\}$ قاعدة متعامدة قياسية في V ولنأخذ المجموعة

. $T(A)=\{T(v_1),T(v_2)\dots\dots,T(v_n)\}$

إذا كان T ايزومتري على V فإن :

$$\left(T(v_i),T(v_j)\right)=(v_i,v_j)=\delta_{ij}$$

بحسب النظرية (4-21) وبالتالي فإنّ المجموعة T(A) قاعدة متعامدة قياسية في V .

نفرض الآن $T(A)$ قاعدة متعامدة قياسية في V فمن أجل أي متجهين:

$$u=\sum_{i=1}^{n} a_i.v_i \quad ;u\in V \qquad و \qquad v=\sum_{j=1}^{n} b_j.v_j \quad ;v\in V$$

نجد أن :

$$\begin{aligned}
\left(T(u),T(v)\right) &= \left(T(\sum_{i=1}^{n} a_i.v_i),T(\sum_{j=1}^{n} b_j.v_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_i.b_j \left(T(v_i),T(v_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_i.b_j\delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_i.b_j(v_i,v_j) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i,\ \sum_{j=1}^{n} b_j v_j\right) \\
&= (u,v)
\end{aligned}$$

إذن T ايزومتري على V بحسب النظرية (4-21) .

نظرية 4-23 :

إذا كان T مؤثراً خطياً على فضاء خطي واحدي V عندئذٍ الشرط اللازم الكافي ليكون T واحدياً هو أن تكون كل مصفوفة ممثلة لـــ T بالنسبة لقاعدة متعامدة قياسية في V واحدية .

لتكن $A=\left[a_{ij}\right]_{nxn}$ مصفوفة T بالنسبة للقاعدة المتعامدة القياسية $A=\{v_1,v_2,\dots\dots,v_n\}$

في V . عندئذٍ $T(v_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}v_i$ وهذا يعني أن $A=\left[a_{ij}\right]$ هي مصفوفة الانتقال من

القاعدة A إلى القاعدة $T(A)$ وبحسب النظرية (4-22) فإن الشرط اللازم الكافي

ليكون T واحدياً هو أن تكون $T(A)$ قاعدة متعامدة قياسية في V .

ولكن الشرط اللازم الكافي لتكون T (A) قاعدة متعامدة قياسية في V هو أن تكون

A مصفوفة واحدية بحسب النظرية (4-17) .

نظرية 4-24 :

ليكن T مؤثراً خطياً على الفضاء الإقليدي V عندئذٍ الشرط اللازم الكافي ليكون T

متعامداً هو أن تكون كل مصفوفة ممثلة لـــ T بالنسبة إلى قاعدة متعامدة قياسية عبارة

عن مصفوفة متعامدة .

البرهان :

لتكن $A=\left[a_{ij}\right]_{nxn}$ مصفوفة T بالنسبة لقاعدة متعامدة قياسية $A=\{v_1,v_2,\dots\dots,v_n\}$

في V . عندئذٍ $T(v_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}v_i$ إذن $A=\left[a_{ij}\right]$ مصفوفة انتقال من A إلى $T(A)$

ولكن الشرط اللازم الكافي ليكون T متعامداً هو أن تكون T (A) قاعدة متعامدة

قياسية في V حسب النظرية (4-17) ومن جهة ثانية فإن الشرط اللازم الكافي لتكون

T (A) قاعدة متعامدة قياسية في V هو أن تكون A مصفوفة متعامدة بحسب

النظرية (4-9) .

مثال 1:

نفرض T مؤثر خطي على C^3 معطى بالشكل :

$$T(v_1,v_2,v_3)=(\frac{1}{2}v_1-\frac{i}{2}v_2+\frac{1+i}{2}v_3,\frac{-i}{\sqrt{2}}v_1+\frac{1}{\sqrt{2}}v_2,\frac{1}{2}v_1-\frac{i}{2}v_2-\frac{1+i}{2}v_3)$$

إن القاعدة القانونية ε_3 متعامدة قياسية بالنسبة للجداء الداخلي النظامي في C^3 كما

أن مصفوفة T بالنسبة للقاعدة ε_3 هي :

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & o \\ \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} & \frac{-1-i}{2} \end{bmatrix}$$

وبحسب النظرية (4-23) فإن الشرط اللازم الكافي ليكون T واحدياً هو أن تكون المصفوفة A واحدية وهذا يكافئ $A^{*}=A^{-1}$.

وبالحساب نجد أن :

$$A^{*}A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & o & \frac{-1+i}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & o \\ \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} & \frac{-1-i}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن A مصفوفة واحدية و T مؤثر واحدي وللتحقق من صحة النظرية (4-22) نأخذ القاعدة القانونية المتعامدة القياسية $\varepsilon_3=\{e_1,e_2,e_3\}$ في C^3 فنجد أن :

$$T(e_1)=\frac{1}{2}e_1-\frac{i}{\sqrt{2}}e_2+\frac{1}{2}e_3$$

$$T(e_2)=\frac{-i}{2}e_1+\frac{1}{\sqrt{2}}e_2-\frac{i}{2}e_3$$

$$T(e_3)=\frac{1+i}{2}e_1+\frac{-1-i}{2}e_3$$

وبالتالي فإن :

$$T(\varepsilon_2)=\left\{(\frac{1}{2},-\frac{i}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}),(\frac{-i}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-i}{2}),(\frac{1+i}{2},o,\frac{-1-i}{2})\right\}$$

وكما هو واضح فهي قاعدة متعامدة قياسية ، وبالتالي النظرية صحيحة .

فقد نقل المؤثر T القاعدة ε_3 المتعامدة القياسية القانونية إلى قاعدة متعامدة قياسية $T(\varepsilon_3)$.

إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين على C، فإنّ B تشابه A واحدياً إذا وفقط إذا وجدت مصفوفة واحدية U بحيث إنّ $B = U^{-1}AU$.

وإذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين على $\mathbb{R}$ فإن B تشابه A عمودياً إذا وفقط إذا وجدت مصفوفة متعامدة P بحيث إن $B = P^{-1}AP$.

تعريف 26-4 :

تدعى المصفوفة $B = [b_{ij}]_{mxu}$ بمصفوفة مثلثية علوية إذا تحقق $b_{ij} = 0$ من أجل كل $i > j$ أي أن المصفوفة المثلثية العلوية تكون جميع عناصرها تحت القطر الرئيس أصفاراً .

نظرية 27-4 :

إذا كانت A مصفوفة من القياس $n \times n$ على C فإنّ A تشابه واحدياً لمصفوفة مثلثية علوية B بحيث أن عناصر القطر الرئيسي فيها هي القيمَ الخاصة لـــ A .

البرهان :

يجري البرهان بالتدريج، فمن أجل $n = 1$ النظرية صحيحة . لذلك نفرض أن النظرية صحيحة من أجل جميع المصفوفات على C من القياس $k \times k$ ولنبرهن صحة النظرية من أجل المصفوفة A من القياس $(k+1) \times (k+1)$ لذلك نفرض أنّ V فضاء خطي واحدي عدد أبعاده $(k+1)$ و A قاعدة متعامدة قياسية في V .

نعلم أن A تمثل مؤثراً خطياً T بالنسبة للقاعدة A علماً أنّ $T \neq 0$. نفرض λ قيمة ذاتية للمؤثر T و v متجه ذاتي لـــ T موافق للقيمة λ ثم نفرض $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$ فنجد أنّه يمكن توسيع المجموعة $\{v_1\}$ إلى قاعدة متعامدة قياسية $B = \{v_1, v_2, \ldots\ldots v_{k+1}\}$ بحسب (الاستنتاج 4-13) ولكن مصفوفة الانتقال من A إلى B مصفوفة واحدية ولنرمزها بـــ U_1 كما أنّ مصفوفة T بالنسبة للقاعدة β تكون من الشكل :

$$A_1 = U_1^{-1}AU_1 = \begin{bmatrix} \lambda & R_1 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

حيث إن R_1 مصفوفة من القياس $1\times n$ والمصفوفة A_2 من القياس $n\times n$.

إذن بحسب البرهان التدريجي توجد مصفوفة واحدية Q بحيث أن $Q^{-1}A_2Q$ مثلثية علوية .

نلاحظ أن المصفوفة الآتية :

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

واحدية وتحقق ما يلي :

$$U_2^{-1}A_1U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & R_1 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda & R_1Q \\ 0 & Q^{-1}A_2Q \end{bmatrix}$$

وبما أنّ $Q^{-1}A_2Q$ مصفوفة مثلثية علوية، إذن المصفوفة $U_2^{-1}A_1U_2$ مثلثية علوية أيضاً بما أنّ U_1, U_2 مصفوفتين واحديتين ،إذن $U = U_1U_2$ واحدية ونلاحظ أن المصفوفة $B = U^{-1}AU$ مثلثية علوية لأن :

$$B = U_2^{-1}U_1^{-1}AU_1U_2 = U_2^{-1}A_1U_2^{-1}$$

واضح أنّ عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة $B = [b_{ij}]$ هي القيم الخاصة لـــها لأن :

$$det(B - xI) = (b_{11} - x)(b_{22} - x)\ldots\ldots(b_{k+1,k+1} - x)$$

ولكن القيم الخاصة للمصفوفة B هي نفسها القيم الخاصة لـــ A لأن A و B متشابهتان .

استنتاج 4-28 :

يمكن تمثيل كل مؤثر خطي على فضاء واحدي V بمصفوفة قطرية علوية بالنسبة لقاعدة متعامدة قياسية في V .

نظرية 4-29 :

لتكن A مصفوفة حقيقة من القياس $n\times n$ عندئذ الشرط اللازم الكافي لكي تتشابه A عمودياً مع مصفوفة مثلثية علوية هو أن تكون جميع القيم الخاصة لـــ A حقيقية .

لنترك البرهان كتمرين .

يمكن تمثيل كل مؤثر خطي T على فضاء إقليدي V بمصفوفة مثلثية علوية بالنسبة لقاعدة متعامدة قياسية في V إذا وفقط إذا كانت جميع القيم الخاصة لـــ T حقيقية .

نظرية 4-31 :

إذا كانت A مصفوفة مربعة عقدية عندئذ الشرط اللازم الكافي لكي تتشابه A واحدياً مع مصفوفة قطرية هو $AA^* = A^* A$.

البرهان :

نفرض أنه توجد مصفوفة واحدية U بحيث أن :

$$U^{-1}AU = D = diag\{d_1, d_2, ...d_n\}$$

نلاحظ أولاً أن :

$$DD^* = D^* D = diag\{\ |d_1|^2, |d_2|^2, ..., |d_n|^2\ \}$$

وبما أن :

$$A = UDU^{-1}$$

و أيضاً :

$$U^{-1} = U^*$$

إذن :

$$\begin{aligned} AA^* = (UDU^{-1})(UD^*U^*) &= UDD^*U^* = UD^*DU^* \\ &= UD^*U^*UDU^* \\ &= A^*A \end{aligned}$$

والآن نفرض أنّ :

$$AA^* = A^* A$$

عندئذٍ وبحسب النظرية (4-27) توجد مصفوفة واحدية U بحيث أن المصفوفة التالية:

$$B = U^{-1}AU = U^*AU$$

هي مصفوفة مثلثية علوية .

$$BB^* = U^*AUU^*A^*U = U^*AA^*U$$

وبحساب مماثل نجد أن :

$$B^*B = U^*A^*AU$$

وبما أن :

$$AA^* = A^*A$$

إذن :

$$BB^* = B^*B$$

ولكن في المصفوفة $B = [b_{ij}]$ نجد أن $b_{rs} = 0$ من أجل جميع $s < r$.

و بالتالي العنصر الواقع على تقاطع السطر i والعمود j في المصفوفة BB^* يكون من الشكل :

$$\sum_{K=1}^{n} b_{ik}\,\overline{b}_{jk} = \sum_{K=i}^{n} b_{ik}\,\overline{b}_{jk}$$

وبشكل مماثل نجد أن العنصر الواقع على تقاطع السطر i والعمود j في B^*B من الشكل:

$$\sum_{K=1}^{n} b_{ki}\,\overline{b}_{kj} = \sum_{K=i}^{i} b_{ki}\,\overline{b}_{kj}$$

وبما أنّ $BB^* = B^*B$ إذن يمكن مساواة العناصر المتناظرة في كلتي المصفوفتين فينتج أنّ :

$$\sum_{K=1}^{i} \left|b_{ki}\right|^2 = \sum_{K=i}^{n} \left|b_{ik}\right|^2 \qquad (1)$$

فمن أجل $i = 1$ في المساواة (1) يكون :

$$b_{11}^2 = \left|b_{11}\right|^2 + \left|b_{12}\right|^2 + \ldots\ldots \left|b_{1n}\right|^2$$

وهذا يعني عناصر السطر الأول في B مساوية للصفر ما عدا العنصر b_{11} .

$$\left|b_{22}\right|^2=\left|b_{12}\right|^2+\left|b_{22}\right|^2+\left|b_{23}\right|^2+.....\left|b_{2n}\right|^2$$

وبالتالي فإن $b_{2j}=0$ من أجل جميع $j>2$ وهذا يعني أنّ جميع عناصر السطر الثاني في B مساوية للصفر ما عدا العنصر b_{22} .

وبالاستمرار بنفس المناقشة نجد من المعادلة (1) :

$$\left|b_{ii}\right|^2=\left|b_{ii}\right|^2+\left|b_{i,i+1}\right|^2+.....\left|b_{in}\right|^2$$

من أجل $i=1,2,.....,n$ وبالتالي فإن $b_{ij}=0$ من أجل جميع $j>i$ ومعلوم أن $b_{ij}=0$ من أجل جميع $j<i$ لأن B مصفوفة مثلثية علوية وبالتالي فإنّ B قطرية .

تعريف 4-32 :

نقول عن المصفوفة المربعة A المعرفة على الحقل العقدي C بأنّها نظامية إذا تحقق الشرط :

$$AA^*=A^*A$$

استنتاج 4-33 :

إذا كان T مؤثراً خطياً على فضاء واحدي فإن الشرط اللازم الكافي لكي يمكن تمثيل T بالنسبة لقاعدة متعامدة قياسية بمصفوفة قطرية هو أن تكون كل مصفوفة ممثلة لـــ T بالنسبة لقاعدة متعامدة قياسية عبارة عن مصفوفة نظامية .

مثال :

لندرس مسألة إيجاد مصفوفة واحدية U بحيث إن :

$$U^{-1}AU=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$$

علماً أنّ A مصفوفة نظامية من الشكل :

$$A=\begin{bmatrix}\frac{2+i}{2} & 0 & \frac{-2+i}{2}\\ 0 & i & 0\\ \frac{-2+i}{2} & 0 & \frac{2+i}{2}\end{bmatrix}$$

إن الشرط ... $diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ ...

$$AU_j=\lambda_j U_j,\ j=1,2,3$$

حيث U_j هو العمود ذو الرقم j في المصفوفة $U=\left[u_{ij}\right]_{nxn}$.

وهذا يعني أنّ U_j متجه ذاتي للمصفوفة A موافقاً للقيمة الذاتية λ_j .

نلاحظ أن أعمدة المصفوفة الواحدية U هي عبارة عن إحداثيات متجهات قاعدة متعامدة قياسية مكونة من المتجهات الذاتية للمصفوفة A .

إذن لإيجاد المصفوفة U الواحدية نبحث عن الفضاءات الجزيئة المميزة V_{λ_i} ونشكل في هذه الفضاءات V_{λ_i} قواعد متعامدة قياسية. ولتحقيق ذلك نجد كثيرة الحدود المميزة لـ A وهي :

$$det(A-xI)=-(x-i)^2(x-2)$$

حيث إن I هي مصفوفة الوحدة.

وبحل جملة المعادلات الخطية المتجانسة $(A-\lambda I)X=0$ من أجل $\lambda_3=2$ فنحصل على جملة الحلول :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نأخذ $x_3=\sqrt{3}+i$ فنحصل على قاعدة متعامدة قياسية في V_{λ_3} مكونة من المتجه

$$U_3=(\frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{2}},0,\frac{-\sqrt{3}+i}{2\sqrt{2}})$$

وبحل جملة المعادلات الخطية المتجانسة $(A-\lambda I)X=0$ من أجل $\lambda_1=\lambda_2=i$ فنحصل على مجموعة الحلول :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نحصل على المتجه $U_2 = (1,i,1)$.

وبتطبيق طريقة غرام شميدت في التعميد نحصل على قاعدة متعامدة قياسية في الفضاء المميز V_{λ_2} وهي :

$$\left\{\left(\frac{i}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{i}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2i}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$$

ونستطيع تشكيل المصفوفة الواحدية U بالشكل التالي :

$$U=[U_1,U_2,U_3]=\begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2i}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-\sqrt{3}+i}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

وهي المصفوفة الواحدية التي تحقق العلاقة $U^{-1}AU = diag\,\{i,i,2\}$

نظرية 34-4 :

لتكن A مصفوفة حقيقية من القياس $n\times n$ عندئذ الشرط اللازم و الكافي لكي تتشابه A عمودياً مع مصفوفة قطرية هو أن تكون A متناظرة .

البرهان :

يجري البرهان بالتدريج، فإذا كانت $n=1$ فالنظرية واضحة .

نفرض الآن أن النظرية صحيحة من أجل جميع المصفوفات من القياس $k\times k$ حيث $n>k$ ثم نفرض A مصفوفة حقيقية متناظرة من القياس $(k+1)\times(k+1)$.

و ليكن T مؤثراً خطياً على الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}^{k+1}$ بحيث إن A تمثله بالنسبة للقاعدة القانونية ε_{k+1} .

و لتكن λ قيمة ذاتية لـــ T و بالتالي فإن λ قيمة حقيقية توافق متجهاً ذاتياً v من $\mathbb{R}^{k+1}$ للمؤثر T .

[illegible] $\| v \|$ [illegible]

بحيث أن $\| v_1 \| = 1$ و يمكننا توسيع المجموعة $\{v_1\}$ إلى قاعدة متعامدة قياسية B بحيث إن :

$$\mathrm{B} = \{ v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{k+1} \}$$

و تكون مصفوفة الانتقال P_1 من القاعدة القانونية ε_{k+1} إلى القاعدة B عبارة عن مصفوفة متعامدة . و المصفوفة الممثلة لـــ T بالنسبة للقاعدة B هي :

$$A_1 = P_1^{-1} A \; P_1$$

و من جهة ثانية لدينا :

$$T(v_1) = \lambda v_1 + 0.v_2 + \ldots + 0.v_{k+1}$$

إذن للمصفوفة A_1 الشكل التالي :

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \vdots & 0 \\ \ldots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & A_2 \end{bmatrix}$$

إن عناصر الزاوية اليمنى العلوية تساوي الصفر بسبب أن A_1 متناظرة ، و ينتج مما تقدم أن :

$$A_1 = P_1^{-1} A \; P_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \vdots & 0 \\ \ldots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & A_2 \end{bmatrix}$$

و لكن A_2 مصفوفة من القياس $k \times k$.

بحسب الفرض التدريجي توجد مصفوفة متعامدة Q من القياس $k \times k$ بحيث إن :

$$Q^{-1} A_2 Q = diag\{ \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_{k+1} \}$$

و من السهل ملاحظة أنّ المصفوفة التالية متعامدة :

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & Q \end{bmatrix}$$

و تحقق العلاقة التالية :

$$P_2^{-1}A_1P_2 = P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 = diag\{\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{k+1}\ \}$$

و من جهة ثانية فإن المصفوفة P_1P_2 متعامدة لأن :

$$(P_1P_2)^T = P_2^TP_1^T = P_2^{-1}P_1^{-1} = (P_1P_2)^{-1}$$

إذن المصفوفة المتعامدة $P = P_1P_2$ هي المصفوفة المطلوبة التي تحقق الشرط :

$$P^{-1}A\ \ P = diag\{\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{k+1}\ \}$$

و بالعكس نفرض أنّ A مصفوفة حقيقية مربعة مشابهة عمودياً لمصفوفة قطرية .

عندئذ توجد مصفوفة متعامدة P بحيث إن :

$$P^{-1}A\ \ P = P^TA\ \ P = D$$

حيث D مصفوفة قطرية و ينتج من ذلك أن :

$$A = PDP^T \Rightarrow A^T = PD^TP^T = PDP^T = A$$

و هذا يعني :

$$A^T = A$$

أي أن A متناظرة .

استنتاج 4-35 :

التحويل الخطي T على فضاء إقليدي V يمكن تمثيله بمصفوفة قطرية بالنسبة لقاعدة متعامدة قياسية في V إذا و فقط إذا كانت كل مصفوفة ممثلة لـ T بالنسبة لقاعدة متعامدة قياسية في V عبارة عن مصفوفة متناظرة .

استنتاج 4-36 :

يمكن تحويل كل صورة تربيعية حقيقية q حيث $q(v) = X^TA\ \ X$ إلى تمثيل قطري :

$$q(v) = Y^T(P^TAP)Y = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + ...+ \lambda_ny_n^2$$

إذا كانت P هي مصفوفة الانتقال من ε_n إلى القاعدة $\mathcal{A}$، فباستخدام التحويل المتعامد $X = PY$، نجد أنه من أجل كل $\mathbb{R}^n \ni v = (x_1, ..., x_n)$

المتعامدة القياسية A.

ملاحظة 37-4 :

لتكن A مصفوفة حقيقية متناظرة .فإذا كانت λ_s, λ_r قيمتين ذاتيتين لـــ A بحيث إنّ $\lambda_r \neq \lambda_s$ واذا كان P_s, P_r متجهين ذاتيتين لـــ A موافقين للقيمتين λ_s, λ_r على الترتيب ، عندئذٍ يكون $P_r^T P_s = 0$.

البرهان :

بما أن P_s, P_r متجهان ذاتيان موافقان لـــ λ_s, λ_r على الترتيب إذن :

$$AP_s = \lambda_s P_s \quad \text{و} \quad AP_r = \lambda_r P_r$$

وينتج من ذلك أن :

$$P_r^T AP_s = P_r^T(\lambda_s P_s) = \lambda_s P_r^T P_s \Rightarrow$$
$$\left(P_r^T AP_s\right)^T = P_s^T AP_r = P_s^T(\lambda_r P_r)$$
$$= \lambda_r P_s^T P_r = \lambda_r (P_r^T P_s)^T$$

وبما أن $P_r^T AP_s$ و $P_r^T P_s$ مصفوفتان من القياس (1×1) . أي تحوي كل منهما عنصر واحد .

إذن :

$$(P_r^T P_s)^T = P_r^T P_s \quad \text{و} \quad (P_r^T AP_s)^T = P_r^T AP_s$$

وبالتالي فإن :

$$\lambda_r P_r^T P_s = \lambda_s P_r^T P_s \Rightarrow$$
$$(\lambda_r - \lambda_s) P_r^T P_s = 0$$

وبما أن:

$$\lambda_r \neq \lambda_s$$

إذن :

$$P_r^T P_s = 0$$

انقل الصورة التربيعية الآتية :

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$$

إلى المحاور الرئيسية ثم أوجد التحويل المتعامد الذي تمّ بواسطته نقل الصورة التربيعية .

الحـــل :

يكون للمصفوفة A لهذه الصورة التربيعية الشكل الآتي :

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ثم نجد كثيرة حدودها المميزة :

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$$

إذن القيم الذاتية لـــ A هي $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ و $\lambda_4=3$ وبالتالي تستطيع كتابة تلك الصورة القانونية التي تتحول إليها الصورة التربيعية q كما يلي :

$$q=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2$$

لإيجاد التحويل المتعامد الذي يتم بواسطته نقل الصورة إلى المحاور الرئيسية، نكتب جملة المعادلات الخطية المتجانسة $(A-\lambda I)x=0$ من أجل $\lambda=1$ على الشكل التالي :

$$\begin{aligned} -x_1+x_2+x_3-x_4&=0 \\ x_1-x_2-x_3+x_4&=0 \\ x_1-x_2-x_3+x_4&=0 \\ -x_1+x_2+x_3-x_4&=0 \end{aligned}$$

إنّ للجملة السابقة ثلاثة حلول مستقلة خطياً وهي على سبيل المثال المتجهات الآتية :

$$b_1=(1,\ 1,\ 0,\ 0)$$
$$b_2=(1,\ 0,\ 1,\ 0)$$
$$b_3=(-1,\ 0,\ 0,\ 1)$$

$$c_1 = b_1 = (1,1,0,0)$$

$$c_2 = -\frac{1}{2}c_1 + b_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)$$

$$c_3 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + b_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$$

ومن ناحية ثانية يكون لمجموعة المعادلات الخطية المتجانسة $(A - \lambda I)X = 0$ من أجل $\lambda = -3$ الشكل التالي :

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

ولهذه الجملة حل وحيد غير صفري وهو المتجه التالي : $c_4 = (1,-1,1,1)$ وبحسب الملاحظة السابقة (37-4) تكون مجموعة المتجهات c_1, c_2, c_3, c_4 متعامدة . وبجعلها مجموعة قياسية نحصل على المجموعة المتعامدة القياسية التالية :

$$c'_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$$

$$c'_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$$

$$c'_3 = (-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$c'_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

وعلى هذا الأساس تنتقل الصورة التربيعية q إلى المحاور الرئيسية بواسطة التحويل المتعامد التالي :

$$y_2 \quad \sqrt{6}\,x_1 \quad \sqrt{6}\,x_2 + \sqrt{3}\,x_3$$

$$y_3 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_4$$

$$y_4 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

وجدير بالذكر أن اختيار مجموعة المتجهات الذاتية المستقلة خطياً والمنتسبة إلى القيمة الذاتية المكررة يكون كيفياً لدرجة كبيرة ولهذا يوجد عدد كبير من التحويلات المتعامدة المختلفة التي تنقل الصورة التربيعية q إلى الصورة القانونية وقد وجدنا واحداً فقط من هذه التحويلات المتعامدة .

7-4 – المؤثرات الخطية النظامية :

مبرهنة 4-38 :

إذا كان V فضاءً إقليدياً و v,u متجهين من V وإذا كان $(u,x)=(v,x)$ من أجل جميع المتجهات x من V، فإن $u=v$.

البرهان :

ينتج من المساواة $(u,x)=(v,x)$ أن $(u-v,x)=0$ من أجل كل x من V .

فإذا عوضنا عن x بالمتجه $u-v$ في هذه المساواة نجد أن :

$$(u-v,u-v)=0$$

وبالتالي فإن :

$$u-v=0$$

أو:

$$u=v$$

نفرض الآن T مؤثر خطي على الفضاء الإقليدي V. سنبرهن أنه من أجل أي متجه ثابت y من V يكون الجداء الداخلي $(T(x),y)$ تابعاً خطياً بالنسبة للمتحول x .

بالحقيقة لدينا من أجل أي متجهين x_1,x_2 من V وأي عنصر α من $\mathbb{R}$ مايلي:

$f_y(x_1+x_2)=(T(x_1+x_2),y)=(T(x_1)+T(x_2),y)$
$$=(T(x_1),y)+(T(x_2),y)=f_y(x_1)+f_y(x_2)$$
و أيضاً :

$$f_y(ax)=(T(ax),y)=a(T(x),y)=af_y(x)$$

تعريف 4 - 39 :

من أجل كل مؤثر خطي T على الفضاء V ندعو التطبيق :

$$T^*:V\to V$$

بمرافق T إذا حقق الشرط التالي :

$$(T^*(v),u)=(v,T(u)) \qquad \forall u,v\in V$$

نظرية 4-40 :

من أجل كل مؤثر خطي T على V يكون مرافقة T^* خطياً .

البرهان :

$$\big(T(x),y+z\big)=\big(x,T^*(y+z)\big)$$

و أيضاً :

$$(T(x),y+z)=(T(x),y)+(T(x),z)=\big(x,T^*(y)\big)+\big(x,T^*(z)\big)$$

وينتج من ذلك أن :

$$\big(x,T^*(y+z)\big)=\big(x,T^*(y)+T^*(z)\big)$$

وبموجب المبرهنة (4-38) نجد أن :

$$T^*(y+z)=T^*(y)+T^*(z)$$

وبشكل مماثل إذا كان a من F و y و x من V فإن :

$$\big(T(x),ay\big)=\big(x,T^*(ay)\big)$$

و أيضاً :

$$\big(T(x),ay\big)=a\big(T(x),y\big)=a\big(x,T^*(y)\big)=\big(x,aT^*(y)\big)$$

وينتج من هذا ومن المبرهنة (4-38) أن :

$$T^*(ay)=aT^*(y)$$

T_1^* و T_2^* فيكون لدينا من أجل أي متجهه y,x من V :

$$\big(T(x),y\big)=\big(x,T_1^*(y)\big)=\big(x,T_2^*(y)\big)$$

وبموجب المبرهنة (38-4) نجد أن :

$$T_1^*(y)=T_2^*(y)\quad \forall y\in V$$

وهذا يعني أن $T_1^*=T_2^*$.

نظرية 41-4 :

بفرض أن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة المؤثر الخطي T بالنسبة للقاعدة المتعامدة القياسية $\mathcal{A}$ في V عندئذ تكون A^* هي مصفوفة T^* بالنسبة لـ $\mathcal{A}$.

البرهان :

نفرض $\mathcal{A}=\{v_1,v_2,......,v_n\}$ فنجد أن $T(v_i)=\sum_{K=1}^{n}a_{ki}v_k$ لأن A مصفوفة T بالنسبة لـ $\mathcal{A}$.

ثم نفرض أن $B=[b_{ij}]_{n\times n}$ مصفوفة T^* بالنسبة للقاعدة $\mathcal{A}$ فنجد أن $T^*(v_j)=\sum_{K=1}^{n}b_{kj}v_k$ لأن B مصفوفة T^* بالنسبة لـ $\mathcal{A}$.

من تعريف T* ينتج أن:

$$\big(T(v_i),(v_j)\big)=\big(v_i,T^*(v_j)\big)$$

ولكن :

$$\big(T(v_i),v_j\big)=\left(\sum_{K=1}^{n}a_{ki}v_k,v_j\right)=\sum_{K=1}^{n}\overline{a}_{ki}(v_k,v_j)=\sum_{K=1}^{n}\overline{a}_{ki}\delta_{ki}=\overline{a}_{ji}$$

و أيضاً :

$$\big(v_i,T^*(v_j)\big)=\left(v_i,\sum_{K=1}^{n}b_{kj}v_k\right)=\sum_{K=1}^{n}b_{kj}(v_i,v_k)=\sum_{K=1}^{n}b_{kj}\delta_{ik}=b_{ij}$$

وبالتالي فإن :

$$b_{ij}=\overline{a}_{ji}$$

$B = A^*$

سنبرهن فيما يلي أن مرافق المؤثر الخطي T^* هو T .

بالحقيقة لدينا :

$$(x,T^{**}(y)) = (T^*(x),y) =$$
$$= \left(\overline{Y,T^*(x)}\right) = \left(\overline{T(y),x}\right) = (x,T(y)) \quad \forall x,y \in V$$

وبموجب المبرهنة (4-38) نجد أن :

$$T^{**}(y) = T(y)$$

تمرين :

ليكن T مؤثراً خطياً على V و T^* مرافقة :

1- أثبت أنه إذا كان $\varphi(x)$ كثير الحدود المميز لـ T، فإن كثير الحدود المميز لـ T^* هو $\overline{\varphi}(x)$.

2- إذا كان V_1 فضاء جزئي ثابت بالنسبة لـ T، فإن متممة $V_1^{\perp}$ ثابت بالنسبة لـ T^* .

البرهان :

1- نفرض $A = [a_{ij}]$ مصفوفة ممثلة لـ T بالنسبة للقاعدة A في V عندئذٍ يكون لدينا :

$$\varphi(x) = det\ (A\text{-}xI) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

ويكون أيضاً كثير الحدود المميز لـ T^* هو :

$$det(A^* - xI) = det\left((\overline{A})^T - xI\right) = det(\overline{A} - xI)^T$$

$$det\ (\overline{A}\text{-}xI)=\begin{vmatrix} \overline{a}_{11}-x & \overline{a}_{12} & \cdots & \overline{a}_{1n} \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22}-x & \cdots & \overline{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{a}_{n1} & \overline{a}_{n2} & \cdots & \overline{a}_{nn}-x \end{vmatrix}=\overline{\varphi}(x)$$

2- إذا كان x متجهاً ما من $V_1^{\perp}$ و y متجهاً ما من V_1 ، عندئذٍ يكون لدينا :

$$(T^*(x), y)=(x, T(y))=0$$

لأن $T(V_1)=V_1$ أي أن $T(y) \in V_1$ وبالتالي فإن $T(y), x$ متجهان متعامدان .

وبما أن $(T^*(x), y)=0$ من أجل كل y من V_1 .

إذن $T^*(V) \in V_1^{\perp}$ من أجل كل x من $V_1^{\perp}$ وهذا يعني $T^*(V_1^{\perp}) \subseteq V_1^{\perp}$.

تعريف 4-42 :

ندعو المؤثر الخطي T المساوي لمرافقه (أي أن $T=T^*$) بالمؤثر المرافق لذاته .

فإذا كان المؤثر المرافق لذاته معرفاً على فضاء خطي حقيقي فإننا ندعوه بمؤثر متناظر وإذا كان معرفاً على فضاء خطي عقدي فندعو بمؤثر هيرميتي .

تعريف 4-43:

نقول عن المؤثر الخطي T أنه نظامي إذا وفقط إذا كان $TT^*=T^*T$.

فإذا كانت A مصفوفة T بالنسبة للقاعدة المتعامدة القياسية A في V، فإنّ مصفوفة T^*T بالنسبة للقاعدة A هي A^*A ومصفوفة TT^* بالنسبة للقاعدة A هي AA^* وينتج من ذلك أنّ الشرط اللازم الكافي ليكون المؤثر الخطي T المعرف على V نظامياً هو أن تكون كل مصفوفة لـ T بالنسبة لقاعدة متعامدة قياسية من V عبارة عن مصفوفة نظامية .

نظرية 4 -44 :

إذا كان T مؤثراً خطياً على الفضاء الواحدي V فإن الشرط اللازم الكافي لتمثيل T بمصفوفة قطرية بالنسبة لقاعدة متعامدة قياسية في V هو أن يكون T نظامياً .

تنتج هذه النظرية مباشرة من الاستنتاج (4-33) .

إذا كان T مؤثراً خطياً على فضاء واحدي V فالشرط اللازم الكافي ليكون T نظامياً على V هو أنْ توجد قاعدة متعامدة قياسية في V ،مكونة كلياً من المتجهات الذاتية لـ T .

البرهان :

وجدنا في النظرية السابقة أن T يكون نظامياً إذا وفقط إذا كان بالإمكان تمثيل T بالنسبة لقاعدة مُتعامدة قياسية بمصفوفة قطرية. وبالرجوع إلى برهان النظرية (2-16) نجد أن $A=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ تكون قاعدة من المتجهات الذاتية لـ T في V إذا وفقط إذا كانت مصفوفة T بالنسبة لهذه القاعدة A قطرية .

نظرية 4-46 :

الشرط اللازم الكافي ليكون العدد λ قيمة ذاتية لمؤثر خطي نظامي T حيث v متجه ذاتي موافق للقيمة λ هو أن تكون $\bar{\lambda}$ قيمة ذاتية لـ T^* حيث v متجه ذاتي موافق لـ $\bar{\lambda}$ بالنسبة لـ T^*.

نترك البرهان كتمرين .

نظرية 4-47 :

لتكن A مصفوفة نظامية من القياس $n\times n$ ،فإذا كانت λ_S,λ_r قيمتين ذاتيتين لـ A بحيث إنّ $\lambda_r\neq\lambda_S$ ،وإذا كان U_S,U_r متجهين ذاتيين موافقين لـ λ_S,λ_r على الترتيب فإن :

$$U_r^*U_S=0$$

البرهان :

ليكن V فضاء خطياً عدد أبعاده n ومعرفاً عليه جداءً داخلياً ثم لتكن A قاعدة متعامدة قياسية في V.

نفرض T مؤثر خطي على V مصفوفته A بالنسبة للقاعدة A .

ذاتي للمؤثر T موافق لنفس القيمة الذاتية هذه .

إذن U_S, U_r مصفوفتان إحداثيتان للمتجهين الذاتيتين V_s, V_r الموافقين للقيمتين الذاتيتين λ_S, λ_r على الترتيب.

من السهل البرهان على أنّ الشرط $(V_r, V_s) = 0$ يكافئ $U_r^* U_s = 0$ وباستخدام النظرية (4-45) نجد أنّ $\bar{\lambda}$ قيمة ذاتية للمؤثر T* ويوافقها المتجه الذاتي V_r أي أن:

$$T^*(V_r) = \bar{\lambda}_r V_r$$

وينتج من ذلك :

$$\left(T^*(V_r), V_s\right) = \left(\bar{\lambda}_r V_r, V_s\right) = \lambda_r (V_r, V_s)$$

ومن جهة ثانية لدينا :

$$\left(V_r, T(V_s)\right) = (V_r, \lambda_s V_s) = \lambda_s (V_r, V_s)$$

وبما أن T^* مرافق T .

إذن :

$$\left(T^*(V_r), V_s\right) = \left(V_r, T(V_s)\right)$$

وهذا يؤدي بدوره إلى أن :

$$\lambda_s (V_r, V_s) = \lambda_r (V_r, V_s)$$

أو :

$$(\lambda_r - \lambda_s)(V_r, V_s) = 0$$

وبما أن :

$$(\lambda_r - \lambda_s) \neq 0$$

إذن :

$$(V_r, V_s) = 0$$

أو :

$$U_r^* U_s = 0$$

مثال :

لنأخذ مسألة إيجاد مصفوفة واحدية U بحيث إنّ $U^{-1}AU$ مصفوفة قطرية علماً أن A مصفوفة نظامية على الشكل التالي :

$$A=\begin{bmatrix} \frac{2+i}{2} & 0 & \frac{-2+i}{2} \\ 0 & i & 0 \\ \frac{-2+i}{2} & 0 & \frac{2+i}{2} \end{bmatrix}$$

إن كثير الحدود المميز لهذه المصفوفة هو :

$$det(A-xI)=-(x-i)^2(x-2)$$

فمن أجل القيمة الذاتية $x = 2$ نحل جملة المعادلات الخطية $(A-2I)X=0$ ونأخذ المصفوفة الموسعة $[A\text{-}2I\ ,\ 0]$ فنحصل على المصفوفة المكافئة لها بإجراء العمليات الأولية على الأسطر وهي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وتكون المتجهات الذاتية لـ A في الفضاء المميز الجزئي $V_2 \subseteq C^3$ من الشكل $x_3(-1, 0, 1)$. وهذا يعني أنّ الفضاء المميز الجزئي لـ V_2 يملك قاعدة متعامدة قياسية مكونة من متجه وحيد.

ولكن من أجل إيجاد U الواحدية نبحث عن قاعدة متعامدة قياسية في V_2 .

لذلك نختار $x_3=-\sqrt{3}+i$ فنحصل على قاعدة متعامدة قياسية في V_2 مكونة من المتجه الوحيد :

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{2}},0,\frac{-\sqrt{3}+i}{2\sqrt{2}}\right)\right\}$$

وأما من أجل القيمة الذاتية $x = i$ فإن حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة $(A\text{-}i)X=0$ يؤدي إلى مجموعة الحلول $x_2(0, 1, 0)+x_3(1, 0, 1)$.

$x_2 = i, x_3 = 1$ نحصل على المتجه الذاتي $(1, i, 1)$ وباستخدام طريقة غرام شميدت في التعميد نحصل من القاعدة $\{(i,1,i),(1,i,1)\}$ على قاعدة متعامدة قياسية للفضاء الجزئي المميز V_i من الشكل :

$$\left\{\left(\frac{i}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{i}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2i}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$$

وبالتالي فإن المصفوفة الواحدية U المطلوبة هي :

$$U=\begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2i}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-\sqrt{3}+i}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

بحيث أن:

$$U_r U_s = 0$$

وبالتالي :

$$(V_r, V_s) = 0$$

كما أن :

$$U^{-1}AU = diag(i,i,2)$$

الفصل الخامس

5-1- المساقط والمجموع المباشر :

وجدنا في النظرية (4-18) إنه إذا كان V فضاءً متجهاً عدد أبعاده منته ومعرف عليه جداء داخلي فيمكن تفريق V إلى مجموع مباشر .

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

حيث W فضاء جزئي كيفي في V و $W^{\perp}$ المتم العمودي لـــ W وكل متجه v من V يكتب بشكل وحيد $v = v_1 + v_2$ حيث $v_1 \in W$ و $v_2 \in W^{\perp}$.

يدعى المؤثر الخطي المعرف بالعلاقة $P(v) = v_1$ بمسقط V على W بجوار $W^{\perp}$.

في الفصل الحالي سنعمم المسألة على أي مجموع مباشر $V = W_1 + W_2$ (ليس بالضرورة وجود جداء داخلي على V) .

يمكن كتابة كل متجه $v \in V$ بشكل وحيد كمجموع مباشر $V = v_1 + v_2$ حيث $v_i \in W_i$ والتطبيق $P(v) = v_1$ مؤثر خطي على V، هذا و يدعى P بمسقط V على W_1 بجوار W_2 .

ولتفريق الحالة العامة عن الحالة الخاصة عندما يكون $W_2 = W^{\perp}$ ندعو P في الحالة $W_2 = W^{\perp}$ بالمسقط العمودي لـــ V على W_1 . فمن أجل أي متجه $v = v_1 + v_2$ من V يكون :

$$P^2(v_1 + v_2) = P(v_1) = v_1 = P(v_1 + v_2)$$

وبالتالي فإن لـــ P الخاصة $P^2 = P$.

تعريف (5-1) :

نقول عن المؤثر الخطي T على V بأنّه عديم القوة إذا كان $T^2 = T$.

لقد وجدنا فيما تقدم أن المسقط P لـــ V على W_1 بجوار W_2 عديم القوة و $W_1 = P(V)$ و $W_2 = P^{-1}(0)$ وسنبرهن أنّ العكس صحيح في النظرية الآتية .

إذا كان T مؤثراً خطياً على V، عندئذٍ يكون T مسقطاً لــ V على $T(V)$ بجوار $T^{-1}(0)$.

البرهان :

نفرض أنّ $T^2 = T$ عندئذٍ من أجل كل متجه u من $T(V)$ يوجد $v \in V$ بحيث إن $u = T(v)$. إذن :

$$T(u) = T^2(v) = T(v) = u$$

وبالتالي يؤثر T على $T(V)$ كتحويل وحدة (حيادي بالنسبة للضرب) إذن من أجل كل متجه v من $T(V) \cap T^{-1}(0)$ نجد أن $T(v) = v$ و $T(v) = 0$ أي أن $v = 0$ وهذا يعني أن $T(V) + T^{-1}(0)$ مجموع مباشر .

نشير بــ Z للتحويل الخطي الصفري و بــ I لتحويل الوحدة .

وليكن v متجهاً كيفياً مــن V و $v_1 = T(v)$ و $v_2 = (I-T)(v)$ واضــح أن $v_1 \in T(V)$ و $v_2 \in T^{-1}(0)$ لأن :

$$T(v_2) = (T - T^2)(v) = Z(v) = 0$$

وبما أن :

$$v = T(v) + (I - T)(v) = v_1 + v_2$$

إذن :

$$V = T(V) + T^{-1}(0)$$

وبالتالي فإن T مسقط V على $T(V)$ بجوار $T^{-1}(0)$.

إذن يكون T مسقطاً عندما وعندما فقط $T^2 = T$.

لــيكن $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots\ldots \oplus W_r$ ولــيكن $v = v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_r$ حيــث $v_i \in W_i$ مــن أجــل كــل $i = 1, 2, \ldots\ldots, r$ ســنعرف P_i بالعلاقــة $P_i(v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_r) = v_i$، عندئذٍ ستحقق المجموعة $\{P_1, P_2, \ldots\ldots P_r\}$ الشروط الآتية :

2) $P_iP_j = Z$ إذا كان $i \neq j$.

3) $P_1 + P_2 + ... + P_r = I$

واضح أن كل P_i مسقط لأن :

$$\forall v \in V : P_i^2(v) = P_i(v_i) = P_i(v)$$

وإذا كان $i \neq j$ و $v \ni V$ فإن :

$$P_iP_j(v) = P_i(v_j) = 0 = Z(v)$$

ومن أجل أي متجه $v = v_1 + v_2 + ...v_r$ من V لدينا :

$$v = P_1(v) + P_2(v) + ... + P_r(v) = (P_1 + P_2 + ...P_r)(v)$$

وهذا يعني أن : $P_1 + P_2 + ... + P_r = I$.

تعريف 3-5 :

تدعى مجموعة المساقط $\{ P_1, P_2, ...P_r \}$ بمجموعة متعامدة إذا حققت الشرط $P_iP_j = Z$ من أجل كل $i \neq j$.

وتدعى مجموعة المساقط المتعامدة $\{ P_1, P_2, ...P_r \}$ غير الصفرية والتي تحقق الشرط $P_1 + P_2 + ... + P_r = I$ بمجموعة تامة من المساقط لـــ V .

نقول عن المسقطين P_1, P_2 إنهما متعامدان إذا كانت $\{ P_1, P_2 \}$ مجموعة متعامدة أي إذا كان $P_1P_2 = Z = P_2P_1$.

لقد وجدنا فيما تقدم أنّ كل منشور (تحليل) كمجموع مباشر من الشكل : $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ..... \oplus W_r$.

يعرّف مجموعة تامة من المساقط $\{ P_1, P_2, ...P_r \}$ لـــ V بحيث أن $P_i(v) = v_i$ مهما يكن $v = v_1 + v_2 + ...v_r$ حيث $v_i \ni W_i$.

والعكس صحيح أيضاً فإذا كانت $\{P_1, P_2, ...P_r\}$ مجموعة تامة من المساقط لـــ V، عندئـــذٍ يكـــون $V = P_1(V) \oplus ..... \oplus P_r(V)$ و $P_j(v) = v_j$ مهمـــا يكـــن $v = v_1 + ...v_r$ حيث $v_i \ni P_i(v)$.

إذن من أجــل $v \ni V$ يكــون $v = P_1(v) + ... + P_r(v)$ لأن $P_1 + P_2 ..... + P_r = I$

وبالتالي يكون $V = P_1(V) + ... + P_r(V)$.

وللبرهان أن هذا المجموع مباشر نفرض :

$$w = P_i(u_1) = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{r} P_j(u_2)$$

حيث w من التقاطع $P_i(V) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{r} P_j(V)$

عندئذٍ يكون :

$$w = P_i(u_1) = P_i^2(u_1) = P_i(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} P_j(u_2)) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} P_i P_j(u_2) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} Z(u_2) = 0$$

إذن المجموع السابق مباشر .

واضح أنّ $P_j(v) = v_j$ مهما يكن $v = v_1 + ...v_r$ حيث $P_i(v) \ni v_i$.

تعريف 4-5 :

يقال إنّ المجموعة التامة من المساقط $\{ P_1, P_2, ...P_r \}$ لـــ V ومنشـــور(تحليـــل) المجموع المباشر $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ..... \oplus W_r$ كل منهما موافق للآخر .

إذا كان $P_j(v) = v_j$ مهمـــا يكـــن $V \ni v$ و الـــذي يكتـــب بشـــكل وحيـــد $v = v_1 + v_2 + ...v_r$ حيـــــث $W_i \ni v_i$ عندئـــــذ يتوافـــق المجمـــــوع $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ..... \oplus W_r$ مع $\{ P_1, P_2, ...P_r \}$

إذا وفقط إذا كان $P_j(V) = W_j$ و P_j يؤثر على W_j كتطبيق مطابق .

مثال :

نفرض $V = R^n$ ونعرف P_i بالشكل:

$$P_i(a_1, a_2, ..., a_n) = a_i e_i = (0, ...a_i, 0...., 0) \;\; ; i = 1, 2, ..., n$$

فنلاحظ أنّ $\{P_1, P_2, ...P_r\}$ مجموعة تامة من المساقط لـــ R^n ويمكن تعمـــيم هـــذه الحالة مباشرة على أي فضاء متجه V عدد أبعاده n .

عندئذٍ تكون $\{ P_1, P_2, ... P_r \}$ مجموعة تامة من المساقط لـــ V .

نظرية 5-5 :

كل قيمة ذاتية للمسقط P تساوي 0 أو 1 .

البرهان :

نفرض λ قيمة ذاتية للمسقط P ونفرض v متجه ذاتي لـــ P موافق للقيمة الذاتية λ .

عندئذٍ يكون :

$$(P - \lambda)(v) = 0$$

و أيضاً :

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\lambda v &= (1-\lambda)P(v) \\ &= (P - \lambda P)(v) \\ &= (P^2 - \lambda P)(v) \\ &= P\big((P - \lambda)(v)\big) \\ &= P(0) = 0\end{aligned}$$

بما أنّ $v \neq 0$, إذن $(1-\lambda)\lambda = 0$ ومنه إما $\lambda = 0$ أو $\lambda = 1$.

إن $P(V)$ يشبه الفضاء المميز لـــ P الموافق للقيمة الذاتية 1 و $V = P(V) \oplus p^{-1}(0)$ فـــإذا وســـعنا القاعـــدة $\{ v_1 + v_2 + ... v_r \}$ في $P(V)$ إلى القاعـــدة $A = \{ v_1, v_2, ... v_r, v_{r+1}, ... v_n \}$ في V بحيـــث إن $\{ v_{r+1}, ... v_n \}$ قاعـــدة لـــــ $p^{-1}(0)$ ، عندئذٍ تكون مصفوفة P بالنسبة لـــ A هي :

$$D_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وأي تغير في v_i من A يؤدي إلى تغير العناصر على القطر الرئيسي في D_r بحيث إنّ الواحد على القطر الرئيسي في D_r يمكن أن يتوضع في مكان آخر من القطر الرئيســـي لـــ D_r .

إن مجموع مسقطين لا يمثل في الحالة العامة مسقطا وبالتالي فإن مجموعة المساقط ليس فضاءً جزئياً في فضاء المؤثرات الخطية ولكن ليس هدفنا هذا وإنما الفضاء الجزئي الذي تولده المجموعة التامة من المساقط .

نظرية 5-6 :

نفرض $\{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$ مجموعة تامة من المساقط لـ V ونفرض $T = c_1P_1 + c_2P_2 + \ldots + c_rP_r$ حيث c_i عناصر عددية ، عندئذٍ يكون كل c_i قيمة ذاتية لـ T و يكون كل متجه ذاتي v_i لـ P_i موافق للقيمة الذاتية 1 متجهاً ذاتياً لـ T موافقاً لـ c_i .

البرهان :

ليكن v_i متجهاً ذاتياً لـ P_i موافقاً للقيمة الذاتية 1 أي أن $P_i(v_i) = v_i$.

فمن أجل كل $i \neq j$ يكون $P_j(v_i) = P_j\big(P_i(v_i)\big) = 0$.

إذن :

$$T(v_i) = c_1P_1(v_i) + c_2P_2(v_i) + \ldots + c_rP_r(v_i)$$
$$= c_iP_i(v_i) = c_iv_i$$

وهذا يعني أن c_i قيمة ذاتية لـ T إضافة لذلك فإن v_i متجه ذاتي لـ T موافق للقيمة c_i .

نظرية 5-7 :

تولد المتجهات الذاتية للمجموعة التامة من المساقط الفضاء المتجه V .

البرهان :

لتكن $\{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$ مجموعة تامة من المساقط لـ V ومن أجل أي متجه $v \in V$ نأخذ المتجه $P_i(v)$.

بما أن :

$$P_i\big(P_i(v_i)\big) = P_i^2(v) = P_i(v)$$

إذن $P_i(v)$ متجه ذاتي لـ P_i ما لم يكن $P_i(v) = 0$.

$$P_1+P_2+.....+P_r=I$$

إذن :

$$P_1(v)+P_2(v)+.....+P_r(v)=v$$

ولكن $P_1(V)+P_2(V)+.....+P_r(V)$ تركيب خطـــي مـــن المتجهـــات الذاتيـــة لـــ $P_1,P_2,....P_r$ وبذلك تم البرهان .

نظرية 5-8 :

ليكن T مؤثراً خطياً على V ولتكن $\lambda_1,\lambda_2,.......,\lambda_r$ قيمه الذاتية المختلفة فيما بينها، عندئذ الشرط اللازم الكافي ليكون T قطرياً هو أن يكون من الشكل :

$$T=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+.....\lambda_rP_r$$

حيث إنّ $\{P_1,P_2,....P_r\}$ هي المجموعة التامة للمساقط على V .

البرهان :

نفرض أن $T=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+.....\lambda_rP_r$ حيث إن $\{P_1,P_2,....P_r\}$ المجموعـــة التامة من المساقط لـــ V . ثم نفرض $A=\{v_1,v_2,.......v_n\}$ قاعدة في V ثم نأخـــذ المتجهات الآتية :

$$B=\{P_1(v_1),...,P_1(v_n),P_2(v_1)....,P_2(v_n),...,P_r(v_1),....,P_r(v_n)\}$$

فمن أجل كل متجه $v=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i$ يكون لدينا :

$$u=(P_1+P_2+.....P_r)(v)$$

$$=(P_1+P_2+.....P_r)(\sum_{i=1}^{n}a_iv_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}a_i\ P_i(v_i)$$

وهذا يعني أن B تولد V وبالتالي فإن B تحوي قاعدة $C=\{u_1,u_2,.....u_n\}$ لـــ V .

ولكن كل متجه u_k هو عنصر من B وبالتالي $u_k=p_j(v_i)$ وبما أن $u_k\neq 0$ إذن u_k متجه ذاتي لـــ P_j موافق للقيمة الذاتية 1 ويكون u_k متجهاً ذاتياً لـــ T موافقاً

لـــ T وبالتالي فإنّ T قطري (بحسب النظرية 2-16) .

وبالعكس نفرض T قطري ولتكن $\mathsf{B}=\{w_1,w_2,........,w_n\}$ قاعدة في V بحيث إنّ T يمثل بمصفوفة قطرية D بالنسبة لـــ B .

نلاحظ أن w_i متجهات ذاتية لـــ T (بحسب النظرية 2-16) وتكون العناصر القطرية في D هي القيم الذاتية λ_i للمؤثر الخطي T . وبحسب النظريـــة (2-20) يتســـاوى الجداء الهندسيّ للقيمة الذاتية λ_i مع جدائها الجبري m_i وهكذا فـــإن عـــدد أبعـــاد الفضاء المميــز $V_{\lambda i}$ يســـاوي m_i ، وبالتـــالي فـــإنّ المجمـــوع $\sum_{i=1}^{r}V_{\lambda i}$ مباشـــر (بحسب الاستنتاج 2-10) .

وبما أنّ $\sum_{i=1}^{r}m_i=n$ إذن يجب أن يكون $V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus ....\oplus V_{\lambda_r}$.

فإذا أخذنا $W_j=V_{\lambda_j}$ كما في التعريف (5 – 4) فإنّ مجموعة المساقط P_j تعـــرف مجموعة تامة من المساقط لـــ V .

و يكون لدينا من أجل كل متجه v من V :

$$v=v_1+v_2+........+v_r\ ;\ v_j=P_j(v)$$

وبما أنّ $v_j \in V_{\lambda_j}$ إذن $T(v_j)=\lambda_j v_j$ وبالتالي فإنّ :

$$\begin{aligned}T(v)&=T(v_1)+T(v_2)+.......+T(v_r)\\&=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+.......+\lambda_r v_r\\&=\lambda_1 P_1(v)+\lambda_2 P_2(v)+.......+\lambda_r P_r(v)\\&=(\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+........+\lambda_r P_r)(v)\end{aligned}$$

أي أنّ :

$$T=\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+.........+\lambda_r P_r$$

تعريف 5-9 :

إذا أمكن كتابة المؤثر الخطي T على V بالشكل :

$$T=\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+.........+\lambda_r P_r$$

مختلفة فيما بينها لـ T، عندئذٍ يدعى $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + ...\lambda_r P_r$ بمنشور (تحليل) طيفي لـ T

نظرية 10-5 :

إذا كان للمؤثر الخطي T منشوراً (تحليلاً) طيفياً $T = \lambda_1 P_1 + ...+ \lambda_r P_r$ عندئذٍ من أجل كل كثير حدود $f(x)$ يكون :

$$f(T) = f(\lambda_1)P_1 + f(\lambda_2)P_2 + ...+ f(\lambda_r)P_r$$

البرهان :

سنبرهن بالتدريج أن $T^i = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^i P_j$ من أجل كل عدد صحيح غير سالب i .

فمن أجل كل $i = 0$ و $i = 1$ تكون المساواة محققة .

نفرض الآن أن:

$$T^k = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^k P_j$$

فنجد أن :

$$T^{k+1} = (\sum_{j=1}^{r} \lambda_j^k P_j)(\sum_{m=1}^{r} \lambda_m P_m) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{m=1}^{r} \lambda_j^k \lambda_m P_j P_m$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^{k+1} P_j$$

إذن بالاستقراء يكون :

$$T^i = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^i P_j$$

من أجل كل عدد صحيح غير سالب i .

ومن أجل أي كثير حدود $f(x) = \sum_{i=0}^{s} c_i x^i$ نجد أن :

$$f(T) = \sum_{i=0} c_i (\sum_{j=1} \lambda^i_j P_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{r} (\sum_{j=1}^{r} c_i \lambda^i_j) P_j$$
$$= \sum_{j=1}^{r} f(\lambda_j) P_j$$

نظرية 5-11 :

إذا كان $T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + ... + \lambda_r P_r$ منشوراً (تحليلاً) طيفياً لـــ T عندئـــذ يكون $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus .... \oplus V_{\lambda_r}$ و P_j مسقط V على V_{λ_j} بجوار $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} V_{\lambda_i}$.

البرهان :

بما أنّ :

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + ... + \lambda_r P_r$$

منشور(تحليل) طيفـــي لـــ T إذن T قطـــري و $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus .... \oplus V_{\lambda_r}$ (بحسب نظرية 5-8) .

وبما أنّ :

$$I = P_1 + P_2 + ... + P_r$$

إذن :

$$v = P_1(v) + P_2(v) + ... + P_r(v) \quad \forall v \in V$$

ولكن $P_j(v) \in V_{\lambda_j}$ لأنّ :

$$T\big(P_j(v)\big) = (\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i)\big(P_j(v)\big) = \lambda_j \big(P_j(v)\big)$$

وهذا يعني أنّ $P_j(V) \subseteq V_{\lambda_j}$ وبالتالي فإنّ :

$$\dim P_j(V) \leq \dim V_{\lambda_j}$$

إذن :

$$n = \sum_{j=1}^{r} \dim P_i(V) \leq \sum_{j=1}^{r} \dim V_{\lambda_j} = n$$

$$\dim p_j(V) = \dim V_{\lambda_j} \quad \forall j = 1,2,......,r$$

وينتج من ذلك أنّ $P_j(V) = V_{\lambda_j}$ من أجل كل $j = 1,2,....r$ إذن P_j مسقط V على V_{λ_j} بجوار مجموع الفضاءات المميزة الأخرى .

نظرية 5-12 :

ليكن V فضاءً متجهاً ذو جداء داخلي و $\dim V = n$ وليكن T مؤثراً خطياً على V، عندئذ يمكن تمثيل T بمصفوفة قطرية منسوبة لقاعدة متعامدة قياسية في V إذا وفقط إذا كان لـ T منشوراً (تحليلاً) طيفياً بحيث إنّ المساقط جميعها مؤثرات مرافقة لنفسها .

البرهان :

بالرجوع إلى النظريتين (2-16) و (5-8) يكفي أن نبرهن على أنّه توجد قاعدة متعامدة قياسية من المتجهات الذاتية لـ T إذا وفقط إذا كان المؤثر الخطي T على منشوراً (تحليلاً) طيفياً بحيث إنّ كل مسقط هو مؤثر مرافق لنفسه .

نفرض أن $T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + ... + \lambda_r P_r$ منشور طيفي لـ T بحيث أن كل P_j مؤثر مرافق لنفسه ثم لتكن $\mathsf{B}_j = \left\{ u_{j_1}, u_{j_2}, ...u_{j_{n_j}} \right\}$ قاعدة متعامدة قياسية للفضاء المميز V_{λ_j} من أجل كل $j = 1,2,...r$ وكما في برهان النظرية (2-20) فإنّ مجموعة المتجهات $\mathsf{B} = \left\{ u_{1_1},..., u_{1_{n_1}}, u_{2_1},....u_{2n_2},....., u_{r_1},....u_{r_{n_r}} \right\}$ تشكل قاعدة لـ V وسنبرهن على أن B متعامدة قياسية .

بالرجوع إلى النظرية (5-11) نجد أنّ P_j مسقط لـ V على V_{λ_j} بجوار $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} V_{\lambda_j}$

إذن $P_j(v) = v$ من أجل كل $v \ni V_{\lambda_j}$ وهذا يعني أنّ كل متجه غير صفري من V_{λ_j} هو متجه ذاتي لـ P_j موافق للقيمة الذاتية 1 وبالتالي فإنّ :

$$\begin{aligned} (u_{i_t}, u_{j_s}) = \left(P_j(u_{i_t}), P_j(u_{j_s})\right) &= \left(u_{i_t}, P_i^{*} P_j(u_{j_s})\right) \\ &= \left(u_{i_t}, P_i P_j(u_{j_s})\right) \\ &= (u_{i_t}, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

وبالعكس نفرض أنّه توجد قاعدة متعامدة قياسية في V مؤلفة من المتجهات الذاتية لـ T ، كما برهنا في النظرية (2-8) يكون:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus .... \oplus V_{\lambda_r}$$

وتكون مجموعة المساقط $\{P_1, P_2, ... P_r\}$ مجموعة تامة لـ V ويكون $T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + ... + \lambda_r P_r$.

وللبرهان على المطلوب يكفي أن نتحقق من أنّ P_j مؤثرات مرافقة لنفسها.

لذلك نفرض $u = P_1(u) + P_2(u) + ... + P_r(u)$ و $v = P_1(v) + P_2(v) + ... + P_r(v)$ متجهان كيفيان من V .

فإذا كان $i \neq j$، فإن $P_i(u)$ و $P_j(v)$ ينتميان إلى فضائين مميزين مختلفين V_{λ_i} و V_{λ_j} على الترتيب وبالتالي فإنّ $P_i(u)$ و $P_j(v)$ متعامدان ويكون لدينا :

$$\begin{aligned}\left(u, P_j(v)\right) &= \left(\sum_{i=1}^{r} P_i(u), P_j(v)\right)\\ &= \left(P_j(u), P_j(v)\right)\\ &= \left(P_j(u), \sum_{i=1}^{r} P_i(v)\right)\\ &= \left(P_j(u), v\right)\end{aligned}$$

وهذا يعني أنّ $P_j^* = P_j$ وهو المطلوب .

3-5- كثيرات الحدود الأصغرية والمنشور (التحليل الطيفي) :

بفرض $F(x)$ حلقة كثيرات الحدود بالمتحول x المعرفة على الحقل F .

فإذا كان $P(x)$ و $m(x)$ كثيرتي حدود من $F(x)$ حيث إنّ $P(x) \neq 0$ عندئذٍ توجد كثيرتا حدود $q(x)$ و $r(x)$ من $F(x)$ بحيث إنّ :

$$m(x) = P(x)\, q(x) + r(x)$$

علماً أن $r(x)$ يحقق أحد الشرطين إما $r(x)$ كثير حدود صفري أو أن درجة $r(x)$ أصغر من درجة $P(x)$.

نقول إنّ $P(x)$ يقسم $m(x)$ وبالتالي $P(x)$ قاسم لـــ $m(x)$.

ندعو كثير الحدود غير الصفري $P(x)$ من $F[x]$ بأنّه أساسي إذا كان معامل أعلى حد في $P(x)$ مساوياً للواحد .

وندعو كثير الحدود الأساسي $d(x)$ بقاسم مشترك أعظم لمجموعة كثيرات الحدود $q_1(x), q_2(x), \ldots\ldots q_r(x)$ من $F[x]$ إذا حقق :

1) $d(x)$ قاسم لكل كثير حدود $q_i(x)$ حيث $i = 1, \ldots\ldots, r$.

2) كل كثير حدود $P(x)$ يقسم جميع $q_i(x)$ يكون قاسماً لـــ $d(x)$ أيضاً .

نلاحظ أنّ لكل مجموعة $q_1(x), q_2(x), \ldots\ldots q_r(x)$ من $F[x]$ قاسم مشترك أعظمي أساسي وحيد $d(x)$ من $F[x]$ وفوق ذلك توجد مجموعة من كثيرات الحدود $g_1(x), g_2(x), \ldots\ldots g_r(x)$ تحقق المساواة

$$d(x) = g_1(x)q_1(x) + g_2(x)q_2(x) + \ldots\ldots + g_r(x)q_r(x)$$

فإذا كان T مؤثراً خطياً على V و A مصفوفة ممثلة لـــ T وكان $P(T) = \sum_{i=1}^{s} c_i T^i$ و $P(A) = \sum_{i=1}^{s} c_i A^i$ كثيرتي حدود بـــ T و A على الترتيب فإننا نعني بذلك أن T و A تحققان نفس معادلة كثير الحدود .

وإذا كان $\sum_{i=0}^{s} c_i X^i$ كثير حدود أمثاله مصفوفات c_i فإنه بالحقيقة مصفوفة عناصرها من $F[x]$ وهذا النوع من المصفوفات يدعى بمصفوفات كثيرات الحدود فعلى سبيل المثال:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} X^3 + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2X^3 - x + 4 & -X^3 + 5X \\ 8X - 7 & 4X^3 + 3X \end{bmatrix}$$

نرمز E_{ij} لمجموعة جميع المصفوفات من القياس $n \times n$ والتي تكون جميع عناصرها أصفاراً باستثناء العنصر الواقع على السطر i والعمود j فيكون مساوياً 1 .

عندئذٍ إذا كانت $A = \left[a_{ij}\right]_{ij}$ مصفوفة عناصرها من F فيمكننا أن نكتب A بشكل وحيد كما يلي :

$$A = \sum_{i=1} \sum_{j=1} a_{ij} E_{ij}$$

وتكون المجموعة $\{E_{ij}\}$ قاعدة في فضاء المصفوفات $\mathbb{F}_{n\times n}$ وبالتالي فإن عدد أبعاد الفضاء المتجه $\mathbb{F}_{n\times n}$ على F يساوي n^2 وتكون مجموعة المصفوفات

$$I = A^0, A, A^2, \ldots\ldots, A^{n^2}$$

مرتبطة خطياً من أجل كل مصفوفة A من القياس $n\times n$ على F و بالتالي يوجد كثير حدود $P(x) = \sum_{i=0}^{n^2} c_i x^i$ بحيث إنّ $P(A) = 0$ وهذا يعني أنّه يوجد كثير حدود أساسي بدرجة أصغرية بحيث إنّ $m(A) = 0$.

نظرية 13-5 :

نفرض أنّ A مصفوفة من القياس $n\times n$ و $m(x)$ كثير حدود أساسي درجته أصغرية من $F[x]$ بحيث إن $m(A) = 0$.

فإذا كان $P(x)$ من $F[x]$ فإن الشرط اللازم الكافي ليكون $P(A) = 0$ هو أن يكون $m(x)$ أحد عوامل $P(x)$.

البرهان :

نفرض أولاً :

$$P(x) = m(x)\, h(x)$$

عندئذٍ يكون :

$$P(A) = m(A)\, h(A) = 0$$

وبالعكس نفرض :

$$P(A) = 0$$

وبقسمة $P(x)$ على $m(x)$ نجد :

$$P(x) = m(x)\, q(x) + r(x)$$

حيث إنّ باقي القسمة $r(x)$ كثير حدود صفري أو أن تكون درجة $r(x)$ أصغر تماماً من درجة $m(x)$ وبالتالي فإن :

أو :

$$r(A) = 0$$

وهذا يعني أنّه يجب أن يكون $r(x)$ كثير حدود صفري. لأنّه إذا لم يكن $r(x)$ صفرياً فينتج من المساواة $r(A) = 0$ أنّه لم يعد $m(x)$ كثير حدود أساسي بأصغر درجة بحيث إنّ $m(A) = 0$ وهذا مخالف لتعريف $m(x)$.

إذن $r(x)$ كثير حدود صفري وبالتالي فإن $m(x)$ أحد عوامل $P(x)$.

تعريف 5-14:

ليكن لدينا مصفوفة A من القياس $n \times n$ على F . يدعى كثير الحدود الأساسي $m(x)$ الذي درجته أصغرية بحيث إن $m(A) = 0$ بكثير الحدود الأصغري للمصفوفة A ،ونعرف كثير الحدود الأصغري للمؤثر الخطي T على V بأنّه كثير الحدود الأصغري لأي مصفوفة ممثلة لـــ T .

نظرية كيلي – هاملتون 5-15 :

لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة ما من القياس $n \times n$ على F. ثم ليكن $f(x)$ كثير الحدود المميز لـــ A . عندئذ $f(A) = 0$.

البرهان :

بما أن عناصر المصفوفة المميزة

$$A - xI = [a_{ij} - x\delta_{ij}]$$

هي كثيرات حدود. إذن المتمم الجبري لكل عنصر $a_{ij} - x\delta_{ij}$ هو معين من القياس $(n-1) \times (n-1)$ وعناصره كثيرات حدود .

إذن كل عنصر في المصفوفة المساعدة $B = adj(A - xI)$ كثير حدود بـــ x ويكون لدينا :

$$\begin{aligned} B(A - xI) &= adj(A - xI).(A - xI) \\ &= det(A - xI)I \\ &= f(x)I \end{aligned}$$

$$f(x) = c_n x^n + ...c_1 x + c_0$$

فإن :

$$f(A) - f(x)I = (c_n A^n + ... + c_1 A + c_0) - (c_n I\, x^n + ... + c_1 I\, x + c_0 I)$$

$$= c_n (A^n - I\, x^n) + ... + c_2 (A^2 - I\, x^2) + c_1 (A - I\, x)$$

بما أن جداء وجمع المصفوفات يحققان الخاصة الآتية :

$$A^k - I\, x^k = P_k (A - I\, x)$$

حيث إن :

$$P_k = Ix^{k-1} + Ax^{k-2} + ... + A^{k-2} x + A^{k-1}$$

كثير حدود مصفوفي درجته $k\text{-}1$.

إذن :

$$f(A) - f(x)I = \sum_{k=1}^{n} c_k P_k (A - xI)$$

أو :

$$f(A) = f(x)I + \sum_{k=1}^{n} c_k P_k (A - xI)$$

$$= adj(A - Ix)(A - xI) + \sum_{k=1}^{n} c_k P_k (A - xI)$$

$$= \left\{ adj(A - x\, I) + \sum_{k=1}^{n} c_k P_k \right\} (A - I\, x)$$

إن المصفوفة بداخل القوس الكبيرة هي مصفوفة كثير حدود ولتكن من الشكل $B_l x^l + ... + B_1 x + B_0$ فينتج من ذلك أن :

$$f(A) = (B_l x^l + ...B_1 x + B_0)(A - Ix)$$

$$= -B_l x^{l+1} + (B_l A - B_{l-1}) x^l + ... + (B_1 A - B_0) x + B_0 A$$

متساوية . و ينتج من ذلك أن $f(A)=B_0A$ وكل أمثال قوى x الموجبة أصفاراً .
أي أنّ :

$$B_t = 0$$
$$B_t A - B_{t-1} = 0$$
$$B_2 A - B_1 = 0$$
$$B_1 A - B_0 = 0$$

وبحل هذه المعادلات نجد أن :

$$0 = B_t = B_{t-1} = ... = B_1 = B_0$$

وينتج من ذلك أن :

$$f(A) = B_0 A = oA = 0$$

يمكن استخدام كثير الحدود الأصغري لمؤثر خطي قطري T للحصول على المنشور (التحليل) الطيفي له .

لنفرض فيما يلي أنّ كثير الحدود المميز $f(x)$ للمؤثر الخطي T معطى على شكل جداء عوامل خطية على الحقل F. أي أن :

$$f(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{m_1} (x-\lambda_2)^{m_2} ....(x-\lambda_r)^{m_r}$$

حيث إنّ m_i هي الجداءات الجبرية للقيم الذاتية λ_i المختلفة فيما بينها .

بما أنّ كثير الحدود الأصغري $m(x)$ يقسم $f(x)$ فهذا يعني أنّ :

$$m(x) = (x-\lambda_1)^{t_1}(x-\lambda_2)^{t_2}.....(x-\lambda_r)^{t_r}$$

من أجل كل عامل $(x-\lambda_j)^{t_j}$ من عوامل $m(x)$ نأخذ كثير الحدود الآتي :

$$q_j(x) = \frac{m(x)}{(x-\lambda_j)^{t_j}} =$$

$$= (x-\lambda_1)^{t_1}.....(x-\lambda_{j-1})^{t_j-1}(x-\lambda_{j+1})^{t_j+1}....(x-\lambda_r)^{t_r}$$

فنجد أنّ كل قاسم مشترك غير ثابت للمجموعة $\{q_1(x), q_2(x), ..., q_r(x)\}$ سيحوي عاملاً خطياً من الشكل $x-\lambda_i$ لأنّ العوامل الخطية لجميع $q_j(x)$ هي من

قاسم مشترك مختلف عن الثابت لـــ $\{q_1(x), q_2(x), \ldots\ldots, q_r(x)\}$.

إذن القاسم المشترك الأعظم لـــ $\{q_1(x), q_2(x), \ldots\ldots, q_r(x)\}$ هو الواحد .

وبالتالي توجد كثيرات حدود $g_1(x), g_2(x), \ldots\ldots, g_r(x)$ بحيث إن :

$$1 = g_1(x)q_1(x) + g_2(x)q_2(x) + \ldots\ldots + g_r(x)q_r(x) \qquad (1)$$

نعوض في هذه المعادلة عن كل $q_j(x)$ بالمقدار $\dfrac{m(x)}{(x-\lambda_j)^{t_j}}$ فنجد أن :

$$\frac{1}{m(x)} = \frac{g_1(x)}{(x-\lambda_1)^{t_1}} + \frac{g_2(x)}{(x-\lambda_2)^{t_2}} + \ldots + \frac{g_r(x)}{(x-\lambda_r)^{t_r}}$$

ثم نفرض أن $P_j(x) = g_j(x)q_j(x)$ من أجل كل $j = 1,2,\ldots\ldots,r$.

فيكون لكثيرات الحدود $P_1(x), P_2(x), \ldots\ldots, P_r(x)$ الخاصيتين الآتيتين :

1) يكون $m(x)$ أحد عوامل $P_i(x)P_j(x)$ من أجل $i \neq j$.

2) $P_1(x) + P_2(x) + \ldots\ldots + P_r(x) = 1$.

نظرية 16-5 :

نفرض أنّ $F_j = P_j(T)$ ولنرمز لنواة $(T-\lambda_j)^{t_j}$ بالرمز K_j حيث $j = 1,2,\ldots\ldots,r$

عندئذٍ تكون $\{F_1, F_2, \ldots\ldots, F_r\}$ مجموعة تامة من المساقط لـــ V و يكون F_j مسقط V على K_j بجوار $\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} K_i$.

البرهان :

بما أن $P_i(x)P_j(x) = h_{ij}(x)m(x)$ من أجل $i \neq j$ وبما أنّ $m(T) = Z$ إذن :

$$F_iF_j = P_i(T)P_j(T) = h_{ij}(T)m(T) = Z \qquad \forall \;\; i \neq j$$

وينتج من الخاصة (2) لـــ $P_i(x)$ أن :

$$F_1 + F_2 + \ldots\ldots + F_r = 1$$

إذن :

وينتج مما تقدم أن $\{F_1, F_2, ..., F_r\}$ مجموعة مساقط متعامدة بحيث إن $F_1 + F_2 + ... + F_r = I$.

سنبرهن أن F_j مسقط لـــ V على K_j بجوار $\sum_{i \neq j} K_i$ وسينتج من ذلك أنّ $F_j \neq Z$ لأن K_j يحوي الفضاء المميز V_{λ_j} للمؤثر الخطي T .

لدينا الآن :

$$\begin{aligned}(x-\lambda_j)^{t_j} P_j(x) &= (x-\lambda_j)^{t_j} g_j(x) q_j(x) \\ &= (x-\lambda_j)^{t_j} g_j(x) \frac{m(x)}{(x-\lambda_j)^{t_j}} \\ &= g_j(x)\, m(x)\end{aligned}$$

لهذا يكون :

$$\begin{aligned}(T-\lambda_j)^{t_j} F_j &= (T-\lambda_j)^{t_j} P_j(T) \\ &= g_j(T)\, m(T) = Z\end{aligned}$$

وبالتالي فإنّ :

$$(T-\lambda_j)^{t_j} F_j(v) = 0 \qquad \forall v \in V$$

و $F_j(V) \subseteq K_j$.

و بالعكس فإذا كان v من K_j،فإنّ $(T-\lambda_j)^{t_j}(v) = 0$.

ومن أجل $i \neq j$ يكون $(T-\lambda_j)^{t_j}$ أحد عوامل $F_i = P_i(T)$ لأن $(x-\lambda_j)^{t_j}$ عامل من عوامل $P_i(x)$.

إذن $F_i(v) = 0$ من أجل كل $i \neq j$.

و $$v = (F_1 + F_2 + ... + F_r)(v) = F_j(v)$$

وبالتالي فإن v من $F_j(V)$ و $K_j = F_j(V)$.

بفرض T مؤثر خطي على V و $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ القيم الذاتية لـــ T المختلفة مثنى مثنى

ما يلي صحيح :

1) إذا كانت K_j نواة للتطبيق الخطي $(T-\lambda_j)^{t_j}$ من أجل $j = 1,\ldots,r$ حيث t_j قاسم للجداء الجبري للقيمة الذاتية λ_j ، فإن :

$$V = K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots\ldots \oplus K_r$$

2) يكون لـ T منشوراً (تحليلاً) طيفياً عندما وعندما فقط يكون كثير الحدود الأصغري $m(x)$ للمؤثر T من الشكل التالي :

$$m(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots\ldots(x-\lambda_r)$$

البرهان :

1- بفرض أنّ $\{F_1, F_2,\ldots\ldots,F_r\}$ مجموعة تامة من المساقط حيث إنّ $F_j = P_j(T)$.

فنجد من النظرية (16-5) أنّ F_j مسقط لـــ V على $K_j = F_j(V)$ بجوار $\sum_{i\neq j} K_i$

وبالتالي يكون :

$$V = K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots\ldots \oplus K_r$$

مجموعاً مباشراً للمنشور (التحليل) الموافق لهذه المجموعة التامة من المساقط .

2) بما أنّ كثير الحدود الأصغري $m(x)$ له الشكل :

$$m(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots\ldots(x-\lambda_r)$$

إذن : $t_i = 1$ من أجل كل $i = 1,2,\ldots,r$ وبالتالي فإنّ $K_i = V_{\lambda_i}$ حيث $i = 1,2,\ldots,r$ و $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots\ldots\ldots \oplus V_{\lambda_r}$ وهذا يعني أن الجداء الجبري لـــ λ_i يساوي لجدائها الهندسي وبالتالي يمكن تمثيل T بمصفوفة قطرية (نظرية 2-20) وينتج من ذلك أنّ لـــ T منشور(تحليل) طيفي بحسب النظرية (5-8).

وبالعكس نفرض أنّ للمؤثر T منشور (تحليل) طيفي :

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_r P_r$$

فمن أجل أي كثير حدود $P(x)$ بحسب النظرية (5-10) يكون لدينا :

إذا كان $f(\lambda_i) \neq 0$ من اجل العدد i فإن $f(T)$ يملك $f(\lambda_i)$ كقيمة ذاتية مختلفة عن الصفر بحسب النظرية (6-5) .

وبالتالي يكون $f(T)=0$ عندما وفقط عندما يكون $f(\lambda_i)=0$ من أجل $i=1,2,...,r$ وهذا يؤدي إلى أنّ :

$$m(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)......(x-\lambda_r)$$

مثال.: ليكن T مؤثراً خطياً على $\mathbb{R}^3$ ولتكن مصفوفته بالنسبة للقاعدة القانونية $\mathcal{E}_3$:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

سنحدد فيما إذا كان لـــ T منشوراً (تحليلاً) طيفياً وسنبرهن أنه وحيد – إن وجد–

الحـــــل :

إن كثير الحدود المميز لـــ T هو :

$$f(x)=-(x+1)(x-2)^2$$

وينتج من النظرية (17-5) أن لـــ T منشورٌ (تحليلٌ) طيفي عندما وعندما فقط يكون كثير حدوده الأصغري من الشكل :

$$m(x)=-(x+1)(x-2)$$

وبحساب مباشرٌ نجد أن :

$$m(A)=A^2-A-2I=0$$

وهذا يعني أنّ:

$m(x)=-(x+1)(x-2)$ (بحسب نظرية كيلي– هاملتون).

وبالتالي فإنّ لـــ T منشورٌ (تحليلٌ) طيفي .

من أجل $\lambda_1=1$ و $\lambda_2=2$ يكون كثيري الحدود:

$q_1(x)=x-2$ و $q_2(x)=x+1$ وعامل المنشور (التحليل) الجزئي :

$$\frac{1}{m(x)} = \frac{g_1(x)}{x+1} + \frac{g_2(x)}{x-2} \Rightarrow$$

$$g_1(x) = -\frac{1}{3}\ , \quad g_2(x) = \frac{1}{3}$$

وينتج من ذلك أن $P_1(x) = -\frac{1}{3}(x-2)$ و $P_2(x) = \frac{1}{3}(x+1)$

والمسقطان P_1 و P_2 يملكان المصفوفتين التاليتين E_1 و E_2 بالنسبة للقاعدة القانونية $\mathcal{E}_3$ على الترتيب :

$$E_1 = -\frac{1}{3}(A-2I) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \frac{1}{3}(A+I) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ومن السهل التحقق أنّ :

$$E_1^2 = E_1 \text{ و } E_2^2 = E_2$$

و أن :

$$A = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2$$

الفصل السادس

تطبيقات رياضية و فيزيائية

1-6 – تطبيقات في دراسة منحنيات وسطوح الدرجة الثانية

سندرس في الفقرات الأولى من هذا الفصل منحنيات الدرجة الثانية في فضاء متجه حقيقي ذي بعدين (المستوي) معرف عليه متريك إقليدي عادي وأما في الفقرة الأخيرة سندرس سطوح الدرجة الثانية في الفضاء الإقليدي الحقيقي الثلاثي .

1 – نقل المعادلة العامة المنحنيات الدرجة الثانية إلى الشكل القانوني.

نأخذ في المستوي جملة إحداثية ديكارتية متعامدة قياسية وندرس المعادلة العامة من الدرجة الثانية :

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0 \qquad (1)$$

ندعو مجموعة النقاط التي تحقق إحداثياتها المعادلة (1) بمنحني من الدرجة الثانية. سنبرهن أنّ هذه المعادلة تمثل معادلة قطع ناقص أو قطع زائد أو قطع مكافئ .

لذلك نرمز بـــ e_1 و e_2 لمتجهي الوحدة الموجهان باتجاه المحورين الإحداثيين في الجملة الإحداثية الديكارتية المتعامدة .

ننظر إلى الحدود الأساسية في المعادلة (1) وهي :

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \qquad (2)$$

على أنها صورة تربيعية بالإحداثيين x و y للمتجه (x ,y) وكما هو معروف في (استنتاج 3-11) يمكن نقل هذه الصورة التربيعية إلى الشكل القانوني في قاعدة متعامدة قياسية $\{e'_1 , e'_2\}$ ويكون لها الشكل :

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \qquad (3)$$

حيث إنّ λ_1 و λ_2 هي القيم الذاتية للمصفوفة :

$$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

وأما e'_1 و e'_2 فهما المتجهان الذاتيان لـ A المتعلقان بالقيمتين λ_2 و λ_1 على الترتيب.

نفرض أنّ e'_1 ينتج عن دوران e_1 بزاوية ثابتة φ بالاتجاه المخالف لعقارب الساعة .

وبما أن $e_1 \perp e_2$ و $e'_1 \perp e'_2$ إذن e'_2 ينتج عن دوران e'_1 بزاوية φ بالإتجاه الموجب أو الاتجاه السالب. فإذا كان الدوران بالاتجاه السالب نستبدل المتجه e'_2 بالمتجه $e''_2 = -e'_2$ الذي هو بدوره متجه ذاتي للمصفوفة(4) موافق للقيمة الذاتية نفسها λ_2 .

إذن دوماً يمكننا أنْ نعتبر القاعدة الجديدة e'_2 و e'_1 ناتجة عن دوران القاعدة القديمة e_1, e_2 بالاتجاه المخالف لعقارب الساعة وبالتالي فإنّ :

$$e'_1 = \cos\varphi . e_1 + \sin\varphi . e_2$$
$$e'_2 = -\sin\varphi . e_1 + \cos\varphi . e_2$$

وفي هذه الحالة ترتبط الإحداثيات القديمة x ,y بالإحداثيات الجديدة بالعلاقات التالية:

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi . x' - \sin\varphi . y' \\ y &= \sin\varphi . x' + \cos\varphi . y' \end{aligned} \qquad (5)$$

نعوض القيم (5) في المعادلة (1) فنحصل على المعادلة التالية :

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b = 0 \qquad (6)$$

حيث b_1, b_2, b معاملات جديدة .

تدعى هذه العملية بنقل المنحني إلى المحاور الرئيسية .

لإيجاد القيم الذاتية λ_1 , λ_2 للمصفوفة (4) نحل المعادلة المميزة :

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

بما أنّ A مصفوفة حقيقية متناظرة، إذن λ_1, λ_2 قيمتان حقيقيتـــان (مبرهنـــة 3-20) و الجداء $\lambda_1\lambda_2$ يساوي الحد الحر $f(0)$ في المعادلة (7) .

إذن :

$$\lambda_1\lambda_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \delta$$

I) $\delta = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$.

نحوّل المعادلة (6) إلى الشكل التالي :

$$\lambda_1(x' + \frac{b_1}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(y' + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 + c = 0$$

حيث
$$c = b - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2}$$

وبإجراء التعويض الآتي :

$$x'' = x' + \frac{b_1}{\lambda_1} \quad \text{و} \quad y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2}$$

تأخذ المعدلة (6) الشكل التالي :

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c = 0 \qquad (8)$$

نلاحظ أنّ التعويض السابق يوافق نقل مبدأ الإحداثيات إلى النقطة ($-\frac{b_2}{\lambda_2}$, $-\frac{b_1}{\lambda_1}$)

مع الإبقاء على اتجاه المحاور الإحداثية .

نفرض أولاً $0 < \lambda_1\lambda_2$ (أي أن $0 < \delta$) .

فيكون المحل الهندسي للنقاط التي تحقق (8)قطع ناقص عندما إشارة c تخالف إشارة λ_1.

ويصبح القطع الناقص هذا نقطة عندما $c = 0$.

أما إذا كانت إشارة c موافقة لإشارة λ_1 فعندئذٍ لا توجد نقاط تحقق (8) .

ثم نفرض ثانياً $0 > \lambda_1\lambda_2$ (أي أن $\delta < 0$) عندئذٍ تمثل المعادلة (8) قطع زائد إذا كانت $c \neq 0$ أما إذا كانت $c = 0$ فإن المعادلة (8) تمثل زوج من المستقيمات المتقاطعة .

II) $\delta = \lambda_1\lambda_2 = 0$.

لنفرض مثلاً أنّ $\lambda_2 \neq 0$ عندئذٍ تأخذ المعادلة (1) الشكل :

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b = 0 \qquad (9)$$

إذا كان $b_1 \neq 0$ نتمم المعادلة (9) إلى مربع تام فنحصل على الشكل التالي :

λ_2 $2b_1$ $2\lambda_2 b_1$

وبنقل مبدأ الإحداثيات وفقاً للتعويض الآتي :

$$x'' = x' + \frac{b}{2b_1} - \frac{b_2^2}{2\lambda_2 b_1}$$

$$y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2}$$

تصبح المعادلة (9) على الشكل التالي :

$$\lambda_2 y''^2 + 2b_1 x'' = 0 \qquad (10)$$

وهي المعادلة القانونية لقطع مكافئ .

أما إذا كان $b_1 = 0$ فإن المعادلة (9) تصبح بعد الإتمام إلى مربع كامل من الشكل :

$$\lambda_2 (y' + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 + b - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0$$

وبعد إجراء التعويض :

$$x'' = x' \quad \text{و} \quad y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2}$$

تأخذ المعادلة الأخيرة الشكل التالي :

$$\lambda_2 y''^2 + c = 0 \qquad (11)$$

حيث

$$c = b - \frac{b_2^2}{\lambda_2}$$

فإذا كانت $c = 0$ فإن المعادلة (11) تمثل زوج من المستقيمات المتطابقة وإذا كـــان $0 > c\lambda_2$ فإن المعادلة (11) تمثل زوج مـــن المســـتقيمات المتوازيـــة وإذا كـــان $0 > c\lambda_2$ فإنّ المعادلة (11) تمثل مجموعة خالية من النقاط .

وبذلك نكون برهنا على أن المعادلة (1) تمثل قطعاً ناقصاً أو قطعـــاً زائـــداً وقطعـــاً مكافئاً.

نظرية (6-1):

لا تتغير المقادير الثلاثة التالية في منحنيات الدرجة الثانية (1) :

1- مجموع أمثال x^2 و y^2 والذي نرمزه بـ S (أي أن $S = a_{11} + a_{22}$) .

2- معيّن مصفوفة الصورة التربيعية المؤلفة من الحدود الأساسية في (1) :

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3- المعين :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_1 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha \end{vmatrix}$$

البرهان :

ننظر وبشكل مستقل إلى نقل مبدأ الإحداثيات ثم إلى دوران المحاور الإحداثية على انفراد .

نفرض أولاً أنّ مبدأ الإحداثيات قد انتقل إلى النقطة (α, β) عندئذ ترتبط الإحداثيات القديمة بالجديدة وفقاً للعلاقات التالية :

$$x = x' + \alpha$$
$$y = y' + \beta$$

حيث x' و y' الإحداثيات الجديدة .

بالتعويض عن x,y في المعادلة (1) نجد أن :

$$\alpha_{11}(x'+\alpha)^2 + 2\alpha_{12}(x'+\alpha)(y'+\beta) + \alpha_{22}(y'+\beta)^2$$
$$+ 2\alpha_1(x'+\alpha) + 2\alpha_2(y'+\beta) + \alpha = 0$$

أو :

$$\alpha_{11}x'^2 + 2\alpha_{12}x'y' + \alpha_{22}y'^2 + 2(\alpha_{11}\alpha + \alpha_{12}\beta + \alpha_1)x'$$
$$+ 2(\alpha_{12}\alpha + \alpha_{22}\beta + \alpha_2)y' + (\alpha_{11}\alpha^2 + 2\alpha_{12}\alpha\beta$$
$$+ \alpha_{22}\beta^2 + 2\alpha_1\alpha + 2\alpha_2\beta + \alpha) = 0 \qquad (12)$$

نلاحظ أن أمثال الحدود الرئيسية في (12) لم تتغير عما هي في المعادلة (1) وهذا يعني أنّ كل من δ, S لا متغير .

كما نلاحظ أنّ أمثال x' في (12) يساوي إلى $f'_x(\alpha,\beta)$ المشتق الجزئـــي بالنســـبة لـــ x للطرف الأيسر من المعادلة (1) وبشكل مماثل نجـــد أن أمشـــال y' في (12) يساوي $f'_y(\alpha,\beta)$ ، وأما الحد الحر فيساوي $f(\alpha,\beta)$ وبالتالي تأخذ المعادلة (12) الشكل التالي :

$$\begin{aligned} &a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + f'_x(\alpha,\beta)x' \\ &+ f'_y(\alpha,\beta)y' + f(\alpha,\beta) = 0 \end{aligned}$$

من أجل المعادلة (12) يكون المعين Δ كما يلي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_2 \\ a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_1 & a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_2 & \begin{gathered} a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + \\ + 2a_1\alpha + 2a_2\beta + a \end{gathered} \end{vmatrix}$$

نطرح من السطر الأخير السطر الأول مضروباً بـــ α والسطر الثاني مضروباً بـــ β فيأخذ Δ الشكل التالي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_2 \\ a_1 & a_2 & a_1\alpha + a_2\beta + a \end{vmatrix}$$

ثم نطرح من العمود الأخير العمود الأول مضروباً بـــ α والعمود الثاني مضروباً بـــ β فيأخذ Δ الشكل النهائي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}$$

وهذا يعني أنّ Δ لا متغير أيضاً عند نقل مبدأ الإحداثيات.

ثم نفرض ثانياً أنّ المحاور الإحداثية قد دارت بزاوية قدرها φ حول المبدأ وهذا يوافق انتقال من قاعدة متعامدة قياسية إلى قاعدة متعامدة قياسية أخرى وبالتالي فإن مصفوفة الصورة التربيعية :

تتغير كمصفوفة تحويل خطي أثناء تغير القواعد (نظرية 3-4) .

لكن التحويل الخطي الذي مصفوفته :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدة $\{e_1, e_2\}$ لا تتعلق أمثال كثيرة حدوده المميزة باختيار القاعدة بشكل عام.

وبالتالي فإن أمثال كثيرة الحدود :

$$f(\lambda) = -\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - (\alpha_{11} + a_{22})\lambda + \alpha_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda^2 - S\lambda + \delta$$

مستقلة عن دوران المحاور الإحداثية.

وبشكل مماثل نستطيع البرهان على أنّ Δ مستقل عن دوران المحـــاور الإحداثيـــة.

بالحقيقة، عند الانتقال إلى قاعدة جديدة $\{e'_1, e'_2\}$ حيث :

$$e'_1 = \cos\varphi . e_1 + \sin\varphi . e_2$$
$$e'_2 = -\sin\varphi . e_1 + \cos\varphi . e_2$$

فإن الإحداثيات تتغير وفقاً للعلاقات التالية :

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi . x' - \sin\varphi . y' \\ y &= \sin\varphi . x' + \cos\varphi . y' \end{aligned} \qquad (13)$$

وبتعويض (13) في المعادلة (I) تأخذ الشكل التالي :

$$b_{11}x'^2 + 2b_{12}x'y' + b_{22}y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + a = 0$$

3- الصورة التربيعية في الفضاء الإقليدي R^3 بالنسبة لقاعدة متعامدة قياسية تكون من الشكل :

$$F(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1xz + 2a_2yz + az^2$$

الشكل $f(x, y)$.

ونلاحظ أن مصفوفة الانتقال من القاعدة القديمة إلى القاعدة الجديدة في R^3 هي :

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي ترتبط الإحداثيات الجديدة بالإحداثيات القديمة كما يلي :

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi . x' - \sin\varphi . y' \\ y &= \sin\varphi . x' + \cos\varphi . y' \\ z &= z' \end{aligned} \qquad (14)$$

وبتعويض (14) في الصورة التربيعية $F(x, y, z)$ تأخذ الشكل التالي :

$$b_{11}x'^2 + 2b_{12}x'y' + b_{22}y'^2 + 2b_1x'z' + 2b_2y'z' + az'^2$$

ومعلوم أنّــه أثناء الانتقال من قاعدة متعامدة قياسية إلى قاعدة متعامدة قياسية أخرى فلا يتغير معين مصفوفة الصورة التربيعية .

إذن من أجل الصورة التربيعية $F(x, y, z)$ في R^3 تتحقق المساواة :

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_1 \\ b_{12} & b_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} .$$

والطرف الأيسر في هذه المساواة هو المعين Δ لـــ $f(x, y)$ في القاعدة الجديــدة $\{e'_1, e'_2\}$ وأما الطرف الأيمن فهو المعين Δ لــــ $f(x, y)$ في القاعــدة القديمــة $\{e_1, e_2\}$ وهذا يعني أنّ هذا المعين لم يتغير أثناء دوران المحاور الإحداثية . وبدراســة مماثلة لمعادلة منحنيات الدرجة الثانية نستطيع دراسة معادلة سطوح الدرجــة الثانيــة بتحويل القسم الرئيسي منها إلى صورة تربيعية قانونية.

ونعود الآن لدراسة منحنيات الدرجة الثانية .

بحسب δ نستطيع أن نميز نوع المعادلة (1) :

1) إذا كان $\delta > 0$ فالمعادلة (1) تمثل قطعاً ناقصاً (قطع حقيقي ، نقطة ، مجموعة خالية ، قطع وهمي) .

2) إذا كان $\delta < 0$ فالمعادلة (1) تمثل قطعاً زائداً (قطع زائد ، مستقيمان حقيقيان متقاطعان) .

3) إذا كان $\delta = 0$ فالمعادلة (1) تمثل قطعاً مكافئاً (قطع مكافئ ، مستقيمان متوازيان، مستقيمان طبوقان ، مستقيمان وهميان) .

نلاحظ أنّ اللامتغيرات S, δ, Δ تسّهل تحويل المعادلة (1) إلى الشكل القانوني فمثلاً إذا كانت $\delta \neq 0$ فالمعادلة (1) تتحول كما وجدنا إلى الشكل التالي :

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$$

حيث λ_1 , λ_2 قيمتان ذاتيتان للتحويل الخطي الذي مصفوفته هي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

وأما المعين Δ للمعادلة الأخيرة فهو :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 c$$

إذن :

$$\Delta = \delta\, c$$

أو :

$$c = \frac{\Delta}{\delta}$$

والمعادلة (1) تصبح في هذه الحالة على النمط :

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

– فإذا كان $\delta > 0$ و $\Delta \neq 0$ فالمعادلة تمثل قطعاً ناقصاً حقيقياً أو وهمياً.

$. 0 > \lambda_1 \frac{\Delta}{\delta}$

وبما أن $\delta > 0$ وإشارة λ_1 توافق إشارة S ، إذن المعادلة تمثل قطعاً ناقصاً حقيقيـاً عندما يكون $S\Delta < 0$ وبالحالة المعاكسة تمثل قطعاً ناقصاً وهمياً (أي عندما $S\Delta > 0$)

وإذا كان $\Delta = 0$ فالمعادلة تمثل نقطة .

– أما إذا كان $\delta < 0$ فتمثل المعادلة (1) قطعاً زائداً عنـــدما $\Delta \neq 0$ ومســـتقيمين متقاطعين إذا كان $\Delta = 0$.

– أما إذا كان $\delta = 0$ فإنّ المعادلة (1) تتحول إلى المعادلة (10) حيث يكون Δ من أجلها كما يلي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -b_1^2\lambda_2$$

وبالتالي :

$$b_1 = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{S}} \quad ; \quad S \neq 0$$

وبالتالي:

$$\Delta \neq 0$$

وفي حال كون المعادلة (1) تمثل مستقيمين متوازيين (مختلفين ، طبــوقين، وهمــين) تأخذ الشكل :

$$\lambda_2 y^2 + c = 0$$

وفي هذه الحالة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

فالمعادلة (1) تمثل قطعاً مكافئاً .

وأما في الحالة $\delta = 0$ و $\Delta = 0$

فالمعادلة تمثل مستقيمين متوازيين (مختلفين ،طبوقين ،وهميين).

أمثلة :

عيّن نوع كل من المنحنيات التالية ثم انقل المعادلة لكل منهم إلى شكلها القانوني .

1- $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

2- $x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

3- $x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 5y - 3 = 0$

4- $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$

الحل :

1-
$$\delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

إذاً نوع المنحني قطع ناقص .

بما أنّ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

فالمعادلة (1) تمثل إما قطع ناقص حقيقي أو وهمي.

وبما أنّ $S = 3 + 3 = 6$ و $S\delta = -18 < 0$ ، إذن المعادلة تمثل قطعاً ناقصاً حقيقيـــاً

ويكون لدينا :

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - S\lambda + \delta = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Rightarrow$$
$$\lambda = 3 \pm 1 \Rightarrow \lambda_1 = 4 \quad , \quad \lambda_2 = 2$$

والمعادلة القانونية للمنحني (1) :

$$4x'^2 + 2y'^2 - \frac{3}{8} = 0$$

$$\frac{x'^2}{\frac{3}{32}}+\frac{y'^2}{\frac{3}{16}}=1$$

-2

$$\delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2<0$$

فالمنحني من النوع الزائدي .

وبما أنّ :

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix}=-1\neq 0$$

إذن المنحني قطع زائد .

وللحصول على معادلته القانونية نكتب المعادلة المميزة للمصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

فنحصل على المعادلة :

$$\lambda^2-2=0$$

وبالتالي فإنّ قيمها الذاتية :

$$\lambda_1=\sqrt{2} \quad , \lambda_2=-\sqrt{2}$$

وبما أنّ $S=0$ و $\delta=-2$ ، إذن المعادلة القانونية للمنحني السابق :

$$\sqrt{2}x'^2-\sqrt{2}y'^2+\frac{1}{2}=0$$

أو :

$$2\sqrt{2}y'^2-2\sqrt{2}x'^2=1$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$$

فالمنحني من النوع الزائدي .

ويكون Δ من أجل هذا المنحني هو :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} & -3 \end{vmatrix} = 0$$

وبالتالي يمثل هذا المنحني زوج من المستقيمات المتقاطعة، إذن يمكن كتابة الطرف الأيسر من المعادلة على شكل جداء مضروبين كل منهما من الدرجة الأولى .

وللحصول عليهما نكتب الطرف الأيسر من المعادلة على الشكل :

$$x^2 + (3y+2)x + 2y^2 + 5y - 3 = 0$$

ونحل هذه المعادلة بالنسبة لـ x فنجد أنّ :

$$x_1 = -y-3 \ , \quad x_2 = -2y+1$$

وبالتالي يمكن كتابة الطرف الأيسر من معادلة المنحني على الشكل :

$$(x+y+3)(x+2y-1) = 0$$

-4

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

فالمنحني من النوع المكافئ .

ولنحسب Δ من أجل هذا المنحني فنجد أن :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$x+2y+1=0 \quad \text{و} \quad x+2y-3=0$$

2-6- مفاهيم أساسية في النظرية النسبية الخاصة

1- المستوي نصف الإقليدي

نفرض V فضاء خطي ذو بعدين ولنعرف على V متريك نصف إقليدي ثم لنفرض $\{e_1 , e_2\}$ قاعدة في V بحيث إنّه إذا كان $x = x_1e_1 + x_2e_2$ متجهاً ما من V سنعرف نظيم x كما يلي :

$$\| x \| = (x,x) = x_2^2$$

وينتج من هذا التعريف أن :

$$(e_1,e_1)=0 \quad , \quad (e_2,e_2)=1$$

و
$$(e_1+e_2 , e_1+e_2)=1$$

وبالتالي فإن :

$$1=(e_1,e_1)+2(e_1,e_2)+(e_2,e_2)=2(e_1,e_2)+1$$

إذن :

$$(e_1,e_2)=0$$

وهكذا وجدنا أن $\{e_1 , e_2\}$ قاعدة متعامدة قياسية وتدعى هذه القاعدة بقاعدة قانونية في V .

فمن أجل أي متجهين $x = x_1e_1 + x_2e_2$ و $y = y_1e_1 + y_2e_2$ من V يكون لدينا :

$$(x,y)=x_1y_1(e_1,e_1)+(x_1y_2+x_2y_1)(e_1,e_2)$$
$$+x_2y_2(e_2,e_2)=x_2y_2$$

وبحالة خاصة يكون :

$$(x,x)=x_2^2 \Rightarrow \| x \| = \sqrt{x_2^2} = |x_2|$$

نفترض الآن $\{e_1' , e_2'\}$ قاعدة متعامدة قياسية أخرى في V ثم لنفترض أن مصفوفة الانتقال من القاعدة $\{e_1 , e_2\}$ إلى القاعدة $\{e_1' , e_2'\}$ هي :

$$A = \begin{bmatrix} & \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

عندئذٍ يكون لدينا :

$$e_1' = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$$
$$e_2' = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$$

و أيضاً :

$$a_{21}^2 = (e_1', e_1') = (e_1, e_1) = 0$$

وينتج من ذلك أنّ :

$$a_{21} = 0$$

وبشكل مماثل يكون لدينا :

$$a_{22}^2 = (e_2', e_2') = (e_2, e_2) = 1$$

وينتج من ذلك أنّ :

$$a_{22} = \pm 1$$

إذن مصفوفة الانتقال من قاعدة متعامدة قياسية إلى قاعدة متعامدة قياسية أخـــرى في المستوي نصف الإقليدي تكون من الشكل :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

نفرض الآن $\{e_1, e_2\}$ قاعدة متعامدة قياسية في المستوي نصف الإقليدي.

سنعرف الزاوية بين أي متجهين $x = x_1e_1 + x_2e_2$ و $y = y_1e_1 + y_2e_2$ بأنها القيمـــة التالية :

$$\left| \frac{y_1}{y_2} - \frac{x_1}{x_2} \right| \qquad (2)$$

معلوم أنّ زاوية ما تتغير أثناء الانتقال من قاعدة إلى قاعدة أخرى بالحالـــة العامـــة . سنضع شروط إضافية على المصفوفة (1) لكي تبقى الزاوية (2) ثابتة أثناء الانتقال من قاعدة إلى أخرى .

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad و \quad x'_2 = \pm x_2$$
$$y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \quad و \quad y'_2 = \pm y_2$$

وفوق ذلك x'_2 و y'_2 لهما نفس الإشارة .

إذن بموجب التعريف الأخير تكون الزاوية بين المتجهين x و y في القاعـــدة الجديـــدة كما يلي :

$$\left|\frac{y_1}{y_2} - \frac{x_1}{x_2}\right| = \left|\frac{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}{\mp y_2} - \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{\pm x_2}\right| = |a_{11}|\left|\frac{y_1}{y_2} - \frac{x_1}{x_2}\right|$$

نلاحظ أنه يكون للزاوية بين المتجهين x و y نفس القيمة أثناء الانتقال من القاعدة الأولى إلى القاعدة الثانية إذا تحقق الشرط $a_{11} = \pm 1$.

سنأخذ فيما يلي القواعد المتعامدة القياسية $\{e'_1, e'_2\}$ التي مصفوفة انتقالها من القاعدة $\{e_1, e_2\}$ من الشكل :

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & \nu \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \nu = a_{12} \qquad (3)$$

فإذا رمزنا للمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بالرمز A_0 فنجد أن :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & \nu \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} A_0$$

و

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & \nu \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} A_0 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

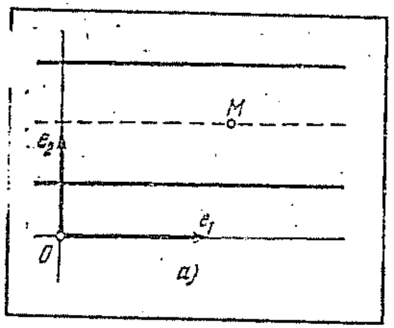
نفرض V مستوي خطي نقطي ثم نعرف البعد بين النقطتين $M(x_1, x_2)$ و $N(y_1, y_2)$ في المتريك نصف إقليدي بالمساواة التالية :

$$\overline{MN} = |\, y_2 - x_2 \,|$$

الصفر وهذا يتشابه في الهندسة الإقليدية مع التعريف القائل بأنه يتوازى المستقيمان عندما تكون الزاوية بينهما مساوية للصفر .

أما بالنسبة للدائرة التي نصف قطرها r ومركزها النقطة $M(\alpha_1,\alpha_2)$ في المستوي نصف الإقليدي فهي مجموعة النقاط المتساوية البعد عن $M(\alpha_1,\alpha_2)$ والتي بعدها نصف الإقليدي يساوي r .

نلاحظ أن الدائرة في هذه الحالة هي المستقيمان الموازيان لمحور السينات واللذان يبعدان عن M بالمسافة نصف الإقليدية r كما هو موضح بالرسم (1) الآتي :



الشكل رقم (1)

يمكن أن يكون مركز الدائرة المذكورة هو أي نقطة من المستقيم المار من النقطة M والموازي لمحور السينات ، وأما معادلة الدائرة فهي :

$$(x_2-\alpha_2)^2=r^2$$

وبحالة خاصة فإن معادلة دائرة الواحدة (التي نصف قطرها يساوي الواحد ومركزها في مبدأ الإحداثيات) هي :

$$x_2=1$$

سنعتبر الزاوية بين أي مستقيمين هي الزاوية بين متجهين موازيين لهما.

فإذا كان $x=(\xi,1)$ و $y=(\eta,1)$ متجهين طول كل منهما الواحد فالزاوية بينهما هي :

$$\left|\frac{\eta}{1}-\frac{\xi}{1}\right|=|\eta-\xi|$$

في الحقيقة، الزاوية بين المتجهين $(x, 1)$ و $(y, 1)$ تساوي $|y-x|$ والزاوية المجاورة هي الزاوية بين المتجهين $(-x, -1)$ و $(y, 1)$ وتساوي :

$$\left| \frac{y}{1} - \frac{-x}{-1} \right| = |y - x|$$

2- المستوي الإقليدي الخادع

نفرض V فضاء متجهات ذو بعدين بمقياس إقليدي خادع و $\{e_1, e_2\}$ قاعـدة في V ولنفرض أن مربع أي متجه $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ يساوي $x_1^2 - x_2^2$.

عندئذٍ يكون لدينا بحالة خاصة :

$$(e_2, e_2) = -1 \ , \quad (e_1, e_1) = 1$$

و أيضاً :

$$\begin{aligned}
&(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 1 - 1 = 0 \\
&= (e_1, e_1) + 2(e_1 + e_1) + (e_2 + e_2) \\
&= 2(e_1, e_2)
\end{aligned}$$

ومنه نجد أن :

$$(e_1, e_2) = 0$$

وهذا يعني أن المتجه e_1 هو متجه الوحدة الحقيقي و e_2 متجـه الوحـدة الخيـالي و $e_2 \perp e_1$.

وندعو بالتعريف القاعدة $\{e_1, e_2\}$ التي تحقق الخواص السابقة بقاعدة متعامدة قياسية، وفوق ذلك فإن الجداء الداخلي في قاعدة متعامدة قياسية للمتجهين التاليين :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 \ , \quad y = y_1 e_1 + y_2 e_2$$

يعطى بالمساواة التالية :

$$\begin{aligned}
&(x, y) = x_1 y_1 (e_1, e_1) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)(e_1, e_2) + \\
&+ x_2 y_2 (e_2, e_2) = x_1 y_1 - x_2 y_2
\end{aligned}$$

ونظيم المتجه x هو :

$$|x| = \sqrt{x_1^2 - x_2^2}$$

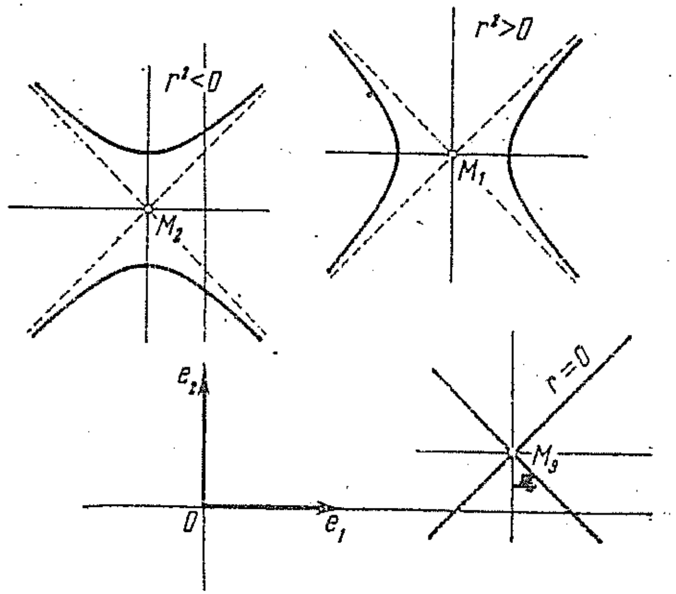
$x(x_1,x_2)$ و $y(y_1,y_2)$ في مقياس إقليدي خادع تساوي :

$$\sqrt{(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}$$

وفقاً لما تقدم فإن الدائرة التي نصف قطرها r ومركزها في النقطة $M(\alpha_1,\alpha_2)$ هـــي مجموعة كل النقاط التي تبعد بمسافة إقليدية خادعة قدرها r عن النقطة M وأما معادلة هذه الدائرة التي نصف قطرها r ومركزها في النقطة $M(\alpha_1,\alpha_2)$ فهي :

$$(x_1-\alpha_1)^2-(x_2-\alpha_2)^2=r^2$$

فإذا مثلنا نقاط المستوي الإقليدي الخادع بنقاط المستوي الإقليدي الحقيقي وبـــنفس الإحداثيات عندئذٍ تمثل الدائرة التي نصف قطرها $r\neq 0$ بقطع زائد وأما الدائرة التي نصف قطرها $r=0$ فتمثل بمستقيمين متقاطعين كما هو مبين على الشكل (2) .



الشكل (2)

يمكن أن يكون نصف قطر هذه الدائرة موجباً أو عقدياً أو صفراً .

تكون معادلة الدائرة التي نصف قطرها موجباً $r = a$ ومركزها في مبدأ الإحداثيات هي :

$$x_1^2 - x_2^2 = a^2 \qquad \text{(قطع زائد محوره الأصلي } ox \text{)}$$

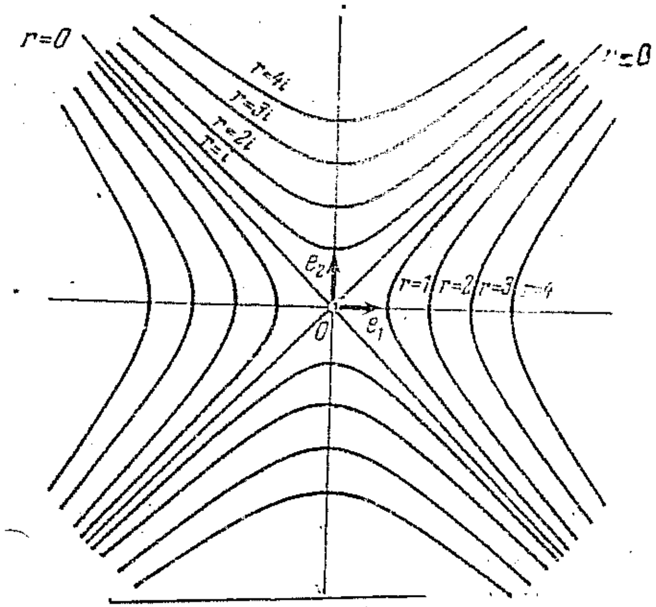
وأما معادلة الدائرة التي نصف قطرها عدد عقدي $r = a\,i$ ومركزها من مبدأ الإحداثيات فهي :

$$x_2^2 - x_1^2 = a^2 \qquad \text{(قطع زائد محوره الأصلي } oy \text{)}$$

وأما معادلة الدائرة التي نصف قطرها $r = 0$ هي :

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \qquad \text{(مستقيمان متقاطعان في المبدأ)}$$

الشكل (3) يوضح جملة القطوع الزائدة المذكورة والمستقيمين المتقاطعين اللذين تمثلهما معادلات الدائرة السابقة .



الشكل (3)

$$(x,y)=x_1y_1-x_2y_2=0$$

أو :

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$$

3- المؤثرات في الفضاء الإقليدي الخادع :

المؤثر الخطي φ الذي يحافظ على الجداء الداخلي في الفضاء الإقليدي الخادع V يدعى بمؤثر متعامد خادع .

أي أنه يحقق العلاقة التالية :

$$\forall x,y\in V:\big(\varphi(x)\ ,\ \varphi(y)\big)=(x,y)$$

نفرض الآن أنّ φ مؤثر متعامد خادع في مستوى إقليدي خادع ولتكن مصفوفته في القاعدة المتعامدة القياسية $\{e_1,e_2\}$ هي :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن :

$$\varphi(e_1)=a_{11}e_1+a_{21}e_2$$
$$\varphi(e_2)=a_{12}e_1+a_{22}e_2$$

ومن التعريف نجد أن :

$$\big(\varphi(e_1),\varphi(e_1)\big)=(e_1,e_1)=1$$
$$\big(\varphi(e_2),\varphi(e_2)\big)=(e_2,e_2)=-1$$

وبالتالي فإن :

$$\big(\varphi(e_1),\varphi(e_2)\big)=(e_1,e_2)=0$$

أو :

$$\begin{aligned} a_{11}^2-a_{21}^2&=1\\ a_{12}^2-a_{22}^2&=-1\end{aligned}\qquad(1)$$

$$a_{11}a_{12}-a_{21}a_{22}=0\qquad(2)$$

من المساواة (1) ينتج أن :

$$\alpha_{21} \neq 0 , \quad \alpha_{11} \neq 0$$

ومن المساواة (2) ينتج :

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \tag{3}$$

نرمز لأحد طرفي المعادلة (3) المتساوين بالرمز β فنجد أنّ :

$$\begin{aligned} \alpha_{21} &= \beta\, \alpha_{11} \\ \alpha_{12} &= \beta\, \alpha_{22} \end{aligned} \tag{4}$$

نعوض الأطراف اليسارية من (4) في المعادلتين (1) فنجد :

$$\alpha_{11}^2 - \beta^2\, \alpha_{11}^2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta^2\, \alpha_{22}^2 - \alpha_{22}^2 = -1 \Rightarrow \alpha_{22} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}$$

وبالتالي فإن مصفوفة التحويل φ هي :

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{\beta}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{\beta}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \tag{5}$$

- نلاحظ من (4) أن للعنصرين الواقعين على العمود الأول في المصفوفة السابقة لهما نفس الإشارة والأمر هكذا بالنسبة للعنصرين الواقعين على العمود الثاني في المصفوفة A .

ندعو بالتعريف هذا النوع من المصفوفات (5) بالمصفوفات المتعامدة الخادعة.

نرمز بـ A_0 للمصفوفة الآتية :

$$A_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و أيضاً :

$$A_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

و أيضاً :

$$A_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(فالتحويلان الموافقان لـــ A_1, A_2 يختلفان عن التحويل الموافق لـــ A_0 بالمحاور وأمـــا التحويل الموافق لـــ A_3 فيختلف عن التحويل الموافق لـــ A_0 بالتناظر المركزي) .

نلاحظ أنّ :

$$det\,A_0 = det\,A_3 = 1 \quad و \quad det\,A_1 = det\,A_2 = -1$$

وبما أنّ :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1$$

إذن يوجد وسيط α بحيث إن :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = ch\,\alpha \quad , \quad \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = sh\,\alpha$$

وتصبح A_0 كما يلي :

$$A_0 = \begin{pmatrix} ch\,\alpha & sh\,\alpha \\ sh\,\alpha & ch\,\alpha \end{pmatrix}$$

والتحويل الموافق لـــ A_0 يدعى بالدوران القطعي .

نفرض V_2 مستوي إقليدي خادع و$\{e_1,e_2\}$ و $\{e'_1,e'_2\}$ قاعدتان متعامدتان بانتظام فيه ولتكن مصفوفة الانتقال من الأولى إلى الثانية هي :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

سنرمز بـــ φ للتحويل الخطي الموافق للمصفوفة A في القاعدة$\{e_1,e_2\}$ ولنبرهن أن φ متعامد خادع.

في الحقيقة لدينا :

$$\varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 = e'_1$$
$$\varphi(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 = e'_2$$

فإذا كان $x = x_1e_1 + x_2e_2$ و $y = y_1e_1 + y_2e_2$ متجهين كيفيين من V_2، فإن :

$$\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + x_2\varphi(e_2) = x_1(e'_1) + x_2(e'_2)$$
$$\varphi(y) = y_1\varphi(e_1) + y_2\varphi(e_2) = y_1(e'_1) + y_2(e'_2)$$

بما أن القاعدتين$\{e_1,e_2\}$ و $\{e'_1,e'_2\}$ متعامدتين قياسيتين، فإن الجداء الداخلي :

$$\big(\varphi(x),\varphi(y)\big) = x_1y_1 + x_2y_2 = (x,y)$$

وهذا يعني أن φ تحويل متعامد خادع بحسب التعريف وتكون مصفوفته من الشكل (5) .

3-6 – فضاء الحوادث . مبدأ غاليليه النسبي :

نفرض M نقطة مادية تتحرك على المستقيم ℓ منسوب إلى جملة S .

ونفرض في اللحظة t أنّ إحداثي النقطة M يساوي x فيمكن الإشارة لهذا الحدث في مستوي ما P بأنه النقطة التي إحداثيتها (x, t) و يدعى المستوي P بمستوي الحوادث .

ولو لم يتغير موضعها على المستقيم ℓ.

إذن المعادلة التي تربط موضع النقطة M بالزمن t تمثل معادلة منحني في المستوي P ويكون هذا المنحني مستقيماً عندما وعندما فقط تتحرك M على المستقيم ℓ بسرعة ثابتة وعندئذٍ يوصف موقع النقطة M في المستوي P بالمعادلة :

$$x = u\,t + b$$

حيث $b = x(0)$ موقع النقطة M في اللحظة $t = 0$.

إذا لم تتحرك النقطة على المستقيم ℓ (أي سرعتها معدومة) ، فإن معادلة المسار في المستوي P هي مستقيم موازي لمحور الزمن t .

نفرض جملة قياس أخرى S' تتحرك بانتظام إلى جانب المستقيم ℓ بسرعة v ثم نفرض أنه في لحظة البدء كانت الجملتان S وS' منطبقتين أي أن $x = x' = 0$ عندما $t = 0$.

عندئذٍ إحداثي الموضع x, x' للنقطة M في جملتي القياس S وS' على الترتيب مرتبطان معاً بالعلاقة الآتية :

$$x = x' + v\,t$$

نعتبر في هذه الحالة أنّ الزمن t في الجملة S والزمن t' في الجملة S' هو نفسه.

وبالتالي من أجل الحدثين اللذين ينطبق فيهما t و t' نسمي التحويل :

$$\begin{aligned} x &= x' + v\,t \\ t &= t' \end{aligned} \qquad (6)$$

أو :

$$\begin{aligned} x' &= x - v\,t \\ t' &= t \end{aligned}$$

بتحويل غاليليه .

و باشتقاق المعادلتين السابقتين بالنسبة للزمن نجد أن :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v$$

$$u = u' + v \qquad (7)$$

حيث u سرعة النقطة M في الجملة S و u' سرعة النقطة M في الجملة S' .

القانون (7) هو قانون جمع السرع في الميكانيك التقليدي .

سرعة النقطة M في جملة القياس القديمة تساوي سرعتها في جملة القياس الجديدة مضافاً إليها سرعة الجملة الجديدة بالنسبة لجملة القياس القديمة .

وباشتقاق (7) مرة ثانية بالنسبة لـ t نجد :

$$\frac{d_2 x}{dt^2} = \frac{d_2 x'}{dt^2}$$

وهذا يعني أنّ تسارع النقطة M في كل من جملتي القياس S وS' هو نفسه .

ومنه نستنتج قانون نيوتن الثاني :

القوى المؤثرة F تتناسب طرداً مع التسارع وبعبارة أخرى يقال بأن قوانين الميكانيك مستقلة بالنسبة لتحويل غاليليه (وهو مبدأ نسبية غاليليه).

بالرجوع إلى العلاقة (6) نجد أنه عند الانتقال من الجملة S إلى الجملة S' فإنّ إحداثيات نقاط فضاء الحوادث في الجملتين ترتبط فيما بينها بتحويل خطي مصفوفته :

$$\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

وهذا يسمح لنا بإدخال مفهوم المقياس نصف الإقليدي في فضاء الحوادث، عندئذ المسافة بين الحدثين $A(x_1,t_1)$, $B(x_2,t_2)$ هي $|t_2 - t_1|$.

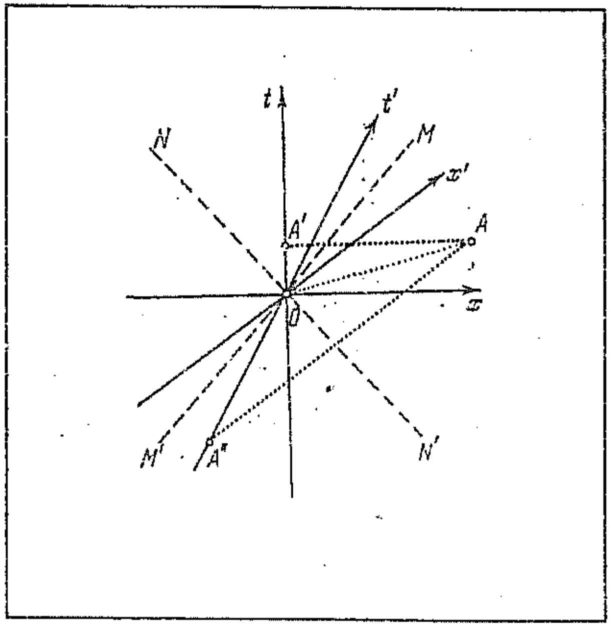
بما أنّ مصفوفة الانتقال من الجملة S إلى الجملة S' هي (8) إذن مفهوم الزاوية مستقل عن الجمل.

لشرح المفهوم الفيزيائي نفرض M_1, M_2 نقطتان تتحركان بحركة منتظمة على المستقيم ℓ ولنرمز لسرعتيهما بـ u_1, u_2 على الترتيب فتتعين حركتهما في المستوي P بالمستقيمين m_1, m_2 ولنفرض $A_0(x_0,t_0)$ نقطة تقاطع المستقيمين m_2, m_1 فهذا يعني أن النقطتين M_1, M_2 منطبقتان في اللحظة $t = t_0$ وإحداثي الموضع لهما x_0 .

هي x_2 عندئذ تكون الزاوية بين المستقيمين m_2,m_1 (في المقياس نصف الإقليدي) هي الزاوية بين المتجهين $\overline{A_0A_1}$ و $\overline{A_0A_2}$ حيث $A_1(x_1,t_1)$, $A_2(x_2,t_2)$ موضحة على الشكل (4) وهذه الزاوية تساوي :

$$\left|\frac{x_2-x_0}{t_2-t_0}-\frac{x_1-x_0}{t_1-t_0}\right|=\left|u_2-u_1\right|$$

والمقدار الأخير هو السرعة النسبية لحركة النقطتين M_1,M_2 .



الشكل (4)

4-6 – تحويل لورانس :

نفرض في لحظة زمنية ما (مبدأ الزمن لأجل الجملتين S وS') أنّ مبدأ الإحـــداثيات للجملتين منطبق .

أي أنّ :

$$t=t'=0 \quad \text{عندما} \quad x=x'=0$$

المشترك للجملتين ووصلت هذه الإشارة إلى النقطة x في الجملة S في اللحظة t ووصلت إلى النقطة x' في الجملة S' في اللحظة t' .

وبموجب ثبات سرعة الضوء C نجد أن :

$$\left|\frac{x}{t}\right| = \left|\frac{x'}{t'}\right| = C$$

وينتج من ذلك :

$$x^2 - C^2t^2 = 0 \quad \text{و} \quad x'^2 - C^2t'^2 = 0$$

وهذا يعني أنه إذا كانت العبارة التالية :

$$x^2 - C^2t^2 \qquad (1)$$

مساوية للصفر في جملة قياسية مركزية واحدة فإنها تبقى مساوية للصفر من أجل جميع الجمل القياسية الأخرى ويمكننا أن نضيف اقتراحاً متمماً وهو أنّ العبارة (1) في جميع الجمل القياسية المركزية تبقى دون تغير .

نفرض $x = x_1$ و $c\,t = x_2$ وكذلك $x' = x'_1$ و $c\,t' = x'_2$ فيمكننا اعتبار فضاء الأحداث الموافق لذلك كأنّه فضاء إقليدي خادع ذي بعدين والذي تصبح فيه العبارة (1) على الشكل التالي :

$$x_1^2 - x_2^2$$

وهي تمثل مربع مسافة النقطة (x_1, x_2) عند مبدأ الإحداثيات أو مربع طول المتجه المنطلق من المبدأ إلى هذه النقطة .

ونعلم أنّ القاعدة في الفضاء الإقليدي الخادع والذي يعرّف فيه طول المتجه بعبارة فرق مربع الإحداثيات تكون قاعدة متعامدة قياسية. ولنفس السبب فإنّ القاعدة الموافقة في جملة القياس S' تكون هي بدورها متعامدة قياسية وبالتالي فإن مصفوفة الانتقال A من القاعدة في الجملة S إلى القاعدة في S' تكون مصفوفة متعامدة قياسية خادعة من الشكل التالي :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$$

وينتج من ذلك أن :

$$e'_1 = \frac{e_1 + \beta e_2}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad e'_2 = \frac{\beta e_1 + e_2}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}$$

نأخذ أولاً الحالة التي يكون فيها المقامان موجبان عندئذٍ تأخذ المصفوفة A الشكل التالي :

$$A_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$$

وفي هذه الحالة ترتبط الإحداثيات $\{x'_1, x'_2\}$ و $\{x_1, x_2\}$ بالعلاقات التالية :

$$x_1 = \frac{x'_1 + \beta x'_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad و \quad x_2 = \frac{\beta x'_1 + x'_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

وتصبح هذه العلاقات بالرموز القديمة كما يلي :

$$x = \frac{x' + \beta c t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad و \quad t = \frac{\frac{\beta}{c} x' + t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (2)$$

و نحصل من (2) على x', t' بدلالة x و t كما يلي :

$$x' = \frac{x + \beta c t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad و \quad t = \frac{-\frac{\beta}{c} x + t}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (3)$$

ولنشرح المعنى الفيزيائي للوسيط β :

نفرض أنّ النقطة M ساكنة في الجملة S' ولنفرض أنها واقعة في مبدأ الإحداثيات (أي $x' = 0$) .

ينتج من العلاقة الأولى في (3) فيما يخص هذه النقطة M ما يلي :

$$x - \beta\, ct = 0$$

او $$\frac{x}{t} = \beta C$$

ولكن $\frac{x}{t}$ هي سرعة النقطة M في الجملة S .وهي وضوحاً سرعة الجملة S' بالنسبة للحملة S والتي نرمزها بـ V .

وبالتالي فإن :

$$v = \beta\ c$$

أو :

$$\beta = \frac{v}{c}$$

نعوض عن β في كل من المعادلتين (2) و(3) فنحصل على ما يلي :

$$x = \frac{x' + v\,t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad و \quad t = \frac{\frac{v}{c^2}x' + t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (4)$$

وكذلك :

$$x' = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad و \quad t' = \frac{-\frac{v}{c^2}x + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (5)$$

يسمى التحويلان (4) و(5) بتحويلي لورانس .

لقد فرضنا في مصفوفة الانتقال من القاعدة $\{e_1, e_2\}$ إلى القاعدة $\{e'_1, e'_2\}$ أنّ إشارة جميع المقامات موجبة . بقي أن نبرهن أن الحالات الأخرى غير ممكنة :

فإذا كان العمود الثاني من مصفوفة الانتقال يحوي إشارة سالبة في مقامه فنحصل على العلاقات التالية :

$$x = \frac{\pm x' - v\,t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad و \quad t = \frac{\pm\frac{v}{c^2}x' - t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

للنقطة x' في الجملة S' تكون مناقضة للأحداث المقابلة لها في النقطة x في الجملة S .

أما إذا كانت الإشارة سالبة في العمود الأول من مصفوفة الانتقال من القاعدة الأولى إلى القاعدة الثانية وفي العمود الثاني إشارة موجبة فنحصل على العلاقات التالية :

$$x = \frac{-x' + v\,t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{و} \quad t = \frac{-\frac{v}{c^2}x' + t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

التي يمكن الانتقال منها إلى العلاقات (4) بتغير الإشارة عند x' أي بتغير اتجاه المحور Ox' إلى الجهة المعاكسة تماماً .

وبهذا نكون أنهينا دراسة تحويلي لورانس (4) و (5) .

نلاحظ أنّ قانوني لورانس صحيحان فقط عندما $\left|\frac{v}{c}\right|<1$ وهذا يعني أنّ الحركة التي تزيد سرعتها عن سرعة الضوء غير ممكنة .

وعندما $t \approx t'$ و $x \approx x'$ فإنّ تحويل لورانس يؤول إلى تحويل غاليليه في الميكانيك الكلاسيكي .

نفرض أنّ ox و ot المحوران الإحداثيان لفضاء الحوادث للجملة S و ox' و ot' المحوران الإحداثيان للجملة S' (الشكل 5) .

نعلم أنّـــه إذا مثلنا المحورين ox' و ot' في المستوي الإقليدي فنجد أنهما متناظران (كل منهما يناظر الآخر) بالنسبة للجملة المتعامدة NN' و MM' والتي هي جملة إحداثيات زوايا الجملة الأولى S .

يمكن النظر إلى ot' كبيان لحركة مبدأ إحداثيات الجملة S' بالنسبة للجملة S نلاحظ أنه من أجل جميع نقاطها يكون $x' = 0$.

وبالعكس نعتبر المحور ot بيان حركة مبدأ الإحداثيات في الجملة S بالنسبة للجملة S' .

إن القيمة المطلقة لظل الزاوية الحادة بين ot و ox يساوي .

$$\left|\frac{ct}{x}\right| = \frac{c}{|v|}$$

حيث إنّ $v = \frac{x}{t}$ هي سرعة حركة الجملة S' بالنسبة للجملة S وبما أنّ $|v| < C$،
إذن ظل الزاوية هذه بالقيمة المطلقة أكبر من الواحد وهذا يعني أنّ محور الزمن ot يقع ضمن الزاوية MON وبالتالي فإنّ جميع المحاور الفضائية ox تكون ضمن الزاوية MON' .

فمن أجل المستقيمين MM' و NN' لدينا $\left|\frac{ct}{x}\right| = 1$ وينتج من ذلك أنّ $|v| = c$ في جميع الجمل القياسية وهذان المستقيمان يمثلان بيان لحركة سرعتها تساوي سرعة الضوء .

5-6 – بعض نتائج تحويل لورانس :

1– قاعدة مجموع السرع :

من العلاقة (5) نجد أنّ :

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} / \frac{dt}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} : \frac{-\frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt} + 1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{\frac{dx}{dt} - v}{-\frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt} + 1} = \frac{u - v}{-\frac{uv}{c^2} + 1}$$

وينتج من ذلك أنّ :

$$u' = \frac{u - v}{-\frac{uv}{c^2} + 1} \Rightarrow u = \frac{u' + v}{-\frac{u'v}{c^2} + 1} \qquad (6)$$

وهذه علاقة جديدة لمجموع السرع .

أما إذا كانت $u = c$ فنجد من العلاقة (6) أن :

$$u' = \frac{c - v}{-\frac{v}{c} + 1} = c$$

وبالعكس إذا كانت $u' = c$ فنجد أن :

$$u = \frac{c + v}{\frac{v}{c} + 1} = c$$

وهذا يعني أنّــه ينتج من تحويل لورانس قانون ثبات سرعة الضوء c .

2- نسبية وحدانية الزمن :

نفرض أنّ A و B حدثان في الجملة S قد وقعا في نفس اللحظة الزمنية t وفي نقطتين مختلفتي الإحداثيين x_1 و x_2 عندئذٍ من العلاقة الثانية من (5) نجد أن هذين الحدثين في S' سيقعان في اللحظة الزمنية التالية :

$$t'_1 = \frac{-\frac{v}{c^2}x_1 + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{و} \quad t'_2 = \frac{-\frac{v}{c^2}x_2 + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow t'_2 - t'_1 = \frac{\frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

وينتج من ذلك أنّ الأحداث التي تقع في نفس اللحظة الزمنية في جملة قياس معينة قد لا تقع في نفس اللحظة في جملة قياس أخرى .

نلاحظ في الرسم (5) أن الحدثين A و 'A وقعا في نفس اللحظة في جملة القياس S (أي أن $AA' // ox$) ونلاحظ بوضوح في الجملة S أنّ الحدث 'A وقع بعد الحدث O وبالتالي فإن الحدث A وقع بعد الحدث O في جملة القياس S .

3) ازدياد كتلة الجسم المتحرك

معلوم أنّــه إذا طبقنا على جسم قوة ثابتة، فإنّ سرعة حركة هذا الجسم تزداد طرداً مع الزمن بتطبيق القوى عليه ضمن الشروط العادية ولكن هذه الزيادة المطردة لن تبقى على حالها عندما تكون سرعة هذا الجسم قريبة من سرعة الضوء وفي هذه الحالة يمكن

القول بأنّ كتلة الجسم تزداد وعندئذٍ تعطى كتلة الجسم المتحرك بدلالة كتلته الابتدائية كما يلي :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

حيث m كتلة الجسم المتحرك و v سرعة حركة الجسم و m_0 كتلة الجسم في حالة السكون أي كتلة الجسم في جملة القياس التي يكون فيها الجسم ثابتاً .

فلو فرضنا أنّ سرعة إلكترون v بحيث إن v تختلف عن سرعة الضوء مثلاً بـمقدار $30\,M/sec$ عندئذٍ تكون كتلة هذا الإلكترون هي :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{\frac{c+v}{c}\,\frac{c-v}{c}}} \approx \frac{m_0}{\sqrt{2\,\frac{c-v}{c}}}$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{2\,\frac{30}{30.10^7}}} = 1000\,\sqrt{5}\,m_0 > 2000\ \ m_0$$

وهذا يعني بأنّ كتلة الإلكترون هذا تزداد بمقدار 2000 مرة مما هو عليه ضمن الشروط المفروضة .

نظرية :

إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة قابلة للقلب فإنه بإجراء عدد منته من العمليات الأولية على أسطر المصفوفة A يمكن الحصول على مصفوفة الوحدة.

مثال (1) :

حول المصفوفة القابلة للقلب التالية إلى مصفوفة الوحدة بإجراء عدد منته من العمليات (التحويلات) الأولية على الأسطر :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

الحـــــل :

سنرمز قبل إجراء الحل، بـــ r_i للسطر i في المصفوفة A كما سنرمز بـــ $r_i \leftrightarrow r_j$ للمبادلة بين السطرين i و j في A ولنرمز بـــ $r_i + ar_i$ لضرب السطر i بالعدد a ثم إضافته للسطر j في A :

$$A \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2-2r_1,\, r_3-2r_1]{(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}\ r_2]{(3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1+r_2]{(4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[r_2+\frac{1}{3}r_3,\, r_1-\frac{2}{3}r_3]{(5)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1 – المبادلة بين السطرين الأول والثاني.

2- ضرب السطر الأول بالعدد (-2) وإضافته للسطر الثاني ثم ضرب السطر الأول بالعدد (-2) وإضافته للسطر الثالث .

3- ضرب السطر الثاني بالعدد $\frac{1}{3}$.

4- جمع السطر الثاني للسطر الأول .

5- ضرب السطر الثالث بالعدد $\frac{1}{3}$ وإضافته للسطر الثاني ثم ضرب السطر الثالث بالعدد $-\frac{2}{3}$ وإضافته للسطر الأول .

مثال (2) :

أوجد مقلوب المصفوفة غير الشاذة التالية اعتماداً على **العمليات الأولية على الأسطر:**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

الحـــــل :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2+r_3]{(1)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2-\frac{3}{2}r_1]{(2)}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1-\frac{1}{2}r_2,\, r_3-\frac{5}{4}r_2]{(3)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{(4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{(5)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}r_2,\, \frac{1}{4}r_3]{(6)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & 1 \\ \frac{15}{8} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{bmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & 1 & 1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(5)} \begin{bmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{7}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(6)} \begin{bmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{7}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= A^{-1}$$

في الحقيقة حتى لا نجري العمليات الأولية مرتين إحداهما على المصفوفة A والثانية على مصفوفة الوحدة يمكن وضع المصفوفة المعطاة بجانب مصفوفة الوحدة ثم إجراء العمليات الأولية على المصفوفتين معاً .

مثال (3) :

أوجد مقلوب المصفوفة غير الشاذة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

الحـــل :

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2+5r_1,\, r_3+2r_1]{(1)} \left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2,\, -r_1]{(2)} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1-r_3,\, r_2+3r_3]{(3)}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3+2r_2]{(4)}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -11 & -5 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[-r_2,\, -r_3]{(5)} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 11 & 5 & -7 \end{bmatrix}.$$

مثال (4) :

بفرض أن :

$$f(x) = \frac{5 - x - 2x^2}{1 + x^2}$$

و :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

أوجد $f(x)$.

الحـــــل:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 40 \\ 20 & 89 \end{bmatrix}, I + A^2 = \begin{bmatrix} 10 & 40 \\ 20 & 90 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 40 \\ 20 & 90 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 90 & -40 \\ -20 & 10 \end{bmatrix} . \frac{1}{100} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5.I + A - 2A^2 = -2 \begin{bmatrix} 6 & 38 \\ 19 & 82 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \frac{5.I + A - 2A^2}{I + A^2} = -2 \begin{bmatrix} 6 & 38 \\ 19 & 82 \end{bmatrix} . \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -22 & 14 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المجزأة .

إذا كانت A مصفوفة ما وإذا قسمنا هذه المصفوفة إلى عدة أجزاء بواسطة جملة من المستقيمات العمودية والأفقية فإنه يمكن أن ننظر إلى كل جزء من هذه الأجزاء كمصفوفة جديدة فيها عدد الأعمدة وعدد الأسطر اقل من عدد الأعمدة وعدد الأسطر في المصفوفة الأصلية.

نسمي أية مصفوفة من هذه المصفوفات مصفوفة جزئية، كما نسمي المصفوفة التي عناصرها تلك المصفوفات الجزئية (الناتجة بعد التقسيم) بمصفوفة مجزأة ولدراسة الجداء في المصفوفات المجزأة نأخذ المصفوفتين التاليتين :

$$U=\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{n1} & U_{n2} & \dots & U_{nm} \end{bmatrix} \quad , \quad V=\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{m1} & V_{m2} & \dots & V_{mp} \end{bmatrix}$$

ولنفرض أن الأعمدة في المصفوفة الجزئية U_{ij} يساوي عدد الأسطر في المصفوفة الجزئية V_{jk} حيث k ,j ,i تأخذ القيم :

$$i=1,2,\dots\dots\dots,n \quad ,j=1,2,\dots\dots\dots\dots,m \quad ,k=1,2,\dots\dots,p$$

و ضمن هذه الشروط يكون الجداء التالي موجوداً :

$$W_{ik}=U_{i1}V_{1j}+U_{i2}V_{2j}+\dots\dots\dots\dots+U_{im}V_{nj}$$

و يكون لدينا :

$$U.V=\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{n1} & W_{n2} & \cdots & W_{np} \end{bmatrix}$$

هي مصفوفات مربعة .

مثال (5) :

أوجد مقلوب المصفوفة التالية :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

الحـــل :

إن المصفوفة السابقة مصفوفة مجزأة قطرية لأنها تكتب على الشكل التالي :

$$A=\begin{bmatrix}A_1 & 0 & 0\\ 0 & A_2 & 0\\ 0 & 0 & A_3\end{bmatrix}$$

حيث :

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{bmatrix} \quad , \quad A_2=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad A_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

و ينتج من نظرية لابلاس أن :

$$\det A = \det A_1 . \det A_2 . \det A_3$$

علاوة على ذلك فإن مقلوب المصفوفة A (إذا وجد) يعطى بالعلاقة :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1} & 0 & 0\\ 0 & A_2^{-1} & 0\\ 0 & 0 & A_3^{-1}\end{bmatrix}$$

و يمكن حساب مقلوب كل من المصفوفات الجزئية بسهولة و هي على النحو التالي :

$$A_1^{-1}=\begin{bmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad A_2^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix} \quad , \quad A_3^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

و بالتالي فإن مقلوب A هو :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1} & 0 & 0\\ 0 & A_2^{-1} & 0\\ 0 & 0 & A_2^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

رتبة المصفوفة :

معلوم لدينا أنه إذا حصلنا على المصفوفة B من المصفوفة A نتيجة لعدد منته من التحويلات (العمليات) الأولية فإن رتبة A تساوي رتبة B .

مثال (6) :

أوجد رتبة المصفوفة التالية :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 3 & 1 & 4 & 2\\ 2 & 3 & 1 & -1\\ 1 & -4 & -7 & 5\end{bmatrix}$$

الحـــــل :

سوف نحول المصفوفة A إلى مصفوفة مختزلة الشكل بالأسطر (متدرجة) على النحو التالي :

$$A \xrightarrow{r_2-3r_1,r_3-2r_1,r_4-r_1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & -6 & -10 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-5r_2,r_4-6r_2}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4-r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

واستناداً إلى النظرية التي تنص أن رتبة أي مصفوفة مختزلة الشكل بالأسطر (متدرجة) تساوي عدد أسطرها الحاوية لعناصر مختلفة عن الصفر .

إذن واضح أن رتبة المصفوفة الأخيرة تساوي 3 وبالتالي رتبة المصفوفة A تساوي 3 لأن العمليات(التحويلات) الأولية لا تؤثر على رتبة المصفوفة .

مثال (7) :

أوجد رتبة المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

الحـــل :

$$A \xrightarrow[r_2-3r_1, r_3-2r_1, r_4-3r_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -11 & 5 & 4 & -14 \\ 0 & -11 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -22 & 10 & -8 & -19 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2, r_4-2r_2, r_5+r_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -11 & 5 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4-r_3, r_5+r_3]{}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -11 & 5 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن رتبة المصفوفة الأخيرة تساوي 3 وبالتالي تكون للمصفوفة A نفس الرتبة .

مثال (8) :

أي من المصفوفات التالية مصفوفة مختزلة الشكل بالأسطر (متدرجة) :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الحـــل :

المصفوفات المختزلة الشكل بالأسطر هي D, A فقط .

مثال (9) :

أوجد رتبة المصفوفة التالية :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -5 & -2 \\ 4 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 6 & 6 & -1 & 3 & -5 \\ 4 & 3 & -6 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

الحـــل :

$$A\xrightarrow[r_2-2r_1,r_3-3r_1,r_4-2r_1]{}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & 9 & 1 \\ 0 & -3 & -16 & 18 & 1 \\ 0 & -3 & -16 & 18 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_3]{}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & 9 & 1 \\ 0 & -3 & -16 & 18 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-\frac{3}{2}r_2]{}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي رتبة المصفوفة تساوي 3 .

مثال (10) :

أوجد جملة المعادلات الخطية المتجانسة التي تكون مجموعة حلولها W مولدة بالمتجهات:

$$\{u_1,u_2,u_3\}=\{(1,-2,0,3),(1,-1,-1,4),(1,0,-2,5)\}$$

الحـــــل :

يكون المتجه $v=(x,y,z,t)$ من المجموعة W عندما وفقط عندما يمكننا كتابة v على شكل تركيب خطي بالمتجهات u_1,u_2,u_3 .

لذلك نشكل المصفوفة M التي تكون أعمدتها الأولى u_1,u_2,u_3 وعمودها الأخير هو المتجه v ثم نحول المصفوفة M إلى الشكل المختزل بالأسطر (المتدرجة) كما يلي :

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ -2 & -1 & 0 & y \\ 0 & -1 & -2 & z \\ 3 & 4 & 5 & t \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & 2x+y \\ 0 & -1 & -2 & z \\ 0 & 1 & 2 & -3x+t \end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & 2x+y \\ 0 & 0 & 0 & 2x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & -5x-y+t \end{bmatrix}$$

العمود الرابع تركيب خطي بالأعمدة u_1, u_2, u_3 إذا كان .

$$rank\ (M) = rank\ (A)$$

وحتى يكون $rank\ (M) = 2$ يجب أن يحقق العمود الرابع في M ما يلي :

$$2x + y + z = 0$$
$$-5x - y + t = 0$$

وهي جملة المعادلات الخطية المتجانسة والتي مجموعة حلولها الأساسية هي المتجهات

. u_1, u_2, u_3

مثال (11) :

ليكن الفضاء الحقيقي R^4 ولنأخذ الفضائين الجزئيين التالين في R^4 :

$$U = \{(a,b,c,d) : b + c + d = 0\}$$
$$W = \{(a,b,c,d) : a + b = 0\ \ , c = zd\}$$

أوجد قاعدة في كل من الفضاءات الجزئية التالية $U \cap W$, U, W واحسب

عدد أبعاد كل منهم .

الحـــل :

1) لنبحث عن قاعدة لمجموعة الحلول (a, b, c, d) للمعادلة :

$$b + c + d = 0$$

أو :

$$0.\ a + b + c + d = 0$$

والمتحولات الحرة الثلاث في المعادلة الأخيرة هي a, c, d وباختيار القيم الكيفية

التالية:

$$a = 1, \quad c = 0, \quad d = 0$$
$$a = 0, \quad c = 1, \quad d = 0$$
$$a = 0, \quad c = 0, \quad d = 1$$

نحصل على الحلول التالية :

$$u_1 = (1,0,0,0)$$
$$u_2 = (0,-1,1,0)$$
$$u_3 = (0,-1,0,1)$$

على الترتيب وتكون المجموعة $\{u_1, u_2, u_3\}$ قاعدة لـــ U وعدد أبعاد U يساوي 3.

2) نختار قاعدة في W مكونة من مجموعة الحلول (a, b, c, d) لجملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{gathered} a+b=0 \\ c=2d \end{gathered}$$

أو :

$$\begin{gathered} a+b=0 \\ c-2d=0 \end{gathered}$$

إن المتحولين b, d حران وباختيار القيم الكيفية التالية :

$$b=1, \quad d=0 \Rightarrow w_1=(-1,1,0,0)$$
$$b=0, \quad d=1 \Rightarrow w_2=(0,0,2,1)$$

وتشكل مجموعة الحلول $\{w_1, w_2\}$ قاعدة للفضاء الجزئي W ويكون عدد أبعاد W مساوياً 2 .

3) الفضاء الجزئي $U \cap W$ مكون من المتجهات (a, b, c, d) التي تحقق الشرط الوارد في تعريف U وكذلك تحقق الشرط الوارد في تعريف W وبالتالي التي تحقق الشروط التالية :

$$\begin{gathered} b+c+d=0 \\ a+b=0 \\ c=2d \end{gathered}$$

أو :

$$\begin{gathered} a+b=0 \\ b-c-d=0 \\ c-2d=0 \end{gathered}$$

إن المتحول الحر في هذه الجملة المتجانسة هو d ولنختار $d=1$ فنحصل على الحل $u=(3,-3,2,1)$ وبالتالي فان $\{u\}$ هو قاعدة الفضاء الجزئي $U \cap W$ وبالتالي فإن عدد أبعاده يساوي 1 أي أن $dim(U \cap W)=1$.

[illegible]

بالمتجهات التالية على الترتيب :

$$U = span\{(1,1,0,-1),(1,2,3,0),(2,3,3,-1)\}$$
$$W = span\{(1,2,2,-2),(2,3,2,-3),(1,3,4,-3)\}$$

والمطلوب :

1- أوجد $dim(U+W)$

2- أوجد $dim(U \cap W)$

الحـــل :

1- إن $U+W$ هو الفضاء الجزئي في R^4 المولد بالمتجهات الستة الواردة في نص المسألة لذلك نشكل المصفوفة M التي أسطرها هي المتجهات الستة المذكورة ثم نحوّل M إلى الشكل المختزل بالأسطر (المتدرجة) كما يلي :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبما أن المصفوفة المتدرجة الأخيرة تحوي فقط ثلاث أسطر مختلفة عن الصفر لذلك فإن: $dim(U+W) = 3$.

2) لنجد أولاً $dim U$ و $dim W$.لذلك نشكل المصفوفتين M_1 و M_2 اللتين أسطرهما تولدان W, U على الترتيب ثم نحوّل M_1 و M_2 إلى الشكل المختزل بالأسطر كما يلي :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وكذلك :

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبما أن كل من المصفوفتين المتدرجتين الناتجتين عن M_1 و M_2 تملك سطرين مختلفين عن الصفر .

إذن :

$$dim U = dim W = 2$$

وباستخدام القانون :

$$dim(U+W) + dim(U \cap W) = dim U + dim W$$

نجد أن :

$$3 + dim(U \cap W) = 2 + 2$$

وبالتالي فإن :

ليكن الفضاء المتجه الحقيقي R^5 وليكن :

$$U = span\{(1,3,-2,2,3),(1,4,-3,4,2),(2,3,-1,-2,9)\}$$
$$W = span\{(1,3,0,2,1),(1,5,-6,6,3),(2,5,3,2,1)\}$$

والمطلوب :

1- أوجد قاعدة في الفضاء الجزئي $U+W$.

2- أوجد قاعدة في الفضاء الجزئي $U \cap W$.

الحـــل :

1- إن الفضاء الجزئي $U+W$ موّلد بالمتجهات الستة الواردة في نص المسألة .

لذلك نشكل المصفوفة التي أسطرها هي المتجهات الستة المذكورة ثم نحوّل تلك المصفوفة إلى الشكل المتدرج بالأسطر كما يلي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن مجموعة الأسطر المختلفة عن الصفر في المصفوفة المتدرجة الأخيرة هي :

$$\{(1,3,-2,2,3),(0,1,-1,2,-1),(0,0,1,0,-1)\}$$

وتشكل هذه المتجهات قاعدة للفضاء $U+W$ وبالتالي فإن $dim\,(U+W) = 3$.

ب- نبحث أولا عن جمل المعادلات الخطية التي تكون مجموعة حلولها هي W,U على الترتيب لذلك نشكل المصفوفة التي أسطرها الثلاث الأولى هي المتجهات المولدة لـ U وسطرها الأخير هو (x, y, z, s, t) ثم نحولها إلى مصفوفة متدرجة بالأسطر على النحو التالي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ x & y & z & s & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & -3x+y & 2x+z & -2x+z & -3x+t \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -x+y+z & 4x-2y+s & 3-6x+y+t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نساوي العناصر في السطر الثالث للصفر لنحصل على جملة معادلات خطية متجانسة حلولها تولد U وبالتالي نكتب :

$$\begin{aligned} -x+y+z &= 0 \\ 4x-2y+s &= 0 \\ -6x+y+t &= 0 \end{aligned}$$

وبالمثل نشكل المصفوفة التي أسطرها هي المتجهات المولدة لـ W وسطرها الأخير هو (x, y, z, s, t) ثم نحولها إلى الشكل المختزل بالأسطر على النحو التالي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ x & y & z & s & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3x+y & z & -2x+s & -x+t \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9x+3y+z & 4x-2y+s & 2x-y+t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-9x+3y+z=0$$
$$4x-2y+s=0$$
$$2x-y+t=0$$

نجمع جملتي المعادلات الخطية السابقة لنحصل على جملة معادلات خطية متجانسة حلولها تولد $U\cap W$ ثم ندرج أسطرها كما يلي :

$$-x+y+z=0$$
$$4x-2y+s=0$$
$$-6x+y+t=0$$
$$-9x+3y+z=0$$
$$4x-2y+s=0$$
$$2x-y+t=0$$

وبعد التدريج نحصل على الجملة التالية :

$$-x+y+z=0$$
$$2y+4z+s=0$$
$$8z+5s+2t=0$$
$$s-2t=0$$

يوجد في الجملة الخطية المتدرجة الأخيرة متحول حر وحيد وليكن t وبالتالي فإن $dim(U\cap W)=1$.

وباختيار $t=2$ نحصل على الحل :

$$x=1,\quad y=4,\quad z=-3,\quad s=4,\quad t=2$$

وينتج من ذلك أن $\{(1,4,-3,4,2)\}$ تمثل قاعدة للفضاء الجزئي $U\cap W$.

تغير القواعد :

مثال (14) :

ليكن P_2 فضاء كثيرات الحدود التي درجتها ≤ 2 ولنأخذ كثيرات الحدود التالية :

$$P_1=1,\quad P_2=t-1,\quad P_3=(t-1)^2=t^2-2t+1$$

فتشكل هذه العناصر في P_2 قاعدة $A=\{P_1,P_2,P_3\}$ فإذا أخذنا المتجهة

$v=t^2-5t+6$ من P_2 فيتم الحصول على إحداثيات V بالنسبة للقاعدة A

كما يلي :

نضع $v=xP_1+yP_2+zP_3$ حيث x, y, z مجاهيل عددية ثم نجري المطابقة التالية:

$$2t^2-5t+6=x(1)+y(t-1)+z(t^2-2t+1)=$$

$$=x+yt-y+zt^2-2zt+z=$$

$$=zt^2+(y-2z)t+(x-y+z)\cdot$$

وبالمطابقة نجد أن :

$$x-y+z=6$$

$$y-2z=-5$$

$$z=2$$

وحل جملة المعادلات الخطية الأخيرة هو :

$$x=3, \quad y=-1, \quad z=2$$

إذن :

$$v=3P_1-P_2+2P_3$$

أو :

$$[v]_A=[3,-1,2]$$

مثال (15) :

ليكن الفضاء الحقيقي R^3 ولتكن المتجهات

$$u_3=(0,1,1), \quad u_2=(1,1,0), \quad u_1=(1,-1,0)$$

من R^3 فتشكل هذه المتجهات قاعدة A فيه فإذا كان $v=(5,3,4)$ من R^3 فإننا

نحصل على إحداثيات v بالنسبة للقاعدة A كما يلي :

نكتب $v=xu_1+yu_2+zu_3$ حيث x, y, z مجاهيل عددية و يكون لدينا :

$$\begin{bmatrix}5\\3\\4\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$x+y=5, \qquad -x+y+z=3, \qquad z=4$$

وحل هذه الجملة هو :

$$x=3, \quad y=2, \quad z=4$$

وبالتالي فإن :

$$v=3u_1+2u_2+4u_3$$

أو :

$$[v]_A=[3,2,4]$$

مثال (16) :

ليكن الفضاء الحقيقي R^2 ولنأخذ فيه القاعدة القانونية :

$$\varepsilon=\{e_1,e_2\}=\{(1,0),(0,1)\}$$

والقاعدة :

$$A=\{u_1,u_2\}=\{(1,3),(1,4)\}$$

1- أوجد مصفوفة الانتقال P من القاعدة القانونية ε إلى القاعدة A .

2- أوجد مصفوفة الانتقال Q المعاكسة من A إلى ε .

3- أوجد إحداثيات المتجه $v=(5,-3)$

الحـــــل :

1) إن مصفوفة الانتقال من ε إلى A هي :

$$p=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

2- بفرض $v=(a,b)$ متجه كيفي في R^2 ولنجد إحداثيات v بالنسبة للقاعدة A لذلك نكتب :

$$(a,b)=x(1,3)+y(1,4)=(x+y,\ 3x+4y)$$

وتكون جملة المعادلات الخطية المكافئة هي :

$$x+y=a \ , \quad 3x+4y=b$$

وبحل هذه الجملة بالنسبة لـ y , x نجد أن :

$$x=4a-b \ , \quad y=-3a+b$$

إذن :

$$v=(4a-b)\,u_1+(-3a+b)\,u_2$$

وبالتالي :

$$[v]_A=[(a,b)]_A=[4a-b,-3a+b]^T$$

وباستخدام عبارة $[v]_A$ السابقة نجد أن :

$$e_1=(1,0)=(4-0)\,u_1+(-3+0)\,u_2=4u_1-3u_2$$
$$e_2=(0,1)=(0-1)\,u_1+(0+1)\,u_2=-u_1+u_2$$

وبالتالي فإن مصفوفة الانتقال من A إلى $\mathcal{E}$ هي :

$$Q=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

وكان بالإمكان إيجاد P^{-1} بالطرق المعروفة ومن ثم مساواة Q بـ P^{-1} .

3) باستخدام العلاقة :

$$[v]_A = P^{-1}\,[v]_\varepsilon$$

حيث إن :

$$[v]_\varepsilon=[5,-3]^T \ , \quad P^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

نجد أن :

$$[v]_A=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 23 \\ 18 \end{bmatrix}$$

مثال (1) :

ليكن الفضاء المتجه الحقيقي R^3 ولتكن القاعدة :

$A=\{u_1=(1,2,0),u_2=(1,3,2),u_3=(0,1,3)\}$ في R^3

والمطلوب :

1- أوجد مصفوفة الانتقال P من القاعدة القانونية $\varepsilon=\{e_1,e_2,e_3\}$ في R^3 إلى القاعدة A .

2- أوجد مصفوفة الانتقال العكسية من A إلى ε .

الحـــل :

1- بما أن :

$$u_1 = e_1 + 2e_2$$
$$u_2 = e_1 + 3e_2 + 2e_3$$
$$u_3 = e_2 + 3e_3$$

إذن :

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

2- نجد مقلوب المصفوفة P^{-1} كما يلي :

$$M=[P,I]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 7 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right]\sim$$

وبالتالي :

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (18) :

ليكن الفضاء الحقيقي R^3 ولتكن

$A = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,2,2)\}$ قاعدة في R^3

والمطلوب:

إيجاد إحداثيات متجه كيفي $v = (a,b,c)$ بالنسبة للقاعدة A .

الحـــــل :

طريقة أولى :

نكتب v كعبارة خطية بمتجهات القاعدة A :

$$(a,b,c) = x(1,1,0) + y(0,1,1) + z(1,2,2) =$$
$$= (x+z,\ x+y+2z\ ,\ y+2z)$$

حيث x, y, z مجاهيل عددية .

$$x + y + 2z = b$$
$$y + 2z = c$$

وبحل هذه الجملة الخطية نحصل على الحل :

$$x = b - c, \quad y = -2a + 2b - c, \quad z = a - b + c$$

وبالتالي فإن :

$$[v]_A = [b - c,\ -2a + 2b - c,\ a - b + c]^T$$

طريقة ثانية:

نجد P^{-1} حيث P مصفوفة الانتقال من القاعدة القانونية ε إلى القاعدة A في R^3
وذلك بأن نحول المصفوفة $M = [P, I]$ إلى الشكل $[I, P^{-1}]$ على النحو التالي :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [I, P^{-1}]$$

وبالتالي يكون لدينا :

$$[v]_A = P^{-1}[v]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b - c \\ -2 + 2b - c \\ a - b + c \end{bmatrix}$$

مثال (19) :

ليكن الفضاء الحقيقي R^2 ولنأخذ القاعدتين التاليتين في R^2 :

$$A = \{u_1, u_2\} = \{(1,-2),(3,-4)\}$$

$$A' = \{v_1, v_2\} = \{(1,3),(3,8)\}$$

1- أوجد إحداثيات المتجه $v = (a,b)$ بالنسبة لـــ A .

2- أوجد مصفوفة الانتقال P من A إلى A' .

3- أوجد إحداثيات المتجه $v = (a,b)$ بالنسبة للقاعدة A' .

4- أوجد مصفوفة الانتقال Q من A' إلى A .

5- تحقق أن $Q = P^{-1}$.

6- تحقق أنه إذا كان المتجه $v = (a,b)$ من R^2 فإن $P^{-1}[v]_A = [v]_{A'}$

الحـــل :

1- بفرض $v = xu_1 + yu_2$ حيث y, x مجاهيل عددية ثم نكتب :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

وينتج من ذلك :

$$x + 3y = a$$

$$-2x - 4y = b$$

وبحل هذه الجملة بدلالة a, b نجد أن :

$$x = -2a - \frac{3}{2}b \, , \qquad y = a + \frac{1}{2}b$$

وبالتالي فإن :

$$(a,b) = (-2a - \frac{3}{2})u_1 + (a + \frac{1}{2}b)u_2$$

وهذا يعني أن :

$$[(a,b)]_A = \left[-2a - \frac{3}{2}b \, , \; a + \frac{1}{2}b\right]^T$$

كما يلي :

$$v_1 = (1,3) = (-2 - \frac{9}{2})u_1 + (1 + \frac{3}{2})u_2 =$$
$$= -\frac{13}{2}u_1 + \frac{5}{2}u_2$$
$$v_2 = (3,8) = (-6 - 12)u_1 + (3 + 4)u_2 =$$
$$= -18u_1 + 7u_2$$

نأخذ المصفوفة P المؤلفة أعمدتها من إحداثيات v_1, v_2 بالنسبة للقاعدة A فتكون :

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & -18 \\ \frac{5}{2} & 7 \end{bmatrix}$$

3- نكتب $v = xv_1 + yv_2$ حيث x, y مجهولان عدديان فنحصل على جملة المعادلات الخطية :

$$x + 3y = a$$
$$3x + 8y = b$$

أو :

$$x + 3y = a$$
$$-y = b - 3a$$

وبحل الجملة الأخيرة نجد أن :

$$x = -8a + 3b$$
$$y = 3a - b$$

وبالتالي فإن :

$$[(a,b)]_A = [-8a + 3b,\ 3a - b]^T$$

4- باستخدام نتائج الطلب الأخير (3) نكتب u_1,u_2 من A كمركبات خطية بدلالة v_1,v_2 من A' كما يلي :

$$u_1=(1,-2)=(-8-6)v_1+(3+2)v_2=14v_1+5v_2$$
$$u_2=(3,-4)=(-24-12)v_1+(9+4)v_2=-36v_1+13v_2$$

إذن المصفوفة Q والتي أعمدتها هي إحداثيات u_2,u_1 بالنسبة لـ A' هي :

$$Q=\begin{bmatrix}-14 & -36\\ 5 & 13\end{bmatrix}$$

5-
$$QP=\begin{bmatrix}-14 & -36\\ 5 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{13}{2} & -18\\ \frac{5}{2} & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

6- نستخدم (1) و (3) و (4) لنحصل على ما يلي :

$$P^{-1}[v]_A=Q[v]_A=\begin{bmatrix}-14 & -36\\ 5 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2a-\frac{3}{2}b\\ a+\frac{1}{2}b\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}-8a+3b\\ 3a-b\end{bmatrix}=[v]_{A'}$$

التحويلات الخطية والمصفوفات الممثلة :

مثال (20) :

نفرض R^2 فضاء حقيقي ولتكن القاعدتان التاليتان في R^2 :

$$A=\{u_1,u_2\}=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\right\}$$
$$\varepsilon=\{e_1,e_2\}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+3y \\ 4x-5y \end{bmatrix}$$

1- أوجد مصفوفة T بالنسبة للقاعدة A .

2- أوجد مصفوفة T بالنسبة للقاعدة $\mathcal{E}$.

الحــــل :

1- نجد أولاً $T(u_1)$ ثم نكتبه كعبارة خطية بالمتجهين u_2, u_1 فيكون لدينا :

$$T(u_1) = T(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

وينتج من ذلك :

$$x + 2y = 8$$
$$2x + 5y = -6$$

بحل هذه الجملة نحصل على الحل التالي :

$$x = 52 \;, \quad y = -22$$

وهذا يعني أن :

$$T(u_1) = 52u_1 - 22u_2$$

ثم نجد ثانياً $T(u_2)$ ونكتبه كعبارة خطية بالمتجهين u_2, u_1 كما يلي :

$$T(u_2) = T(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 19 \\ -17 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

وينتج من ذلك :

$$x + 2y = 19$$
$$2x + 5y = -17$$

وبحل هذه الجملة نحصل على ما يلي :

$$x = 129 \;, \quad y = -55$$

وبالتالي فإن :

$$T(u_2) = 129\, u_1 - 55\, u_2$$

أي أن :

$$[T]_{A} = \begin{bmatrix} 52 & 129 \\ -22 & -55 \end{bmatrix}$$

2) نوجد أولاً $T(e_1)$ ثم نكتبه كعبارة خطية بالمتجهين e_2, e_1 فيكون لدينا :

$$T(e_1) = T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2e_1 + 4e_2$$

$$T(e_2) = T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = 3e_1 + 5e_2$$

وبالتالي فإن :

$$[T]_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

مثال (21) :

ليكن التحويل الخطي $T : R^2 \to R^2$ المعرّف بالعلاقة التالية :

$$T(x, y) = (2x + 3y\ ,\ \ 4x - 5y)$$

ولتكن القاعدة :

$$A = \{u_1, u_2\} = \{(1, 2), (2, -5)\}$$

أوجد المصفوفة $[T]_{A}$ الممثلة لـــ T بالنسبة للقاعدة A .

الحـــــل :

نوجد أولاً إحداثيات متجه كيفي (a, b) من R^2 بالنسبة للقاعدة A كما يلي :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

وينتج من ذلك :

$$x + 2y = a$$
$$-2x - 5y = b$$

وبالتالي فإن :

$$(a,b)=(5a+2b)\,u_1+(-2a-b)\,u_2$$

ثم نوجد $T(u_1)$ ونكتبه كعبارة خطية بالمتجهين u_2,u_1 ونكرر الأمر نفسه بالنسبة لـــ $T(u_2)$ فنحصل على ما يلي :

$$T(u_1)=T(1,-2)=(-4,14)=8u_1-6u_2$$
$$T(u_2)=T(2,-5)=(-11,33)=11u_1-11u_2$$

ثم نشكل المصفوفة التي عمودها الأول إحداثيات $T(u_1)$ وعمودها الثاني إحداثيات $T(u_2)$ فتكون المصفوفة :

$$[T]_A=\begin{bmatrix} 8 & 11 \\ -6 & -11 \end{bmatrix}$$

مثال (22) :

ليكن المؤثر الخطي التفاضلي $D:V\to V$ حيث $V=P_3(t)$ فضاء كثيرات الحدود التي لا تزيد درجتها عن 3 ثم ليكن :

$$f(t)=3+5t-4t^2+2t^3$$

و :

$$D(f)=5-8t+6t^2$$

فإذا نسبنا كلا من f و $D(f)$ إلى القاعدة $\{1,t,t^2,t^3\}$ نجد أن :

$$[f]=[3,5,-4,2]^T\ ,\quad [D(f)]=[5,-8,6]^T$$

ولنحسب مصفوفة D بالنسبة للقاعدة $\{1,t,t^2,t^3\}$ بأن نكتب :

$$D(1)=0=0+0t+0t^2+0t^3$$
$$D(t)=1=1+0t+0t^2+0t^3$$
$$D(t^2)=2t=0+2t+0t^2+0t^3$$
$$D(t^3)=3t^2=0+0t+3t^2+0t^3$$

وينتج من ذلك :

$$[D]=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

إذن :

$$[D]\,.\,[f]=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\5\\-4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-8\\-6\\0\end{bmatrix}=[D(f)]$$

مثال (23) :

ليكن الفضاء الحقيقي R^2 ولنأخذ القاعدتين التاليتين في R^2 :

$$\varepsilon=\{e_1,e_2\}=\{(1,0),(0,1)\}$$
$$\mathcal{A}=\{u_1,u_2\}=\{(1,2),(2,-5)\}$$

ولنفرض $T:R^2\to R^2$ مؤثر خطي معرف بالعلاقة :

$$T(x,y)=(2x+3y\,,\ 4x-5y)$$

والمطلوب إيجاد مصفوفة T بالنسبة للقاعدتين $\varepsilon,\mathcal{A}$.

الحـــــل :

لنرمز لمصفوفة T بالنسبة للقاعدة القانونية بـــ A فنجد أن :

$$T(e_1)=T(1,0)=(2,4)=2e_1+4e_2$$
$$T(e_2)=T(0,1)=(3,-5)=3e_1-5e_2$$

وينتج من ذلك أن :

$$A=\begin{bmatrix}2&3\\4&-5\end{bmatrix}$$

وإذا رمزنا لمصفوفة T بالنسبة للقاعدة $\mathcal{A}$ بالرمز B فنعلم أن :

$$B=P^{-1}AP$$

$$u_1 = (1, -2) = e_1 - 2e_2$$
$$u_2 = (2, -5) = 2e_1 - 5e_2$$

إذن :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

وبإيجاد مقلوب P^{-1} نحصل على أن :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

وينتج مما تقدم أن :

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ -6 & -11 \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة T بالنسبة لـ $\mathcal{A}$ أي أن :

$$B = [T]_{\mathcal{A}}$$

مثال (24) :

ليكن $T : R^2 \to R^2$ تحويلاً خطياً معرفاً بالعلاقة التالية :

$$T(x, y) = (3x + 4y,\ 2x - 5y)$$

ولنأخذ القاعدتين التاليتين في R^2 :

$$\varepsilon = \{e_1, e_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$$
$$\mathcal{A} = \{u_1, u_2\} = \{(1, 2), (2, 3)\}$$

1- أوجد المصفوفة A الممثلة لـ T بالنسبة للقاعدة ε .

2- أوجد المصفوفة B الممثلة لـ T بالنسبة للقاعدة $\mathcal{A}$.

3- تحقق من صحة المساواة $B = P^{-1}AP$ حيث P مصفوفة الانتقال من القاعدة ε إلى القاعدة $\mathcal{A}$.

الحــــل :

لنفرض $(a,b)=ae_1+be_2$ متجهاً كيفياً من R^2 فنجد أن :

$$T(e_1)=T(1,0)=(3,2)=3e_1+2e_2$$
$$T(e_2)=T(0,1)=(4,-5)=4e_1-5e_2$$

وينتج من ذلك أن :

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & -5\end{bmatrix}$$

وهي المصفوفة الممثلة لــ T بالنسبة لــ $\mathcal{E}$.

2- نوجد $T(u_1)$ ثم نكتبه كعبارة خطية بمتجهات القاعدة A فنحصل على ما يلي :

$$T(u_1)=T(1,2)=(11,-8)=x(1,2)+y(2,3)$$

وينتج من ذلك :

$$x+2y=11$$
$$2x+3y=-8$$

وبحل هذه الجملة نجد أن $x=-49$, $y=30$ وبالتالي فإن :

$$T(u_1)=-49u_1+30u_2$$

وبشكل مماثل نجد $T(u_2)$ ونكتبه كعبارة خطية بالمتجهين u_2,u_1 فنحصل على ما يلي :

$$T(u_2)=T(2,3)=(18,-11)=$$
$$=x(1,2)+y(2,3)$$

وينتج من ذلك :

$$x+2y=18$$
$$2x+3y=-11$$

وبحل هذه الجملة نحصل على ما يلي :

$$x=-76\,,\qquad y=47$$

$$T(u_2) = -76\,u_1 + 47\,u_2$$

ثم نشكل المصفوفة التي أعمدتها هي إحداثيات المتجهين $T(u_1)$ و $T(u_2)$ على الترتيب فنحصل على المصفوفة :

$$B = \begin{bmatrix} -49 & -76 \\ 30 & 47 \end{bmatrix}$$

وكان بالإمكان إيجاد إحداثيات متجه كيفي (a, b) من R^2 بالنسبة للقاعدة $\mathcal{A}$ كما يلي :

$$(a,b) = x(1,2) + y(2,3) = (x+2y,\ 2x+3y)$$

وينتج من ذلك :

$$x + 2y = a$$
$$2x + 3y = b$$

وبحل هذه الجملة الخطية بالنسبة لـــ a و b نجد :

$$x = -3a + 2b, \qquad y = 2a - b$$

وبالتالي فإن :

$$(a,b) = (-3a+2b)u_1 + (2a-b)u_2$$

ونستخدم صيغة المتجه (a, b) لإيجاد إحداثيات المتجهين $T(u_1)$ و $T(u_2)$ بالنسبة للقاعدة $\mathcal{A}$ كما يلي :

$$T(u_1) = T(1,2) = (11,-8) = -49u_1 + 30u_2$$
$$T(u_2) = T(2,3) = (18,-11) = -76u_1 + 47u_2$$

وينتج من هذا أن :

$$B = \begin{bmatrix} -49 & -76 \\ 30 & 47 \end{bmatrix}$$

3- بما أن P هي مصفوفة الانتقال من القاعدة القانونية $\mathcal{E}$ إلى القاعدة $\mathcal{A}$ إذن :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

وبالتالي :

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-49 & -76\\ 30 & 47\end{bmatrix}=B$$

مثال (25) :

ليكن المؤثر الخطي T معرفاً على R^2 بالعلاقة التالية :

$$T(x,y)=(2x-7y\,,4x+3y)$$

ولتكن $A=\{u_1,u_2\}=\{(1,3),(2,5)\}$ قاعدة في R^2 والمطلوب :

1- أوجد المصفوفة $[T]_A$ الممثلة لـــ T بالنسبة لـــ A .

2- تحقق من صحة المساواة $[T]_A[v]_A=[T(v)]_A$.

الحـــــل :

1) نوجد إحداثيات متجه كيفي (a,b) من R^2 بالنسبة للقاعدة A كما يلي :

$$\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}$$

وينتج من ذلك :

$$x+2y=a$$
$$3x+5y=b$$

بحل هذه الجملة الخطية نحصل على :

$$x=-5a+2b,\qquad y=3a-b$$

وبالتالي فإن :

$$(a,b)=(-5a+2b)u_1+(3a-b)u_2$$

$$[v] = [-5a + 2b\ ,\ 3a - b]$$

وباستخدام عبارة المتجه (a,b) و $T(x,y) = (2x - 7y\ , 4x + 3y)$

نجد أن :

$$T(u_1) = T(1,3) = (-19,13) = 12u_1 + 70u_2$$
$$T(u_2) = T(2,5) = (-31,23) = 201u_1 + 116u_2$$

وبالتالي فإن :

$$[T]_A = \begin{bmatrix} 121 & 201 \\ -70 & -116 \end{bmatrix}$$

2- نستخدم العبارة :

$$(a,b) = (-5a + 2b)u_1 + (3a - b)u_2$$

فنحصل على ما يلي :

$$v = (4,-3) = -26u_1 + 15u_2$$
$$T(v) = T(4,-3) = (29,7) = -131u_1 + 80u_2$$

وبالتالي فإن :

$$T[(v)]_A = [-131,80]^T$$

و :

$$[v]_A = [-26,15]^T$$

وينتج من ذلك :

$$[T]_A[v]_A = \begin{bmatrix} 121 & 201 \\ -70 & -116 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -26 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -131 \\ 80 \end{bmatrix} = [T(v)]_A$$

مثال (26) :

ليكن R^3 فضاء" حقيقياً وليكن T مؤثراً خطياً على R^3 معرفاً كما يلي :

$$T(x,y,z) = (2y + z\ ,\ x - 4y\ ,\ 3x)$$

1- أوجد المصفوفة الممثلة لـــ T بالنسبة للقاعدة :

$$A = \{ w_1, w_2, w_3 \} = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0) \}$$

2- تحقق من صحة العلاقة $[T][v] = [T(v)]$ من أجل أي متجه v من R^3 .

الحـــــل :

1- نوجد إحداثيات متجه كيفي (a, b, c) من R^3 بالنسبة للقاعدة A بأن نكتب (a, b, c) كعبارة خطية بمتجهات القاعدة A كما يلي :

$$(a,b,c) = x(1,1,1) + y(1,1,0) + z(1,0,0) =$$
$$= (x+y+z, x+y, x)$$

وينتج من ذلك جملة المعادلات الخطية التالية :

$$x+y+z = a, \ x+y = b, \ x = c$$

وبحل هذه الجملة نحصل على الحل التالي بدلالة a, b, c

$$x = c, \ y = b - c, \ z = a - b$$

وبالتالي فإن :

$$(a,b,c) = cw_1 + (b-c)w_2 + (a-b)w_3$$

وهذا يعني :

$$[(a,b,c)] = [c, b-c, a-b]^T$$

وبما أن :

$$T(x,y,z) = (2y+z, x-4y, 3x)$$

إذن :

$$T(w_1) = T(1,1,1) = (3,-3,3) = 3w_1 - 6w_2 + 6w_3$$
$$T(w_2) = T(1,1,0) = (2,-3,3) = 3w_1 - 6w_2 + 5w_3$$
$$T(w_3) = T(1,0,0) = (0,1,3) = 3w_1 - 2w_2 - w_3$$

وينتج من ذلك :

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

متجه كيفي من R^3 :

$$T(v)=T(a,b,c)=(2b+c,a-4b,3a)=$$
$$=3aw_1+(-2a-4b)w_2+(-a+6b+c)w_3$$

وهذا يعني أن :

$$[T(v)]=[3a,-2a-4b,-a+6b+c]^T$$

وينتج مما تقدم أن :

$$[T]\,[v]=\begin{bmatrix}3 & 3 & 3\\ -6 & -6 & -2\\ 6 & 5 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\ b-c\\ a-b\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}3a\\ -2a-4b\\ -a+6b+c\end{bmatrix}=[T(v)]$$

مثال (27) :

ليكن R^3 فضاء" حقيقيا" فيه القاعدة التالية :

$$A=\{u_1,u_2,u_3\}=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

ولتكن المصفوفة التالية من القياس 3×3 :

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

فالمصفوفة A تعرّف تحويلاً خطياً في R^3 والمطلوب :

إيجاد المصفوفة B التي تمثل هذا التحويل الخطي بالنسبة للقاعدة A .

الحـــــل :

طريقة أولى :

نوجد إحداثيات متجه كيفي (a, b, c) من R^3 بالنسبة للقاعدة A كما يلي :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وينتج من ذلك جملة المعادلات الخطية التالية :

$$x = a, \quad y = b - a, \quad z = c - b$$

وبالتالي فإن :

$$(a,b,c)^T = au_1 + (b-a)u_2 + (c-b)u_3$$

وباستخدام العبارة الأخيرة لـ $(a,b,c)^T$ نجد كلاً من Au_1, Au_2, Au_3 كما يلي :

$$A(u_1) = A(1,1,1)^T = (0,2,7)^T = 0u_1 + 2u_2 + 5u_3$$

$$A(u_2) = A(0,1,1)^T = (-1,-1,6)^T = -u_1 - 0u_2 + 7u_3$$

$$A(u_3) = A(0,0,1)^T = (1,0,2)^T = u_1 - u_2 + 2u_3$$

وهذا يعني أن :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

طريقة ثانية :

نستخدم العلاقة $B = P^{-1}AP$ حيث P مصفوفة الانتقال من القاعدة القانونية $\mathcal{E}$ إلى القاعدة $\mathcal{A}$, ولإيجاد P^{-1} نستخدم طريقة التدريج بالأسطر على المصفوفة $M = [P, I]$ كما يلي :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

إذن مصفوفة المقلوب هي :

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن :

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

مثال (28) :

ليكن $V=M_{2\cdot 3}$ فضاء جميع المصفوفات من القياس 3×2 ولتكن القاعدة العادية في V هي :

$$\varepsilon=\left\{e_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

ثم لتكن $M=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و T مؤثراً خطياً على V معرفاً بالمساواة $T(A)=MA$.

أوجد المصفوفة الممثلة لـ T بالنسبة للقاعدة القانونية $\mathcal{E}$ في V .

نحسب ما يلي :

$$T(e_1)=Me_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}=$$
$$=1e_1+0e_2+3e_3+0e_4$$

$$T(e_2)=Me_2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}=$$
$$=0e_1+1e_2+0e_3+3e_4$$

$$T(e_3)=Me_3=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 4 & 0\end{bmatrix}=$$
$$=2e_1+0e_2+4e_3+0e_4$$

$$T(e_4)=Me_4=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 4\end{bmatrix}=$$
$$=0e_1+2e_2+0e_3+4e_4$$

وبالتالي فإن :

$$[T]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

مثال (29) :

نفترض R^2 فضاء حقيقي و T مؤثر خطي معرف عليه بالعلاقة :

$$T(x,y)=(5x-y,2x+y)$$

ولنأخذ في R^2 القاعدتين التاليتين :

$A=\{u_1,u_2\}=\{(1,4),(2,7)\}$

1- أوجد مصفوفة الانتقال P من ε إلى A ثم أوجد مصفوفة الانتقال Q العكسية من A إلى ε ثم تحقق أن $Q=P^{-1}$.

2- أوجد المصفوفة A الممثلة لـ T بالنسبة للقاعدة ε والمصفوفة B الممثلة لـ T بالنسبة للقاعدة A وتحقق من صحة المساواة $B=P^{-1}AP$.

الحـــل :

بما أن ε هي القاعدة القانونية في R^2 نكتب إحداثيات متجهات القاعدة A كأعمدة للمصفوفة P فنحصل على مصفوفة الانتقال من القاعدة الأولى إلى الثانية :

$$P=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 7\end{bmatrix}$$

والآن نجد إحداثيات متجه كيفي (a,b) من R^2 بالنسبة للقاعدة A كما يلي :

$$\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\ 7\end{bmatrix}$$

وينتج من ذلك جملة المعادلات الخطية :

$$x+2y=a\,,\qquad 4x+7y=b$$

وبحل هذه الجملة الخطية نحصل على ما يلي :

$$x=-7a+2b\,,\qquad y=4a-b$$

وبالتالي فإن :

$$(a,b)=(-7a+2b)u_1+(4a-b)u_2$$

وباستخدام العبارة الأخيرة لإيجاد إحداثيات e_2,e_1 بالنسبة لـ A نحصل على ما يلي:

$$e_1=(1,0)=-7u_1+4u_2$$
$$e_2=(0,1)=2u_1-u_2$$

وينتج من ذلك أن المصفوفة :

$$Q=\begin{bmatrix}-7 & 2\\ 4 & -1\end{bmatrix}$$

وبالحساب نجد أن :

$$PQ=\begin{bmatrix}1&2\\4&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7&2\\4&-1\end{bmatrix}=I$$

2- لإيجاد المصفوفة A نكتب :

$$T(e_1)=T(1,0)=(5,2)=5e_1+2e_2$$
$$T(e_2)=T(0,1)=(-1,1)=-e_1+e_2$$

وبالتالي فإن :

$$A=\begin{bmatrix}5&-1\\2&1\end{bmatrix}$$

نستخدم عبارة $(a,b)=(-7a+2b)u_1+(4a-b)u_2$ لإيجاد إحداثيات $T(u_2),T(u_1)$ بالنسبة للقاعدة A كما يلي :

$$T(u_1)=T(1,4)=(1,6)=5u_1-2u_2$$
$$T(u_2)=T(2,7)=(3,11)=u_1+u_2$$

وبالتالي فإن :

$$B=\begin{bmatrix}5&1\\-2&1\end{bmatrix}$$

ويكون لدينا :

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-7&2\\4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\4&-7\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}5&1\\-2&1\end{bmatrix}=B$$

مثال (30) :

نفترض $T:R^2\to R^2$ مؤثر خطي معرف بالمساواة

$$T(x,y,z)=(3x+2y-4z,x-5y+3z)$$

1- أوجد المصفوفة المثلة لـــ T بالنسبة للقاعدتين :

$$A=\{u_1,u_2,u_3\}=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$$
$$B=\{v_1,v_2\}=\{(1,3),(2,5)\}$$

2- تحقق من صحة المساواه التاليه :

$$\forall\ v \in R^3 : [T]_{A.B}[v]_A = [T(v)]_B$$

الحــــل :

1- نجد إحداثيات متجه كيفي (a, b) من R^2 بالنسبة للقاعدة A كما مر معنا سابقاً :

$$(a,b) = (-5a+2b)v_1 + (3a-b)v_2$$

وبالتالي فإن :

$$T(u_1) = T(1,1,1) = (1,-1) = -7v_1 + 4v_2$$
$$T(u_2) = T(1,1,0) = (5,-4) = -33v_1 + 19v_2$$
$$T(u_3) = T(1,0,0) = (3,1) = -13v_1 + 8v_2$$

نكتب إحداثيات $T(u_1),T(u_2),T(u_3)$ كأعمدة في مصفوفة فنحصل على :

$$[T]_{A.B} = \begin{bmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{bmatrix}$$

2) إذا كان $v = (x, y, z)$ متجهاً كيفياً من R^3 فيمكننا كتابة إحداثيات v كعبارة خطية بمتجهات القاعدة A كما يلي :

$$v = zu_1 + (y-z)u_2 + (x-y)u_3$$

ويكون لدينا :

$$T(v) = (3x + 2y - 4z\ ,\ x - 5y + 3z) =$$
$$= (-13x - 20y + 26z)v_1 + (8x + 11y - 15z)v_2$$

وبالتالي فإن :

$$[v]_A = [z,\ y - z,\ x - y]^T$$

وكذلك :

$$[T(v)]_B = \begin{bmatrix} 13x - 20y + 26z \\ 8x + 11y - 15z \end{bmatrix}$$

$$[T]_{A,\beta}[V]_A = \begin{bmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y-z \\ x-y \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -13x - 20y + 26z \\ 8x + 11y - 15z \end{bmatrix} = [T(v)]_\beta$$

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية :

مثال (31) :

ليكن V الفضاء المتجه الحقيقي المشكل من جميع المصفوفات الحقيقية ذات الشكل 3×1 و $T : V \to V$ تطبيقاً خطيا"من V في نفسه معرفاً بالمقابلة :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2x + y + z \\ 2x + 3y + 4z \\ -x - y - 2z \end{bmatrix}$$

أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لهذا التطبيق .

الحــــل :

لنختار القاعدة التالية في الفضاء المتجه V :

$$\varepsilon = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

لإيجاد مصفوفة T نكتب ما يلي :

$$T(e_1) = 2e_1 + 2e_2 - e_3$$
$$T(e_2) = e_1 + 3e_2 - e_3$$
$$T(e_3) = e_1 + 4e_2 - 2e_3$$

وبالتالي تعطى مصفوفة هذه التطبيق بالنسبة للقاعدة ε بالعلاقة :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

إذن القيم الذاتية لـ T تعطى بالمعادلة المميزة :

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ -1 & -1 & -2-\lambda \end{bmatrix}=0$$

وبفك هذا المعين نجد أن :

$$(1-\lambda)(1+\lambda)(\lambda-3)=0$$

وبالتالي نحصل على ثلاث قيم ذاتية هي :

$$\lambda_3=3,\quad \lambda_2=-1,\quad \lambda_1=1$$

لإيجاد المتجهات الذاتية الموافقة لهذه القيم الذاتية نكتب جملة المعادلات الخطية التالية :

$$(2-\lambda)x_1+x_2+x_3=0$$
$$2x_1+(3-\lambda)x_2+4x_3=0$$
$$x_1-x_2-(2+\lambda)x_3=0$$

فمن أجل القيمة الذاتية $\lambda_1=1$ تأخذ جملة المعادلات السابقة الشكل :

$$x_1+x_2+x_3=0$$
$$2x_1+2x_2+4x_3=0$$
$$-x_1-x_2-3x_3=0$$

بحل هذه الجملة نجد : $x_3=0$ و $x_1+x_2=0$

نختار x_1 فنجد $x_2=1$ وبالتالي المتجه الذاتي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda_1=1$ هو المتجه :

$$v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وتكون جميع المتجهات kv_1 هي الأخرى متجهات ذاتية موافقة لـ $\lambda_1=1$ حيث k ثابت عددي حقيقي مختلف عن الصفر .

المعادلات الخطية التالية :

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

بحل هذه الجملة نحصل على المتجه الذاتي :

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

وتكون جميع المتجهات الذاتية الموافقة لـــ $\lambda_2 = -1$ من الشكل kv_2 حيث k عدد حقيقي ثابت مختلف عن الصفر .

من أجل $\lambda_3 = 3$ نحصل بنفس الطريقة السابقة على المتجه الذاتي :

$$v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

وعلى جميع المتجهات الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda_3 = 3$ وهي من الشكل kv_3 حيث k عدد حقيقي ثابت مختلف عن الصفر .

واضح أن المتجهات v_1 و v_2 و v_3 مستقلة خطياً .

مثال (32) :

ليكن V الفضاء المتجه الحقيقي المكون من جميع كثيرات الحدود التي درجتها أقل أو تساوي 2 و $T : V \to V$ تطبيقا خطيا" من V في نفسه معرفاً بالعلاقة :

$$T(a+bx+cx^2) = (2a+b+c) + (2a+3b+2c)x +$$
$$+(3a+3b+4c)x^2$$

أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لهذا التطبيق .

[illegible]

للقاعدة $\mathcal{E}$ فنجد بسهولة :

$$T(1) = 2 + 2x + 3x^2$$

$$T(2) = 1 + 3x + 3x^2$$

$$T(3) = 1 + 2x + 4x^2$$

وبالتالي تعطى مصفوفة التطبيق T بالعلاقة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

إن المعادلة المميزة للتطبيق T هي :

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(7-\lambda) = 0$$

وبالتالي نحصل على القيم الذاتية $\lambda = 7$ و $\lambda = 1$.

إن جملة المعادلات التي تعين الأشعة الذاتية هي :

$$(2-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + (3-\lambda)x_2 + 2x_3 = 0$$

$$3x_1 + 3x_2 + (4-\lambda)x_3 = 0$$

من أجل القيمة الذاتية $\lambda = 7$ نأخذ جملة المعادلات السابقة الشكل التالي :

$$-5x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$$

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$$

بحل هذه الجملة الخطية نحصل على المتجه الذاتي :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

وتسمى جميع المتجهات الذاتية kV_1 حيث k عدد حقيقي ثابت يختلف عن الصفر .

من أجل القيمة الذاتية $\lambda = 1$ تؤول جملة المعادلات السابقة إلى الشكل التالي :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

وحتى نجد جملة حلول أساسية للمعادلات المكافئة نكتب :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مثال (33) :

ليكن V الفضاء المتجه الحقيقي المكون من المتجهات الواقعة في المستوي الثابت xoy ولتكن $\{i, j\}$ قاعدة لهذا الفضاء المتجه فإذا كان $T : V \to V$ تطبيقاً خطيا"من الفضاء V إلى نفسه معرفاً بالعلاقة :

$$T(xi + yj) = (2x + y)i + (x + 2y)j$$

أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لهذا التطبيق .

الحـــــل :

لنوجد مصفوفة التطبيق t بالنسبة للقاعدة $\{i, j\}$ من أجل ذلك نكتب :

$$T(i) = 2i + j$$

$$T(j) = i + 2j$$

وبالتالي تعطى مصفوفة التطبيق المذكور بالمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على المعادلة المميز :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

بحل المعادلة السابقة نحصل على القيم الذاتية $\lambda = 1$ و $\lambda = 3$.

لنحل جملة المعادلات التالية من أجل إيجاد مركبات المتجهات الذاتية :

$x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0$

من أجل القيمة الذاتية $\lambda = 1$ نحصل على المتجه الذاتي $V_1 = j - i$

وعلى كل المتجهات الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ وهي من الشكل kv_1 حيث k ثابت حقيقي مختلف عن الصفر .

أما من أجل القيمة الذاتية $\lambda = 3$ فإننا نحصل على المتجه الذاتي $V_2 = i + j$ وعلى كل المتجهات الذاتية غير الصفرية الموازية له .

مثال (34) :

حوّل المصفوفة التالية إلى الشكل القطري :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

الحـــــل :

وجدنا في المثال (31) أن المصفوفة A تملك ثلاثة متجهات ذاتية مستقلة خطياً هي :

$$v_1 = [1 \ \ -1 \ \ 0]^T, \quad v_2 = [0 \ \ 1 \ \ -1]^T, \quad v_3 = [2 \ \ 3 \ \ -1]^T$$

وبالتالي إذا فرضنا :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

نجد بسهولة أن :

$$Q^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ومنه ينتج أن :

$$Q^{-1}AQ = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال (35) :

حوّل المصفوفة التالية إلى الشكل القطري :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

الحـــــل :

وجدنا في المثال (32) أن المصفوفة A تملك القيم الذاتية $\lambda = 7$ و $\lambda = 1$ مكرر مرتين ووجدنا من أجل القيمة الذاتية $\lambda = 7$ المتجه الذاتي الموافق وهو $v_1 = [1 \quad 2 \quad 3]^T$ ومن أجل القيمة الذاتية $\lambda = 1$ وجدنا المتجهين الذاتيين :

$$v_3 = [-1 \quad 1 \quad 0]^T \quad \text{و} \quad v_2 = [-1 \quad 0 \quad 1]^T$$

وبالتالي إذا فرضنا :

$$Q = [v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نجد بسهولة أن :

$$Q^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

وينتج من ذلك أن :

$$Q^{-1}AQ =$$

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (36) :

لتكن المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1- أوجد جميع القيم الذاتية لـــ A .

2- أوجد أعظم مجموعة S مستقلة خطياً من المتجهات الذاتية لـــ A .

3- هل يمكن تقطير A ؟ وإذا كان الجواب نعم أوجد المصفوفة P بحيث إن $D = P^{-1}AP$ (مصفوفة قطرية).

الحـــــل :

1- لنجد كثير الحدود المميز $\varphi(t)$ للمصفوفة A كما يلي :

$$\begin{vmatrix} 4-t & 1 & -1 \\ 2 & 5-t & -2 \\ 1 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = 0$$

$$\varphi(t) = t^3 - 11t^2 + 39t - 45$$

نلاحظ أن $t = 3$ جذر لـ $\varphi(t)$ وبالتالي $t - 3$ أحد عوامل تحليل $\varphi(t)$

إذن بالقسمة على العامل المذكور نجد أن :

$$\varphi(t) = (t-3)^2(t-5)$$

وبالتالي القيم الذاتية لـ A هي $\lambda = 5$ و $\lambda = 3$.

2- لإيجاد المتجهات الذاتية المستقلة خطياً من أجل كل قيمة ذاتية لـ A نتبع مايلي :

أولاً:

نطرح 3 من عناصر القطر الرئيسي في A فنحصل على المصفوفة :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

وتوافق هذه المصفوفة المعادلة الخطية التالية:

$$x + y - z = 0$$

حيث x و y متحولان كيفيان و $u = (1,-1,0)$ و $v = (1,0,1)$ حلان مستقلان للمعادلة الخطية السابقة .

ثانياً :

نطرح 5 من عناصر القطر الرئيسي في A فنحصل على المصفوفة :

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

وتوافق هذه المصفوفة جملة المعادلات الخطية التالية :

$$-x + y - z = 0$$
$$2x - 2z = 0$$
$$x + y - 3z = 0$$

$$y - 2z = 0$$

هنا z متحول حر وحيد وبالتالي $w=(1,2,1)$ حل لهذه الجملة الخطية .

إذن :

$$S = \{u,v,w\} = \{(1,-1,0),\ (1,0,1),\ (1,2,1)\}$$

هي أعظم مجموعة مستقلة خطية من المتجهات الذاتية لـــ A .

3- إن المصفوفة A قابلة للتقطير لأن A تملك ثلاث متجهات ذاتية مستقلة خطياً .

نأخذ المصفوفة P المكونة أعمدتها من إحداثيات المتجهات الذاتية w, v, u السابقة

أي أن :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وبإيجاد المقلوب P^{-1} نحصل على :

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

مثال (37) :

أعد المثال السابق بالنسبة للمصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

الحـــــل :

1- لنجد كثير الحدود المميز لـــ B بأن نكتب :

$$\varphi(t)=|B-tI|=\begin{vmatrix}3-t & -1 & 1\\ 7 & -5-t & 1\\ 6 & -6 & 2-t\end{vmatrix}=$$
$$=t^3-12t+16$$

وبتحليل $\varphi(t)$ نجد أن :

$$\varphi(t)=(t-2)^2(t+4)$$

وبالتالي فإن القيم الذاتية لـــ B هي :

$\lambda_1=2$ و $\lambda_2=-4$.

2- لنجد قاعدة للفضاء الجزئي المميز الموافق لكل قيمة ذاتية لـــ B .

أولاً:

نطرح $\lambda_1=2$ من القطر الرئيسي في B فنحصل على المصفوفة :

$$M=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 7 & -7 & 1\\ 6 & -6 & 0\end{bmatrix}$$

وهذه المصفوفة توافق الجملة الخطية التالية :

$$\begin{aligned} x-y+z&=0\\ 7x-7y+z&=0\\ 6x-6y&=0\end{aligned}$$

وهذه الجملة تكافئ لجملة التالية :

$$\begin{aligned} x-y+z&=0\\ z&=0\end{aligned}$$

هنا y هو المتحول الحر الوحيد وباختيار $y=1$ نجد أن :

$$x=1,\quad y=1,\quad z=0$$

حل غير صفري للجملة الخطية السابقة .

. $\lambda_1 = 2$

ثانياً :

نطرح $\lambda_2 = -4$ من القطر الرئيسي من B فنحصل على المصفوفة :

$$M = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

وهذه المصفوفة توافق جملة المعادلات الخطية التالية :

$$7x - y + z = 0$$
$$7x - y + z = 0$$
$$6x - 6y + 6z = 0$$

وتكافئ هذه الجملة مايلي :

$$x - y + z = 0$$
$$6y - 6z = 0$$

هنا z هو المتحول الحر و $x = 0 , y = 1 , z = 1$ حل غير صفري للجملة الخطية السابقة وبالتالي $v = (0, 1, 1)$ يشكل قاعدة للفضاء الجزئي المميز الموافق للقيمة الذاتية . $\lambda_2 = -4$

إذن $S = \{u, v\}$ أعظم مجموعة مستقلة خطياً في مجموعة المتجهات الذاتية لـ B .

3- بما أن B تملك متجهين ذاتيين مستقلين خطين على الأكثر إذن B غير قابلة للتقطير.
نلاحظ أن الجداء الجبري المتعلق بالقيمة الذاتية $\lambda_1 = 2$ يساوي 2 لأن الحد $2 - t$ مكرر مرتين في تحليل كثير الحدود المميز ولكن الجداء الهندسي المتعلق بالقيمة الذاتية $\lambda_1 = 2$ يساوي واحد لأن $\dim V_{\lambda_1} = 1$ حيث V_{λ_1} هو الفضاء المميز الجزئي المتعلق بـ λ_1 وبما أن الجدائين الجبري والهندسي لـ λ_1 مختلفين لذلك لا يمكن تقطير المصفوفة B .

مثال (٨٨)

أعد المثال المصفوفة

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

1- لنجد كثير الحدود المميز للمصفوفة C كما يلي :

$$\varphi(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & -2 \\ -1 & 2-t & -4 \\ -1 & 1 & 4-t \end{vmatrix} =$$

$$= t^3 - 6t^2 + 11t - 6 =$$

$$= (t-1)(t-2)(t-3)$$

والقيم الذاتية للمصفوفة C هي $\lambda = 3$, $\lambda = 2$, $\lambda = 1$ ويمكننا أن نجد ثلاث متجهات ذاتية لـــ C مستقلة خطياً وكل واحد منهم موافق لقيمة ذاتية من القيم الثلاث المذكورة أنفاً وهذا يعني أنه يمكن تقطير المصفوفة C وأننا بحاجة لإيجاد المتجهات الذاتية الموافقة لهذه القيم الذاتية لكي نستطيع إيجاد المصفوفة P التي تحقق العلاقة :

$$P^{-1}CP = D$$

2- لكي نجد المتجهات الذاتية للمصفوفة C الموافقة للقيم الذاتية $\lambda = 3$, $\lambda = 2$, $\lambda = 1$ نتبع ما يلي :

(i) نطرح $\lambda = 1$ من القطر الرئيسي لـــ C فنحصل على :

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$-x+y-4z=0$$
$$-x+y+3z=0$$

وهذه الجملة الخطية تكافيء الجملة التالية :

$$-x+y-2z=0$$
$$z=0$$

والمتحول الحر في هذه الجملة هو y وبالتالي فإن $u=(1,1,0)$ حل غير صفري للجملة الخطية السابقة .

(ii) نطرح $\lambda=2$ من القطر الرئيسي في C فنحصل على :

$$M=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -2\\ -1 & -1 & -4\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

وتوافق هذه المصفوفة الجملة الخطية التالية :

$$-2x+y-2z=0$$
$$-x-4z=0$$
$$-x+y+2z=0$$

وهذه الجملة تكافئ الجملة التالية :

$$x-4z=0$$
$$y+6z=0$$

والمتحول الحر الوحيد في الجملة الأخيرة هو Z وبالتالي فإن $v=(4,-6,1)$ حل غير صفري للجملة الخطية الأخيرة .

(iii) نطرح $\lambda=3$ من القطر الرئيسي في C فنحصل على المصفوفة

$$M=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -2\\ -1 & -1 & -4\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$-3x + y - 2z = 0$$
$$-x - y - 4z = 0$$
$$-x + y + z = 0$$

وتكافئ هذه الجملة الخطية الجملة التالية :

$$x - y - z = 0$$
$$2y + 5z = 0$$

والمتحول الحرّ الوحيد في الجملة الأخيرة هو z وبالتالي فإن $w = (3,5,-2)$ حل غير صفري للجملة الخطية السابقة .

1- كما وجدنا سابقاً فإن C قابلة للتقطير و بالتالي نأخذ المصفوفة P المكونة أعمدتها من إحداثيات المتجهات الذاتية w, v, u :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

وبإيجاد المقلوب P^{-1} بالطرق المعروفة ثم حساب الجداء $P^{-1}CP$ نجد أن :

$$P^{-1}CP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

مثال (39) :

ليكن التحويل الخطي $T : R^3 \to R^3$ المعرف بالعلاقة :

$$T(x, y, z) = (2x + y - 2z, 2x + 3y - 4z, x + y - z)$$

1- أوجد جميع القيم الذاتية لـــ T ثم أوجد قاعدة لكل فضاء متجه ذاتي جزئي .

2- هل T قابل للتقطير ؟ وإذا كان الجواب نعم أوجد قاعدة A في R^3 تجعل T قطرياً .

$I(1,0,0), \quad I(0,1,0), \quad I(0,0,1)$

ومن ثم نشكل المصفوفة :

$$A = [T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ثم لنجد كثير الحدود المميز للمصفوفة A بأن نكتب :

$$\varphi(t) = |A - tI| = 0$$

أو :

$$\begin{vmatrix} 2-t & 1 & -2 \\ 2 & 3-t & -4 \\ 1 & 1 & -1-t \end{vmatrix} = 0$$

وبفك هذا المعين نجد أن :

$$\varphi(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t-1)^2(t-2)$$

وبالتالي فإن $\lambda = 2$ و $\lambda = 1$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A (القيم الذاتية لـ T) .

ثم نوجد المتجهات الذاتية الموافقة للقيم الذاتية السابقة كما يلي .

(i) نطرح $\lambda = 1$ من القطر الرئيسي للمصفوفة A فنحصل على المصفوفة التالية :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$x + y - 2z = 0$$

يوجد في هذه المعادلة متحولان حران هما y , z وبالتالي يوجد متجهان ذاتيان مستقلان لـــ A موافقان للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ مثلاً ($v(2,0,1)$, $u(1,-1,0$

متجهان ذاتيان موافقان لـــ $\lambda = 1$ ومستقلان خطياً .

(ii) نطرح $\lambda = 2$ من القطر الرئيسي في A فنحصل على المصفوفة التالية :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

وتوافق هذه المصفوفة جملة المعادلات الخطية :

$$\begin{aligned} y - 2z &= 0 \\ 2x + y - 4z &= 0 \\ x + y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

وتكافئ هذه الجملة الخطية الجملة التالية :

$$\begin{aligned} x - z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

والمتحول الحر الوحيد في هذه الجملة هو z وبالتالي فإن $w(1, 2, 1)$ حل غير صفري لهذه الجملة الخطية .

إذن T قابل للتقطير لأنه يملك ثلاث متجهات ذاتية مستقلة خطياً (أي أن مجموع الجداءات الجبرية لـــ T يساوي مجموع جداءاته الهندسية) .

لذلك نختار القاعدة التالية :

$$\mathcal{A} = \{u, v, w\} = \{(1,-1,0), (2,0,1), (1,2,1)\}$$

لكي نستطيع تمثيل T بمصفوفة قطرية بالنسبة لهذه القاعدة $\mathcal{A}$.

وتكون المصفوفة الممثلة للتحويل الخطي السابق بالنسبة لـــ A هي :

$$D = diag\ \{\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2\}$$

$$D = diag\ (1, 1, 2\ )$$

تقطير المصفوفات الحقيقية المتناظرة :

مثال (40) :

نفترض $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ والمطلوب إيجاد مصفوفة متعامدة P بحيث أن :

$$D = P^{-1} AP$$

مصفوفة قطرية .

الحـــــل :

لنجد كثير الحدود المميز لـــ A :

$$\varphi(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 2 \\ 2 & 3-t \end{vmatrix} = t^2 - 6t + 5 =$$

$$= (t-5)(t-1)$$

إذن القيم الذاتية لـــ A هي $\lambda = 5$ و $\lambda = 1$.

نجد المتجهات الذاتية لـــ A الموافقة للقيم الذاتية السابقة :

من أجل $\lambda = 5$ نطرح 5 من القطر الرئيسي في A فنحصل على المصفوفة :

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

والجملة الخطية الموافقة لـــ M هي :

$$-2x + 2y = 0$$
$$2x - 2y = 0$$

وهذه الجملة تكافئ :

$$x - y = 0$$

ويكون لها حل غير صفري $u_1 = (1, 1\ )$

ولإيجاد المتجه الذاتي الموافق $\lambda = 1$ نطرح 1 من القطر الرئيسي لـــ A فنحصل على مصفوفة توافق جملة المعادلات الخطية :

$$2x + 2y = 0$$
$$2x + 2y = 0$$

وتكافئ هذه الجملة المعادلة التالية :

$$x + y = 0$$

ويكون لها حل غير صفري $u_2 = (1,-1)$

وبما أن A متناظرة إذن المتجهان u_1, u_2 متعامدان وبجعل طول كل من u_1, u_2 مساوياً للواحد نحصل على :

$$u'_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$
$$u'_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

نأخذ المصفوفة P التي أعمدتها هي إحداثيات متجهات الوحدة u'_1, u'_2 فنحصل على مايلي :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ويكون لدينا :

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن عناصر القطر الرئيسي في D هي القيم الذاتية للمصفوفة A .

مثال (41) :

لتكن المصفوفة المتناظرة :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2- أوجد أعظم مجموعة A من المتجهات الذاتية لـ A المتعامدة

3- أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث أن $D = P^{-1}AP$ قطرية

الحـــل :

1- نكتب المعادلة المميزة لـ A كما يلي :

$$\varphi(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 1 & 1 \\ 1 & 3-t & 1 \\ 1 & 1 & 3-t \end{vmatrix} =$$

$$= t^3 - 9t^2 + 24t - 20 = 0$$

نلاحظ أن $t = 2$ جذر للمعادلة الأخيرة وبقسمة $\varphi(t)$ على العامل $t-2$ نحصل على ما يلي :

$$\varphi(t) = (t-2)(t^2 - 7t + 10) = (t-2)^2(t-5)$$

وبالتالي فإن A تملك قيمتين ذاتيين $\lambda = 2$ (الجداء الجبري الموافق لها يساوي 2) و $\lambda = 5$ (الجداء الجبري الموافق لها يساوي 1) .

2- لإيجاد قاعدة متعامدة قياسية من أجل كل فضاء ذاتي جزئي نتبع مايلي :

(i) نطرح $\lambda = 2$ من القطر الرئيسي في A فنحصل على المصفوفة :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وتوافق هذه المصفوفة جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

وتكافئ هذه الجملة المعادلة التالية :

$$x + y + z = 0$$

وتملك المعادلة الأخيرة حلين مستقلين خطياً :

أحدهما $v_1 = (0,1,-1)$ ونختار الحل الثاني $v_2 = (a,b,c)$ بحيث يتعامد مع v_1 وليكن $v_2 = (2,-1,-1)$.

إذن $v_1 = (0,1,-1)$ و $v_2 = (2,-1,-1)$ يشكلان قاعدة متعامدة للفضاء الذاتي الجزئي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda = 2$.

(ii) نطرح $\lambda = 5$ من القطر الرئيسي لـــ A فنحصل على المصفوفة :

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

وتوافق هذه المصفوفة جملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$-2x + y + z = 0$$
$$x - 2y + z = 0$$
$$x + y - 2z = 0$$

ولجملة المعادلات الأخيرة حل غير صفري هو $v_3 = (1,1,1)$

ومعلوم أن v_3 يعامد كل v_2 و v_1 (بحسب نظرية) ويمكن التحقق من ذلك مباشرة .

وبجعل طويلة كل من u_1, u_2, u_3 تساوي الواحد نحصل على مجموعة المتجهات الذاتية لـــ A التالية :

$$u_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}),$$
$$u_2 = (\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$$
$$u_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

نأخذ المصفوفة P التي أعمدتها هي إحداثيات المتجهات u_1, u_2, u_3 التالية:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

ويكون لدينا :

$$D = P^{-1}\,A\,P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = diag\,[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$$

حيث $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ هي القيم الذاتية لـــ A .

مثال (42) :

أعد المثال السابق على المصفوفة المتناظرة :

$$B = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

الحــــل :

1- لنجد كثير الحدود المميز للمصفوفة B كما يلي :

$$\varphi(t) = \begin{vmatrix} 11-t & -8 & 4 \\ -8 & -1-t & -2 \\ 4 & -2 & -4-t \end{vmatrix} =$$

$$= t^3 - 6t^2 - 135\,t - 400$$

نلاحظ أن $t = -5$ جذر لـــ $\varphi(t)$ وبقسمة $\varphi(t)$ على الحد $t + 5$ وبتحليل الناتج نجد أن :

$$\varphi(t) = (t+5)^2(t-16)$$

إذن للمصفوفة B القيم الذتية $\lambda = -5$ (الجذاء الجبري الموافق لها يساوي 2)

و $\lambda = 16$ (الجذاء الجبري الموافق لها يساوي 1) .

1- لإيجاد المتجهات الذاتية لـــ B الموافقة للقيم الذاتية $\lambda = -5$ و $\lambda = 16$ نتبع ما يلي :

(i) نطرح من القطر الرئيسي في B المقدار $\lambda = -5$ فنحصل على المصفوفة :

$$M = \begin{bmatrix} 16 & -8 & 4 \\ -8 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

وتوافق هذه المصفوفة جملة المعادلات الخطية :

$$16x - 8y + 4z = 0$$
$$-8x + 4y - 2z = 0$$
$$4x - 2y + z = 0$$

وهذه الجملة تكافئ المعادلة التالية :

$$4x - 2y + z = 0$$

وهذا يعني أن الجملة السابقة تملك حلين مستقلين أحدهما $v_1 = (0,1,2)$ ونختار الحل الثاني $v_2 = (a,b,c)$ بحيث يعامد v_1 أي بحيث يحقق :

$$4a - 2b + c = 0$$

ويحقق أيضاً :

$$b + 2c = 0$$

وبحل المعادلتين الأخيرتين حلاً مشتركاً نجد أن :

$$4a + 5c = 0$$

وباختيار $c = 4$ نجد أن $a = -5$ وبالتالي $b = -8$

إذن :

$$v_2 = (-5, -8, 4)$$

(ii) نطرح $\lambda = 16$ من القطر الرئيسي في B فنحصل على المصفوفة :

$$M = \begin{bmatrix} -8 & -17 & -2 \\ 4 & -2 & -20 \end{bmatrix}$$

وتوافق هذه المصفوفة جملة المعادلات الخطية التالية :

$$-5x - 8y + 4z = 0$$

$$-8x - 17y - 2Z = 0$$

$$4x - 2y - 20z = 0$$

وهذه الجملة تملك حل غير صفري $V_3 = (4, -2, 1)$.

ومعلوم أن المتجه V_3 يعامد كلا من المتجهين V_1 و V_2 (بحسب نظرية) .

إذن يشكلون أعظم مجموعة من المتجهات الذاتية لـ B المتعامدة والمختلفة عن الصفر.

1- نجعل طول كل واحد من المتجهات V_3 و V_2 و V_1 مساوياً للواحد

فنحصل على قاعدة متعامدة قياسية :

$$u_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

$$u_2 = (\frac{-5}{\sqrt{105}}, \frac{-8}{\sqrt{105}}, \frac{4}{\sqrt{105}})$$

$$u_3 = (\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-2}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}})$$

لنأخذ المصفوفة P والتي أعمدتها هي إحداثيات المتجهات u_3 و u_2 و u_1 :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-5}{\sqrt{105}} & \frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-8}{\sqrt{105}} & \frac{-2}{\sqrt{21}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{105}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن .

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} =$$

$$= D = diag\,[-5, -5, 16\,]$$

والعناصر الواقعة على القطر الرئيسي في D هي القيم الذاتية للمصفوفة B .

الصور التربيعية والمصفوفات المتناظرة :

مثال (43) :

لتكن المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

والمطلوب إيجاد مصفوفة قابلة للقلب P بحيث إن:

$$D = P^{-1}AP \quad \text{(مصفوفة قطرية)}$$

الحـــل :

نأخذ المصفوفة $M = [\,A, \mathrm{I}\,]$ ونطبق عليها العمليات الأولية على كما يلي :

$$M = [\,A, I\,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r2-2r1,\,r3+3r1]{}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[C2-2C1,\,C3+3C1]{}$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-2r_2]{}$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[C_3-2C_2]{}$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

إذن المصفوفة P التي تستخدم لتقطير A هي :

$$P=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فان :

$$D = P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

مثال (44) :

لتكن الصورة التربيعية :

$$q(x,y) = 3x^2 - 4xy + 6y^2$$

حول هذه الصورة إلى الشكل القانوني .

الحـــل :

من السهل ملاحظة أن المصفوفة المتناظرة الموافقة لهذه الصورة التربيعية هي :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(t)=\begin{vmatrix}3-t & -2\\ -2 & 6-t\end{vmatrix}=t^2-9t+14=(t-2)(t-7)$$

إذن القيم الذاتية لـــ A هي :

$$.\ \lambda_1=2\,,\quad \lambda_2=7$$

(i) لنجد أحد المتجهات الذاتية لـــ A الموافقة لـــ $\lambda_1=2$ وذلك بطرح $\lambda_1=2$ من القطر الرئيسي في المصفوفة A فنحصل على المصفوفة :

$$M=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

وتوافق هذه المصفوفة جملة المعادلات الخطية :

$$x-2y=0$$
$$-2x+4y=0$$

وتكافئ الجملة الأخيرة المعادلة التالية :

$$x-2y=0$$

وأحد الحلول غير الصفرية لهذه الجملة هو $u_1=(2,1)$.

(ii) لنجد أحد المتجهات الذاتية لـــ A الموافقة لـــ $\lambda_2=7$ وذلك بطرح $\lambda_2=7$ من القطر الرئيسي للمصفوفة A فنحصل على المصفوفة :

$$M=\begin{bmatrix}-4 & -2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

وتوافق هذه المصفوفة جملة المعادلات الخطية التالية :

$$-4x-2y=0$$
$$-2x-y=0$$

والجملة الأخيرة تكافئ المعادلة التالية :

$$2x+y=0$$

وأحد الحلول غير الصفرية للجملة الأخيرة هو :

$$u_2=(1,-2)$$

$$u'_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$u'_2 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$$

ونشكل الآن المصفوفة P التي أعمدتها هي إحداثيات u'_2 , u'_1 :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

ويكون لدينا :

$$D = P^T \ A \ P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

نفرض $X = P\,Y$ حيث $X = [x, y]^T$ و $Y = [s, t]^T$ فينتج من ذلك :

$$x = \frac{2s}{\sqrt{5}} + \frac{t}{\sqrt{5}}$$

$$y = \frac{s}{\sqrt{5}} - \frac{2t}{\sqrt{5}}$$

وبالتالي فإن :

$$q(s,t) = 2s^2 + 7t^2$$

وهو الشكل القانوني للصورة q .

مثال (45) :

لتكن الصورة التربيعية :

$$q(x,y,z) = x^2 + 4xy + 3y^3 - 8xz - 12yz + 9z^2$$

أوجد التحويل الخطي الذي يحوّل الصورة q إلى الشكل القانوني ثم أوجد إشارة (*signature*) الصورة q .

الحـــل :

ندعو عدد المربعات الموجبة في الصورة القانونية التي تتحول إليها الصورة التربيعية الحقيقية q المغطاة بالدليل الموجب للقصور الذاتي لهذه الصورة وعدد المربعات السالبة في الصورة القانونية يسمى بالدليل السالب للقصور الذاتي للصورة التربيعية q أما الفرق بين دليل القصور الذاتي الموجب والسالب فيسمى بإشارة الصورة التربيعية q ونشير إليه بـــ $sig\,(q)$.

والآن نشكل المصفوفة $M=[A,I]$ حيث A مصفوفة متناظرة موافقة للصورة التربيعية المعطاة q فنحصل على :

$$M=[A,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2-2r_1,\, r_3+4r_1]{}$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3+2r_2]{}$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

إذن المصفوفة غير الشاذة P التي تحقق أن:

$$D=P^{T}\,\Lambda\,\mathrm{P} \quad (\text{قطرية})$$

هي :

$$P=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي توافق التحويل غير الشاذ الخطي :

$$x = r - 2s$$
$$y = s + 2t$$
$$z = t$$

وبتعويض هذه المتحولات في الصيغة التربيعية الحقيقية $q(x, y, z)$ تتحول إلى الشكل القانوني :

$$q(\mathrm{r}, \mathrm{s}, \mathrm{t}) = \mathrm{r}^2 - s^2 - 3t^2$$

وبحسب تعريف إشارة q نجد أن :

الدليل الموجب للقصور الذاتي لـــ q هو $P = 1$

والدليل السالب للقصور الذاتي لـــ q هو $n = 2$

وبالتالي :

$$sig(q) = 1 - 2 = 1$$

إذن إشارة الصورة التربيعية السابقة سالبة .

مثال (46) :

لتكن الصورة التربيعية :

$$q(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2$$

والتحويل الخطي :

$$x = s - 3t$$
$$y = 2s + t$$

1 - كتب الصورة $q(x, y)$ على شكل جداء مصفوفات

2- اكتب التحويل الخطي بلغة المصفوفات ثم أوجد المصفوفة P الموافقة لهذا التحويل الخطي

3- أوجد الصورة التربيعية $q(\mathrm{s}, \mathrm{t})$ بالاستخدام المباشر للتحويل الخطي المعطى

4- أوجد $q(s, t)$ باستخدام المصفوفة الموافقة لها

الحـــل :

1- لدينا :

$$q(x,y) = [x\ y]\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

حيث إن :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

و كذلك فان :

$$q(x) = X^T AX$$

حيث إن:

$$X = [x, y]^T$$

2- لدينا :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن :

$$X = PY$$

حيث إن :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = [s,t]^T \quad , \quad X = [x, y]^T$$

1- نعوض كلاً من y ,x بالصورة q مباشرة فنحصل على :

$$q(s,t) = 3(s-3t)^2 + 2(s-st)(2s+t) - (2s+t)^2$$
$$= 3(s^2 - 6st + 9t^2) + 2(2s^2 - 5st - 3t^2) -$$
$$-(s^2 - 4st + t^2) = 3s^2 - 32st + 20t^2$$

4- لدينا :

$$q(x) = X^T AX$$

$$X = PY$$

وبالتالي فإن :

$$X^T = Y^T P^T$$

وينتج من ذلك أن :

$$q(s,t) = q(Y) = Y^T P^T APY =$$

$$= [s,t]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} =$$

$$= [s,t]\begin{bmatrix} 3 & -16 \\ -16 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = 3s^2 - 32st + 20t^2$$

مثال (47) :

لتكن الصورة التربيعية :

$$q(x, y) = 3x^2 - 6xy + 11y^2$$

1- أوجد التحويل الخطي الذي يجعل q قطرية .

2- أوجد المصفوفة المتناظرة A الموافقة لـــ q ثم أوجد كثير الحدود المميز $\varphi(t)$ للمصفوفة A .

الحـــــل :

نبدأ بإيجاد المصفوفة A فنحصل على المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن :

$$\varphi(t) = |A - tI| = \begin{vmatrix} 3-t & -3 \\ -3 & 11-t \end{vmatrix} =$$

$$= t^2 - 14t + 24 = (t-2)(t-12)$$

$\lambda = 12$ و $\lambda = 2$

إذن الشكل القانوني للصورة التربيعية q هو :

$$q(s,t) = 2s^2 + 12t^2$$

للحصول على التحويل المتعامد الذي يجعل q قطرية نبحث عن مجموعة متعامدة من المتجهات الذاتية لـ A ومن أجل ذلك نطرح من القطر الرئيسي لـ A العدد 2 لنحصل على المصفوفة :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

وتوافق هذه المصفوفة جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية :

$$x - 3y = 0$$
$$-3x + 9y = 0$$

وتكافئ هذه الجملة المعادلة :

$$x - 3y = 0$$

وأحد الحلول المختلفة عن الصفر لهذه الجملة هو:

$$u_1 = (3,1)$$

وبإجراء مماثل لما سبق نطرح $\lambda = 12$ من القطر الرئيسي للمصفوفة A فنحصل على:

$$M = \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

وتوافق هذه المصفوفة جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية :

$$-9x - 3y = 0$$
$$-3x - y = 0$$

وأحد الحلول غير الصفرية لهذه الجملة هو:

$$u_2 = (-1,3)$$

القياسية في R^2 التالية :

$$u'_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$u'_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

لنأخذ المصفوفة P والتي أعمدتها هي إحداثيات u'_1 , u'_2 :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

ونجد بالحساب المباشر أن :

$$D = P^{-1}AP = P^T AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

إذن التحويل المتعامد الذي جعل الصورة q بشكل قانوني هو :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$$

أو :

$$x = \frac{3s - t}{\sqrt{10}}$$

$$y = \frac{s + 3t}{\sqrt{10}}$$

وكان بالإمكان الحصول على s و t بدلالة x, y باستخدام المصفوفة $P^{-1} = P^T$ بحيث

إن :

$$s = \frac{3x + y}{\sqrt{10}}$$

$$t = \frac{-x + 3y}{\sqrt{10}}$$

[illegible]

لتكن الصورة التربيعية :

$$q\,(x, y) = 4x^2 + 8xy + 11y^2$$

1- أوجد تحويلاً خطياً متعامداً يجعل q قطرية ثم عين نوع المنحني

$$4x^2 + 8xy + 11y^2 = 25$$

الحــــل :

لنجد المصفوفة المتناظرة A لموافقة لـــ q ثم لنجد كثير الحدود المميز لها $\varphi(t)$ فنحصل على :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -11 \end{bmatrix}$$

ويكون :

$$\varphi\,(t) = \begin{vmatrix} 4-t & 4 \\ 4 & -11-t \end{vmatrix} =$$

$$= (t-5)(t+12)$$

والقيم الذاتية لـــ A هي :

$$\lambda = -12 \quad \text{و} \quad \lambda = 5$$

وبالتالي الشكل القانوني لـــ q هو :

$$q(s,t) = 5s^2 - 12t^2$$

ولإيجاد التحويل المعا مد الذي جعل q قطرية نبحث عن مجموعة المتجهات الذاتية المتعامدة لـــ A كما يلي :

نطرح $\lambda = 5$ من القطر الرئيسي لـــ A فنحصل على جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية :

$$-x + 4y = 0$$
$$4x - 16y = 0$$

$\lambda = -12$ من القطر الرئيسي للمصفوفة A فنحصل على جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية :

$$16\,x + 4\,y = 0$$
$$4\,x + y = 0$$

وأحد حلول هذه الجملة غير الصفرية هو $u_2 = (-1,4)$ وهما متجهان متعامدان ويكفي أن نجعل طويلة كل واحد منهما مساوية للواحد فنحصل على القاعدة المتعامدة، القياسية في R^2 التالية :

$$u'_1 = \left(\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$$
$$u'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$$

وبالتالي فإن :

$$D = P^T AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$$

وهذا يعني أن التحويل المتعامد الذي حوّل الصورة التربيعية q إلى الشكل القانوني هو:

$$x = \frac{4\,s + t}{\sqrt{17}}$$
$$y = \frac{-\,s + 4\,t}{\sqrt{17}}$$

وللحصول على s و t بدلالة x, y نستعين بالمصفوفة $P^{-1} = P^T$ فنجد أن :

$$s = \frac{4\,x + y}{\sqrt{17}}$$
$$t = \frac{-\,x + 4\,y}{\sqrt{17}}$$

وبما أن المنحني $5s^2 - 12t^2 = 25$

قطع زائد .

إذن المنحني :

$$4x^2 + 8xy - 11y^2 = 25$$

مثال (49) :

لتكن الصورة التربيعية :

$$q(x, y) = 5x^2 - 4xy + 8y^2$$

أوجد التحويل الخطي المتعامد الذي يحول q إلى الشكل القانوني ثم عيّن نوع المنحني $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 25$.

الحـــل :

لنجد المصفوفة المتناظرة A الموافقة لـ q ثم نجد كثير حدودها المميز لـ $\varphi(t)$ كما يلي :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

ويكون :

$$\varphi(t) = \begin{vmatrix} 5-t & -2 \\ -2 & 8-t \end{vmatrix} =$$
$$= t^2 - 13t + 36 =$$
$$= (t-4)(t-9)$$

وأما القيم الذاتية لـ A فهي $\lambda = 4$ و $\lambda = 9$ وبالتالي فإن الشكل القانوني لـ q هو :

$$q(s, t) = 4s^2 + 9t^2$$

ولإيجاد التحويل المتعامد الذي حوّل q إلى الشكل القانوني نبحث عن مجموعة متعامدة من المتجهات الذاتية لـ A كما يلي :

نطرح أولاً $\lambda = 4$ من القطر الرئيسي لـ A فنحصل على جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية :

$$x - 2y = 0$$
$$-2x + 4y = 0$$

وأحد حلول هذه الجملة المختلف عن الصفر هو $u_1 = (2,1)$.

ثم نطرح ثانياً $\lambda = 9$ من القطر الرئيسي للمصفوفة A فنحصل على جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية :

$$-4x - 2y = 0$$
$$-2x - y = 0$$

وأحد حلول هذه الجملة الذي لا يساوي الصفر هو $u_2 = (-1,2)$.

وهذان المتجهان متعامدان (بحسب نظرية) ويكفي أن نأخذ طويلة كل منهما مساوية للواحد فنحصل على قاعدة متعامدة قياسية في R^2 كما يلي :

$$u_1' = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})$$

$$u_2' = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

ونأخذ المصفوفة p التي أعمدتها هي إحداثيات المتجهين u_2', u_1' فنحصل على :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

والتحويل الخطي العمودي المطلوب هو :

$$x = \frac{2s - t}{\sqrt{5}}$$

$$y = \frac{s + 2t}{\sqrt{5}}$$

وكان بالإمكان إيجاد s , t بدلالة x , y .

بالاستعانة بالمصفوفة $P^{-1} = P^T$ نحصل على :

$$\sqrt{5}$$

$$t = \frac{-x + 2y}{\sqrt{5}}$$

وبما أن المنحني $4s^2 + 9t^2 = 25$ قطع ناقص إذن المنحني

$5x^2 - 4xy + 8y^2 = 25$ قطع ناقص أيضاً

مثال (50) :

لتكن الصورة القانونية :

$$q(x,y,z) = 5x^2 + 2xy + 5y^2 + 2xz + 2yz + 5z^2$$

1- أوجد المصفوفة المتناظرة A الموافقة لـــ q ثم أوجد كثير الحدود المميز لـــ A

2- أوجد القيم الذاتية لـــ A

3- أوجد أعظم مجموعة مستقلة خطياً S من المتجهات الذاتية لـــ A

4- أوجد التحويل الخطي العمودي الذي يحول q إلى الشكل القانوني.

الحـــــل :

-1
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

وكثير الحدود المميز لـــ A هو :

$$\varphi(t) = \begin{vmatrix} 5-t & 1 & 1 \\ 1 & 5-t & 1 \\ 1 & 1 & 5-t \end{vmatrix} =$$

$$= t^3 - 15t^2 + 72t - 112$$

نلاحظ أن أحد حلول $\varphi(t) = 0$ هو $t = 4$ وبقسمة $\varphi(t)$ على العامل $t - 4$ نحصل على :

$$= (t-4)^2 (t-7)$$

إذن القيم الذاتية لـــ A هي $\lambda = 4$ و $\lambda = 7$

مع ملاحظة أن الجداء الجبري لـــ $\lambda = 4$ يساوي 2 والجداء الجبري لـــ $\lambda = 7$ يساوي الواحد .

2- نبحث عن قاعدة متعامدة في كل من الفضائين الذاتيين الموافقين لـــ $\lambda = 4$ و $\lambda = 7$ كما يلي :

نطرح $\lambda = 4$ من القطر الرئيسي للمصفوفة A فنحصل على الجملة الخطية المتجانسة:

$$x + y + z = 0$$
$$x + y + z = 0$$
$$x + y + z = 0$$

وتكافئ هذه الجملة المعادلة التالية :

$$x + y + z = 0$$

وهذا يعني أن الجملة السابقة تملك حلين مستقلين أحدهما هو $u_1 = (0, 1, -1)$ وثانيهما نختاره بالشكل $u_2 = (a, b, c)$ بحيث يكون متعامداً مع u_1 وينتج من ذلك أن :

$$a + b + c = 0$$
$$b - c = 0$$

ويمكننا أن نختار $u_2 = (2, -1, -1)$ فيحقق الجملة الأخيرة .

إذن $u_1 = (0, 1, -1)$ و $u_2 = (2, -1, -1)$ يشكلان قاعدة متعامدة في الفضاء الجزئي الذاتي V_λ حيث $\lambda = 4$.

وبشكل مماثل نطرح $\lambda = 7$ من القطر الرئيسي لـــ A فنحصل على جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية :

$$-2x + y + z = 0$$
$$x - 2y + z = 0$$
$$x + y - 2z = 0$$

والجملة هذه تملك حل غير صفري $u_3=(1,1,1)$ ومعلوم آن u_3 يعامد كلا من u_1 و u_2 (بحسب نظرية) إذن u_1, u_2, u_3 يشكلون أعظم مجموعة S من المتجهات الذاتية المتعامدة للمصفوفة A .

4- وبجعل طويلة كل من المتجهات u_1, u_2, u_3 مساوية للواحد نحصل على القاعدة المتعامدة القياسية التالية :

$$u'_1=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$$
$$u'_2=(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})$$
$$u'_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$$

نأخذ المصفوفة P التي أعمدتها هي إحداثيات المتجهات u'_1, u'_2, u'_3 أي أن :

$$P=\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

ويكون لدينا :

$$D=P^T AP=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

إذن التحويل المتعامد التالي يحول الصورة التربيعية q إلى الشكل القانوني :

$$y = \frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{s}{\sqrt{6}} + \frac{t}{\sqrt{3}}$$

$$z = -\frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{s}{\sqrt{6}} + \frac{t}{\sqrt{3}}$$

ويصبح الشكل القانوني لـــ $q(x,y,z)$ بعد تعويض z, y, x كما يلي :

$$q(r,s,t) = 4r^2 + 4s^2 + 7t^2$$

مثال (51) :

أعد المثال (50) السابق من أجل الصورة التربيعية :

$$q(x,y,z) = 8xz + 3y^2 + 6z^2$$

الحــــل :

1- لدينا المصفوفة الممثلة لـــ q هي :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

كثير الحدود المميز لـــ A هو :

$$\varphi(t) = t^3 - 9t^2 + 2t + 48$$

2- نلاحظ أن أحد حلول المعادلة $\varphi(t) = 0$ هو الحل $t = 3$ وبقسمته $\varphi(t)$ على العامل $t-3$ نحصل على :

$$\varphi(t) = (t-3)(t^2 6t - 16) =$$
$$= (t-3)(t-8)(t+2)$$

إذن القيم الذاتية لـــ A هي :

$$\lambda = -2 \text{ و } \lambda = 3 \text{ و } \lambda = 8$$

3- لنجد الفضاءات الذاتية الموافقة لكل من هذه القيم الذاتية كما يلي :

نطرح $\lambda = -2$ من القطر الرئيسي للمصفوفة A فنحصل على جملة المعادلات الخطية المتجانسة :

$$2x + 4z = 0$$
$$5y = 0$$
$$4x + 8z = 0$$

وفي هذه الجملة z متحول حر والمتحول $y = 0$ وبالتالي تملك الجملة حل غير صفري مثل $u_1 = (-2,0,1)$.

وبشكل مماثل نطرح $\lambda = 3$ من القطر الرئيسي في A فنحصل على جملة المعادلات الخطية المتجانسة :

$$-3x + 4z = 0$$
$$0x + 0y + 0z = 0$$
$$4x + 3z = 0$$

وفي هذه الجملة y متحول حر وحيد وباختيار $y = 1$ نجد أن $z = 0$, $x = 0$ وبالتالي تملك هذه الجملة حل غير صفري $u_2 = (0,1,0)$.

وأخيراً نطرح $\lambda = 8$ من القطر الرئيسي في A فنحصل على جملة المعادلات الخطية المتجانسة :

$$-8x + 4z = 0$$
$$-5y = 0$$
$$4x - 2z = 0$$

وفي هذه الجملة z متحول حر وأما المتحول $y = 0$ و باختيار $z = 2$ نجد أن $x = 0$ وتملك الجملة الأخيرة حل غير صفري $u_3 = (1,0,2)$.

4- بجعل طويلة كل من u_1, u_2, u_3 مساوية للواحد نحصل على قاعدة متعامدة قياسية :

$$u_1' = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$$
$$u_2' = (0, 1, 0)$$
$$u_3' = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}$$

ويكون لدينا :

$$D = P^T A P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

والتحويل المتعامد التالي يحوّل q إلى الصورة القانونية :

$$x = s$$

$$y = \frac{r + 2t}{\sqrt{5}}$$

$$z = \frac{-2r + t}{\sqrt{5}}$$

وبتعويض x, y, z في الصورة التربيعية $q(x, y, z)$ نحصل على الشكل القانوني :

$$q(r, s, t) = -2r^2 + 3s^2 + 8t^2$$

الصورة التربيعية المحدودة الموجبة والمصفوفة المتناظرة المحدودة الموجبة :

المصفوفة الحقيقية المتناظرة A تكون محدودة موجبة إذا حققت :

$$X^T AX > 0 \qquad \forall X \neq 0 \in R^n$$

والصورة التربيعية الحقيقية q تكون محدودة موجبة إذا حققت الشرط :

$q(v) > 0$ من أجل جميع المتجهات v غير الصفرية من R^n

ويكفي للتحقق من أن المصفوفة الحقيقية المتناظرة A محدودة موجبة هو أن يكون أي تمثيل قطري لها مكونة عناصره القطرية من أعداد حقيقية موجبة .

لتكن الصورة التربيعية :

$$q\,(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xy + 4yz + 3z^2$$

فهل q محدودة موجبة ؟

الحـــــل :

نقوم بتقطير المصفوفة A الممثلة لـــ q :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

يوجد 2- على القطر الرئيسي في التمثيل لـــ q وهذا يعني أن q ليست محدودة موجبة.

مثال (53) :

لتكن الصورة التربيعية التالية :

$$q\,(x, y) = ax^2 + y^2 + bxy + cy^2$$

أن الشرط اللازم الكافي لتكون q محدودة موجبة هو أن يكون $a > 0$

والمميز $D = b^2 - 4ac < 0$.

البرهان :

نفرض $v = (x, y)$ متجه غير صفري فيكون أحد الإحداثيتين y , x مختلف عن الصفر وليكن مثلاً $y \neq 0$ ثم نفرض $t = \dfrac{x}{y}$ عندئذ يكون لدينا :

$$= y^2\left[at^2 + bt + c\right]$$

ومعلوم أن المقدار :

$$s = at^2 + bt + c$$

يكون موجباً دوماً عندما وفقط عندما $0 < a$ و $D = b^2 - 4ac < 0$ لهذا فإن q محدودة موجبة عندما وفقط عندما يتحقق الشرط $0 < a$ و $D = b^2 - 4ac < 0$ ومن جهة أخرى فإننا نلاحظ أنه يكون $D < 0$ عندما $\det A > 0$ حيث A هي المصفوفة المتناظرة الممثلة لـ q .

مثال (54) :

تحقق أي من الصورة التربيعية التالية محدودة موجبة :

$$q(x, y) = x^2 - 4xy + 7y^2$$

$$q(x, y) = x^2 + 8xy + 5y^2$$

$$q(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$$

الحـــــل :

1- الطريقة الأولى :

نقطر الصورة التربيعية q كما يلي :

$$q(x, y) = x^2 - 4xy + 4y^2 + 7y^2 - 4y^2 =$$

$$= (x - 2y)^2 + 3y^2 = s^2 + 3t^2$$

حيث إن :

$$s = x - 2y$$

$$t = y$$

وبالتالي q محدودة موجبة .

نحسب المميز $D = b^2 - 4ac$ فنجد أن :

$$D = 16 - 28 < 0$$

وبما أن $0 < a = 1$ و $D < 0$ إذن q محدودة موجبة .

2- نحسب المميز D فنجد :

$$D = b^2 - 4ac = 64 - 20 = 44 > 0$$

وبما أن $0 < D$ إذن الصورة التربيعية (2) ليست محدودة موجبة .

3- من أجل الصورة التربيعية (3) لدينا $0 < a = 3$ و $D < 0$ فهي محدودة موجبة .

فضاء الجداء الداخلي والتعامد :

مثال (55) :

ليكن الفضاء المتجه الحقيقي R^n لنعرف الجداء الداخلي على R^n كما يلي :

$$\forall . u = (a_1, a_2, ..., a_n), \; v = (b_1, b_2, ..., b_n) \in R^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (u, v) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$$

فيدعى هذا بالجداء الداخلي العادي (النظامي) على R^n كما يدعى الفضاء R^n المزود بالجداء الداخلي السابق بالفضاء المتجه الاقليدي ذي البعد n .

فإذا كانت $\omega = (5, -1, -2, 6)$, $u = (1, 3, -4, +2)$, $v = (4, -2, 2)$ ثلاث متجهات من R^n :

1- احسب (u, ω) و (v, ω) و $(u + v, \omega)$.

2- احسب $\|u\|^2$ و $\|v\|^2$ و $\|\omega\|^2$.

3- حوّل مجموعة المتجهات (u, v, ω) إلى مجموعة قياسية .

-1

$$(u,\omega)=1(5)+3(-1)+(-4)(-2)+2(6)=$$
$$=5-3+8+12=22$$

$$(v,\omega)=4(5)-2(-1)+2(-2)+1(6)=$$
$$=20+2-4+6=24$$

بما أن :

$$u+v=(5,1,-2,3)$$

إذن :

$$(u+v,\omega)=5(5)+1(-1)-2(-2)+3(6)=$$
$$=25-1+4+18=46$$

وهذا يوضح أن :

$$(u+v,\omega)=(u,\omega)+(v,\omega)$$

2- لدينا :

$$\|u\|^2=1^2+3^2+(-4)^2+2^2=1+9+16+4=30\Rightarrow$$
$$\|u\|=\sqrt{30}$$
$$\|v\|^2=16+4+4+1=25\Rightarrow\|v\|=5$$
$$\|\omega\|^2=25+1+4+36=66\Rightarrow\|\omega\|=\sqrt{66}$$

3- بجعل طويلة كل من u,v,ω مساوية للواحد نحصل على مجموعة من متجهات الوحدة u',v',ω' من u,v,ω على الترتيب كما يلي :

$$\|u\| \qquad \sqrt{30} \quad \sqrt{30} \quad \sqrt{30} \quad \sqrt{30}$$

$$v' = \frac{1}{\|v\|} v = (\frac{4}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$$

$$\omega' = \frac{1}{\|\omega\|} \omega = (\frac{5}{\sqrt{66}}, \frac{-1}{\sqrt{66}}, \frac{-2}{\sqrt{66}}, \frac{6}{\sqrt{66}})$$

مثال (56) :

لتكن $P(t)$ مجموعة جميع كثيرات الحدود ولنعرف الجداء الداخلي التالي على الفضاء المتجه $P(t)$ كما يلي :

$$\forall f(t), g(t) \in P(t) : (f, g) = \int_0^1 f(t) g(t) dt$$

فإذا كان $f(t) = t + 2$ و $g(t) = 6t - 5$

عندئذٍ يكون :

$$f(t)g(t) = (t+2)(6t-5) = 6t^2 + 7t - 10$$

وبالتالي فإن :

$$(f, g) = \int_0^1 (6t^2 + 7t - 10) dt =$$

$$= \left[2t^3 + \frac{7}{2} t^2 - 10t \right]_0^1 =$$

$$= (2 + \frac{7}{2} - 10) - (0) = -4.5$$

ويكون :

$$[f(t)]^2 = f(t) f(t) = t^2 + 4t + 4$$

وبالتالي فإن :

$$\| f \|^2 = (f, f) = \int_0^1 (t^2 + 4t + 4) dt =$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 4t \right]_0^1 = \frac{1}{3} + 2 + 4 = \frac{19}{3}$$

$$\| f \| = \sqrt{\frac{19}{3}}$$

وبشكل مماثل نجد أن :

$$[g(t)]^2 = g(t)g(t) = 36t^2 - 60t + 25$$

وبالتالي فإن :

$$\| g \|^2 = (g,g) = \int_0^1 (36t^2 - 60t + 25)dt =$$

$$= \left[12t^3 - 30t^2 + 25t\right]_0^1$$

$$= (12 - 30 + 25) - (0) = 7$$

ويكون :

$$\| g \| = \sqrt{7}$$

مثال (57) :

ليكن الفضاء المتجه $M = M_{m \times n}$ المكون من جميع المصفوفات الحقيقية من القياس $m \times n$.

و لنعرف الجداء الداخلي على M كما يلي :

$$\forall A,B \in M : (A,B) = tr(B^T A)$$

حيث tr يشير إلى أثر المصفوفة والذي يساوي بدوره إلى مجموع جميع عناصر القطر الرئيسي .

فإذا كان الفضاء المتجه $M = M_{2 \times 3}$ المعرف عليه الجداء الداخلي السابق وإذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 18 & 21 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن :

$$(A,B) = tr(B^T A) = 15 + 2 + 3 = 20$$

ويكون :

$$\| A \|^2 = (A,A) = 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 =$$
$$= 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 = 271$$

وبالتالي فإن :

$$\| A \| = \sqrt{271}$$

فضاء هيلبرت :

نفرض V الفضاء المتجه المكوّن من جميع المتتاليات الحقيقية غير المنتهية $(a_1, a_2, ...)$ والتي تحقق :

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = a_1^2 + a_2^2 + ... < \infty$$

نعرف الجمع والضرب في V كما يلي :

من أجل أي متجهين $u = (a_1, a_2, ...)$ و $v = (b_1, b_2, ...)$

يكون :

$$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ...)$$

وأيضاً :

$$ku = (ka_1, ka_2, ...)$$

$$(u,v) = a_1b_1 + a_2b_2 ;......$$

والفضاء V المزود بالجداء الداخلي هذا يدعى بفضاء هيلبرت (Hilbert space) .

مثال (58) :

1- أوجد الزاوية بين المتجهين $u=(2,3,5)$ و $v=(1,-4,3)$ في R^4 .

2- أوجد الزاوية بين المتجهين $f(t)=t+2$ و $g(t)=6t-5$ في فضاء كثيرات الحدود $P(t)$.

الحـــل :

-1

$$(u,v) = 2-12+15 = 5$$
$$\| u \| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$$
$$\| v \| = \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}$$

وبالتالي فإن :

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{38}\sqrt{26}}$$

حيث θ هي الزاوية بين المتجهين v,u .

2- بما أننا عرفنا الجداء الداخلي في $P(t)$ كما يلي :

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

ووجدنا في المثال (56) أن :

$$(f,g) = -\frac{9}{2}$$
$$\| f \| = \frac{\sqrt{57}}{3}, \ \| g \| = \sqrt{7}$$

إذن :

$$\cos\theta = \frac{-\frac{9}{2}}{\frac{\sqrt{57}}{2}\sqrt{7}} = \frac{-27}{2\sqrt{57}\sqrt{7}}$$

حيث إن θ هي الزاوية بين المتجهين g , f .

مثال (59) :

لتكن S مجموعة متجهات من R^4 مكونة من المتجهات التالية :

$$u = (1, 2, -3, 4)$$
$$v = (3, 4, 1, -2)$$
$$w = (3, 2, 1, 1)$$

1- تحقق أن عناصر S متعامدة

2- تحقق من نظرية فيثاغورث بالنسبة لعناصر S .

الحــــل :

1- لدينا :

$$(u, v) = 3 + 8 - 3 - 8 = 0$$
$$(u, w) = 3 - 4 - 3 + 4 = 0$$
$$(v, w) = 9 - 8 + 1 - 2 = 0$$

وهذا يبين أن عناصر S متعامدة .

وأنظم عناصر S للحصول على مجموعة قياسية في R^4 نحسب ما يلي :

$$\| u \|^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$
$$\| v \|^2 = 9 + 16 + 1 + 4 = 30$$
$$\| w \|^2 = 9 + 4 + 1 + 1 = 15$$

وبالتالي نحصل على المجموعة القياسية الآتية :

$$u' = (\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{30}}, \frac{[illegible]}{\sqrt{3}})$$

$$v' = (\frac{3}{\sqrt{30}}, \frac{4}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}})$$

$$w' = (\frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{-2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}})$$

ولدينا أيضاً :

$$u + v + w = (7, 4, -1, 3) \ ,$$

$$\| u + v + w \|^2 = 49 + 16 + 1 + 9 = 75$$

إذن :

$$\| u \|^2 + \| v \|^2 + \| w \|^2 = 30 + 30 + 15 = \| u + v + w \|^2$$

وهذا ما يبرهن صحة نظرية فيثاغورث بالنسبة للعناصر المتعامدة في S .

مثال (60) :

لتكن S مجموعة من المتجهات في R^3 مكونة مما يلي :

$$u_1 = (1, 2, 1)$$

$$u_2 = (2, 1, -4)$$

$$u_3 = (3, -2, 1)$$

1- تحقق أن متجهات S متعامدة وتشكل قاعدة لـ R^3 .

2- اكتب المتجه $v = (7, 1, 9)$ كتركيب خطي بالمتجهات u_1, u_2, u_3 .

الحـــل :

1- لدينا :

$$(u_1, u_2) = 2 + 2 - 4 = 0$$

$$(u_1, u_3) = 3 - 4 + 1 = 0$$

$$(u_2, u_3) = 6 - 2 - 4 = 0$$

وهذا يعني أن متجهات S متعامدة مثنى مثنى وبالتالي تشكل S للفضاء R^3 .

2- نكتب المتجه v كعبارة خطية بعناصر S كما يلي :

$$v = xu_1 + yu_2 + zu_3$$

ثم نكتب :

$$(v,u_1)=(xu_1+yu_2+zu_3,u_1)=x(u_1,u_1)$$
$$+y(u_2,u_1)+z(u_3,u_1)=x(u_1,u_1)$$

وينتج من ذلك أن :

$$x=\frac{(v,u_1)}{(u_1,u_1)}=\frac{7+2+9}{1+4+1}=\frac{18}{6}=3$$

وبشكل مماثل نكتب (v,u_2) ونحسب y فنحصل على :

$$y=\frac{(v,u_2)}{(u_2,u_2)}=\frac{14+1-36}{4+1+16}=\frac{-21}{21}=1$$

وأخيراً نكتب :

$$(v,u_3)=(xu_1+yu_2+zu_3,u_3)=Z(u_3,u_3)$$

وبالتالي :

$$z=\frac{(v,u_3)}{(u_3,u_3)}=\frac{21-2+9}{9+4+1}=\frac{28}{14}=2$$

وهكذا نكون حصلنا على قيم المجاهيل z, y, x وبالتالي :

$$v=3u_1-u_2+2u_3$$

ويمكن تعميم هذه المسألة على الحالة العامة :

إذا كانت $S=\{u_1,u_2,\ldots\ldots,u_n\}$ قاعدة متعامدة في الفضاء الخطي V عندئذ من أجل أي متجه v من V يكون لدينا :

$$v=\frac{(v,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1+\frac{(v,u_2)}{(u_2,u_2)}u_2+\ldots\ldots+\frac{(v,u_n)}{(u_n,u_n)}u_n$$

ويدعى العدد $k_i=\dfrac{(v,u_i)}{\|u_i\|^2}$ بمعامل فورييه للمتجه v بالنسبة لـ u_i .

ليكن الفضاء المتجه R^4 وليكن U فضاء جزئي في R^4 مولد بالمتجهات التالية :

$$v_1 = (1, 1, 1, 1)$$
$$v_2 = (1, 2, 4, 5)$$
$$v_3 = (1, -3, -4, -2)$$

أوجد قاعدة متعامدة في U باستخدام طريقة غرام – شميدت .

الحـــل :

نأخذ :

$$w_1 = v_1 = (1,1,1,1)$$

ثم نجد :

$$v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{\| w_1 \|^2} w_1 = (1, 2, 4, 5) - \frac{12}{4}(1, 1, 1, 1) =$$
$$= (-2, -1, 1, 2)$$

نضع:

$$w_2 = (-2, -1, 1, 2)$$

ثم نجد :

$$v_3 - \frac{(v_3, w_1)}{\| w_1 \|^2} w_1 - \frac{(v_3, w_2)}{\| w_2 \|^2} w_2 =$$
$$= (1, -3, -4, -2) - \frac{8}{4}(1, 1, 1, 1) - \frac{-7}{10}(-2, -1, 1, 2)$$
$$= (\frac{8}{5}, -\frac{17}{10}, -\frac{13}{10}, \frac{7}{5})$$

نضع الآن :

$$w_3 = 10\ (\frac{8}{5}, \frac{-17}{10}, \frac{-13}{10}, \frac{7}{5})$$
$$= (16, -17, -13, 14)$$

ثم ننظم عناصر القاعدة :

$$w_1 = (1, 1, 1, 1)$$
$$w_2 = (-2, -1, 1, 2)$$
$$w_3 = (16, -17, -13, 14)$$

بأن نحسب :

$$\|w_1\|^2 = 4$$
$$\|w_2\|^2 = 10$$
$$\|w_3\|^2 = 910$$

ونشكل المتجهات التالية :

$$u_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$$
$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2, -1, 1, 2)$$
$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{910}}(16, -17, -13, 14)$$

مثال (62) :

ليكن V فضاءً متجهاً معرفاً عليه جداءً داخلياً حقيقياً و $S = \{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n\}$ قاعدة لـ V. تدعى المصفوفة $A = [a_{ij}]$ حيث $a_{ij} = (u_i, u_j)$ بالمصفوفة الممثلة للجداء الداخلي في V بالنسبة للقاعدة S .

فإذا كان $V = R^3$ و S مكونة من المتجهات :

$$u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (1, 2, 3), \quad u_3 = (1, 3, 5) \; .$$

أوجد المصفوفة A الممثلة للجداء الداخلي النظامي في الفضاء الاقليدي R^3 .

الحـــل :

نحسب أولاً جميع القيم $(u_i, u_j) = (u_j, u_i)$ التالية:

$(u_1,u_2) = 1 + 2 + 0 = 3$

$$(u_1,u_3) = 1 + 3 + 0 = 4$$
$$(u_2,u_2) = 1 + 4 + 9 = 14$$
$$(u_2,u_3) = 1 + 6 + 15 = 22$$
$$(u_3,u_3) = 1 + 9 + 25 = 35$$

إذن :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 14 & 22 \\ 4 & 22 & 35 \end{bmatrix}$$

وهي المصفوفة الممثلة للجداء الداخلي العادي (النظامي) في R^3 بالنسبة للقاعدة S .

مثال (63) :

ليكن الفضاء المتجه R^2 و $u=(x_1,x_2)$ و $v=(y_1,y_2)$ من R^2 .

تحقق من أن الضرب التالي يعرّف جداءً داخلياً في R^2 :

$$(u,v) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$$

الحـــــل :

طريقة أولى :

نفرض $w=(z_1,z_2)$ متجهاً ما من R^2 ثم نبحث عن :

$$au + bw = a(x_1,x_2) + b(z_1,z_2) =$$
$$= (ax_1 + bz_1 ,\ ax_2 + bz_2)$$

وبالتالي فإن :

$$(au + bw, v) = \big((ax_1 + bz_1, ax_2 + bz_2),(y_1,y_2)\big) =$$
$$= (ax_1 + bz_1)y_1 - (ax_1 + bz_1)y_2 - (ax_2 + bz_2)y_1$$
$$+ 3(ax_2 + bz_2)y_2 = a(x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2)$$
$$+ b(z_1x_1 - z_1y_2 - z_2y_1 + 3z_2y_2) =$$
$$= a(u,v) + b(w,v)$$

وبذلك تحقق الشرط الأول من تعريف الجداء الداخلي وبشكل مماثل نجد أن :

$$(u\,,v) = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_2 =$$
$$= y_1x_1 - y_1x_2 - y_2x_1 + 3y_2x_2 = (v,u)$$

وهذا هو الشرط الثاني من تعريف الجداء الداخلي .

بقي أن نتحقق من الشرط الثالث :

$$(u\,;u) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 =$$
$$= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2^2$$

وهذا يعني أن $(u\,,u) \geq 0$ ويكون $(u\,,u) = 0$ عندما وفقط عندما $x_1 = x_2 = 0$ أو $u = (0,0)$ وهكذا تحقق الشرط الثالث من تعريف الجداء الداخلي .

طريقة ثانية :

نكتب الجداء الداخلي بلغة المصفوفات كما يلي :

$$(u,v) = u^T A\, v = [x_1 x_2]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

بما أن A مصفوفة حقيقية متناظرة يكفي أن نتحقق من أن A محدودة موجبة أي يجب أن يتحقق الشرط التالي :

$$\forall u \neq 0 \in R^n \;: u^T A u > 0$$

نلاحظ أن هذا الشرط الأخير يتحقق في الفضاء R^2 عندما وفقط عندما تكون عناصر القطر الرئيسي في A موجبة و $det\, A > 0$.

وبما أن :

$$det\, A = 2 \;, \qquad diag\, A = [1,3\,]$$

إذن A مصفوفة محدودة موجبة .

مثال (64) :

ليكن فضاء كثيرات الحدود $P\ (t)$ و $h(t) = t^2 - 2t - 3$ و $f(t) = t + 2$ و $g(t) = 3t - 2$ من $P\ (t)$ ثم ليكن الجداء الداخلي على $P\ (t)$ المعرف كما يلي :

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t) dt$$

1- أوجد (f, g) و (f, h)

2- أوجد $\| f \|$ و $\| g \|$

3- نظم كلا من f, g .

الحــــل :

1- لدينا :

$$(f, g) = \int_0^1 (t+2)(3t-2)dt =$$

$$= \int_0^1 (3t^2 + 4t - 4)dt = \left[t^3 + 2t^2 - 4t\right]_0^1 = -1$$

$$(f, h) = \int_0^1 (t+2)(t^2 - 2t - 3)dt = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{7t^2}{2} - 6t\right]_0^1 = -\frac{37}{4}$$

$$(g, g) = \int_0^1 (3t-2)^2 dt = 1$$

وبالتالي :

$$\| g \| = 1$$

3- بما أن :

$$\| g \| = 1 \quad \text{و} \quad \| f \| = \frac{\sqrt{57}}{3}$$

إذن :

$$f_1 = \frac{1}{\| f \|} f = \frac{3}{\sqrt{57}} f$$

و :

$$g_1 = g = 3t - 2$$

ليكن الفضاء المتجه $M = M_{2\times3}$ المعرف عليه الجداء الداخلي التالي :

$$(A, B) = tr(B^T A)$$

ثم لتكن المصفوفات :

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

1- أوجد (A, B) و (A, C) و (B, C)

2- $(2A + 3B, 4C)$

3- $\|A\|$ و $\|B\|$.

الحـــــل :

1- نستخدم العلاقة :

$$(A, B) = tr(B^T A) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

والمجموع في الطرف الأيمن هو مجموع جداءات العناصر المتناظرة في المصفوفتين A ,B

وبالتالي فإن :

$$(A, B) = 9 + 16 + 21 + 24 + 25 + 24 = 119$$
$$(A, C) = 27 - 40 + 14 + 6 + 0 - 16 = -9$$
$$(B, C) = 3 - 10 + 6 + 4 + 0 - 24 = -21$$

$$2A+3B=\begin{bmatrix} 18 & 16 & 14 \\ 12 & 10 & 8 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 \end{bmatrix}$$

و :

$$4C=\begin{bmatrix} 12 & -20 & 8 \\ 4 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن :

$$(2A+3B,4C)=252-440+184+96+0-416=$$
$$=-324$$

وكان بالإمكان استخدام خواص الجداء الداخلي لنحصل على نفس النتيجة :

$$(2A+3B,4C)=8(A;C)+12(B,C)=$$
$$=8(-9)+12(-21)=-324$$

3) نستخدم العلاقة :

$$\|A\|^2=(A,A)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$$

حيث أن المجموع في الطرف الأيمن هو مجموع مربعات عناصر المصفوفة A .

إذن :

$$\|A\|^2=(A,A)=9^2+8^2+7^2+6^2+5^2+4^2=271$$
$$\|B\|^2=(B,B)=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2=91$$

وبالتالي فإن :

$\|B\|=\sqrt{91}$ و $\|A\|=\sqrt{271}$

مثال (66) :

ليكن الفضاء المتجه R^4 و $\omega = (1,2,3,1)$ من R^4 . أوجد قاعدة متعامدة في الفضاء الجزئي $\omega^{\perp}$.

الحـــــل :

نختار جميع المتجهات (x, y, z, t) من R^4 والتي تحقق الشرط التالي :

$$\big((x,y,z,t)\ ,(1,2,3,1)\big) = 0$$

أو :

$$x + 2y + 3z + t = 0$$

ولنجد أحد الحلول المختلفة عن الصفر لهذه المعادلة وليكن $v_1 = (0, 0, 1, -3)$.

ثم نبحث عن المتجهات (x, y, z, t) التي تحقق بالإضافة للمعادلة الأخيرة مايلي :

$$\big((x,y,z,t)\ ,(0,0,1,-3)\big) = 0$$

أي التي تحقق جملة المعادلات الخطية :

$$x + 2y + 3z + t = 0$$
$$z - 3t = 0$$

ولنأخذ أحد حلول هذه الجملة المختلف عن الصفر وليكن $v_2 = (0, -5, 3, 1)$.

وأخيراً نجد أحد الحلول المختلفة عن الصفر للجملة الخطية :

$$x + 2y + 3z + t = 0$$
$$z - 3t = 0$$
$$-5y + 3z + t = 0$$

وليكن $v_3 = (-14, 2, 3, 1)$.

وهكذا فإن المتجهات V_1, V_2, V_3 تشكل قاعدة متعامدة لـــ $\omega^{\perp}$.

مثال (67) :

لتكن S مجموعة المتجهات من R^3 التالية :

$$u_1 = (1, 1, 1)$$
$$u_2 = (1, 2, -3)$$
$$u_3 = (5, -4, -1)$$

الحــــل :

1) نحسب :

$$(u_1,u_2) = 1+2-3 = 0$$
$$(u_1,u_3) = 5-4-1 = 0$$
$$(u_2,u_3) = 5-8+3 = 0$$

بما أن جميع الجداءات الداخلية السابقة مساوية للصفر إذن S مجموعة متعامدة .

2- نفرض $v = xu_1 + yu_2 + zu_3$ حيث x, y, z مجاهيل عددية ثم نكتب :

$$(1, 5, -7) = x(1,\ 1,1) + y(1,\ 2, -3) + z(5, -4, -1)$$

وبالمطابقة بين الطرفين نحصل على جملة المعادلات الخطية :

$$x+y+5z+t = 1$$
$$x+2y-4z = 5$$
$$x-3y-z = -7$$

بحل هذه الجملة نحصل على الحل التالي :

$$x = -\frac{1}{3}$$
$$y = \frac{16}{7}$$
$$z = -\frac{4}{21}$$

وكان بالإمكان استخدام الجداء الداخلي لنكتب :

$$\big((1, 5, -7), (1,\ 1,1)\big) = x\big((1,\ 1,1), (1,\ 1,1)\big)$$

أو :

$$-1 = 3x \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$\big((1, 5, -7), (1, 2, -3)\big) = y\big((1, 2, -3), (1, 2, -3)\big)$$

وينتج من ذلك أن :

$$32 = 14\, y$$

وبالتالي :

$$y = \frac{16}{7}$$

وأخيراً نجد أن :

$$\big((1, 5, -7), (5, -4, -1)\big) = z\big((5, -4, -1), (5, -4, -1)\big)$$

أو :

$$-8 = 42z \Rightarrow z = -\frac{4}{21}$$

وفي كلتا الحالتين :

$$v = -\frac{1}{3}u_1 + \frac{16}{7}u_2 - \frac{4}{21}u_3$$

حيث إن x, y, z هي معاملات فوربيه لـــ v بالنسبة لـــ u_1, u_2, u_3 .

مثال (68) :

ليكن V فضاء متجها" خطيا" و $\varepsilon = \{e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n\}$ قاعدة متعامدة قياسية في V .

برهن ما يلي :

1- من أجل أي متجه u من V يكون :

$$u = (u, e_1)e_1 + (u, e_2)e_2 + \ldots\ldots + (u, e_n)e_n$$

-2

$$\begin{aligned}(a_1e_1 + \ldots. + a_ne_n\ , b_1e_1 + \ldots\ldots + b_ne_n) &= \\ = a_1b_1 + \ldots\ldots + a_nb_n\end{aligned}$$

3- من أجل أي متجهين v, u من V يكون :

$$(u,v)=(u,e_1)(v,e_1)+....+(u,e_n)(v,e_n)$$

الحـــــل :

1- نفرض $u=k_1e_1+.....+k_ne_n$ ثم نضرب u بـــ e_1 داخلياً فنجد أن :

$$(u,e_1)=(k_1e_1+....+k_ne_n,e_1)=$$
$$=k_1(e_1,e_1)+.....+k_n(e_n,e_1)=$$
$$=k_1(1)+k_2(0)+.....+k_n(0)=k_1$$

وبشكل مماثل من أجل $i=2,.......,n$ يكون لدينا :

$$(u,e_i)=(k_1e_1+....+k_ne_n,e_i)=$$
$$=k_1(0)+k_i(1)+.....+k_n(0)=k_i$$

بالتعويض عن k_i بالمقدار (u,e_i) في المساواة التالية :

$$u=k_1e_1+.....+k_ne_n$$

نحصل على المطلوب .

2- لدينا :

$$(\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\ ,\ \sum_{j=1}^{n}b_je_j)=\sum_{i,j=1}^{n}a_ib_j(e_i,e_j)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i(e_i,e_i)$$

لأن $(e_i,e_j)=0$ من أجل $i\neq j$ و $(e_i,e_j)=1$ من أجل $i=j$ وبالتالي نجد أن :

$$(\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\ ,\ \sum_{j=1}^{n}b_je_j)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=$$
$$=a_1b_1+a_2b_2+......+a_nb_n$$

3- نجد من (1) أن :

$$u=(u,e_1)e_1+.......+(u,e_n)e_n$$

و أيضاً :

$$v=(v,e_1)e_1+.......+(v,e_n)e_n$$

ونجد من (2) أن :

$$(u,v)=(u,e_1)(v,e_1)+(u,e_2)(v,e_2)+......+(u,e_n)(v,e_n)$$

مثال (69) :

ليكن الفضاء المتجه V و $\omega \neq 0$ من V ثم ليكن v متجهاً ما من V .

برهن أن القيمة التالية :

$$c=\frac{(v,\omega)}{(\omega,\omega)}=\frac{(v,\omega)}{\|\omega\|^2}$$

وحيدة ليكون المتجه $v'=v-c\omega$ عمودي على ω .

الحــــل :

لكي يكون المتجه v' عمودياً على ω يجب أن يتحقق الشرط التالي :

$$(v-c\omega,\omega)=0$$

أو :

$$(v,\omega)-c(\omega,\omega)=0$$

أو :

$$(v,\omega)=c(\omega,\omega)$$

وبالتالي فإن :

$$c=\frac{(v,\omega)}{(\omega,\omega)}$$

وبالعكس نفرض أن :

$$c=\frac{(v,\omega)}{(\omega,\omega)}$$

عندئذٍ يكون لدينا:

$$(v-c\omega,\omega)=(v,\omega)-c(\omega,\omega)=$$
$$=(v,\omega)-\frac{(v,\omega)}{(\omega,\omega)}(\omega,\omega)=0$$

ليكن الفضاء المتجه $P(t)$ المزود بالجداء الداخلي :

$$(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)dt \, .$$

طبق طريقة غرام — شميدت على المجموعة $\{1,t,t^2\}$ للحصول على مجموعة متعامدة $\{f_0,f_1,f_2\}$ بمعاملات صحيحة .

الحـــــل :

نأخذ f_0 مساوياً لأول عنصر في المجموعة المعطاة أي $f_0=1$ وبالتالي نجد :

$$t-\frac{(t,1)}{(1,1)}.1=t-\frac{\frac{1}{2}}{1}.1=t-\frac{1}{2}$$

ومنه يكون :

$$f_1=2t-1$$

ثم نجد :

$$t^2-\frac{(t^2,1)}{(1,1)}.(1)-\frac{(t^2,2t-1)}{(2t-1;2t-1)}(2t-1)=$$

$$=t^2-\frac{\frac{1}{3}}{1}(1)-\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}(2t-1)=t^2-t+\frac{1}{6}$$

إذن :

$$f_2=6t^2-6t+1$$

وبالتالي المجموعة $\{1,2t-1,6t^2-6t+1\}$ هي المجموعة المتعامدة المطلوبة .

مثال (71) :

ليكن الفضاء المتجه R^4 و $v=(1,3,5,7)$ من R^4 :

أوجد مسقط v على W حيث W فضاء جزئي في R^4 مولّد بالمتجهات :

-1

$$u_1 = (1, 1, 1, 1,)$$
$$u_2 = (1, -3, 4, -2)$$

-2

$$v_1 = (1, 1, 1, 1,)$$
$$v_2 = (1, 2, 3, 2)$$

الحـــــل :

-1 بما أن u_1, u_2 متعامدان إذن يكفي حساب معاملات فورييه التالية :

$$c_1 = \frac{(v, u_1)}{\|u_1\|^2} = \frac{1+3+5+7}{1+1+1+1} = \frac{16}{4} = 4$$

$$c_2 = \frac{(v, u_2)}{\|u_2\|^2} = \frac{1-9+20-14}{1+9+16+4} = \frac{-2}{30} = -\frac{1}{15}$$

وبالتالي فإن :

$$w = proj\ (v, W\ ) = c_1 u_1 + c_2 u_2 =$$

$$= 4(1,\ 1,\ 1,\ 1) - \frac{1}{15}(1, -3, 4, -2)$$

$$= (\frac{59}{15}, \frac{63}{15}, \frac{56}{15}, \frac{62}{15})$$

-2 بما أن v_1, v_2 غير متعامدين إذن نطبق طريقة غرام – شميدت للحصول على قاعدة متعامدة في W .

نفرض أن:

$$w_1 = v_1 = (1,1,1,1)$$

ثم نجد :

$$v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{w_1^2} w_1 = (1,2,3,2) - \frac{8}{4}(1,1,1,1) = (-1,0,1,0)$$

$$c_2 = \frac{(v, w_2)}{\| w_2 \|^2} = \frac{-1+0+5+0}{1+0+1+0} = -3$$

وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned} w = proj\ (v, W) &= c_1 w_1 + c_2 w_2 = \\ &= 4(1,\ 1,\ 1,\ 1) - 3(-1, 0, 1, 0) \\ &= (7, 4, 1, 4) \end{aligned}$$

مثال (72) :

ليكن الفضاء المتجه V و w_1, w_2 متجهان متعامدان مختلفان عن الصفر فيه.

وليكن v متجهاً ما من V و $v' = v - c_1 w_1 - c_2 w_2$.

أوجد c_1, c_2 بحيث يكون v' عمودياً على كل من w_1, w_2 .

الحـــل :

إذا كان v' عمودياً على w_1 فإن :

$$\begin{aligned} 0 = (v - c_1 w_1 - c_2 w_2, w_1) &= (v, w_1) - c_1(w_1, w_1) - \\ &- c_2(w_2, w_1) = \\ &= (v, w_1) - c_1(w_1, w_1) - c_2(0) = \\ &= (v, w_1) - c_1(w_1, w_1) \end{aligned}$$

وبالتالي فإن :

$$c_1 = \frac{(v, w_1)}{(w_1, w_1)}$$

حيث أن :

c_1 : هي مركبة v على w_1 .

وبشكل مماثل إذا كان v' عمودياً على w_2 فإن :

$$\begin{aligned} 0 = (v - c_1 w_1 - c_2 w_2, w_2) &= (v, w_2) - c_1(w_1, w_2) - c_2(w_2, w_2) = \\ &= (v, w_2) - c_2(w_2, w_2) \end{aligned}$$

وبالتالي فان :

$$c_2 = \frac{(v, w_2)}{(w_2, w_2)}$$

حيث أن :

c_2 : هي مركبة v على w_2 .

مثال (73) :

لتكن P مصفوفة عمودية أثبت أنها تحقق ما يلي :

1- $\forall u, v \in R^n : \quad (Pu, Pv) = (u, v)$

2- $\forall u \in R^n : \quad \| Pu \| = \| u \|$

الحـــــل :

1- معلوم أن الجداء الداخلي العادي (النظامي) في R^n للمتجهين v, u يعطى بالعلاقة :

$$(u, v) = u^T v$$

وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned}(Pu, Pv) &= (Pu)^T Pv = u^T P^T P v = \\ &= u^T I v = u^T v = (u, v)\end{aligned}$$

2- لدينا :

$$\begin{aligned}\| Pu \|^2 &= (Pu, Pu) = u^T P^T P u = \\ &= u^T u = (u, u) = \| u \|^2\end{aligned}$$

وبالتالي فإن :

$$\| Pu \| = \| u \|$$

وهذا يعني أنه إذا كانت P مصفوفة متعامدة فإنها تحافظ على الجداء الداخلي وعلى النظيم والعكس صحيح أيضاً .

مثال (74) :

$$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

1- أوجد (f,g) من أجل $f=t+2$ و $g=t^2-3t+4$.

2- أوجد مصفوفة الجداء الداخلي A بالنسبة للقاعدة $\{1,t,t^2\}$ العادية في $P_2(t)$.

3- تحقق من صحة العلاقة : $(f,g)=[f]^T A[g]$ بالنسبة للقاعدة $\{1,t,t^2\}$.

الحـــل :

-1

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}(t+2)(t^2-3t+4)dt=$$

$$=\int_{-1}^{1}(t^3-t^2-2t+8)dt=$$

$$=\left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}-t^2+8t\right]_{-1}^{1}=\frac{46}{3}$$

2- نستخدم الحقيقة القائلة :

إذا كان :

$$n=r+s$$

فإن :

$$(t^r,t^s)=\int_{-1}^{1}t^n dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{1}=\begin{cases}\dfrac{2}{n+1} & \text{if} \quad (n \text{ زوجي}) \\ \\ n & \text{if} \quad (n \text{ فردي})\end{cases}$$

وبالتالي فإن :

$$(1,1)=2(1,t)=0, \quad (1,t^2)=\frac{2}{3}$$

$$(t,t)=\frac{2}{3}, \quad (t,t^2)=0, \quad (t^2,t^2)=\frac{2}{5}$$

إذن :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

3- لدينا :

$$[f]^T=(2,1,0)$$
$$[g]^T=(4,-3,1)$$

بالنسبة للقاعدة $\{1,t,t^2\}$.

وينتج من ذلك أن :

$$[f]^T A[g]=[2 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 4 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}=\frac{46}{3}=(f,g)$$

مثال (75) :

أوجد كثير الحدود الأصغري $m(t)$ للمصفوفات :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$ -1

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$ -2

الحـــل :

نجد أولاً كثير الحدود المميز $\varphi(t)$ للمصفوفة A .

$$det(A - tI) = \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 6 & -3-t & 4 \\ 3 & -2 & 3-t \end{vmatrix}$$

وبفك هذا المعين نحصل على كثير الحدود :

$$\varphi(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2 =$$
$$= (t-2)(t-1)^2$$

إن كثير الحدود الأصغري يجب أن يقسم $\varphi(t)$ إذن يجب أن يكون $m(t)$ واحداً مما يلي :

$$f(t) = (t-2)(t-1)$$
$$g(t) = (t-2)(t-1)^2$$

ونعلم من نظرية كيلي –هاملتون أن :

$$g(A) = \varphi(A) = 0$$

بقي أن نختبر $f(t)$ فيكون لدينا :

$$f(A)=(A-2I)(A-I)=\begin{bmatrix}6 & -5 & 4\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -4 & 4\\ 3 & -2 & 2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن كثير الحدود الأصغري للمصفوفة A هو:

$$m(t)=f(t)=(t-2)(t-1)=t^2+3t+2$$

2- نجد كثير الحدود الميز للمصفوفة B كما يلي :

$$\varphi(t)=\begin{vmatrix}3-t & -2 & 2\\ 4 & -4-t & 6\\ 2 & -3 & 5\end{vmatrix}$$

$$=t^3-4t^2+5t-2$$

إذن :

$$\varphi(t)=(t-2)(t-1)^2$$

وبالتالي فإن كثير الحدود الأصغري للمصفوفة B هو واحد مما يلي :

$$f(t)=(t-2)(t-1)$$

$$g(t)=(t-2)(t-1)^2$$

وباختبار $f(t)$ نجد أن :

$$f(B)=(B-2I)(B-I)=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 4 & -6 & 6\\ 2 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2 & 2\\ 4 & -5 & 6\\ 2 & -3 & 4\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -2\\ -4 & 4 & -4\\ -2 & 2 & -2\end{bmatrix}\neq 0$$

$$m(t)=g(t)=(t-2)(t-1)^2$$

نلاحظ أننا لسنا بحاجة لاختيار $g(t)$ لأننا نعلم من نظرية كيلي- هاملتون أن $g(B)=0$.

مثال (76) :

أوجد كثير الحدود الأصغري لكل من المصفوفات :

1- $$A=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 3 & 7\end{bmatrix}$$

2- $$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

الحـــــل :

1) إن كثير الحدود المميز للمصفوفة A هو :

$$\varphi(t)=\begin{vmatrix}5-t & 1\\ 3 & 7-t\end{vmatrix}=t^2-12t+32=$$
$$=(t-4)(t-8)$$

بما أن $\varphi(t)$ يملك عاملين مختلفين إذن كثير الحدود الأصغري للمصفوفة A هو :

$$m(t)=\varphi(t)=t^2-12t+32$$

2) بما أن المصفوفة B مثلثية علوية إذن القيم الذاتية لهذه المصفوفة هي العناصر الواقعة على القطر الرئيسي وبالتالي القيم الذاتية لـــ B هي

$$\lambda_3=3,\quad \lambda_2=2,\quad \lambda_1=1$$

ويكون كثير الحدود المميز للمصفوفة B هو :

$$\varphi(t) = (t-1)(t-2)(t-3)$$

وبما أن عوامل تحليل $\varphi(t)$ مختلفة مثنى مثنى إذن كثير الحدود الأصغري للمصفوفة B

هو :

$$m(t) = \varphi(t) = (t-1)(t-2)(t-3)$$

3- إن كثير الحدود المميز للمصفوفة C هو :

$$\varphi(t) = t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2$$

إذن كثير الحدود الأصغري للمصفوفة C هو واحد مما يلي :

$$f(t) = t - 3$$

$$g(t) = (t-3)^2$$

وبما أن $f(C) \neq 0$ حيث $C - 3I \neq 0$ إذن :

$$m(t) = g(t) = \varphi(t) = (t-3)^2$$

تمارين غير محلولة

1- ليكن W, U فضائين جزئيين في R^4 معرفين كما يلي :

$$U = \{(a,b,c,d): b - 2c + d = 0\}$$

$$W = \{(a,b,c,d): a = d,\ b = 2c\}$$

أوجد قاعدة لكل من W, U و $U \cap W$ ثم عين عدد أبعاد كل منهم .

2- أوجد قاعدة لفضاء الحلول W لكل من الجمل الخطية المتجانسة التالية :

(a)
$$\begin{aligned} x + 2y - 2z + 2s - t &= 0 \\ x + 2y - z + 3s - 2t &= 0 \\ 2x + 4y - 7z + S + t &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x - 2y + 7z &= 0 \\ 2x + 3y - 2z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x + 4y + 2z &= 0 \\ 2x + y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

ثم عين عدد أبعاد W .

3- أوجد جملة المعادلات الخطية المتجانسة التي فضاء حلولها مولّد بالمتجهات الثلاث التالية :

$$u_1 = (1, -2, 0, 3, -1)$$

$$u_2 = (2, -3, 2, 5, -3)$$

$$u_3 = (1, -2, 1, 2, -2)$$

4 – حدد أي من المجموعات التالية يمثل قاعدة لفضاء المتجهات $P_n(t)$ المؤلف من جميع كثيرات الحدود التي لا تزيد درجتها عن n :

(a) $\{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3, ..., 1+t+t^2+....+t^n\}$

(b) $\{1+t, t+t^2, t^2+t^3, ..., t^{n-2}+t^{n-1}, t^{n-1}+t^n\}$

5– أوجد قاعدة للفضاء الجزئي W في $P(t)$ المولد بكثيرات الحدود التالية :

(a)
$$u = t^3 + 2t^2 - 2t + 1$$
$$v = t^3 + 3t^2 - t + 4$$
$$w = 2t^3 + t^2 - 7t - 7$$

(b)
$$u = t^3 + t^2 - 3t + 2$$
$$v = 2t^3 + t^2 + t - 4$$
$$w = 4t^3 + 3t^2 - 5t + 2$$

6– أوجد رتبة كل من المصفوفات التالية :

$$(a)\quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & -3 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & -4 \\ 3 & 8 & -7 & -2 & -11 \\ 2 & 1 & -9 & -10 & -3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 5 & 8 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \\ -6 & 1 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$

7- أوجد قاعدة من أجل :

(i) فضاء الأسطر

(ii) فضاء الأعمدة لكل من المصفوفتين M :

(a) $$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 12 & 8 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

(b) $$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8- ليكن $r = rank(A+B)$. أوجد مصفوفتين A, B من القياس 2×2

بحيث إن :

(a) $r < rank(A), \quad r < rank(B)$

(c) $r > rank(A), \quad r > rank(B)$

9- ليكن U , W فضائين جزئيين في R^3 بحيث أن $dim W = 2$, $dim U = 1$

و $U \not\subset W$.

أثبت أن : $R^3 = U \oplus W$.

10- لتكن الفضاءات الجزئية في R^5 التالية :

$$U = span\begin{bmatrix}(1, 3, -3, -1, -4), (1, 4, -1, -2, -2), \\ (2, 9, 0, -5, -2)\end{bmatrix}$$

$$W = span\begin{bmatrix}(1, 6, 2, -2, 3), (2, 8, -1, -6, -5), \\ (1, 3, -1, -5, -6)\end{bmatrix}$$

أوجد :

(a) $dim(U + W)$

(b) $dim(U \cap W)$

11- لتكن الفضاءات الجزئية في R^5 التالية :

$$U = span\begin{bmatrix}(1, -1, -1, -2, 0), (1, -2, -2, 0, -3), \\ (1, -1, -2, -2, 1)\end{bmatrix}$$

$$W = span\begin{bmatrix}(1, -2, -3, 0, -2), (1, -1, -3, 2, -4), \\ (1, -1, -2, 2, -5)\end{bmatrix}$$

(a) أوجد جملتين خطيتين متجانستين بحيث تكون فضاءات حلولها هي U, W على الترتيب .

12- نفرض $V = U \oplus W$.

أثبت أن :

$$\dim V = \dim U + \dim W$$

13- لتكن القاعدة :

$$S = \begin{Bmatrix} u_1 = (1,1,1) \\ u_2 = (1,1,0) \\ u_3 = (1,0,0) \end{Bmatrix}$$

في الفضاء R^3 .

أوجد المصفوفة الإحداثية $[v]$ بالنسبة للقاعدة S في كل من الحالات :

(a) $v = (3,-4,2)$

(b) $v = (a,b,c)$

14- لتكن القاعدة $S' = \{t^3 + t^2, t^2 + t, t + 1, 1\}$ في فضاء كثيرات الحدود $P_3(t)$ التي لا تزيد درجتها عن 3 .

أوجد المصفوفة الإحداثية $[v]$ للمتجه v بالنسبة للقاعدة S في كل من الحالات :

(a) $v = 2t^3 + t^2 - 3t + 2$

(b) $v = t^2 + 2t - 3$

(c) $v = at^3 + bt^2 + ct + d$

15- في الفضاء $M = M_{2\times2}$ المؤلف من جميع المصفوفات من القياس 2×2

أوجد المصفوفة الإحداثية $[A]$ للمتجه A بالنسبة للقاعدة .

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right\}$$

في كل من الحالات :

$$(a) \qquad A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$$

$$(b) \qquad A=\begin{bmatrix}3 & -3\\6 & 7\end{bmatrix}$$

16- ليكن فضاء كثيرات الحدود $P_3(t)$ وليكن الفضاءان الجزئيان التاليان في $P_3(t)$:

$$U = span\,(u_1, u_2, u_3)$$
$$W = span\,(w_1, w_2, w_3)$$

و المولدان بالمتجهات التالية :

$$u_1 = t^3+t^2+2t+2\ , \quad u_2 = 2t^3\,3t^2+7t+5$$
$$u_3 = t^3+3t^2+8t+4$$
$$w_1 = t^3+t^2+t+2\ , \quad w_2 = t^3+3t^2+7t+4$$
$$w_3 = 2t^3+3t^2+6t+5$$

أوجد :

$$(a) \qquad dim(U+W)$$
$$(b) \qquad dim(U\cap W)$$

17- أوجد مصفوفة الانتقال P من القاعدة القانونية $\mathcal{E}$ للفضاء المتجه R^3 إلى القاعدة S وكذلك أوجد مصفوفة الانتقال Q المعاكسة من S إلى $\mathcal{E}$.

S تتألف من المتجهات التالية :

(a) $S=\{u_1=(1,1,0),\ u_2=(0,1,2),\ u_3=(0,1,1)\}$

(b) $S=\{u_1=(1,0,1),\ u_2=(1,1,2),\ u_3=(1,2,4)\}$

(c) $S=\{u_1=(1,2,1),\ u_2=(1,3,4),\ u_3=(2,5,6)\}$

18- نفرض S , T تطبيقان من R^2 في R^2 معرفان كما يلي :

$$S(x_1,x_2)=(x_1+x_2\ ,\ x_1-x_2)$$

$$T(x_1,x_2)=(-x_2\ ,\ -x_1)$$

(a) أثبت أن كل من S , T تحويل خطي .

(b) أوجد S +T و 2S -3T .

19- حدد أي من التطبيقات $T:R^2 \to R^2$ تحويل خطي :

(a) $T(x,y)=(x-y,0)$

(b) $T(x,y)=(xy,x)$

(c) $T(x,y)=(x+1,y-1)$

(d) $T(x,y)=(x+y,x-y)$

(e) $T(x,y)=x(2,1)$

(f) $T(x,y)=(x-y)(x+y,0)$

20- حدد أي من التطبيقات التالية $T:R^3 \to R^2$ تحويل خطي :

(a) $T(x,y,z)=(2x+y,x+z)$

(b) $T(x,y,z)=(x-y,x^2-y^2)$

(c) $T(x,y,z)=(x+y+1,\ x+y-1)$

(d) $T(x,y,z)=(x+y+z,0)$

21- حدد أي من التطبيقات التالية $T : P_1 \to P_1$ تحويل خطي :

(a) $T(a_0 + a_1 x) = a_0 x$

(b) $T(a_0 + a_1 x) = a_0 + a_1(x+1)$

(c) $T(a_0 + a_1 x) = a_0 a_1 + a_0 x$

(d) $T(a_0 + a_1 x) = a_0 + a_1 + a_0 x$

22- حدد أي من التطبيقات التالية $T : R_{2\times 2} \to R_{2\times 2}$ تحويل خطي :

(a) $T(x) = A + Ax$

(b) $T(x) = Ax - xA$

(c) $T(x) = AxA$

(d) $T(x) = x$

حيث A مصفوفة ثابتة مختلفة عن الصفر من القياس 2 × 2 معرفة على R .

23- حدد أي من التطبيقات التالية تحويل خطي :

(a) $T : R_{m\times n} \to R_{n\times m}\ ,\ T(x) = x^T$

(b) $T : R_{m\times n} \to R_{n\times n}\ ,\ T(x) = x^T x$

(c) $T : R_{n\times n} \to R\ ,\ T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_{ii}\ ,\ x = [x_{ij}]_{n\times n}$

(d) $T : P_2 \to P_1\ ,\ T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 + a_1 + (a_1 + a_2)x$

(e) $T : P_2 \to P_2\ ,\ T(P(x)) = P(x-1)$

(f) $T : P_2 \to P_3\ ,\ T(P(x)) = xP(x) + P(1)$

$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 ,\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 ,$
$2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4)$

(a) أوجد قاعدة في $T(R^4)$

(b) أوجد متجهين مستقلين خطين في نواة T .

25- ليكن التطبيق $T : R_{2\times2} \to R_{2\times2}$ المعرف بالعلاقة :

$$T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a_{11} + a_{12} & 2a_{21} - a_{22} \\ a_{11} + 3a_{22} & a_{21} - 3a_{12} \end{bmatrix}$$

(a) أثبت أن T تحويل خطي .

(b) أوجد قاعدة في صورة T .

26- أوجد رتبة(rank) وصفر (nullity) التحويلات الخطية المعرفة من U إلى V التالية :

$U = V = R^4$

(a) $T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 - x_4 ,\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 ,$
$x_1 - x_2 + 3x_3 ,\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_4)$

$U = R^4 \ , V = R^3$

(b) $T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 ,\ 2x_3 - 4x_4 ,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4)$

27- ليكن التحويل الخطي $T : U \to V$ أثبت ما يلي :

(a) $T(0) = 0$

(b) $\forall u \in U : T(-u) = -u$

(c) $\forall u, w \in U : T(u-w) = T(u) - T(w)$

(d) $\forall a_i \in F \ , \forall u_i \in U : T(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(u_i)$

28– ليكن التحويل الخطي $T : U \to V$ بحيث إن $\text{nullity}(T) = 0$ برهن أنه إذا كان $T(u_4)$ مرتبط مع $\{T(u_1), T(u_2), T(u_3)\}$ عندئذٍ u_4 مرتبط مع $\{u_1, u_2, u_3\}$.

29– ليكن التحويل الخطي $T : U \to V$ وليكن U_1, U_2 فضائين جزئيين في U.

أثبت أن :

$$T(U_1 + U_2) = T(U_1) + T(U_2)$$

30– ليكن التحويل الخطي $T : R_{2\times 1} \to R_{2\times 1}$ بحيث انه يحقق :

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أوجد :

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

المعرف على R حيث إن : $P_2(x)$

$$P_1(x) = 1 + x + x^2$$
$$P_2(x) = x + x^2$$
$$P_3(x) = x^2$$

أوجد الصيغة لـــ $T(a_0+a_1x+a_2x^2)$ إذا كان $T : P_2 \rightarrow R^2$ تحويلاً خطياً بحيث إن :

$$T(P_2(x)) = (1,0)$$
$$T(P_2(x)) = (1,0)$$
$$T(P_3(x)) = (0,1)$$

32- ليكن التحويل الخطي $T : R_{2\times 2} \rightarrow R_{3\times 1}$ الذي يحقق :

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

والمطلوب إيجاد :

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$

33- أوجد المصفوفة الممثلة للتحويل الخطي T المعطى بالنسبة للقاعدتين A, B فيما يلي :

(a) $T : R^3 \to R^4$, $A = \varepsilon_3$, $B = \varepsilon_4$

$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3 , 5x_2 - 2x_3 ,$
$4x_1 + x_3 , 2x_1 + 3x_2 + x_3)$

(b) $T : R^4 \to R^3$, $A = \varepsilon_4$, $B = \varepsilon_3$

$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 - x_4 , x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 ,$
$x_1 - x_2 + x_3)$

(c) $T : P_2 \to P_3$, $A = \{1, 1-x, x-x^2\}$, $B = \{1, 1+x, 1-x^2, x+x_3\}$

$T(P(x)) = (1-x)P(x)$

(d) $T : R^3 \to R^4$, $A = \varepsilon_3$, $B = \varepsilon_4$

$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3 , 5x_2 - 2x_3 ,$
$4x_1 + x_3 , 2x_1 + 3x_2 + x_3)$

34- إذا كان $T : R^2 \to R^3$ تحويلاً خطياً وكانت مصفوفته هي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدة $\{(1,1), (-3,1)\}$ في R^2 وللقاعدة ε_3 في R^3

والمطلوب : أوجد $T(-2,2)$.

35- ليكن $T : R^3 \to R^2$ تحويلاً خطياً ولتكن مصفوفته هي :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدتين:

$\{(1,-1,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$ في R^3 و $\{(3,2), (2,1)\}$ في R^2

والمطلوب إيجاد $T(2,0,1)$.

36– ليكن التحويل الخطي $P_3 \to P_2$ والذي مصفوفته هي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدتين:

P_3 في $\{1, x, x^2, x^3\}$ و P_2 في $\{4, 1+x, 1+x^2\}$

والمطلوب إيجاد $T(2-2x+x^2)$.

37– ليكن التحويل الخطي $T : P_2 \to P_1$ والذي مصفوفته هي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدتين:

P_1 في $\{1, 2+3x\}$ و P_2 في $\{1+x+x^2, x+x^2, x^2\}$

والمطلوب إيجاد $T(2+5x+x^2)$.

38 – لتكن A قاعدة في $R_{2\times 2}$ و B قاعدة في P_1 المعرّف فوق R حيث إن :

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B = \{1+x, 1-x\}$$

ثم ليكن التحويل الخطي $T : R_{2\times 2} \to P_1$ ذو المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدتين B, A والمطلوب إيجاد:

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right).$$

39- ليكن التحويل الخطي $T: R^3 \to R^2$ والذي مصفوفته هي :

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -4 & -4 \\ 6 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدتين القانونيتين ε_3 و ε_2.

أوجد مصفوفة T بالنسبة للقاعدتين:

$\{(1,2,1),(1,1,1),(1,1,0)\}$ في R^3 و $\{(1,0),(1,1)\}$ في R^2.

40- ليكن التحويل الخطي $T: R^4 \to R^4$ والذي مصفوفته هي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدتين $A = B = \varepsilon_4$ والمطلوب :

إيجاد قاعدة في $T(R^4)$.

41- ليكن التحويل الخطي $T: R^n \to R^m$ الذي يملك المصفوفة A بالنسبة للقاعدتين القانونيتين ε_n و ε_m.

والمطلوب:

إيجاد قاعدة في $T(R^n)$ وفي Kern T في كل من الحالات :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) $$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) $$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & -3 & -1 \\ 2 & 6 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(d) $$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

42- ليكن التحويل الخطي $T : R^5 \to R^3$ والذي يملك المصفوفة A بالنسبة للقاعدتين:

$\{(1,1,1,1,1),(1,1,1,1,0),(1,1,0,0,0),(1,0,0,0,0),(0,0,0,0,1)\}$ في R^5

و $\{(1,1,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$ في R^3.

والمطلوب :

إيجاد قاعدة في كل من $T(R^5)$ و Kern T في كل من الحالات التالية :

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

43- ليكن التحويل الخطي $T : R^3 \to R^3$ ولتكن مصفوفته هي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدة $A = B = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ والمطلوب :

إيجاد قاعدة في Kern T .

المتجهات الذاتية والقيم الذاتية :

44- ليكن P_2 فضاء كثيرات حدود معرف على R و $A = \{x + x^2 , 2 + x, 1\}$ قاعدة في P_2 ولتكن P مصفوفة الانتقال من القاعدة A إلى القاعدة B في P_2 حيث إن :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

والمطلوب إيجاد عناصر القاعدة B .

45- لتكن A قاعدة لفضاء كثيرات الحدود P_2 المعرف على R حيث إن $A = \{x^2, 1 + x, x + x^2\}$ ثم لتكن P مصفوفة الانتقال من القاعدة A إلى القاعدة B في P_2 .

فإذا كان :

$$[u]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ أوجد u .

46- لتكن $A=\varepsilon_4$ قاعدة في R^4 و $B=\{x^2,x,1\}$ قاعدة لـ P_2 المعرف على R .

إذا كان T تحويلاً خطياً ممثلاً بالمصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدتين A, B:

والمطلوب :

إيجاد المصفوفة الممثلة لـ T بالنسبة للقاعدتين A', B' التاليتين :

$$A' = \{(1,0,0,0),(0,0,1,0),(1,-1,0,0),(0,-1,1,1)\}$$
$$B' = \{x^2+1,\ x,1\}$$

47- ليكن التحويل الخطي $T: R^3 \to R^2$ والذي يملك المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدتين:

$\{(1,2,0),(1,1,1),(1,1,0)\}$ في R^3 و $\{(1,1),(1,-1)\}$ في R^2 .

والمطلوب إيجاد المصفوفة T بالنسبة للقاعدتين:

$\{(2,3,0),(1,1,1),(2,3,1)\}$ في R^3 و $\{(3,-1),(1,-1)\}$ في R^2 .

48- ليكن التحويل الخطي $T : R^3 \to R^2$ والذي مصفوفته هي :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدتين $\varepsilon_3 , \varepsilon_2$.

ولتكن المصفوفتان القابلتان للقلب التاليتان :

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بحيث إن :

$$: B_1 A B_2 = D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

والمطلوب إيجاد قاعدة A' في R^3 وقاعدة B' في R^2 بحيث إن T يملك المصفوفة D_2 بالنسبة للقاعدتين A', B' .

49- ليكن التحويل الخطي $T : R^n \to R^m$ والذي مصفوفته بالنسبة للقاعدتين $\varepsilon_n , \varepsilon_m$ هي المصفوفة A التالية والمطلوب إيجاد قاعدة A' في R^n وقاعدة B' في R^m بحيث إن T يملك المصفوفة D_2 بالنسبة للقاعدتين A', B' :

(a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

علماً أن :

$$D_r=\begin{bmatrix} I_r & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية :

50- أوجد القيم الذاتية لكل من المصفوفات

(1) $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ (3) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(4) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ (5) $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(6) $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$ (7) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$(8) \quad A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (9) \quad A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(10) \quad A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (11) \quad A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(12) \quad A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

51- ليكن المؤثر الخطي $T : R^n \to R^n$ أوجد طيف T في كل من الحالات التالية :

(a) $T(x_1,x_2)=(x_1+2x_2\,,\,2x_1-2x_2)$

(b) $T(x_1,x_2)=(2x_1+x_2\,,\,x_1-x_2)$

(c) $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2-x_3\,,\,-x_1+3x_2-x_3\,,-x_1+2x_2)$

(d)
$$T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_3+x_4\,,\,2x_1+x_2+3x_3+x_4\,,\\ -x_1-x_3-x_4\,,\,2x_1+2x_2+5x_3+x_4)$$

سي .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدة $\{x^2, x-2, x+1\}$ في P_2 .

أوجد القيم الذاتية لـــ T ثم أوجد المتجه الذاتي لـــ T الموافق لكل قيمة ذاتية .

53- ليكن المؤثر الخطي $T: P_2 \to P_2$ والمطلوب إيجاد جميع المتجهات الذاتية لـــ T الموافقة لجميع القيم الذاتية فيما يلي :

(a) $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (2a_0 + a_1) + a_1x + (2a_0 + 2a_1 + a_2)x^2$

(b) $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (3a_0 - 2a_1 + a_2) + 2a_1x + (a_0 - 2a_1 + 3a_2)x^2$

54- ليكن T مؤثراً خطياً على R^2 بحيث أن :

$$T(1,2) = (7,10)$$
$$T(2,1) = (5,2)$$

والمطلوب تعين القيم الذاتية لـــ T والمتجهات الذاتية الموافقة لكل قيمة ذاتية .

55- لتكن A مصفوفة قابلة للقلب أثبت إنه إذا كانت λ قيمة ذاتية لـــ A عندئذٍ λ^{-1} قيمة ذاتية لـــ A^{-1} .

الموافقة لها هي :

$(1, 0, 0)$, $(1, 4, 0)$, $(2, 1, 3)$ على الترتيب

والمطلوب إيجاد القيم الذاتية لـــ T^{-1} ثم أوجد المتجهات الذاتية الموافقة لكل قيمة ذاتية

57- إذا كانت 2 قيمة ذاتية لـــ T و $v = (2, -1, 3)$ متجه ذاتي موافق للقيمة الذاتية 2 والمطلوب إيجاد قيمة ذاتية للتحويل الخطي $S = T^2 - 2T + I$ (حيث $I = T^0$) .

58- أثبت أنه إذا كانت λ قيمة ذاتية للتحويل الخطي T وإذا كان S كثير حدود لـــ T من الشكل :

$$S = f(T) = \sum_{i=1}^{r} a_i T^i$$

فإن:

$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{r} a_i \lambda^i$ قيمة ذاتية لـــ S .

ثم أوجد متجه ذاتي لـــ S موافق للقيمة الذاتية $f(\lambda)$.

59- ليكن المؤثر الخطي T معرفاً على R^3 ويملك المصفوفة A التالية بالنسبة للقاعدة $A = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ في R^3 والمطلوب إيجاد الجداء الجبري والجداء الهندسي المتعلق بكل قيمة ذاتية لـــ T في الحالات :

(a) $$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -5 \\ 5 & 8 & -5 \\ 15 & 15 & -12 \end{bmatrix}$$

(b) $A=\begin{bmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $A=\begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ -10 & -5 & -8 \end{bmatrix}$

60- ليكن C حقل الأعداد العقدية و C^n فضاء الأعمدة المعرف على C ولتكن $\varepsilon_n=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ قاعدة في C^n بحيث إن :

$$e_1=(1,0,\dots\dots,0),\dots\dots,e_n=(0,0,\dots,1)$$

فإذا كان T مؤثراً خطياً على C^n ويمثله المصفوفة A التالية بالنسبة للقاعدة ε_n أوجد الجدائين الجبري والهندسي لجميع القيم الذاتية لـ T ثم أوجد قاعدة من أجل كل فضاء جزئي مميز في كل من الحالات :

(a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A=\begin{bmatrix} 5 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$

(c) $$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(d) $$A=\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ -2i & i & -2+i \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(e) $$A=\begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ -2i & 1+i & 2+i \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(f) $$A=\begin{bmatrix} -2+2i & 0 & -2+i \\ 0 & -i & 0 \\ 4-2i & 0 & 4-i \end{bmatrix}$$

61- ليكن المؤثر الخطي $T: P_2 \to P_2$

حيث P_2 فضاء كثيرات حدود معرف على R . أوجد جميع القيم الذاتية لـــ T ثم أوجد الجدائين الجبري والهندسي لكل قيمة ذاتية ثم أوجد قاعدة لكل فضاء جزئي مميز لـــ T في كل من الحالات :

(a) $$T(a_0+a_1x+a_2x^2)=(3a_0+a_1+a_2)+2a_1x+2a_2x^2$$

(b)
$$T(a_0+a_1x+a_2x^2)=2a_0+(3a_0+a_1+2a_2)x+ \\ +(3a_0-a_1+4a_2)x^2$$

(d) $T(a_0+a_1x+a_2x^2)=(2a_0+a_1)+2a_1x+(2a_0+3a_1+a_2)x^2$

62- ليكن المؤثر الخطي $T:R^2 \to R^2$ والذي مصفوفته هي :

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للقاعدة $A=\{(3,3),(1,-1)\}$.

أوجد القيم الذاتية لـ T ثم أوجد المتجهات الذاتية الموافقة لكل قيمة ذاتية لـ T .

63- لتكن $A=\{v_1,v_2,.....,v_n\}$ قاعدة للفضاء المتجه V مكونة من المتجهات الذاتية للمؤثر الخطي T والمطلوب إيجاد مصفوفة T بالنسبة للقاعدة A .

64- أي المصفوفات من القياس n× n على الحقل F تتشابه مع مصفوفة الوحدة I_n ؟

65- أثبت أنه إذا كانت B تتشابه مع A فإن B^T تتشابه مع A^T .

66- أثبت أنه إذا كانت A, B مصفوفتين من القياس n× n على الحقل F بحيث إن A قابلة للقلب عندئذٍ BA تتشابه مع AB على F .

67- أثبت أنه إذا كانت B تتشابه مع A فإن $det(A)=det(B)$ و $rank(A)=rank(B)$.

-68

1- عيّن أي من المصفوفات A تتشابه مع المصفوفة القطرية على R من المصفوفات التالية :

2- عندما يكون ممكناً أوجد مصفوفة P قابلة للقلب على R بحيث إن $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية وذلك في كل من الحالات التالية :

$$(1)\quad A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad (2)\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(3)\quad A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4)\quad A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(5)\quad A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad (6)\quad A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

-69

1- عيّن أي من المؤثرات الخطية T يمكن تمثيله بمصفوفة قطرية

2 - عندما يكون ممكناً أوجد مصفوفة قطرية وقاعدة بحيث إن T يمكن تمثيله بهذه المصفوفة القطرية في كل مما يلي :

(1) $T(x_1,x_2)=(x_1+2x_2\,,\,2x_1-2x_2)$

المعرف على R^2

(2) $T(x_1,x_2)=(2x_1+x_2\,,\,x_1-x_2)$

المعرف على R^2

(3) $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2-x_3\,,\,-x_1+3x_2-x_3,-x_1+2x_2)$

المعرف على R^3

(4)

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_3+x_4\,,\,2x_1+x_2+3x_3+x_4,$$
$$-x_1-x_3-x_4,3x_1+2x_2+5x_3+x_4)$$

70- ليكن المؤثر الخطي $T:R^3\rightarrow R^3$ ولتكن المصفوفة A هي المصفوفة الممثلة لـ T بالنسبة للقاعدة $A=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ كما يلي :

(1) $A=\begin{bmatrix}8&5&-5\\25&8&-5\\15&15&-12\end{bmatrix}$ (2) $A=\begin{bmatrix}-4&-3&-1\\-4&0&-4\\8&4&5\end{bmatrix}$

(3) $A=\begin{bmatrix}3&2&2\\1&4&1\\-2&-4&-1\end{bmatrix}$ (4) $A=\begin{bmatrix}8&5&6\\0&-2&0\\-10&-5&-8\end{bmatrix}$

والمطلوب :

1- حدد أي من المؤثرات T يمكن تمثيله بمصفوفة قطرية .

2- أوجد مصفوفة قطرية وقاعدة في R^3 عندما يكون ممكناً بحيث أن T يمكن تمثيله بتلك المصفوفة القطرية بالنسبة لهذه القاعدة .

-71

1- عين أي من المصفوفات A التالية تتشابه مع مصفوفة قطرية على الحقل C .

2- أوجد مصفوفة P قابلة للقلب على الحقل C بحيث إن :

$P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية عندما يكون ذلك ممكناً فيما يلي:

$(1)\quad A = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ 1+i & 3 \end{bmatrix} \qquad (2)\quad A = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ -i & 2 \end{bmatrix}$

$$(3)\quad A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad (4)\quad A=\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ -2i & i & -2+i \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(5)\quad A=\begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ -2i & 1+i & 2i \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(6)\quad A=\begin{bmatrix} -2+2i & 0 & -2+i \\ 0 & -i & 0 \\ 4-2i & 0 & 4-i \end{bmatrix}$$

التوابع المتجهة :

72- لتكن الصورة التربيعية $q(v)=X^T AX$ من أجل أي متجه $v=(x_1,\dots\dots,x_4)$ من R^4 حيث A مصفوفة معطاة فيما يلي والمطلوب إيجاد صيغة $q(v)$ بدلالة الإحداثيات y_i بالنسبة للقاعدة A :

$$(1)\quad A=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ \frac{-1}{2} & -\sqrt{2} & \frac{-5}{2} \end{bmatrix},\quad A=\{(1,0,1),(3,\sqrt{2},1),(3\sqrt{2},-4,\sqrt{2})\}$$

$$(2)\quad A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix},\quad A=\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$$

$$(3)\quad A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

$$(4)\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 7 \end{bmatrix}, \qquad A=\{(1,0,0),(1,-1,0),(-11,3,4)\}$$

73- برهن أنه إذا كانت المصفوفة $A=B^TB$ من أجل مصفوفة ما B على R عندئذٍ $0 \le X^TAX$ من أجل جميع $X=[x_1,x_2,\dots,x_4]$ من R^4 .

74- الصورة التربيعية q معرفة بالشكل $q(v)=X^TAX$ من أجل جميع المتجهات $v=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ من R^n حيث A مصفوفة معطاة فيما يلي :

$$(1)\quad A=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2} & -\sqrt{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \qquad (2)\quad A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(3)\quad A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)\quad A=\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب إيجاد رتبة q وإشارة q ودليل q .

75 – من اجل كل مصفوفة A فيما يلي اوجد مصفوفة حقيقية P قابلة لقلب بحيث إن $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية :

$$(1)\quad A=\begin{bmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{bmatrix}\qquad (2)\quad A=\begin{bmatrix}1&2&-4\\2&-2&-2\\-4&-2&3\end{bmatrix}$$

$$(3)\quad A=\begin{bmatrix}17&2&-2\\2&14&4\\-2&4&14\end{bmatrix}\qquad (4)\quad A=\begin{bmatrix}4&-1&0&1\\-1&5&-1&0\\0&-1&4&-1\\1&0&-1&5\end{bmatrix}$$

76– أوجد مصفوفة الصورة ثنا- خطية f على U وV بالنسبة للقاعدتين A,B على الترتيب :

(1)

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2,y_3))=2x_1y_2-x_1y_3+2x_2y_1+x_2y_2+x_2y_3$$

$$U=R^2\ ,\ V=R^3\ ,\ A=\varepsilon_2\ ,\ B=\varepsilon_3$$

(2)

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))=x_1y_1-x_1y_2+2x_2y_1+x_2y_3+2x_3y_2+x_3y_3$$

$$U=V=R^3\ ,\ A=B=\varepsilon_3$$

(3)

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))=2x_1y_2-x_1y_3+2x_2y_1-2x_3y_3+x_2y_2+x_2y_3-x_3y_1+x_3y_2$$

$$U=V=R^3\ ,\ A=B=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$$

المصفوفة A التالية بالنسبة للقاعدتين $\varepsilon_4, \varepsilon_3$ والمطلوب: إيجاد قاعدتين A' في R^4 و B' في R^3 بحيث يكون لـ f مصفوفة قطرية D_r بالنسبة للقاعدتين A' و B' :

$$(1)\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (2)\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3)\quad A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)\quad A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

78– أي من المصفوفات التالية هيرميتيه ؟

$$(a)\ \begin{bmatrix} 5 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix} \qquad (c)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(d)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (f)\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(g)\begin{bmatrix} \frac{11}{9} & \frac{-2}{3}i & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{3}i & 2 & -\frac{1}{3}i \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{3}i & \frac{5}{9} \end{bmatrix} \qquad (h)=\begin{bmatrix} 3i & 0 & 4i \\ 0 & 2i & -2 \\ -4i & 2 & i \end{bmatrix}$$

79- من أجل كل مصفوفة هيرميتيه في المسألة السابقة (78) أجب عن الأسئلة التالية:

1- أوجد مصفوفة P قابلة للقلب بحيث أن P^*HP مصفوفة قطرية .

2- أي من هذه المصفوفات متشابه على C .

80- برهن أن المصفوفة الهيرمينية H تكون محدودة موجبة إذا وفقط إذا وجدت مصفوفة قابلة للقلب P بحيث أن $H = p^* p$.

فضاء الجداء الداخلي :

81- بفرض $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ من R^n تحقق أي من العلاقات التالية تُعّرف جداءاً داخلياً في R^n :

(a) $(u,v) = 2u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 2u_2v \; ; \; n = 2$

(b) $(u,v) = u_1v_2 + u_2v_1 \; ; \; n = 2$

(c) $(u,v) = u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_2 \; ; \; n = 2$

(d) $(u,v) = 2u_1v_1 + u_2v_2 \; ; \; n = 2$

(e) $(u,v) = u_1v_1 + u_3v_3 \; ; \; n = 3$

(f) $(u,v) = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 \; ; \; n = 3$

$$H = \begin{bmatrix} -i & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

محدودة موجبة هيرميتية ، ثم ليكن (u,v) جداءاً داخلياً على الفضاء المتجه C^3 و مصفوفته بالنسبة للقاعدة :

$$A = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

هي المصفوفة H السابقة والمطلوب كتابة الجداء الداخلي (u,v) بالنسبة للمتجهين الاختياريين $u = (u_1,u_2,u_3)$, $v = (v_1,v_2,v_3)$ في C^3 .

83- أوجد قاعدة A' في C^3 من أجل أن يكون للجداء الداخلي المعرف في المسألة السابقة (82) العبارة التالية :

$$(u,v) = X^*Y$$

حيث v,u يملكان المصفوفتين الإحداثيتين X و Y على الترتيب بالنسبة للقاعدة A' .

84- ليكن التابع f المعرف على $C^2 \times C^2$ بالعلاقة :

$$f((a_1,a_2),(b_1,b_2)) = 5\,\bar{a}_1 b_1 + i\bar{a}_1 b_2 + 2\,\bar{a}_2 b_2 - i\bar{a}_2 b_1$$

عبارة عن جداء داخلي على C^2 .

1- أوجد مصفوفة f بالنسبة للقاعدة $\varepsilon_2 = \{(1,0),(0,1)\}$.

2- أوجد القاعدة $A = \{v_1, v_2\}$ في C^2 بحيث إن $(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ من أجل جميع i , j .

85- ليكن $u=(u_1,u_2)$ ، $v=(v_1,v_2)$ من R^2 ولنعرف العلاقة في R^2 التالية:

$$(u,v)=2u_1v_1+u_1v_2+u_2v_1+2u_2v_2$$

1- تحقق أن العلاقة السابقة جداء داخلي .

2- تحقق من صحة متراجحة كوشي–شوارتز من أجل المتجهين $u=(1,2)$ ، $v=(3,-5)$.

3- استخدم الجداء الداخلي في حساب $\|w\|$ من أجل $w=(-1,3)$.

86- استخدم الجداء الداخلي في R^2 المولد بالمصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

للتحقق من صحة متراجحة كوشي–شوارتز من أجل المتجهين $u=(3,-1)$ ، $v=(2,4)$.

78– استخدم متراجحة كوشي – شوارتز لبرهان ما يلي :

1– من أجل أي مجموعتين من الأعداد الحقيقية :

$$a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n \quad , \quad b_1,b_2,\ldots\ldots,b_n$$

فإن :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

2– من أجل أي مجموعتين من الأعداد العقدية :

$$a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n \quad , \quad b_1,b_2,\ldots\ldots,b_n$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \leq (\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2)(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2)$$

88- ليكن الفضاء الاقليدي V :

1- أثبت أن متراجحة كوشي- شوارتز تحقق :

$$-1 \leq \frac{(u,v)}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1 \qquad \forall u,v \in V$$

2- نعرف الزاوية θ بين أي متجهين مختلفين عن الصفر v, u من V بالعلاقة :

$$\cos\theta = \frac{(u,v)}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

فإذا كان $0 \leq \theta \leq \pi$ أثبت صحة العلاقة التالية في V :

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|.\|v\|\cos\theta$$

89- ليكن فضاء المصفوفات $R_{2\times2}$ وليكن المتجهان الاختياريان :

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix} \text{ من } R_{2\times2}$$

ولنعرف الجداء الداخلي في $R_{2\times2}$ بالعلاقة التالية :

$$(U,V) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$$

استخدم هذا الجداء الداخلي لحساب $\cos\theta$ حيث θ هي الزاوية بين المتجهين :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

a– أثبت أنه من أجل أي متجهين v, u من الفضاء الاقليدي V فإن :

$$\| u+v \|^2 + \| u-v \|^2 = 2\left(\| u \|^2 + \| v \|^2\right)$$

b– أثبت أنه من أجل أي متجهين v, u من الفضاء الواحدي V فإن :

$$(u,v) = \frac{1}{4}\| u+v \|^2 - \frac{1}{4}\| u-v \|^2 + \frac{1}{4}\| u+iv \|^2 - \frac{1}{4}\| u-iv \|^2$$

91– ليكن الجداء الداخلي النظامي في الفضاء المتجه C^3 استخدم طريقة غرام – شميدت لإيجاد قاعدة متعامدة قياسية $< A >$ مما يلي :

(a) $A = \{(1,-i,1)\}$

(b) $A = \{(0,-i,1),(1+i,2,1)\}$

92– لتكن القاعدة المتعامدة القياسية :

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{2},\frac{-i}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2}i,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{i}{2}\right),\left(\frac{1+i}{2},0,\frac{-1-i}{2}\right)\right\}$$

في C^3 بالنسبة للجداء الداخلي النظامي .

وسّع كل من المجموعات المتعامدة B التالية إلى قاعدة متعامدة قياسية :

(a) $B = \left\{ \left(\frac{i}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{i}{2}\right)\right\}$

(b) $B = \left\{ \left(\frac{1}{2},\frac{i}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{2+i}{2\sqrt{2}},\frac{-i}{2},\frac{i}{2\sqrt{2}}\right)\right\}$

93– ليكن الفضاء الاقليدي V و v, u متجهان اختياريان من V . برهن صحة نظرية فيثاغورث في V التالية :

ثم برهن أن $u+v$ و $u-v$ متعامدان عندما وفقط عندما $\|u\|=\|v\|$

94- ليكن $V=R^4$ و $W=\{(1,-2,2,-7),(1,-2,3,-9)\}$

1- أوجد قاعدة متعامدة للفضاء الجزئي $W^{\perp}$.

2- أوجد متى يمكن كتابة أي متجه كيفي v من V على الشكل $v=v_1+v_2$

حيث إن : $v_1 \in W$ و $v_2 \in W^{\perp}$.

95- أوجد قاعدة متعامدة لـ $W^{\perp}$ في C^3 فيما يلي :

(a) $W=<(1,i,1-i),(i,-1,0)>$

(b) $W=<(1,i,i-1),(1,1+i,2i-1)>$

96- حدد أي من المصفوفات التالية تمثل مؤثراً متعامداً بالنسبة لقاعدة متعامدة قياسية في R^3 :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

(c) $=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

97- حدد أي من المصفوفات التالية تمثل مؤثرا واحديا بالنسبة لقاعدة متعامدة قياسية في C^3 :

$$(a)\ \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3-4i & 3+i & i \\ (i-2)\sqrt{2} & 2(i+1)\sqrt{2} & (2i-1)\sqrt{2} \\ -1 & 1+3i & 4-3i \end{bmatrix}$$

$$(b)\ \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 0 \\ 1+i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ i & -i & i \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(d) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & i \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

98- حدد أي من المصفوفات التالية عمودي ومن منها واحدي ومن منها نظامي :

$$(a)\ \begin{bmatrix} -1 & \frac{-3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{-3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \begin{bmatrix} i & i-1 \\ i+1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (d)\ \begin{bmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}$$

$$(e)\ \begin{bmatrix} 1 & i & i+1 \\ -i & 1 & -1+i \\ -1+i & 1+i & 0 \end{bmatrix} \qquad (f) = \begin{bmatrix} 5 & i & 2 \\ -i & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1- برهن أنه يمكن كتابة H = A + iB حيث إن A و B مصفوفتان هيرميتيتان .

2- برهن أن H تكون نظامية (قياسية) عندما وفقط عندما AB = BA .

100- من أجل كل من المؤثرات الخطية على C^2 التالية اكتب قيمة المؤثر الخطي المرافق $T^*(a_1,a_2)$:

(a) $T(a_1,a_2)=\left(a_1+(1-i)a_2,(1+i)a_1+2a_2\right)$

(b) $T(a_1,a_2)=\left(a_1+ia_2\,,\,a_1-a_2\right)$

(c) $T(a_1,a_2)=\left(ia_1-ia_2\,,\,a_1\right)$

(d) $T(a_1,a_2)=\left(ia_1+(i-1)a_2\,,\,(i+1)a_1\right)$

101- أوجد مصفوفة واحدية عندما يكون ممكناً فيما يلي بحيث إن $U^{-1}AU$ مصفوفة قطرية :

$$(a)\quad A=\begin{bmatrix} -1 & \frac{-3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{-3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (b)\quad A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c)\quad A=\begin{bmatrix} i & i-1 \\ i+1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (d)\quad A=\begin{bmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}$$

$$(e)\quad A=\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & -1+i \\ -1+i & 1+i & 0 \end{bmatrix}$$

$$(f)\quad A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & 1-i \\ 0 & 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

102- لتكن المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} \overline{\ \ 2\ \ } & \overline{\ \ 2\ \ } \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \overline{\sqrt{2}} & \overline{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2+i & -2+i \\ -2+i & 2+i \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1- حدد أي من المصفوفات السابقة متعامدة وأي منها واحدي وأي منها نظامي (قياسي) .

2- أي من المصفوفات السابقة متشابه واحدياً لمصفوفة مثلية علوية ؟

3- أي من المصفوفات السابقة متشابه واحدياً مع مصفوفة قطرية ؟

4- أي من المصفوفات السابقة متشابه فوق C لمصفوفة قطرية ؟

103- ليكن P_2, P_1 مسقطان معرفان على C^2 بالعلاقتين :

$$P_1(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$$
$$P_2(x_1, x_2) = (x_2, x_2)$$

1- ليكن $T = 3P_2 + 4P_1$ والمطلوب تحديد فيما إذا كان T قطرياً .

2- حدد فيما إذا كان $P_2 + P_1$ مسقطاً أم لا .

104- تحقق من صحة نظرية كيلي – هاملتون فيما يلي :

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -5 \\ 5 & 8 & -5 \\ 15 & 15 & -12 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -10 & -5 & -8 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(d) \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -8 & -4 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

105- ليكن T مؤثراً خطياً على R^n ولتكن مصفوفته بالنسبة للقاعدة المتعامدة القياسية $\mathcal{E}_n$ هي A المعطاة فيما يلي والمطلوب إيجاد المنشور (التحليل) الطيفي لـــ T:

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -5 \\ 15 & 15 & -12 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -8 & -4 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(d) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Adjoint	
- of a linear operator	المؤثر المرافق
- of a matrix	المصفوفة المرافقة
Associated	
- direct sum decomposition	المجموع المباشر للمنشور (للتحليل)
- eigenvector	المتجه الذاتي الموافق
Augmented matrix	المصفوفة الموسعة
Basis	القاعدة
- orthogonal	القاعدة المتعامدة
- standard	القاعدة المتعامدة القياسية
Bilinear form	الصورة (الشكل) الثنائي الخطية
- complex	الصورة ثنا –خطية العقدية
- symmetric	الصورة ثنا– خطية المتناظرة
Canonical form	الصورة القانونية
- for quadratic form	الصورة القانونية التربيعية
Characteristic	مميز
- equation	المعادلة المميزة
- matrix	المصفوفة المميزة
- polynomial	كثير الحدود المميز
- root	الجذر المميز (الذاتي)

- value	القيمة الذاتية
- vector	المتجه الذاتي
Complete set of projection	مجموعة تامة من المساقط
Complex	عقدي
- bilinear form	صورة ثنا —خطية عقدية
- inner product space	فضاء ذو جداء داخلي عقدي
Congruence of matrixes	تتشابه المصفوفات
Conjugate	
- of a matrix	مرافق مصفوفة عقدية
- transpose	مرافق منقول
Corresponding	موافق
- direct sum decomposition	المجموع المباشر للمنشور (التحليل) الموافق
- eigenvector	المتجه الذاتي الموافق
Diagonal	قطري
- elements	عناصر قطرية
- matrix	مصفوفة قطرية
Dimensions	عدد أبعاد
Direct sum	مجموع مباشر
Distance	المسافة
Division of algorithm	خوارزمية القسمة
Eigen space	فضاء مميز
Eigen value	قيمة ذاتية

Eigen vector	متجه ذاتي
Elementary	أولى
- column operation	العمليات الأولية على أعمدة المصفوفة
- row operation	العمليات الأولية على أسطر المصفوفة
Filed	حقل
Finite – dimensional vector space	فضاء متجه ذو عدد منته من الأبعاد
Form	صورة (شكل)
- bilinear	صورة ثنا – خطية
- complex bilinear	صورة ثنا – خطية عقدية
- hermition	صورة هيرميتية
- quadratic	صورة تربيعية
Function	تابع
Geometric multiplicity	الجداء الهندسي
Gram – Schmidt process	طريقة غرام – شميدت
Greatest common divisor	القاسم المشترك الأعظم
Hamilton – Cayley Theorem	نظرية كيلي – هاملتون
Hermition	الهيرميتي
- complex bilinear form	الصورة ثنا– خطية العقدية الهيرميتية
- matrix	المصفوفة الهيرميتية
- operator	المؤثر الهيرميتي
Identity	الوحدة
- matrix	مصفوفة الوحدة

operation	العملية المطابقة
Index	دليل
Inequality	متراجحة
- Cauchy – Schwarz	متراجحة كوش – شوارتز
Inner product	الجداء الداخلي
Invariant subspace	فضاء جزئي ثابت
Inverse	معكوس (مقلوب)
- of linear trans formation	معكوس التحويل الخطي
- of matrix	مقلوب المصفوفة
Isometry	ايزومتري
Kernel	نواة
Kronecker delta	رمز كرونيكر
Minimal polynomial	كثير الحدود الأصغري
Multiplicity	الجداء
- algebraic	الجداء الجبري
- geometric	الجداء الهندسي
Negative	سالب
- definite hermitian form	صورة هيرميتية محدودة سالبة
- dfinite quadratic form	صورة تربيعية محدودة سالبة
- semidefinite hermitian form	صورة هيرميتية نصف محدودة سالبة
- semidefinite quadratic form	صورة تربيعية نصف محدودة سالبة
Projection	مسقط

Rank	رتبة
Readuced column- echelon form	صورة مختزلة الشكل بالأعمدة
Reduced row – echelon form	صورة مختزلة الشكل بالأسطر
Row	سطر
- matrix	سطر مصفوفة
Similar matrices	مصفوفات متشابهة
Self – adjoint linear operator	مؤثر خطي مرافقة لذاته
Space	فضاء
- column	فضاء الأعمدة
- complex inner product	فضاء ذو جداء داخلي عقدي
- euclident	الفضاء الإقليدي
- metric	الفضاء المتري
- real inner product	فضاء ذو جداء داخلي حقيقي
- unitary	فضاء واحدي
- vector	فضاء متجهي
Span	توسيع
Spectal decomposition	منشور (تحليل) طيفي
Standard	قياسي
- basis	قاعدة قياسية
Sum	مجموع
Symetric	متناظر

- matrix	مصفوفة متناظرة
- operator	مؤثر متناظر
Transformation	تحويل
- linear	تحويل خطي
- matrix	مصفوفة تحويل
Unitarily similar matrixes	مصفوفات متشابهة واحدياً
Unitary	واحدي
- matrix	مصفوفة واحدية
- operator	مؤثر واحدي
- space	فضاء واحدي
Upper triangular matrix	مصفوفة مثلثية علوية
Vector	متجه
- norm	نظيم متجه
- space	فضاء متجهي
- unite	متجه الوحدة
Zero	صفر
- linear transformation	التحويل الخطي الصفري
- matrix	المصفوفة الصفرية
- subspace	الفضاء الجزئي الصفري

1- *Linear algebra and matrix theory, Jimmie Gilbert, Linda Gilbert, University South Carolina, 1995.*
2- *Linear algebra and practice, L. E. Galovena , Moscow,1979.*
3- *J .T. Moore, Elementary Linear and matrix Algebra, Megraw-Hill,1972.*
4- *Linear algebra , Stephan H. Friedberg, J. Insel, Linois University.*
5- *Linear algebra , Aramachandara Rao, India Calcults, NewDelhi.*

المدقق اللغوي

السيد يونس يونس

مدرس تعليم عالي